РОЙКО Л.Л.

Вища математика і теорія ймовірностей: методичні рекомендації до виконання модульних контрольних робіт з курсу

ЛУЦЬК, 2016

СХІДНОЄВРОПЕЙСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ,
ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

Вища математика і теорія ймовірностей: методичні рекомендації до виконання модульних контрольних робіт з курсу

ЛУЦЬК, 2016

УДК 51:519.676(072)
ББК 22.1я73-9+22.17я73-9
Р 65

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки
(протокол № 8 від 14 квітня 2016 року)

Рецензенти:
Мельник В.М. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних технологій Луцького національного технічного університету

Падалко Н.Й. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь і математичної фізики Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки

Р 65
Ройко Л.Л.
Вища математика і теорія ймовірностей: методичні рекомендації до виконання модульних контрольних робіт з курсу. – Луцьк: РВВ Вежа Східноєвроп. нац. ун-ту ім. Лесі Українки, 2016. – 63 с.

Методичні рекомендації призначені для підготовки до написання студентами економічних спеціальностей модульних контрольних робіт з курсу ” Вища математика і теорія ймовірностей ”, містять розв’язки типових завдань та задачі для самостійного розв’язування.

УДК 51:519.676(072)
ББК 22.1я73-9+22.17я73-9

Зміст

Передмова

Математика нині відіграє важливу роль у природничих, технічних і гуманітарних дослідженнях. Математичні методи й моделі є складовою економічної теорії. Їх використання, відкриває нові перспективи для економічної науки й практики.

Використання математики в економіці дозволяє:

– по-перше, виділити і формально описати найбільш важливі зв’язки економічних змінних і об’єктів;

– по-друге, із чітко сформульованих вихідних даних і співвідношень методами дедукції можна отримати висновки, адекватні об’єкту який вивчається, у тій же мірі, що і зроблені припущення;

– по-третє, методи математики і статистики дозволяють індуктивним шляхом отримати нові дані про об’єкт;

– по-четверте, використання мови математики дозволяє точно і компактно викласти основні положення економічної теорії, формулювати її поняття і висновки.

Розрахунки в економіці ґрунтуються на певних математичних моделях. Тому економісти мають володіти мовою математичних понять, уміти здійснювати математичні операції над числами, символами, множинами, функціями, оперувати рівняннями й нерівностями, розрахунковими математичними інструментами, вміти ставити проблеми, розв'язувати їх, аналізувати добуті результати.

Метою викладання навчальної дисципліни “**Вища математика і теорія ймовірностей**” є – надання студентам фундаментальних знань з математики та теорії ймовірностей, які дозволяють у подальшому засвоювати спеціальні дисципліни, котрі базуються на математичних поняттях. При цьому значна увага надається виробленню практичних навиків при розв’язуванні конкретних задач економічного змісту, вмінню застосовувати математичні методи для дослідження реальних процесів і прийняття оптимальних рішень.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є основні положення лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії, вступу до математичного аналізу, диференціального та інтегрального числення, числових та функціональних рядів, диференціальних рівнянь а також теорії ймовірностей.

Програма навчальної дисципліни складається з таких **змістових модулів**:

1. Елементи лінійної, векторної алгебри та аналітичної геометрії.
2. Вступ до математичного аналізу та елементи диференціального числення
3. Елементи інтегрального числення. Числові та функціональні ряди. Диференціальні рівняння. Основи теорії ймовірностей.

Основними **завданнями** вивчення дисципліни “**Вища математика і теорія ймовірностей**” є

Методичні:

– навчити студентів використовувати математичний апарат при проведенні розрахунків курсових та дипломних робіт;

– навчити студентів робити оцінку очікуваного результату при розв’язуванні задач практичного змісту;

– навчити студентів неформального, вдумливого, творчого підходу до будь-якої справи;

– навчити студентів раціонально розподіляти свій час на виконання поставлених завдань.

Пізнавальні:

– прищепити студентам уміння підходити до розв'язування будь-якого питання чи проблеми різними шляхами, оцінювати їх, а потім вибирати оптимальний шлях розв'язку;

– прищепити студентам навички розв'язування задач економічного змісту;

– закласти теоретичний і практичний фундамент для оволодіння такими дисциплінами як теорія ймовірностей, економіко-математичне моделювання та інших дисциплін по спеціальності;

– прищепити студентам уміння використовувати математичні методи для розв'язання творчих задач та обробки даних наукових досліджень;

– формування вміння здійснювати аналіз, контроль і оцінку результатів своєї праці.

Практичні:

– сформувати у студентів навички комплексного розв'язку задач економічного змісту;

– сформувати у студентів бачення тісного дидактичного зв'язку між змістом математики та інших дисциплін;

– виробити у студентів критерій раціонального підходу при розв'язуванні будь-яких задач;

– виховання загальної культури студентів;

– розвиток своєї мови, вміння висловлювати вголос свої міркування перед аудиторією.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні:

знати :

– елементи матричного числення та основні методи розв'язування систем лінійних рівнянь;

– векторну алгебру і методи аналітичної геометрії;

– методи диференціального і інтегрального числення функцій однієї та кількох змінних;

– методи розв'язування диференціальних рівнянь і рівнянь у частинних похідних;

– методи дослідження числових і функціональних рядів;

– основні поняття, формули та теореми теорії ймовірностей.

вміти :

– застосовувати математичний апарат у навчальному процесі і науково-дослідній діяльності;

– визначати межу можливих застосувань математичних методів;

– досліджувати питання коректності постановки задач і існування розв'язків.

На вивчення навчальної дисципліни відводиться 210 годин 7 кредитів ECTS.

Отже, дані методичні рекомендації призначені для підготовки до написання студентами економічних спеціальностей модульних контрольних робіт з курсу ” Вища математика і теорія ймовірностей ”, містять розв'язки типових завдань та задачі для самостійного розв'язування.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ , ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Тема 1. Матриці та дії над ними. Визначники та їх основні властивості.

Поняття матриці, види матриць. Дії над матрицями та їх властивості. Визначники другого та третього порядку; їх властивості та основні методи обчислення. Визначники вищих порядків. Мінори та алгебраїчні доповнення. Обернена матриця. Властивості невироджених матриць. Ранг матриці. Метод елементарних перетворень.

Тема 2. Основні методи розв'язування систем лінійних рівнянь.

Поняття системи лінійних рівнянь. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гауса. Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом.

Тема 3. Дослідження систем лінійних рівнянь на сумісність та визначеність.

Ранг матриці, основні методи його знаходження. Необхідна і достатня умова сумісності систем лінійних рівнянь. Критерій визначеності.

Тема 4. Вектори та дії над ними. Скалярний добуток векторів.

Скалярні та векторні величини. Означення, геометричне зображення та позначення вектора. Лінійні операції над векторами. Координати. Лінійні операції в координатах. Означення та властивості скалярного добутку векторів. Скалярний добуток в координатах. Кут між векторами.

Тема 5. Векторний та мішаний добутки векторів.

Означення та властивості векторного добутку. Векторний добуток в координатах. Площа трикутника. Площа паралелограма. Означення та властивості мішаного добутку. Мішаний добуток в координатах. Об'єм паралелепіпеда.

Тема 6. Лінійна залежність векторів. Розклад вектора по базису.

Лінійна комбінація векторів. Лінійна залежність системи векторів. Поняття базису на прямій, площині, просторі. Розклад вектора по базису.

Тема 7. Пряма на площині та у просторі. Різні рівняння прямої.

Канонічне рівняння прямої. Параметричне рівняння прямої. Рівняння пучка прямих. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої через дві точки. Рівняння прямої у відрізках на осях. Рівняння прямої через точку перпендикулярно до вектора. Загальне рівняння прямої та його дослідження. Нормальне рівняння прямої. Зведення загального рівняння прямої до нормального виду. Кут між двома прямими. Відхилення і відстань точки від прямої.

Канонічне та параметричне рівняння прямої у просторі. Пряма лінія як перетин двох площин. Умова перетину двох прямих у просторі. Перетин прямої з площиною. Кут між прямою і площиною.

Тема 8. Площина у просторі, її рівняння.

Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора. Загальне рівняння площини та його дослідження. Рівняння площини у відрізках на осях. Нормальне рівняння площини. Зведення загального рівняння площини до нормального виду. Рівняння площини, заданої початковою точкою і напрямними векторами. Параметричне рівняння. Кут між площинами. Відхилення і відстань точки від площини.

Тема 9. Криві другого порядку.

Криві другого порядку, їхня форма і рівняння: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Спільне означення та спільне рівняння кривих другого порядку.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ЕЛЕМЕНТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Тема 10. Основні числові системи. Границя числової послідовності.

Поняття множини, операції над множинами. Множина дійсних чисел. Модуль дійсного числа. Межі числових множин. Послідовності. Границя числової послідовності. Властивості збіжних послідовностей. Нескінченно малі та великі числові послідовності, зв'язок між ними. Властивості нескінченно малих послідовностей. Монотонні послідовності. Теорема про дії над збіжними послідовностями.

Тема 11. Границя функції у точці. Неперервність функції.

Означення Коші та Гейне границі функції в точці, їх геометрична інтерпретація.
Правостороння і лівостороння границя функції в точці. Неперервність функції. Класифікація точок розриву. Теорема про дії над неперервними функціями. Властивості неперервної функції, заданої на відрізку.

Тема 12. Похідна першого та вищих порядків. Диференціал.

Задачі, які приводять до поняття похідної. Геометричний та механічний зміст похідної. Основні правила диференціювання. Похідна складної функції. Похідні вищих порядків. Диференціал функції, його властивості та застосування до наближених обчислень. Диференціали вищих порядків.

Тема 13. Застосування похідної до дослідження функцій. Функції багатьох змінних.

Теореми про середнє значення диференціального числення. Розкриття невизначеностей з допомогою правил Лопіталя. Формула Тейлора. Проміжки монотонності та точки екстремуму. Опуклість і вгнутість кривих, Точки перегину. Асимптоти графіка функцій Поняття функцій багатьох змінних, дослідження їх на екстремум. Найбільше і найменше значення функції багатьох змінних на проміжку.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3. ЕЛЕМЕНТИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ. ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Тема 14. Первісна функції та невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування невизначених інтегралів.

Поняття первісної. Теорема про структуру первісних. Невизначений інтеграл та його властивості. Таблиця основних інтегралів. Основні методи інтегрування (метод безпосереднього інтегрування, метод підстановки, інтегрування частинами).

Тема 15. Інтегрування раціональних та ірраціональних функцій.

Інтегрування простих алгебраїчних дробів. Допоміжні теореми при інтегруванні раціональних функцій. Алгоритм інтегрування раціональних функцій. Основні методи інтегрування ірраціональних функцій.

Тема 16. Інтегрування тригонометричних функцій.

Універсальна підстановка та інші методи інтегрування тригонометричних функцій.

Тема 17. Визначений інтеграл та його застосування. Невласні інтеграли.

Задачі, які приводять до поняття визначеного інтегралу. Визначений інтеграл. Теорема існування. Властивості визначеного інтегралу. Похідна від визначеного інтегралу по змінній верхній межі. Формула Ньютона-Лейбніца. Основні методи інтегрування визначеного інтегралу. Невласні інтеграли, дослідження їх на збіжність.

Тема 18. Числові та функціональні ряди.

Числові ряди. Збіжність та сума ряду. Необхідна умова збіжності ряду. Ряди з додатними членами. Ознаки порівняння, Даламбера, Коші, інтегральна. Ряди з членами різних знаків. Абсолютна та умовна збіжність. Ряди, члени яких чергуються. Теорема Лейбніца. Оцінка залишку ряду. Дії над рядами. Функціональні ряди. Означення та приклади області збіжності.

Тема 19. Звичайні диференціальні рівняння. Основні поняття.

Фізичні задачі, які приводять до диференціальних рівнянь. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь. Задача Коші. Диференціальні рівняння першого порядку: із відокремлюваними змінними; однорідні; лінійні. Задача Коші для рівнянь вищих порядків. Теорема існування та єдності розв’язку.

Тема 20. Диференціальні рівняння першого та другого порядків.

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Структура загального розв’язку. Лінійні однорідні рівняння. Фундаментальна система розв’язків лінійного однорідного рівняння другого порядку.

Тема 21. Предмет, методи, основні задачі та поняття теорії ймовірностей. Теореми додавання та множення ймовірностей.

Історичні аспекти виникнення та розвитку теорії ймовірностей. Поняття події, класифікація подій. Основні операції над подіями, зв'язок з теорією множин. Різні означення ймовірностей. Елементи комбінаторики. Визначення та формули для перестановок, розміщень та сполук. Їх застосування до розв’язування задач. Правило суми, правило добутку. Теореми додавання ймовірностей для сумісних та несумісних подій. Теореми множення ймовірностей для залежних та незалежних подій. Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, ..., An$, незалежних в сукупності.

Тема 22. Формула повної ймовірності. Ймовірність гіпотез. Повторення випробувань: формули Бернуллі, Лапласа, Пуассона.

Формула повної ймовірності. Ймовірність гіпотез. Формула Байєса. Повторення випробувань: формула Бернуллі, локальна та інтегральна теореми Лапласа, формула Пуассона. Найімовірніше число появи події в незалежних випробуваннях. Оцінка ймовірності відхилення відносної частоти від постійної ймовірності в незалежних випробуваннях.

Тема 23. Випадкові величини їх закони розподілу та числові характеристики.

Випадкові величини, їх класифікація. Закони розподілу для дискретних та неперервних випадкових величин. Математичне очікування, дисперсія та середнє квадратичне відхилення для дискретних та неперервних випадкових величин.

Тема 24. Закони великих чисел.

Нерівність та теорема Чебишева, теорема Бернуллі, теорема Ляпунова.

Тема 25. Система двох випадкових величин. Умовні закони розподілу складових системи двох випадкових величин. Залежні і незалежні випадкові величини.

Функція розподілу двовимірної випадкової величини та її властивості. Закон розподілу ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини. Щільність розподілу ймовірностей неперервної двовимірної випадкової величини та її властивості. Ймовірність попадання випадкової точки у півполосу, прямокутник і в будь-яку область. Умовні закони розподілу складових системи дискретних та неперервних випадкових величин. Умовне математичне сподівання. Залежні і незалежні випадкові величини.

Модульна контрольна робота № 1.

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ, ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Модульна контрольна робота № 1 виконується студентами після вивчення наступних тем програми:

Тема 1. Матриці та дії над ними. Визначники та їх основні властивості.

Тема 2. Основні методи розв'язування систем лінійних рівнянь.

Тема 3. Дослідження систем лінійних рівнянь на сумісність та визначеність.

Тема 4. Вектори та дії над ними. Скалярний добуток векторів.

Тема 5. Векторний та мішаний добутки векторів.

Тема 6. Лінійна залежність векторів. Розклад вектора по базису.

Тема 7. Пряма на площині та у просторі. Різні рівняння прямої.

Тема 8. Площина у просторі, її рівняння.

Тема 9. Криві другого порядку.

Методичні рекомендації до розв'язування типових завдань

по елементах лінійної алгебри.

(теоретичний матеріал включає теми 1, 2, 3)

Завдання 1. Знайти лінійну комбінацію 5A+3B, якщо $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\\ 0 & 4 & -4\end{pmatrix}$ ***і***

$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 1 & -5 & 3\end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$5A+3B=5\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\\ 0 & 4 & -4\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 1 & -5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 15 & -5\\ 0 & 20 & -20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0 & -9\\ 3 & -15 & 9\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-7 & 15 & -14\\ 3 & 5 & -11\end{pmatrix}$$

Завдання 2. Знайти добуток матриць $\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

Розв'язання

Перший множник – матриця розмірності (3×3), а друга – матриця розмірності (3×1). Добуток існує, так як кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої. Результативна матриця матиме розмірність (3×1), тобто буде матрицею-стовпцем.

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2+1\cdot 0+3\cdot 1\\ 0\cdot 2+1\cdot 0+2\cdot 1\\ 0\cdot 2+1\cdot 0+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Завдання 3. Знайти добуток матриць $A\times B$ і $B\times A$, якщо $A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

Розв'язання

Обидві матриці мають розмірність (2×2). Отже, їх можна множити і результативна матриця теж матиме розмірність (2×2).

$$A\times B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-2)\cdot 1+4\cdot 2 & (-2)\cdot(-3)+4\cdot 2\\ 1\cdot 1+(-1)\cdot 2 & 1\cdot(-3)+(-1)\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 14\\ -1 & -5\end{pmatrix}.$$

$$B\times A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+(-3)\cdot 1 & 1\cdot 4+(-3)\cdot(-1)\\ 2\cdot(-2)+2\cdot 1 & 2\cdot 4+2\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 7\\ -2 & 6\end{pmatrix}.$$

Даний приклад ілюструє, що операція множення матриць некомутативна, тобто $A\times B \neq B\times A$.

Завдання 4. Знайти добуток матриць $A\times B$, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Розв'язання

Матриця A має розмірність (4×3), а матриця B – розмірності (2×4). Оскільки кількість стовпців матриці A не дорівнює кількості рядків матриці B, то добуток $A\times B$ утворити не можна.

Завдання 5. Знайти значення многочлена $f(A)$, якщо $f(x)=3x^2-4$, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$f(A)=3\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}^2-4\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}4+0 & 2+3\\ 0+0 & 0+9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=3\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\ 0 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 15\\ 0 & 27\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 15\\ 0 & 23\end{pmatrix}.$$

Завдання 6. Розв'язати рівняння:

$$\begin{vmatrix}-2 & x-3\\ x & x-3\end{vmatrix}=0$$

Розв'язання

Розписуючи визначник другого порядку отримуємо:

$$-2(x-3)-x(x-3)=0\Rightarrow -(x-3)(2+x)=0\Rightarrow x_1=3;\quad x_2=-2$$

Відповідь: $x_1=3;\quad x_2=-2$

Завдання 7. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix}3 & x & -x\\ 2 & -1 & 3\\ x+10 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$

Розв'язання

Розписуючи визначник третього порядку отримуємо:

$3\cdot(-1)\cdot 1+(-x)\cdot 2\cdot 1+(x+10)\cdot 3\cdot x-(-x)(-1)\cdot(x+10)-3\cdot 1\cdot 3-1\cdot 2\cdot x=0\Rightarrow$
$-3-2x+3x(x+10)-x(x+10)-9-2x=0\Rightarrow$
$-12-4x+(x+10)\cdot 2x=0\Rightarrow$
$-12-4x+2x^2+20x=0\Rightarrow$
$2x^2+16x-12=0\Rightarrow x^2+8x-6=0$
$x_{1,2}=-4\pm\sqrt{22}$

Відповідь: $x_{1,2}=-4\pm\sqrt{22}$

Завдання 8. Розв’язати нерівність $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}<0.$

Розв’язання

Розписуючи визначник третього порядку отримаємо:
$-3x+2-4+x+12-2<0$
$-2x+8<0\Rightarrow x>4$, тобто $x\in(4;+\infty)$
Відповідь: $x\in(4;+\infty)$

Завдання 9. Обчислити визначник, розклавши його за елементами будь-якого рядка або стовпця

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

Розв’язання

Зробимо перетворення над елементами даного визначника, користуючись властивостями. Помножимо елементи першого стовпця на (-1) і додамо до відповідних елементів четвертого стовпця.

Отримаємо

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -4 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -8 \end{vmatrix}=|A|$$

В отриманому визначнику всі елементи третього рядка, крім одного a_{31}, дорівнюють нулю. Тому розкладаючи за елементами третього рядка отримаємо:

$$|A|=a_{31}\cdot A_{31}+a_{32}\cdot A_{32}+a_{33}\cdot A_{33}+a_{34}\cdot A_{34},$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -4 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -8 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -9 \\ 2 & -1 & -8 \end{vmatrix}+0+0+0=12$$

Завдання 10. Обчислити визначник методом зведення до трикутного вигляду

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

Розв'язання

Додамо до кожного рядка, починаючи з другого перший рядок.

Отримаємо: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$

Завдання 11. Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

За формулами Крамера:

$x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}$; $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}$; $x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta}$

Визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 2 + 1 - 1 + 8 = 6 \neq 0$.

Шукаємо Δx_1, а для цього у визначнику Δ замість першого стовпця ставимо стовпець вільних членів:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 6 + 3 - 1 + 8 = 12.$$

Шукаємо Δx_2, а для цього у визначнику Δ замість другого стовпця ставимо стовпець вільних членів:

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 6 - 1 - 2 + 3 - 4 = 6.$$

Шукаємо Δx_3, а для цього у визначнику Δ замість третього стовпця ставимо стовпець вільних членів:

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 - 4 + 1 + 2 + 12 = 6.$$

Підставляємо отримані значення у формули Крамера:

$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2$; $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1$; $x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1$

Відповідь: (2; 1; 1)

Завдання 12. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним способом:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

Утворюємо матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Задана система набере вигляду $A \cdot X = B$. Запишемо розв'язок системи в матричній формі:

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (1)$$

Знайдемо матрицю A^{-1}. Обчислимо визначник матриці *A*.

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 2 + 1 - 1 + 8 = 6 \neq 0,$$ існує єдина обернена матриця A^{-1}.

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці *A*.

$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$ $\quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(-4+1) = 3$ $\quad A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3$

$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+1) = -5$ $\quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$ $\quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-2) = 3$

$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1$ $\quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1+2) = -1$ $\quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 = 3$

Обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Підставимо отримані дані

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Підставляємо отримані дані в рівність (1)

$$X=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \text{ або } \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2} \\ -\frac{5}{6}+\frac{1}{3}+\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+\frac{3}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Звідси x_1=2; x_2=1; x_3=1

Відповідь: (2; 1; 1)

Завдання 13. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса:

а) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1, \\ 2x_1-x_2+x_3=2, \\ -x_1+2x_2-2x_3=-2 \end{cases}$

З допомогою першого рівняння виключаємо невідомі x_1 з другого та третього рівнянь. Отримаємо рівносильну систему

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1, \\ -3x_2+3x_3=0 \\ 3x_2-3x_3=-1 \end{cases}$$

Далі необхідно за допомогою другого рівняння виключити невідоме x_1 з третього. Дістанемо систему

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1, \\ -3x_2+3x_3=0, \\ 0+0=1 \end{cases}$$

Оскільки, $0\neq 1$, то дана система несумісна.

Відповідь: система несумісна

б) $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=2, \\ 4x_1+2x_2+x_3=4, \\ 2x_1-x_2+x_3=5 \end{cases}$

З допомогою першого рівняння виключимо невідоме x_2 з другого та третього рівнянь.

Отримаємо рівносильну систему

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=2 \\ -10x_2-7x_3=-4 \\ -7x_2-3x_3=1 \end{cases}$$

Далі за допомогою другого рівняння виключимо невідоме x_2 з третього.

Дістанемо систему $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=2 \\ -10x_2-7x_3=-4 \\ 19x_3=38 \end{cases}$

З третього рівняння знаходимо $x_3=2$. Підставляючи це значення у друге рівняння дістанемо

$-10x_2-14=-4$, тобто $x_2=-1$.

Далі аналогічно

$x_1+3\cdot(-1)+2\cdot 2=2$, тобто $x_1=1$.

Отже, єдиним розв'язком системи є вектор (1; -1; 2)

Відповідь: (1; -1; 2)

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$

Виключимо невідоме x_1 з другого і третього рівнянь. Дістанемо рівносильну систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ -3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 3, \\ -3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$$

Виключаючи далі x_2 з третього рівняння і скорочуючи одночасно на –3 у другому рівнянні дістанемо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -1, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0. \end{cases}$$

З отриманої системи видно, що вона сумісна і має безліч розв'язків. Розв'язуючи частину цієї системи можна записати так:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - x_3 - 2x_4 + x_5, \\ \qquad x_2 = -1 - x_3 - x_4 + x_5. \end{cases}$$

Виключаючи з першого рівняння x_2, дістанемо розв'язок системи:

$\begin{cases} x_1 = 2 - x_4 \\ x_2 = -1 - x_3 - x_4 + x_5 \end{cases}$ - загальний розв'язок.

Надаючи вільним невідомим x_3, x_4 x_5 довільних числових значень, ми отримуємо числові значення x_1 і x_2. Так, наприклад, якщо $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ $x_5 = 2$, то $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Отже, (1; 0; 0; 1; 2) – <u>частинний</u> розв'язок системи.

Завдання 14. Дослідити систему на сумісність. Якщо система сумісна, то знайти її розв'язок:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$

Розв'язання

Зайдемо ранги основної та розширеної матриць, причому знайдемо це одночасно. Маємо:

$$B = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -7 & 16 \\ 5 & 2 & 1 & 16 \end{array} \right\|$$

Отримана матриця A системи розміщена ліворуч від вертикальної прямої. Розширена матриця B отримується дописуванням до матриці A стовпця вільних членів. Не переставляючи основний стовпець, можна методом елементарних перетворень знайти одночасно ранги матриць B і A. Маємо:

$$B = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -7 & 16 \\ 5 & 2 & 1 & 16 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 11 & -14 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|$$

Бачимо, що RgA=RgB=3. Отже система сумісна і має єдиний розв'язок тому, що ранг дорівнює розмірності системи. Зведення матриці до трикутного вигляду з одиницями по головній діагоналі еквівалентне "прямому ходу" методу Гауса. Запишемо систему, а потім виконаємо "обернений хід" (знаходження невідомих, починаючи з останньої до першої):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 = 4 + 3x_3 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Відповідь: (3; 1;-1).

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

Розв'язання

Знайдемо ранги останньої та розширеної матриць. Маємо:

$$B = \left\| \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right\|$$

Бачимо, що RgA=2, а RgB=3 (якщо переставити третій та четвертий стовпчики місцями, то по головній діагоналі буде три нульові елементи). Отже, система несумісна.

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

Розв'язання

Шукаємо ранги основної та розширеної матриць:

$$B \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

RgA=RgB=2

Ранги рівні, а значить, система сумісна. Вона має безліч розв'язків, бо ранг менший, ніж кількість невідомих. Запишемо відповідну систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Перенесемо одне з невідомих, наприклад x_3, в праві частини рівнянь і через нього виразимо дві інші невідомі. Тоді:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 + 4x_3, \\ x_2 = 1 + x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 4x_3 - 2x_2 = 2x_3 - 1, \\ x_2 = 1 + x_3 \end{cases}, \text{ де } x_3 \in R$$

Методичні рекомендації до розв'язування типових завдань по елементах векторної алгебри. (теоретичний матеріал включає теми 4, 5, 6)

Завдання 1. Дано три точки *A* (1, 1, 1), *B* (2, 2, 1) і *C* (2, 1, 2). Знайти кут φ = ∠ *BAC*.

Розв'язання

Знайдемо координати векторів $\vec{AB}$ = (1, 1, 0), $\vec{AC}$ = (1, 0, 1). Згідно з формулою скалярного добутку маємо:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{AC}\right|} = \frac{1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+0}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{2}$$, отже, φ = 60°.

Завдання 2. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ = (5, 2, 7), $\vec{b}$ = (1, 2, 4) як на сторонах.

Розв'язання

Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = -6\vec{i} - 14\vec{j} + 8\vec{k} .$$

Знайдемо $|\vec{c}| = \sqrt{6^2+14^2+8^2} = 2\sqrt{74}$ кв. од.

Завдання 3. Задано вектори $\overline{a}\,(2;3;2)$, $\overline{b}\,(4;7;5)$, $\overline{c}\,(1;-1;1)$

Визначити:

1) довжину вектора $\overline{a}$;

2) скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$;

3) косинус кута між векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$;

4) векторний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$;

5) площу паралелограма S_1 та площу трикутника S_2, побудованих на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$;

6) мішаний добуток векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$;

7) об'єм паралелепіпеда V_1 та об'єм трикутної піраміди V_2, побудованих на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$;

8) чи колінеарні вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$;

9) чи компланарні вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

Розв'язання

1) $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=\sqrt{2^2+3^2+2^2}=\sqrt{4+9+4}=\sqrt{17}$.

2) $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=2\cdot4+3\cdot7+2\cdot5=8+21+10=39$.

3) $\cos\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right)=\dfrac{(a,b)}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}=\dfrac{39}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{16+49+25}}=\dfrac{39}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{90}}=$

$=\dfrac{39}{3\sqrt{170}}=\dfrac{13}{\sqrt{170}}$.

4) $\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & 3 & 2\\ 4 & 7 & 5\end{vmatrix}=\overline{i}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 7\end{vmatrix}=\overline{i}\,(15-14)-\overline{j}\,(10-8)+$

$+\overline{k}\,(14-12)=\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k}=(1;-2;2)$.

5) Площа паралелограма S_1 та площа трикутника S_2, побудованих на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$ обчислюються за формулами:

$S_1=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$, $S_2=\dfrac{1}{2}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$

$S_1=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

$S_2=\dfrac{1}{2}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\dfrac{1}{2}\cdot3=\dfrac{3}{2}=1\dfrac{1}{2}$.

6) Мішаний добуток $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$:

$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\begin{vmatrix}2 & 3 & 2\\ 4 & 7 & 5\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=14+15-8-14+10-12=5$.

7) Об'єм паралелепіпеда V_1 та об'єм трикутної піраміди V_2, побудованих на векторах $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$ обчислюються за формулами:

$V_1=\left|\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)\right|$, $V_2=\dfrac{1}{6}\left|\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)\right|$

$V_1=\left|\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)\right|=5$, $V_2=\dfrac{1}{6}\left|\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)\right|=\dfrac{1}{6}\cdot5=\dfrac{5}{6}$.

8) Умова колінеарності векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$: $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$;

$\frac{2}{4} \neq \frac{3}{7} \neq \frac{2}{5} \Rightarrow \bar{a}$ і $\bar{b}$ не колінеарні.

9) Умова компланарності векторів $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$: $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=0$

$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=5\neq 0 \Rightarrow$ вектори $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ не компланарні.

Завдання 4. У просторі задано чотири точки *A* (1, 1, 1), *B* (4, 4, 4), *C* (3, 5, 5), *D* (2, 4, 7). Знайти об'єм піраміди *ABCD*.

Розв'язання

З елементарної математики відомо, що об'єм піраміди *ABCD* дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ і $\vec{AD}$, а останній, у свою чергу, дорівнює модулю мішаного добутку. Отже, маємо:

$$\vec{AB}=(3,3,3),\ \vec{AC}=(2,4,4),\ \vec{AD}=(1,3,6);$$

$$V_{пір.}=\frac{1}{6}\left|\vec{AB}\left(\vec{AC}\cdot\vec{AD}\right)\right|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}3&3&3\\2&4&4\\1&3&6\end{vmatrix}=3 \text{ куб. од.}$$

Завдання 5. Дано чотири вектори $\vec{a}(2;4;1), \vec{b}(1;3;6), \vec{c}(5;3;1), \vec{d}(24;20;6)$ у деякому базисі. Показати, що вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

Розв'язання

Обчислюємо мішаний добуток векторів $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}2&4&1\\1&3&6\\5&3&1\end{vmatrix}=6+3+120-15-36-4=74,$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=74\neq 0 \Rightarrow$ вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ — некомпланарні, отже, лінійно незалежні і утворюють базис.

Знаходимо координати вектора $\vec{d}$ в базисі $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$\vec{d}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}+\gamma\cdot\vec{c}$;

$(24;20;6)=\alpha(2;4;1)+\beta(1;3;6)+\gamma(5;3;1)$;

$(24;20;6)=(2\alpha+\beta+5\gamma;4\alpha+3\beta+3\gamma;\alpha+6\beta+\gamma)$,

отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}2\alpha+\beta+5\gamma=24\\4\alpha+3\beta+3\gamma=20\\\alpha+6\beta+\gamma=6\end{cases}$$

Дану систему розв'язуємо методом Гауса:

$$R=\left(\begin{array}{ccc|c}1&6&1&6\\2&1&5&24\\4&3&3&20\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&6&1&6\\0&-11&3&12\\0&-21&-1&-4\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&6&1&6\\0&-11&3&12\\0&0&74&296\end{array}\right),$$

$$\begin{cases} \alpha + 6\beta + \gamma = 6 \\ \quad -11\beta + 3\gamma = 12; \\ \qquad 74\gamma = 296 \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = \dfrac{296}{74} = 4 \\ \beta = -\dfrac{1}{11}(12 - 3\gamma) = 0 \\ \alpha = 6 - 6\beta - \gamma = 2 \end{cases}$$

Отже, $\vec{d} = 2\vec{a} + 4\vec{c}$, $\vec{d}(2;0;4)$— координати вектора $\vec{d}$ в базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Методичні рекомендації до розв'язування типових завдань по елементах аналітичної геометрії. (теоретичний матеріал включає теми 7, 8, 9)

Завдання 1. Пряму задано рівнянням $3x - 5y + 15 = 0$. Перевірити, які з точок A (– 2, 3), B (0, 3), C (5, 6), належать заданій прямій; знайти її рівняння з кутовим коефіцієнтом і у відрізках на осях.

Розв'язання.

Для перевірки того, чи лежать точки A, B, C на прямій, підставимо їхні координати в рівняння прямої:

$$A: \; 3(-2) - 5 \cdot 3 + 15 \neq 0, \quad B: \; 3 \cdot 0 - 3 \cdot 5 + 15 = 0,$$
$$C: \; 3 \cdot 5 - 5 \cdot 6 + 15 = 0.$$

Таким чином, точка A не лежить на прямій, а точки B і C лежать на прямій.

Поділимо рівняння прямої почленно на коефіцієнт при y: $\frac{3}{5}x - y + 3 = 0$, а далі запишемо його у вигляді $y = \frac{3}{5}x + 3$ — рівняння з кутовим коефіцієнтом.

Поділивши рівняння почленно на вільний член:

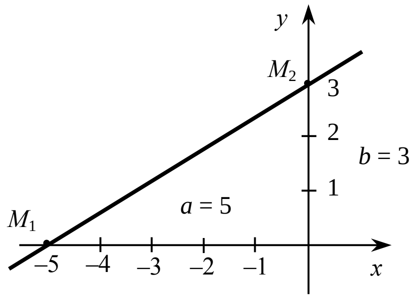
$$\frac{3x}{15} - \frac{5y}{15} + 1 = 0, \text{ або } \frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1,$$

дістанемо шукане рівняння у відрізках на осях.

Завдання 2. Пряму задано рівнянням $3x - 5y + 15 = 0$. Скласти її рівняння у відрізках на осях та побудувати пряму.

Розв'язання.

Для даної прямої рівняння у відрізках має вигляд: $\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1$.



Щоб побудувати цю пряму, відкладемо на осях координат Ox і Oy відрізки, величини яких відповідно дорівнюють $a = -5$, $b = 3$ і проведемо пряму через точки $M_1(-5; \; 0)$ і $M_2(0; \; 3)$.

Завдання 3. Вершини трикутника лежать в точках $A_1(2,3)$, $A_2(5,4)$, $A_3(9,1)$.

Складти:

а) рівняння прямої A_1A_2;

б) рівняння висоти та медіани цього трикутника опущених з вершини A_2.

Розв'язання.

а) Рівняння прямої A_1A_2 запишемо як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\text{, де } A_1(x_1,y_1),\ A_2(x_2,y_2)\text{, тобто}$$

$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{1}$ або $y=\frac{1}{3}x+2\frac{1}{3}$ - рівняння прямої A_1A_2.

б) Для знаходження рівняння висоти A_2D трикутника $A_1A_2A_3$ використаємо рівняння прямої, що проходить через точку перпендикулярно до вектора: $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, де (A,B) - координати вектора $\overline{A_1A_3}$, (x_0,y_0) - координати точки A_2.

Знайдемо координати вектора $\overline{A_1A_3}(9-2{,}1-3)$, $\overline{A_1A_3}(7,-2)$ і підставимо у формулу:

$7(x-5)-2(y-4)=0$

Отже, рівняння висоти A_2D має вигляд $y=3{,}5x-13{,}5$.

Для знаходження рівняння медіани A_2C знайдемо координати основи медіани – точки C, яка ділить відрізок A_1A_3 навпіл.

Координати середини відрізка знаходимо за формулами:

$$x_c=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y_c=\frac{y_1+y_2}{2},$$

Тобто координати точки C: $x_c=\frac{11}{2}=5{,}5$, $y_c=2$, або $C(5{,}5;2)$.

Запишемо рівняння медіани A_2C як прямої, що проходить через дві задані точки A_2 та C:

$\frac{x-5}{0{,}5}=\frac{y-4}{-2}$ або $y=-4x+24$.

Завдання 4. Дано трикутник $A(1;2)$, $B(3;7)$, $C(5;-13)$. Знайти відстань від вершини *B* до медіани, що проходить через точку *A*.

Розв'язання.

Знайдемо координати основи медіани: $x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3+5}{2}=4;\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{7-13}{2}=-3$.

Запишемо рівняння медіани як прямої, що проходить через дві задані точки: $\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-2}{-3-2}$, або $5x+3y-11=0$. Відстань від точки $B(3;7)$ до медіани знайдемо за формулою: $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|5\cdot3+3\cdot7-11|}{\sqrt{25+9}}=\frac{25}{\sqrt{34}}$.

Завдання 5. Дано рівняння сторін AB: $x-3y+3=0$ і AC: $(x+3y+3=0)$ трикутника *ABC*. Точка $D(-1;3)$ — основа висоти *AD*. Записати рівняння медіани *AM*, бісектриси *AF* і висоти *AD* трикутника, а також знайти кут *A*.

Розв'язання.

Знайдемо координати вершини *A*. Для цього розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases}x-3y+3=0\\x+3y+3=0\end{cases}$, $A(-3;0)$.

Запишемо рівняння висоти *AD*, використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві точки $\frac{x+3}{-1+3}=\frac{y}{3}$ або $y=\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$. Використовуючи умову перпендикулярності $\left(k_2=-\frac{1}{k_1}\right)$, знайдемо кутовий коефіцієнт сторони BC трикутника: $k_2 = -\frac{2}{3}$. Тоді рівняння сторони BC можна записати так: $y - 3 = -\frac{2}{3}(x+1)$ або $2x + 3y - 7 = 0$. Знайдемо координати вершин B і C трикутника, розв'язавши відповідно системи рівнянь:

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0; \\ 2x + 3y - 7 = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x + 3y + 3 = 0; \\ 2x + 3y - 7 = 0. \end{cases}$$

Одержимо: $B\left(\frac{4}{3}; \frac{13}{9}\right)$; $C\left(10; -\frac{13}{3}\right)$. Основа медіани — це середина відрізка BC; $M\left(\frac{17}{3}; \frac{13}{9}\right)$. Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві точки, одержимо рівняння медіани: $3x - 18y - 43 = 0$. Знайдемо довжини сторін $AB = \frac{13\sqrt{10}}{9}$; $AC = \frac{13}{9}\sqrt{82}$. Тоді обчислимо відношення, у якому основа бісектриси поділяє сторону BC: $\lambda = \frac{AC}{AB} = \sqrt{\frac{41}{5}}$.

За формулами $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$; $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$ знайдемо координати основи бісектриси $F\left(\frac{30\sqrt{5} + 4\sqrt{41}}{3(\sqrt{5}+\sqrt{41})}; \frac{-13(4\sqrt{5}-\sqrt{41})}{9(\sqrt{5}+\sqrt{41})}\right)$. Рівняння бісектриси запишемо як рівняння прямої, що проходить через задані точки: $\frac{x+3}{3(39\sqrt{5}+7\sqrt{41})} = \frac{-y}{13(4\sqrt{5}-\sqrt{41})}$. Для знаходження кута A визначимо кутові коефіцієнти прямої AC — $k_1 = -\frac{1}{3}$ і прямої AB — $k_2 = \frac{1}{3}$.

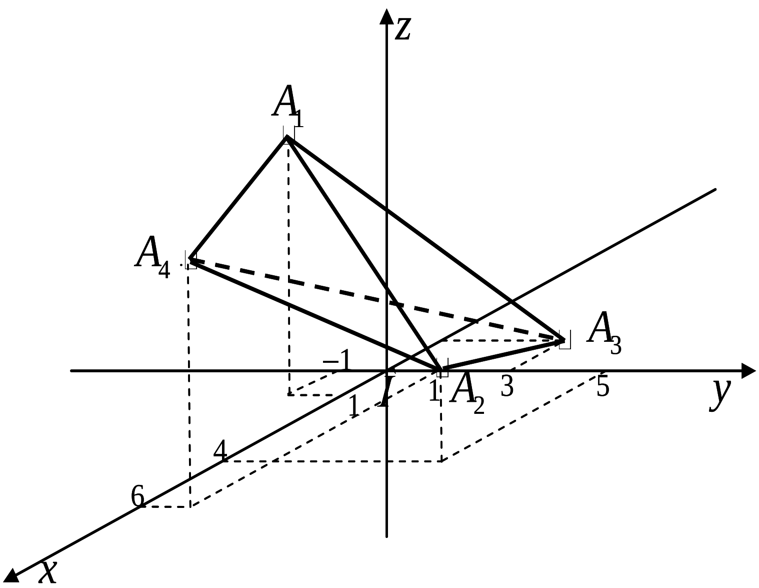
Тоді $\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{3}{5}$; $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{3}{5}$.

Завдання 6. Дані координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(1, -1, 6)$, $A_2(4, 5, -2)$, $A_3(-1, 3, 0)$, $A_4(6, 1, 5)$. Знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;
2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_3;
3) площу грані $A_1A_2A_3$;
4) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
5) рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Виконати рисунок.

Розв'язання.



1) Довжина ребра A_1A_2 :

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$A_1A_2 = \sqrt{(4-1)^2 + (5+1)^2 + (-2-6_1)^2} = \sqrt{9+36+64} = \sqrt{109}$.

2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_3 :

Знайдемо косинус кута між ребрами A_1A_2 і A_1A_3

$\cos\angle\varphi = \dfrac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + p_2^2}}$, де $l_1, l_2, m_1, m_2, p_1, p_2$ – координати напрямлених косинусів відповідних прямих ;

$$A_1A_2 : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}; \quad A_1A_2 : \frac{x-1}{4-1} = \frac{y+1}{5+1} = \frac{z-6}{-2-6} \;;$$

$$A_1A_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-6}{-8} \;,$$

$$A_1A_3 : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-6}{-6} \,,$$

$$\cos\angle\varphi = \frac{3\cdot(-2) + 6\cdot 4 + (-8)\cdot(-6)}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-8)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-6)^2}} = \frac{-6+24+48}{\sqrt{109}\cdot\sqrt{56}} =$$

$$= \frac{66}{2\sqrt{1526}} = \frac{33}{\sqrt{1526}} \approx 0,85 \quad , \angle\varphi \approx 32^\circ$$

3) площа грані $A_1A_2A_3$:

використаємо елементи векторної алгебри – нормальний вектор площини $A_1A_2A_3$ – це вектор $\overline{n} = \left[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right]$

$\overrightarrow{A_1A_2}(3;6;-8)$, $\overrightarrow{A_1A_3}(-2;4;-6)$

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 6 & -8 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 34\vec{j} + 24\vec{k}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + 34^2 + 24^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1748} = \sqrt{437} \,.$$

4) рівняння площини $A_1A_2A_3$ знаходимо за формулою

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \,.$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-6 \\ 4-1 & 5+1 & -2-6 \\ -1-1 & 3+1 & 0-6 \end{vmatrix} = 0 \;; \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-6 \\ 3 & 6 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -2x + 17y + 12z - 53 = 0 \,.$$

$-2x + 17y + 12z - 53 = 0$ – рівняння грані $A_1A_2A_3$.

5) рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Рівняння прямої, що проходить через точку A_4 (6, 1, 5) перпендикулярно до площини $A_1A_2A_3$ (рівняння висоти піраміди) знаходимо за формулою

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{p}. \qquad (*)$$

Координати l, m, p напрямленого косинуса прямої знаходимо із умови перпендикулярності прямої і площини:

$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{p}$; $\frac{-2}{l}=\frac{17}{m}=\frac{12}{p}=t$; звідси за основним правилом пропорції $-2=lt$, $17=mt$, $12=pt$.

Знайшовши l, m, p , підставивши ці значення у рівняння (*) і скоротивши параметр t, остаточно отримаємо

$$\frac{x-6}{-2}=\frac{y-1}{17}=\frac{z-5}{12}.$$

Завдання 7. Звести задані рівняння еліпса до канонічного вигляду, обчислити їх осі, координати фокусів, ексцентриситет та знайти координати вершин. Виконати рисунок.

а) $16x^2+36y^2=576$; б) $25x^2+9y^2=225$.

Розв'язання.

а) Зведемо рівняння до канонічного виду

$$16x^2+36y^2=576 \Big| \cdot \frac{1}{576}; \Rightarrow \frac{16x^2}{576}+\frac{36y^2}{576}=1; \Rightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1 ;$$

$\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ – канонічне рівняння еліпса, у якого $a=6, b=4$, тому велика (фокальна) вісь $AC=2a=12$, мала вісь $BD=2b=8$.

Фокуси даного еліпса лежать на осі Ox : , $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$, знайдемо значення c :

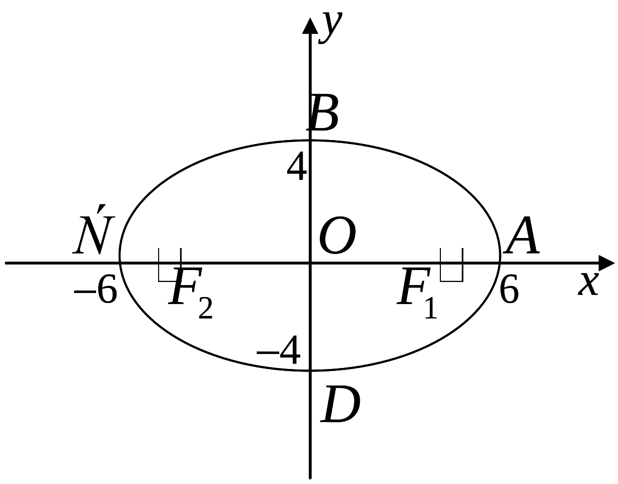
$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

Отже, $F_1(2\sqrt{5};0)$, $F_2(-2\sqrt{5};0)$ – координати фокусів.

Ексцентриситет еліпса обчислимо за формулою $e=\frac{c}{a}$, маємо $e=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Вершини еліпса $A(6;0), C(-6;0), B(0;4), D(0;-4)$.

Виконаємо рисунок



б) Приведемо рівняння до канонічного виду

$$25x^2+9y^2=225 \Big| \cdot \frac{1}{225}; \Rightarrow \frac{25x^2}{225}+\frac{9y^2}{225}=1; \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1;$$

$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ – канонічне рівняння еліпса, у якого $a=3, b=5$, тому велика (фокальна) вісь $BD=2b=10$, мала вісь $AC=2a=6$.

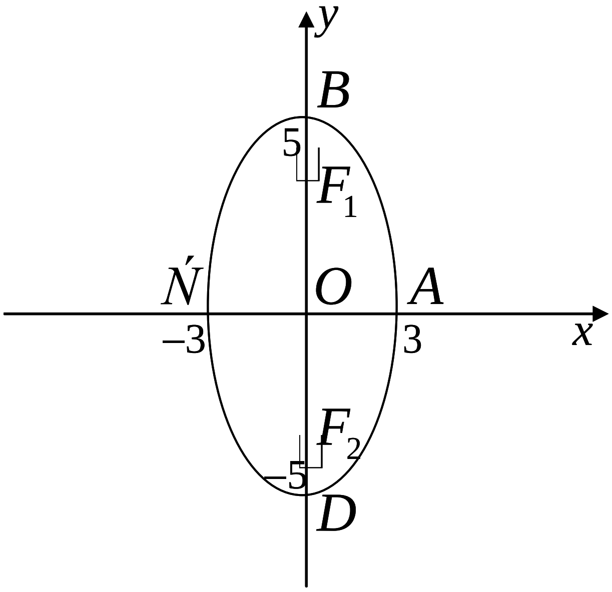
Фокуси даного еліпса лежать на осі Oy: , $F_1(0;c)$, $F_2(0;-c)$, знайдемо значення *c:* $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$.

Отже, $F_1(0;4)$, $F_2(0;-4)$ – координати фокусів.

Ексцентриситет еліпса обчислимо за формулою $e=\frac{c}{b}$, маємо $e=\frac{4}{5}$.

Вершини еліпса $A(3;0), C(-3;0), B(0;5), D(0;-5)$.

Виконаємо рисунок



Завдання 8. Обчислити координати фокусів та вершин, ексцентриситет і рівняння асимптот заданої гіперболи. Виконати рисунок.

1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; 2) $\frac{y^2}{48}-\frac{x^2}{16}=1$.

Розв’язання.

1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; $\frac{x^2}{6^2}-\frac{y^2}{8^2}=1$, дійсна (фокальна) вісь $AB=2a=12$, уявна вісь $CD=2b=16$.

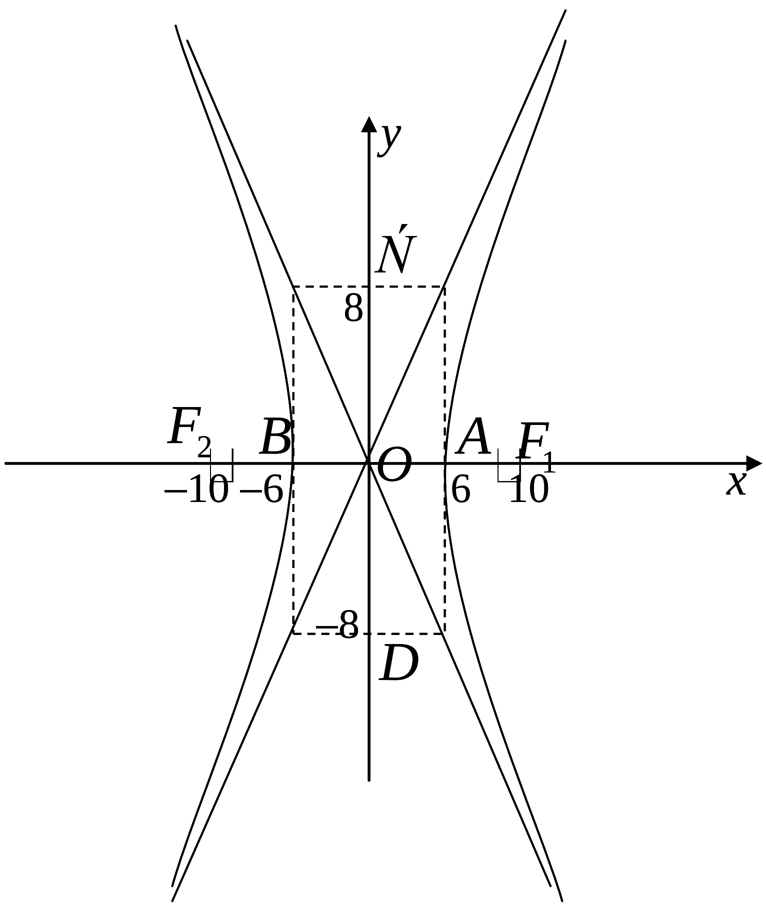
Фокуси заданої гіперболи лежать на осі Ox: $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$, знайдемо значення c: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$.

Отже, $F_1(10;0)$, $F_2(-10;0)$ – координати фокусів.

Ексцентриситет гіперболи обчислимо за формулою $e=\frac{c}{a}$, маємо $e=\frac{10}{6}=1\frac{2}{3}$.

Вершини гіперболи $A(6;0), B(-6;0)$, рівняння асимптот має вигляд $y=\pm\frac{b}{a}x$, згідно умови отримаємо $y=\pm\frac{4}{3}x$.

Виконаємо рисунок



2) $\frac{y^2}{48}-\frac{x^2}{16}=1$; $\frac{y^2}{\left(4\sqrt{3}\right)^2}-\frac{x^2}{4^2}=1$, дійсна (фокальна) вісь $CD=2b=8\sqrt{3}$, уявна вісь $AB=2a=8$.

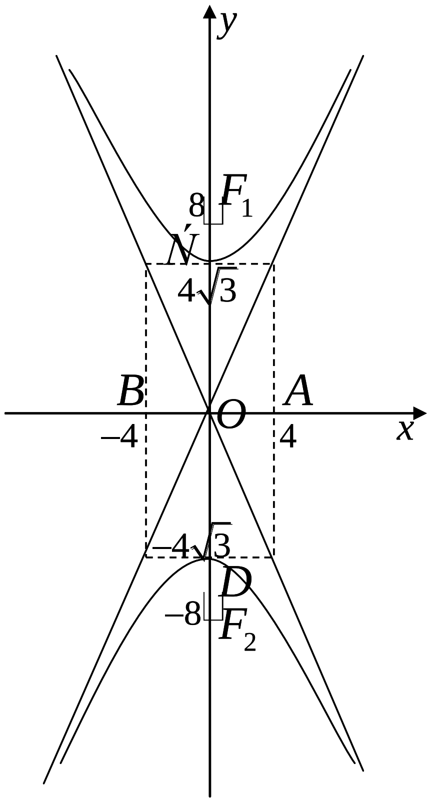
Фокуси заданої гіперболи лежать на осі Oy: $F_1(0;c)$, $F_2(0;-c)$, знайдемо значення c: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{48+16}=\sqrt{64}=8$.

Отже, $F_1(0;8)$, $F_2(0;-8)$ – координати фокусів.

Ексцентриситет гіперболи обчислимо за формулою $e=\frac{c}{b}$, маємо $e=\frac{8}{4\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Вершини гіперболи $C(0;4\sqrt{3}), D(0;-4\sqrt{3})$, рівняння асимптот має вигляд $y=\pm\frac{b}{a}x$, згідно умови отримаємо $y=\pm\sqrt{3}x$.

Виконаємо рисунок



Завдання 9. Знайти координати фокуса і рівняння директриси для заданої параболи. Виконати рисунок.

а) $y^2+4x=0$; б) $x^2=10y$; в) $16x-y^2=0$.

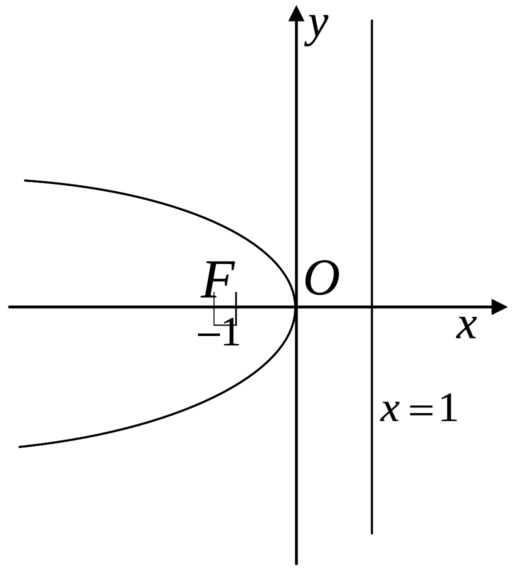
Параболи а) – в) мають віссю одну з координатних осей і вершина параболи знаходиться в початку координат.

Розв'язання.

а) Запишемо рівняння параболи в вигляді $y^2=\pm 2px$, де p – параметр параболи: $y^2+4x=0$; $y^2=-4x$; $y^2=-2\cdot 2x$, $p=2$. За видом рівняння парабола симетрична відносно осі абсцис, а так як перед параметром стоїть знак «– », то гілки параболи направлені вліво. Відстань між директрисою і фокусом дорівнює $p=2$ і вони рівновіддалені від вершини (початку координат), то координати фокуса $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$ тобто $F(-1;0)$.

Директриса – пряма перпендикулярна осі параболи, то її рівняння має вигляд $x=\frac{p}{2}$ тобто $x=1$.

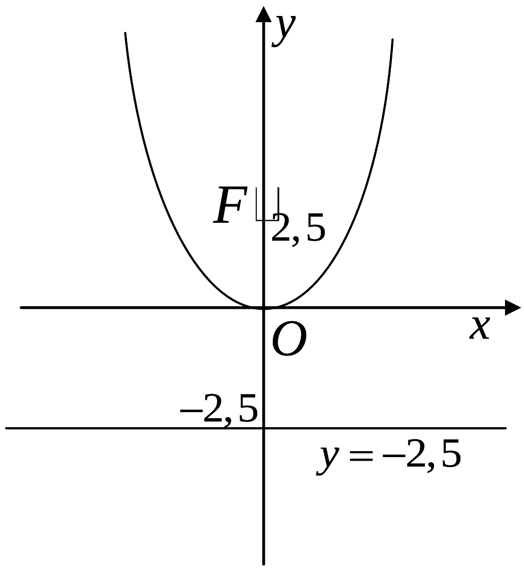
Виконаємо рисунок



б) Запишемо рівняння параболи в вигляді $x^2=\pm 2py$, де p – параметр параболи : $x^2=10y$; $x^2=2\cdot 5y$, $p=5$. За видом рівняння парабола симетрична відносно осі ординат , а так як перед параметром стоїть знак «+», то гілки параболи направлені вверх. Відстань між директрисою і фокусом дорівнює $p=5$ і вони рівновіддалені від вершини (початку координат), то координати фокуса $F\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$ тобто $F(0\ ;\ 2{,}5)$.

Директриса – пряма перпендикулярна осі параболи, то її рівняння має вигляд $y=-\frac{p}{2}$ тобто $y=-2{,}5$.

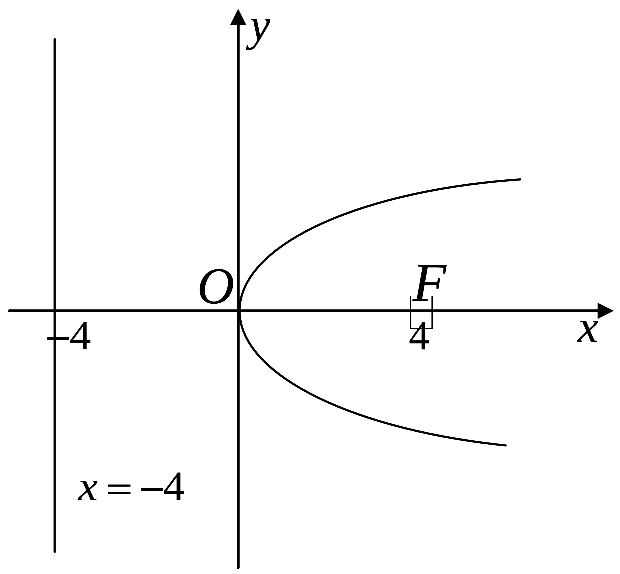
Виконаємо рисунок



в) Запишемо рівняння параболи в вигляді $y^2 = \pm 2px$, де p – параметр параболи: $16x - y^2 = 0$; $y^2 = 16x; y^2 = 2 \cdot 8x$, $p = 8$. За видом рівняння парабола симетрична відносно осі абсцис, а так як перед параметром стоїть знак «+ », то гілки параболи направлені вправо. Відстань між директрисою і фокусом дорівнює $p = 8$ і вони рівновіддалені від вершини (початку координат), то координати фокуса $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ тобто $F(4;0)$.

Директриса – пряма перпендикулярна осі параболи, то її рівняння має вигляд $x = -\frac{p}{2}$ тобто $x = -4$.

Виконаємо рисунок



Модульна контрольна робота № 2

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ЕЛЕМЕНТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Модульна контрольна робота № 2 виконується студентами після вивчення наступних тем програми:

Тема 10. Основні числові системи. Границя числової послідовності.

Тема 11. Границя функції у точці. Неперервність функції.

Тема 12. Похідна першого та вищих порядків. Диференціал.

Тема 13. Застосування похідної до дослідження функцій. Функції багатьох змінних.

Методичні рекомендації до розв'язування типових завдань по елементах диференціального числення.

(теоретичний матеріал включає теми 10, 11)

Завдання 1. Довести, що границею послідовності $x_n = \frac{2n+3}{n+5}$ є число a = 2.

Розв'язання

Задамо число $\varepsilon > 0$, тоді

$$|x_n - a| = \left|\frac{2n+3}{n+5} - 2\right| = \left|\frac{2n+3-2n-10}{n+5}\right| = \left|\frac{-7}{n+5}\right| = \frac{7}{n+5}.$$

З нерівності $|x_n - a| < \varepsilon$ маємо $\frac{7}{n+5} < \varepsilon$ або $n > \frac{7}{\varepsilon} - 5.$ Звідки $N = \left[\frac{7}{\varepsilon} - 5\right].$

Завдання 2. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2-5n+6}{6-2n+7n^2}.$

Розв'язання

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2-5n+6}{6-2n+7n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^3}\right)}{n^2\left(\frac{6}{n^2}-\frac{2}{n}+7\right)} = \infty.$$

Завдання 3. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right).$

Розв'язання

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1-0=1.$$

Завдання 4. Знайти $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}.$

Розв'язання

Чисельник та знаменник дробу прямують до нуля при $x \to 3$ (невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$). Оскільки $\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \; = \frac{x+3}{x}$ при $x \neq 3,$ то $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x} = 2.$ Звідси $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x} = 2.$

Завдання 5. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1} = \left[\frac{0}{0}\right].$

Розкладемо на множники чисельник та знаменник дробу:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

Завдання 6. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \left[\frac{0}{0}\right].$

Розв'язання

Домножимо чисельник та знаменник дробу на суму $\sqrt{x+4}+2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

Завдання 7. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right].$

Розв'язання

Покладемо $1+x=y^5$, тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^5-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y^4+y^3+y^2+y+1}=\frac{3}{5}.$$

Завдання 8. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$.

Розв'язання

Невизначеність виду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Поділимо чисельник та знаменник на старший степінь x, тобто на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{4}.$$

Завдання 9. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$.

Розв'язання

Невизначеність виду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Поділимо чисельник та знаменник на x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}}}=\frac{3}{1}=3.$$

Завдання 10. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=[\infty-\infty]$.

Розв'язання

Помножимо та поділимо заданий вираз на $\sqrt{x^2+8x+3}+\ \ +\sqrt{x^2+4x+3}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}\right)}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8x+3-x^2-4x-3}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{4}{2}=2.$$

Завдання 11. Знайти $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\left(x+2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1}$.

Розв'язання

Якщо $x \to 3-0$, то $\frac{1}{x-3} \to -\infty, 2^{\frac{1}{x-3}} \to 0; \lim\limits_{x\to 3-0}\left(x+2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1} = \frac{1}{3}.$

Якщо $x \to 3+0$, то $\frac{1}{x-3} \to +\infty, 2^{\frac{1}{x-3}} \to +\infty; \lim\limits_{x\to 3+0}\left(x+2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1} = 0.$

Завдання 12. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right].$

Розв'язання

Маємо: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{x^2} = 2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{x}\right)^2 = 2\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}.$

Завдання 13. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x = \left[1^\infty\right].$

Розв'язання

Діленням чисельника дробу на знаменник виділяємо цілу частину $\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7} = 1 + \frac{8x-3}{x^2-3x+7}.$

Таким чином,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right)^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right)^{\frac{8-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}};$$

оскільки $\frac{8x-3}{x^2-3x+7} \to 0$ при $x \to \infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}} = e.$

Зауважимо, що $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8-3/x}{1-3/x+7/x^2} = 8.$ Дістанемо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x = e^8.$$

Завдання 14. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x\sin x)}{\mathrm{tg}(x^2)}.$

Розв'язання

Замінимо чисельник та знаменник дробу еквівалентними н.м.в.: $\ln(1+3x\sin x) \sim 3x\sin x, \mathrm{tg}(x^2) \sim x^2$, тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x\sin x)}{\mathrm{tg}(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{3x\sin x}{x^2} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 3.$$

Завдання 15. Знайти границі функції:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+4x^2+5}{2-2x^3+7x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x^2-3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\cos 4x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-4}\right)^{x+5}$.

Розв'язання:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x^2+5}{2-2x^3+7x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{\dfrac{2}{x^3}-2+\dfrac{7}{x^2}}=\left|\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0\right|=-\dfrac{1}{2}$.

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-8}{x^2-3x+2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\begin{vmatrix}x^2-3x+2=0\\ D=1\\ x_1=2,\ x_2=1\end{vmatrix}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=2\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}=2\cdot\dfrac{4}{1}=8$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\cos 4x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos 4x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{3x}{2}}{2\sin^2 2x}=$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}\cdot x^2}{\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}\cdot x^2}=\left|\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k\right|=-\frac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}{2^2}=-\frac{9}{16}.$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-4}\right)^{x+5}=\left(1^\infty\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\left(\dfrac{2x+3}{2x-4}-1\right)\right)^{x+5}=e^{7\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+5}{2x-4}}=e^{7\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{5}{x}}{2-\frac{4}{x}}}=e^{7\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{e^7}$.

Методичні рекомендації до розв'язування типових завдань по елементах диференціального числення.
(теоретичний матеріал включає теми 12, 13)

Завдання 1. Користуючись означенням похідної, знайти похідну від функцій: а) $y=2x^3+5x^2-7x-4$; б) $y=-\mathrm{ctg}x-x$.

Розв'язання

а) Надамо x приросту Δx, тоді y набуде приросту Δy:

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=\left(2(x+\Delta x)^3+5(x+\Delta x)^2-7(x+\Delta x)-4\right)-$$
$$-\left(2x^3+5x^2-7x-4\right)=6x^2\Delta x+6x\Delta x^2+2\Delta x^3+10x\Delta x+5\Delta x^2-7\Delta x.$$

За означенням похідної маємо:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(6x^2+6x\Delta x+2\Delta x^2+10x+5\Delta x-7\right)=6x^2+10x-7.$$

б) Використовуючи формулу $\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$, знаходимо приріст функції:

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=-\mathrm{ctg}(x+\Delta x)-(x+\Delta x)+\mathrm{ctg}x+x=\mathrm{ctg}x-\mathrm{ctg}(x+\Delta x)-\Delta x=$$
$$=\frac{\sin\Delta x}{\sin x\sin(x+\Delta x)}-\Delta x.$$

Звідки

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\sin x \cdot \sin(x + \Delta x)} - 1 \right) = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

Завдання 2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ у точці M_0 (1, – 1).

Розв’язання

З рівняння кривої знайдемо похідну:

$$2x + 2y^2 + 4xyy' + 12y^3 y' = 0, \text{ тобто } y' = -\frac{x^2 + y^2}{2xy + 6y^3}.$$

Таким чином, $y'(1) = f'(1) = -\frac{1 + (-1)^2}{2 \cdot 1 \cdot (-1) + 6(-1)^3} = \frac{1}{4}$.

Рівняння дотичної матиме вигляд:

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1), \text{ або } x - 4y - 5 = 0.$$

Рівняння нормалі:

$$y + 1 = -4(x - 1), \text{ або } 4x + y - 3 = 0.$$

Завдання 3. Який кут утворює з віссю *Ох* дотична до кривої $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$, проведена в точці з абсцисою $x = 1$?

Розв’язання

Знаходимо похідну $y' = \frac{10}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2$; при $x = 1$, $y' = 3$, таким чином $\operatorname{tg}\alpha = 3$, звідки $\alpha = \operatorname{arctg} 3 \approx 71^\circ 34'$.

Завдання 4. Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні функцій:

1. $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$.

Розв’язання

$$y' = \left(x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) \right)' = x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{x} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3\ln x - 2) = 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x - 3x^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x.$$

2. $y = \sin(2x + 3)$.

Розв’язання

$$y' = \cos(2x + 3) \cdot (2x + 3)' = 2\cos(2x + 3).$$

3. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Розв'язання

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

.

4. $y=\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\sqrt{x}+\ln\cos\sqrt{x}$.

Розв'язання

$$y'=\mathrm{tg}\sqrt{x}\,\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\cos\sqrt{x}}\left(-\sin\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{tg}\sqrt{x}\left(\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}-1\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{tg}^3\sqrt{x}.$$

5. $y=x^{x^2}$.

Розв'язання

Маємо степенево-показникову функцію. Логарифмуючи її, дістаємо $\ln y=x^2\ln x$.

Звідки: $(\ln y)'=\frac{1}{y}\cdot y'$, $\quad\frac{y'}{y}=x^2\cdot\frac{1}{x}+2x\ln x,\ \ \frac{y'}{y}=x(1+2\ln x)$,

$$y'=xy(1+2\ln x)=xx^{x^2}(1+2\ln x)=x^{x^2+1}(1+2\ln x).$$

6. $y=(\sin x)^{\mathrm{tg}x}$.

Розв'язання

Степенево-показникова функція, логарифмуючи її, дістаємо:

$\ln y=\mathrm{tg}x\ln\sin x,\ \ \frac{y'}{y}=\mathrm{tg}x\frac{1}{\sin x}\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x=1+\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x$,

$$y'=y\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x\right)=(\sin x)^{\mathrm{tg}x}\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x\right).$$

7. Знайти y'_x з рівняння $x^2+y^2=4$.

Розв'язання

Оскільки y є функцією від x, то y^2 розглядатимемо як складну функцію від x, тобто $\left(y^2\right)'=2y\cdot y'$.

Продиференціювавши по x обидві частини заданого рівняння, дістанемо $2x+2yy'=0$. Звідси $y'=-\frac{x}{y}$.

8. Знайти похідну y'_x з рівняння $x^3+\ln y-x^2e^y=0$.

Розв'язання

Функція задана неявно. Продиференціювавши по x обидві частини рівняння, дістанемо $3x^2+\frac{y'}{y}-x^2e^y\cdot y'-2xe^y=0$.

Звідки $y'=\frac{\left(2xye^y-3x^2\right)y}{1-x^2ye^y}$.

9. Знайти y'_x, якщо

$$\begin{cases} x=t^3+3t+1, \\ y=3t^5+5t^3+1. \end{cases}$$

Розв'язання

Функція задана параметрично. Похідну шукаємо за формулою $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$

Знайдемо $x'_t=3t^2+3=3\left(t^2+1\right)$, $y'_t=15t^2\left(t^2+1\right)\Rightarrow y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}==\frac{15t^2\left(t^2+1\right)}{3\left(t^2+1\right)}=5t^2$.

Завдання 5. Обчислити наближено $\sqrt{27}$.

Розв'язання

Використаємо формулу $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$ (1)

Перетворимо вираз, що стоїть під знаком радикала:

$27=25+2=25\left(1+\frac{2}{25}\right)$, звідки $\sqrt{27}=\sqrt{25\left(1+\frac{2}{25}\right)}=5\sqrt{1+\frac{2}{25}}$. (2)

При обчисленні $\sqrt{1+\frac{2}{25}}$ введемо функцію $f(x)=\sqrt{x}$, тоді $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Формула (1) у нашому випадку запишеться:

$$\sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x, \text{ де } x=1, \Delta x=\frac{2}{25}.$$

Інакше

$$\sqrt{1+\frac{2}{25}}\approx\sqrt{1}+\frac{1}{2\sqrt{1}}\frac{2}{25}=1+\frac{1}{25}=1{,}04. \quad (3)$$

Підставивши (3) у рівність (2), дістанемо

$$\sqrt{27}\approx 5\cdot 1{,}04=5{,}2.$$

Завдання 6. Використовуючи правила Лопіталя обчислити границі:

1. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Розв'язання

Чисельник та знаменник дробу окремо прямують до нуля при $x \to 0$ (невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$).

Використовуючи правило Лопіталя, дістаємо

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{3}{e}.$$

2. Знайти $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x}{2x}$.

Розв’язання

Чисельник та знаменник дробу окремо прямують до нуля при $x \to 0$ (невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$). Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin 7x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to0}\frac{7\cos x}{2}=\frac{7}{2}.$$

3. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^3+7x+5}$.

Розв’язання

Маємо невизначеність вигляду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^2+7x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+3x+1)'}{(2x^3+7x+5)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{6x^2+7}=$$

(виконання граничного переходу знову приводить до невизначеності виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, а тому застосовуємо правило Лопіталя повторно):

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)'}{(6x^2+7)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{12x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{6}\cdot0=0.$$

4. Знайти $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\cdot\ln x\right)$.

Розв’язання

Невизначеність $[0\cdot\infty]$. Подамо добуток функцій у вигляді дробу, а потім, діставши невизначеність вигляду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to0}\left(x^2\cdot\ln x\right)=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{1/x}{-2x^{-3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}x^2=0.$$

5. Знайти границю $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

Розв’язання

Маємо невизначеність виду $[\infty-\infty]$. Алгебраїчним перетворенням (зведенням дробів до спільного знаменника) зведемо цю невизначеність до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, а потім двічі застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

6. Знайти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}x)^{2\cos x}$.

Розв'язання

Невизначеність $\left[\infty^0\right]$. Позначимо задану функцію через y: $(\mathrm{tg}x)^{2\cos x}=y$.

Прологарифмуємо її $\ln y=2\cos x\ln \mathrm{tg}x=\frac{2\ln \mathrm{tg}x}{1/\cos x}$.

Обчислимо границю знайденого виразу за допомогою правила Лопіталя (маємо невизначеність вигляду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$):

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln y=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln \mathrm{tg}x}{\sec x}=2\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x\cdot 1/\mathrm{tg}x}{\sec x\cdot \mathrm{tg}x}=2\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x}{\mathrm{tg}^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x\,\mathrm{tg}x}{2\mathrm{tg}x\cdot\sec^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0,$$

тобто $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}y=e^0=1.$

7. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$.

Розв'язання

Невизначеність $\left[1^{\infty}\right]$. Логарифмуючи та застосовуючи правило Лопіталя, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\ln x\cdot\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{1/\ln x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)}{-1/\left(x\ln^2 x\right)}=-\lim_{x\to 0}\frac{x\ln^2 x}{x+1}=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2 x}{1+\frac{1}{x}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}\ln x}{-\frac{1}{x^2}}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

Таким чином, $\lim\limits_{x\to 0}y=e^0=1$.

Завдання 7. Знайти інтервали зростання та спадання функції $y=x\left(1+\sqrt{x}\right)$.

Розв'язання

Область визначення функції $[0,+\infty)$. Знайдемо похідну $y'=1+\frac{3}{2}\sqrt{x}$. Похідна додатна на проміжку $[0,+\infty)$. Таким чином, функція зростає на всій області визначення.

Завдання 8. Знайти точки екстремуму функції $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

Розв'язання

1. Знаходимо першу похідну $y' = x^2 - 4x + 3$.

2. Знаходимо дійсні корені рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0 \; (f'(x) = 0)$. Звідки $x_1 = 1, \; x_2 = 3$.

Похідна скрізь неперервна. Значить, інших критичних точок для заданої функції не існує.

3. Досліджуємо критичні значення. Для цього область визначення функції $(-\infty, +\infty)$ здобутими критичними точками розбиваємо на три інтервали $(-\infty, 1)$, (1, 3), $(3, +\infty)$.

Виберемо у кожному інтервалі по одній точці і обчислимо значення похідної в цих точках:

$$x = 0 \in (-\infty, 1), \; y'(0) = 3 > 0;$$

$$x = 2 \in (1, 3), \; y'(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 < 0;$$

$$x = 4 \in (3, +\infty), \; y'(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 11 > 0.$$

Знак похідної на кожному з трьох інтервалів збігається зі знаком похідної в обраній точці відповідного інтервалу (табл.).

З таблиці видно: при переході (зліва направо) через значення x = 1 похідна змінює знак з «+» на «–». Звідси, при x = 1 функція має максимум:

$$y_{\max}(1) = \frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = \frac{7}{3}.$$

x	$(-\infty, 1)$	1	(1, 3)	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y $\nearrow$		$y_{\max}(1) = \frac{7}{3}$ $\searrow$		$y_{\min}(3) = 1$ $\nearrow$	

При переході через значення x = 3 похідна змінює знак з «–» на «+». Звідси, при x = 3 функція має мінімум:

$$Y_{\min}(3) = \frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 = 1.$$

На інтервалі:

1) $(-\infty, 1)$ — функція зростає;

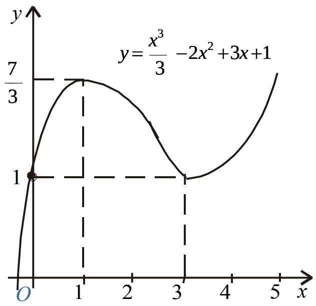
2) (1, 3) — спадає;

3) $(3, +\infty)$ — зростає.

Крім того,

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1\right) = \pm\infty .$$

На основі проведеного дослідження будуємо графік функції.



Завдання 9. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = 3x - x^2$ на проміжку $[-2,3]$.

Розв’язання

Знайдемо першу похідну $f'(x) = 3 - 3x^2$. Прирівнявши її до нуля, знайдемо стаціонарні точки: $3 - 3x^2 = 0$, тобто $x = \pm 1$. Визначимо значення функції в стаціонарних точках та на кінцях проміжку: f (1) = 2, f (– 1) = – 2; f (– 2) = 2, f (3) = – 18.

З одержаних чотирьох значень вибираємо найбільше та найменше: $f_{\text{найб}} = f_{\max}(1) = 2,\ f_{\text{найм}} = f(3) = -18$.

Завдання 10. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \frac{x+3}{x^2+7}$ на відрізку $[-3;7]$.

Розв’язання

Знаходимо критичні значення функції, що належать даному відрізку:

$$y' = \left(\frac{x+3}{x^2+7}\right)' = \frac{x^2 + 7 - 2x(x+3)}{(x^2+7)^2} = \frac{-x^2 - 6 + 7}{(x^2+7)^2};$$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + 6x - 7 = 0 \\ x^2 + 7 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = 1 \in [-3;7],\ x_2 = -7 \notin [-3;7].$$

Обчислюємо значення функції:

$$y(-3)=\frac{-3+3}{9+7}=0;$$

$$y(1)=\frac{1+3}{1+7}=\frac{1}{2}; \qquad y(7)=\frac{7+3}{49+7}=\frac{10}{56}.$$

Отже, $\min\limits_{x\in[-3;7]} y(x)=y(-3)=0;$ $\max\limits_{x\in[-3;7]} y(x)=y(1)=\frac{1}{2}.$

Завдання 11. Знайти асимптоти кривої $y=\sqrt{x^3/(x-2)}$.

Розв'язання

Функція визначена на інтервалах $(-\infty,0)$ та $(2,+\infty)$. Із-за того, що $\lim\limits_{x\to 2+0}\sqrt{x^3/(x-2)}=+\infty$, пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою кривої.

Визначимо тепер існування похилих асимптот:

1) $$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3/(x-2)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x/(x-2)}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1/\left(1-\frac{2}{x}\right)}=1,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-x+2)}{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}=1;$$

2) $$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\frac{x}{x-2}}}{x}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}}=-1,$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{-x}+x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x(-x-2+x)}{\sqrt{2-x}\left(\sqrt{-x}+\sqrt{2-x}\right)}=-1.$$

Таким чином, існують права $y = x + 1$ та ліва $y = -x - 1$ похилі асимптоти кривої.

Завдання 12. Дослідити методами диференціального числення функцію $y=\frac{x^2}{x-1}$ та побудувати її графік.

Розв'язання

Для побудови графіка функції проводимо повне дослідження функції:

1) Область визначення:

$D(y):\ x-1\neq 0 \Rightarrow x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty).$

2) Парність, непарність функції:

$y(-x)=\frac{(-x)^2}{-x-1}=-\frac{x^2}{x+1}$ – функція ні парна, ні непарна.

3) Неперервність функції, характер точок розриву:

$x=1$ – точка розриву.

$$\lim_{x\to1-}\frac{x^2}{x-1}=\left|\begin{array}{c}x=1-\alpha\\ \alpha>0\\ \alpha\to0\end{array}\right|=\lim_{x\to0}\frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha-1}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\alpha)^2}{-\alpha}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{x^2}{x-1}=\left|\begin{array}{c}x=1+\alpha\\ \alpha>0\\ \alpha\to0\end{array}\right|=\lim_{x\to0}\frac{(1+\alpha)^2}{1+\alpha-1}=\lim_{x\to0}\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha}=+\infty$$

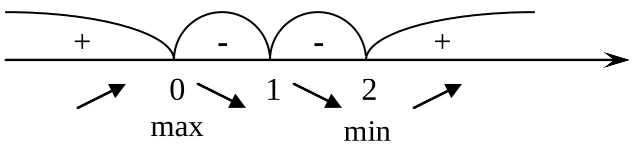
$x=1$ – точка розриву II виду.

4) Точки перетину графіка функції з координата осями: графік проходить через початок координат.

5) Монотонність функції, точки екстремуму:

$$y'=\left(\frac{x^2}{x-1}\right)'=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$y'=0\Rightarrow\begin{cases}x(x-2)=0\\ x\neq1\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$$



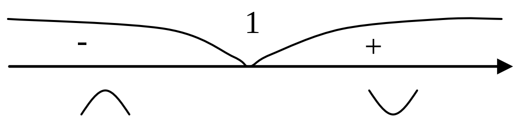
Функція зростає: $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. Функція спадає: $(0;1)\cup(1;2)$.

Точка $(0;0)$ – точка максимуму. Точка $(2;4)$ – точка мінімуму.

6) Опуклість, випуклість функції, точка перегину графіка функції:

$$y''=\left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4}=$$
$$=\frac{(x-1)(2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

$$y''=0\Rightarrow\frac{2}{(x-1)^3}=0\Rightarrow x\in\{\ \varnothing$$



Функція опукла: $(-\infty;1)$. Функція вгнута: $(1;+\infty)$.

Точок перегину графіка функції немає.

7) Асимптоти графіка функції:

а) вертикальні асимптоти: $x=a,$ так як $\lim\limits_{x\to 1\pm}\dfrac{x^2}{x-1}=\pm\infty$, то $x=1-$ вертикальна асимптота.

б) горизонтальні асимптоти: $y=c,\ c=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x-1}=\pm\infty\Rightarrow$ горизонтальних асимптот немає.

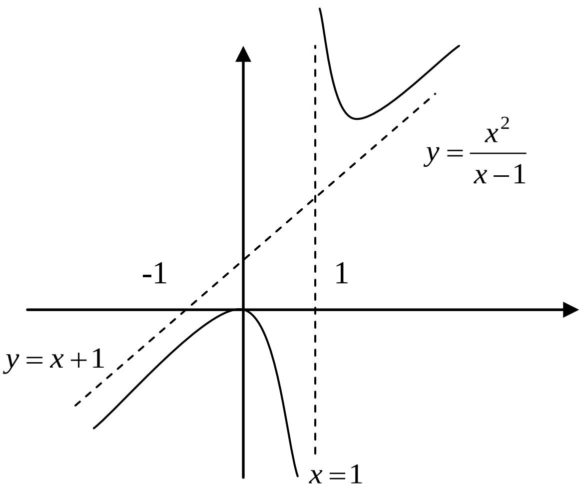
в) похилі асимптоти: $y=kx+b,$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1$$

Отже, $y=x+1$ – похила асимптота.

За результатами досліджень будуємо графік функції.



Завдання 13. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *і* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ *для функції* $z=x^3y+\sin\left(x^2+\sqrt{y}\right)+\mathrm{tg}\,x+\ln y$.

Розв’язання

Знайдемо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Вважаючи, що $y=\mathrm{const}$, дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y+\cos\left(x^2+\sqrt{y}\right)\cdot 2x+\frac{1}{\cos^2 x}.$$

При знаходженні $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що $x=\mathrm{const}$. Дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3+\cos\left(x^2+\sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{y}.$$

Завдання 14. Знайти z'_x і z'_y для функції $z = x^2 y + xy^2$.

Розв'язання

Знайдемо z'_x, вважаючи $y = \text{const}$

$$z'_x = 2xy + y^2.$$

Знайдемо z'_y, вважаючи $x = \text{const}$

$$z'_y = x^2 + 2xy.$$

Завдання15 . Знайти похідну $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функції $z = \ln tg\left(x^2 + y\right)$.

Розв'язання

Знаходимо частинну похідну першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln tg\left(x^2 + y\right)\right) = \frac{1}{tg\left(x^2 + y\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(x^2 + y\right)} \cdot 2x = \frac{2x}{\sin\left(x^2 + y\right)\cos\left(x^2 + y\right)} = \frac{4x}{\sin\left(2x^2 + 2y\right)},$$

тоді

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4x}{\sin\left(2x^2 + 2y\right)}\right) = 4x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2\left(2x^2 + 2y\right)}\right) \cdot 2 = -\frac{8x}{\sin^2\left(2x^2 + 2y\right)}.$$

Завдання16 . Знайти екстремум функції $z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$.

Розв'язання

1) Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4}.$$

2) Користуючись необхідними умовами, знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3} = 0 \\ -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4} = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 8x + y = 188 \\ x + 6y = 141 \end{cases}.$$

Звідси $x = 21,\ y = 20$.

Стаціонарна точка $M(21, 20)$.

3) Знайдемо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{12}.$$

$$\Delta = AC - B^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{144} > 0.$$

Оскільки $A<0$, то в точці M функція має максимум:

$$z_{\max}=\frac{21}{2}\cdot 20+(47-21-20)\left(\frac{21}{3}+\frac{20}{4}\right)=282.$$

Завдання 17. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z=-2x^2+xy-\frac{y^2}{2}+7x-y+3.$$

Розв'язання

Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-4x+y+7,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=x-y-1.$$

Використовуючи необхідну умову екстремуму, знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases}-4x+y+7=0,\\ x-y-1=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2,\\ y=1,\end{cases}\Rightarrow M_0(2;1).$$

Обчислюємо значення частинних похідних другого порядку в точці $M_0(2;1)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-4;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-1;$$

Складаємо дискримінант: $\Delta=AC-B^2$.

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0)=-4;\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(M_0)=1;\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0)=-1;$$
$$\Delta=-4\cdot(-1)-1=3\rangle\,0,\quad A=-4\,\langle\,0$$

Отже, в точці $M_0(2;1)$ задана функція має максимум:

$$z_{\max}=z(2;1)=9,5.$$

Модульна контрольна робота № 3.

Модульна контрольна робота № 3 виконується студентами після вивчення наступних тем програми:

Тема 14. Первісна функції та невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування невизначених інтегралів.
Тема 15. Інтегрування раціональних та ірраціональних функцій.
Тема 16. Інтегрування тригонометричних функцій.
Тема 17. Визначений інтеграл та його застосування. Невласні інтеграли.
Тема 18. Числові та функціональні ряди.
Тема 19. Звичайні диференціальні рівняння. Основні поняття.
Тема 20. Диференціальні рівняння першого та другого порядків.
Тема 21. Предмет, методи, основні задачі та поняття теорії ймовірностей. Теореми додавання та множення ймовірностей.
Тема 22. Формула повної ймовірності. Ймовірність гіпотез. Повторення випробувань: формули Бернуллі, Лапласа, Пуассона.
Тема 23. Випадкові величини їх закони розподілу та числові характеристики.
Тема 24. Закони великих чисел.
Тема 25. Система двох випадкових величин. Умовні закони розподілу складових системи двох випадкових величин. Залежні і незалежні випадкові величини.

Методичні рекомендації до розв'язування типових завдань по елементах інтегрального числення (теоретичний матеріал включає теми 14 –17)

Завдання 1. Знайти невизначені інтеграли. Результат перевірити диференціюванням:

1) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$; 2) $\int tg^2 x\,dx$; 3) $\int 5\sin(2x-1)dx$; 4) $\int \frac{4}{\sin^2\left(3-\frac{x}{2}\right)}dx$;

5) $\int \frac{(6x-1)dx}{3x^2-x+7}$; 6) $\int x e^{x^2}\,dx$; 7) $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$; 8) $\int \arcsin x\,dx$.

1) Виконаємо перетворення підінтегральної функції

$$\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx =$$

$$= \int\left(x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} - \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x} + C$$

Перевірка результату диференціюванням

$$\left(\frac{2\sqrt{x^5}}{5} - \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x} + C\right)' = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}} = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}$$

2) Виконаємо перетворення підінтегральної функції

$$\int tg^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx =$$

$$= tgx - x + C$$

Перевірка результату диференціюванням

$$\left(tgx - x + C\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = tg^2 x$$

3) Використаємо метод безпосереднього інтегрування, аргумент підінтегральної функції відрізняється від аргументу табличного інтеграла постійним множником та постійним доданком.

$$\int 5\sin(2x-1)\,dx = \left|dx = \frac{1}{2}d(2x-1)\right| = \frac{5}{2}\int \sin(2x-1)d(2x-1) =$$

$$= -\frac{5}{2}\cos(2x-1) + C \;;$$

Перевірка диференціюванням

$$\left(-\frac{5}{2}\cos(2x-1)+C\right)' = -\frac{5}{2}\left(-\sin(2x-1)\right)\cdot 2 = 5\sin(2x-1)$$

4) Використаємо метод безпосереднього інтегрування, аргумент підінтегральної функції відрізняється від аргументу табличного інтеграла сталим множником та сталим доданком.

$$\int \frac{4}{\sin^2\left(3-\frac{x}{2}\right)}dx = \left|dx = -\frac{1}{\frac{1}{2}}d\left(3-\frac{x}{2}\right) = -2d\left(3-\frac{x}{2}\right)\right| = -8\int \frac{d\left(3-\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(3-\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= -8ctg\left(3-\frac{x}{2}\right) + C \;;$$

Перевірка результату диференціюванням

$$\left(-8ctg\left(3-\frac{x}{2}\right)+C\right)' = -8\frac{1}{\sin^2\left(3-\frac{x}{2}\right)}\left(3-\frac{x}{2}\right)' = -8\frac{1}{\sin^2\left(3-\frac{x}{2}\right)}\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{4}{\sin^2\left(3-\frac{x}{2}\right)}$$

5) Використаємо метод заміни змінної, маємо

$$\int \frac{(6x-1)\,dx}{3x^2-x+7} = \left|\begin{array}{l} 3x^2-x+7=t,\,(6x-x)\,dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{(6x-x)} \end{array}\right| = \int \frac{(6x-1)\,dt}{t(6x-x)} = \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \ln|t| + C = \ln\left|3x^2-x+7\right| + C \quad ;$$

Перевірка результату диференціюванням

$$\left(\ln\left|3x^2-x+7\right|+C\right)' = \frac{1}{3x^2-x+7}\left(3x^2-x+7\right)' = \frac{6x-1}{3x^2-x+7}$$

6) Використаємо метод заміни змінної, маємо

$$\int x e^{x^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t\,,\ 2xdx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{2x} \end{array} \right| = \int x e^{t} \cdot \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int e^{t}\, dt = \frac{e^{t}}{2} + \acute{N} =$$

$$= \frac{e^{x^2}}{2} + \acute{N} \ ;$$

Перевірка результату диференціюванням

$$\left(\frac{e^{x^2}}{2} + \acute{N} \right)' = \frac{1}{2} e^{x^2} \left(x^2 \right)' = \frac{1}{2} e^{x^2} \cdot 2x = x e^{x^2}$$

7) Використаємо метод заміни змінної, маємо

$$\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t\,, \dfrac{dx}{x} = dt \\ dx = x\, dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3 \cdot xdt}{x} = \int t^3\, dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\ln^4 x}{4} + C$$

Перевірка результату диференціюванням

$$\left(\frac{\ln^4 x}{4} + C \right)' = \frac{1}{4} \cdot 4 \ln^3 x \left(\ln x \right)' = \frac{\ln^3 x}{x}$$

8) Використаємо метод інтегрування частинами, маємо

$$\int \arcsin x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x,\ dv = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}\,,\ v = x \end{array} \right| = x \cdot \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}} = x \cdot \arcsin x -$$

$$- \left| \begin{array}{l} 1 - x^2 = t\ ,\ -2xdx = dt \\ dx = -\dfrac{dt}{2x} \end{array} \right| = x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{xdt}{x\sqrt{t}} = x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x \cdot \arcsin x + \sqrt{t} + C = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C \ ;$$

Перевірка результату диференціюванням

$$\left(x \cdot \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C \right)' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x$$

Завдання 2. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\displaystyle\int_0^8 \frac{2}{\sqrt{10x + 1}} dx$; 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{7}{\left(2x + 1\right)^3} dx$; 3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 \sin 2x\, dx$;

4) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5 - x^2}}$; 5) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\, dx$.

1) Заданий інтеграл будемо обчислювати за формулою Ньютона-Лейбніца. Використаємо метод безпосереднього інтегрування:

$$\int_0^8 \frac{2}{\sqrt{10x+1}}dx = \left|dx = \frac{1}{10}d\left(10x+1\right)\right| = \frac{2}{10}\int_0^8 \frac{d\left(10x+1\right)}{\sqrt{10x+1}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\sqrt{10x+1}} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\sqrt{10x+1}}\Bigg|_0^8 = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{\sqrt{10\cdot 8+1}} - \frac{1}{\sqrt{10\cdot 0+1}}\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{\sqrt{81}} - \frac{1}{\sqrt{1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}-1\right) = -\frac{1}{10}\cdot\frac{8}{9} = -\frac{4}{45}$$

2) Заданий інтеграл будемо обчислювати за формулою Ньютона-Лейбніца. Використаємо метод безпосереднього інтегрування:

$$\int_0^2 \frac{7dx}{\left(2x+1\right)^3} = \left|dx = \frac{1}{2}d\left(2x+1\right)\right| = \frac{7}{2}\int_0^2 \frac{d\left(2x+1\right)}{\left(2x+1\right)^3} = = \frac{7}{2}\int_0^2 \left(2x+1\right)^{-3} d\left(2x+1\right) =$$

$$= \frac{7}{2}\frac{\left(2x+1\right)^{-2}}{-2}\Bigg|_0^2 = -\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{\left(2x+1\right)^2}\Bigg|_0^2 = -\frac{7}{4}\left(\frac{1}{\left(2\cdot 2+1\right)^2} - \frac{1}{\left(2\cdot 0+1\right)^2}\right) =$$

$$= -\frac{7}{4}\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{1^2}\right) = -\frac{7}{4}\left(\frac{1}{25}-1\right) = -\frac{7}{4}\cdot\left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{42}{25} = 1\frac{17}{25}$$

3) Заданий інтеграл будемо обчислювати за формулою Ньютона-Лейбніца.
Використаємо метод заміни змінної:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 \sin 2x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 \cdot 2\sin x \cos dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^4 \sin x\, dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \cos x = t, \\ -\sin x dx = dt. \\ t_i = \cos 0 = 1, \\ t_â = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{array}\right| = -2\int_1^{\frac{1}{2}} t^4 dt = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 t^4 dt = \frac{2t^5}{5}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{2}{5}\left(1^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{31}{32} =$$

$$= \frac{31}{80}$$

4) Заданий інтеграл будемо обчислювати за формулою Ньютона-Лейбніца.
Використаємо метод заміни змінної:

$$\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{9+4x^2}} = \left|\begin{array}{l} 9+4x^2 = t, \\ 8xdx = dt, dx = \dfrac{dt}{8x} \\ t_i = 9+4\cdot 0^2 = 9, \\ t_â = 9+4\cdot 4 = 25 \end{array}\right| = \frac{1}{8}\int_9^{25} \frac{xdx}{\sqrt{t}} = \frac{1}{8}\cdot 2\sqrt{t}\Bigg|_9^{25} = \frac{\sqrt{t}}{4}\Bigg|_9^{25} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{25}-\sqrt{9}\right) = \frac{1}{4}\left(5-3\right) = \frac{1}{2}$$

5) Заданий інтеграл будемо обчислювати за формулою Ньютона-Лейбніца.
Використаємо метод інтегрування частинами:

$$\int_0^1 xe^{-x}\, dx = \left|\begin{array}{l} u = x,\ dv = e^{-x}\, dx, \\ du = dx,\ v = -e^{-x} \end{array}\right| = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\, dx = \left(-xe^{-x} - e^{-x}\right)\Big|_0^1 =$$

$$=\left(-1e^{-1}-e^{-1}\right)\Big| = \left(-1e^{-1}-e^{-1}\right)-\left(-0e^{-0}-e^{-0}\right)=-2e^{-1}+1=\frac{e-2}{e}$$

Методичні рекомендації до розв'язування типових завдань по елементах інтегрального числення (теоретичний матеріал включає теми 19,20)

Завдання 1. Розв'язати рівняння:

$$\left(x+xy^2\right)dx-\left(y+yx^2\right)dy=0.$$

○ Оскільки це рівняння можна записати у вигляді

$$x\left(1+y^2\right)dx-y\left(1+x^2\right)dy=0,$$

то воно є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розділимо змінні:

$\dfrac{2xdx}{1+x^2}=\dfrac{2ydy}{1+y^2}$ і проінтегруємо його $\displaystyle\int\frac{2xdx}{1+x^2}=\int\frac{2ydy}{1+y^2}$.

Отримуємо

$$\ln\left(1+x^2\right)=\ln\left(1+y^2\right)+\ln C, C\neq 0.$$

Потенціюючи, дістаємо загальний розв'язок рівняння:

$$\frac{1+x^2}{1+y^2}=C,\quad C\neq 0.\bullet$$

Завдання 2. Розв'язати рівняння:

$$y'=\frac{x^2+y^2}{2x^2}.$$

○ Дане рівняння перепишемо у вигляді:

$$y'=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Отже, рівняння є однорідним. Використаємо підстановку $y=ux,\quad y'=u'x+u$, тоді рівняння буде

$xu'+u=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}u^2$, або $x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{(u-1)^2}{2}$.

Відокремимо змінні

$\dfrac{2du}{(u-1)^2}=\dfrac{dx}{x}$; $\quad\displaystyle\int\frac{2du}{(u-1)^2}=\int\frac{dx}{x}$; $\quad -\dfrac{2}{u-1}=\ln|x|+\ln|C|$.

Загальний розв'язок рівняння буде

$$-\frac{2}{\frac{y}{x}-1}=\ln|Cx|, \text{ або } Cx=e^{\frac{2x}{x-y}}.\bullet$$

Завдання 3. Знайти розв'язок рівняння $y'+2yx=2x$, що задовільняє початкову умову $y(0)=2$.

○ Дане рівняння є лінійним рівнянням першого порядку. Поклавши $y=uv,\quad y'=u'v+uv'$, матимемо:

$u'v+uv'+2uvx=2x$; $\qquad u'v+u\left(v'+2vx\right)=2x$.

Отримаємо два рівняння:

1) $v'+2vx=0$; $\qquad$ 2) $u'v=2x$;

$\dfrac{dv}{dx}=-2vx$; $\qquad u'e^{-x^2}=2x$;

$\displaystyle\int\frac{dv}{v}=-\int 2xdx$; $\qquad \displaystyle\int du=\int 2xe^{x^2}dx$;

$v=e^{-x^2}$. $\qquad u=e^{x^2}+C$.

Загальний розв'язок даного рівняння

$$y=uv=Ce^{-x^2}+1.$$

Знайдемо значення стадої C, при якому частинний розв'язок задовольняє задану початкову умому:

$$2 = Ce^0 + 1, \text{ звідки } C = 1.$$

Отже,шуканий частинний розв'язок має вигляд $y = e^{-x^2} + 1$. •

Завдання 4. Розв'язати рівняння

$$\left(3y^2 + 2xy + 2x\right)dx + \left(6xy + x^2 + 3\right)dy = 0.$$

◦ У даному випадку

$$P(x, y) = 3y^2 + 2xy + 2x, \qquad Q(x, y) = 6xy + x^2 + 3.$$

Оскільки

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 6y + 2x,$$

то ліва частина заданого рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, причому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3y^2 + 2xy + 2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + x^2 + 3. \qquad (1)$$

Інтегруючи, наприклад, перше зцих рівнянь по x (вважаючи y сталою), маємо

$$u(x, y) = 3xy^2 + x^2 y + x^2 + \varphi(y), \qquad (2)$$

де $\varphi(y)$ – довільна диференційовна функція y.

Диференціюючи рівність (2) по y, згідно з другим рівнянням (1), дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + x^2 + \frac{d\varphi}{dy} = 6xy + x^2 + 3,$$

тобто $\frac{d\varphi}{dy} = 3$, звідки $\varphi(y) = 3y + C_1$, тому

$$u(x, y) = 3xy^2 + x^2 y + x^2 + 3y + C_1.$$

Отже, загальний інтеграл даного рівняння виражається рівністю

$$3xy^2 + x^2 y + x^2 + 3y = C. \; •$$

Завдання 5. Розв'язати рівняння

$$y'' + 3y' = e^{2x}.$$

◦ Покладемо $z = y'$, тоді $z' = y''$ і маємо лінійне рівняння першого порядку відносно невідомої функції $z = z(x)$:

$$z' + 3z = e^{2x}.$$

Розв'язавши це рівняння, знайдемо $z(x) = C_1 e^{-3x} + \frac{1}{5} e^{2x}$, тоді $y' = C_1 e^{-3x} + \frac{1}{5} e^{2x}$, звідки

$$y = -\frac{C_1}{3} e^{-3x} + \frac{1}{10} e^{2x} + C_2. \; •$$

Завдання 6. Розв'язати рівняння

$$yy'' - 2\left(y'\right)^2 = 0.$$

◦ Поклавши

$$y' = p, \qquad y'' = \frac{dp}{dy} p,$$

дістанемо

$$yp\frac{dp}{dy} - 2p^2 = 0, \text{ або } p\left(y\frac{dp}{dy} - 2p\right) = 0.$$

Це рівняння розпадається на два:

$$p = 0, \qquad y\frac{dp}{dy} - 2p = 0.$$

З першого маємо $y' = 0$, звідки $y = C$. У другому рівнянні відокремлюються змінні:

$$\frac{dp}{p} = \frac{2dy}{y}, \quad \ln|p| = 2\ln|y| + \ln|C_1|, \quad p = C_1 y^2, \quad C_1 \neq 0.$$

Оскільки $p = \frac{dy}{dx}$, то

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y^2, \quad \frac{dy}{y^2} = C_1 dx, \quad -\frac{1}{y} = C_1 x + C_2.$$

Звідси другий розв'язок рівняння буде:

$$y = \frac{1}{C_1 x + C_2}.$$

Отже,задане рівняння має два розв'язки

$$y = C, \quad y = \frac{1}{C_1 x + C_2}. \bullet$$

Завдання 7. Розв'язати рівняння

$$y'' - 2y' + y = 2x + 3.$$

◦ Загальний розв'язок даного рівняння будемо шукати в вигляді $y = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$, де $y_{з.о.}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, $y_{ч.н.}$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 1$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $y_{з.о.} = e^x(C_1 + C_2 x)$. Оскільки правою частиною даного рівняння є функція виду $P_1(x)e^{0x}$, причому $\alpha = 0 \neq k_1 \neq k_2$, то частинний розв'язок шукаємо в вигляді $y_{ч.н.} = Q_1(x)e^{0x}$, тобто $y_{ч.н.} = A + Bx$, де A і B – невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $y_{ч.н.}{}' = B$, $y_{ч.н.}{}'' = 0$ та підставивши їх у рівняння, маємо

$$-2B + A + Bx = 2x + 3.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} B = 2; \\ -2B + A = 3, \end{cases}$$

звідки $B = 2, A = 7$. Отже, частинний розв'язок даного рівняння має вигляд $y_{ч.н.} = 7 + 2x$, тому

$$y = y_{з.о.} + y_{ч.н.} = e^x(C_1 + C_2 x) + 7 + 2x -$$

шуканий загальний розв'язок. •

Завдання 8. Розв'язати рівняння

$$y'' + 4y = \sin 2x.$$

◦ Характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm 2i$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $y_{з.о.} = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$. Права частина даного рівняння $f(x) = 5\sin 2x = 5\sin 2x + 0 \cdot \cos 2x$, де $\beta = 2$ і число $\beta i = 2i$ збігається з одним із коренів характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок даного рівняння шукаємо у вигляді $y_{ч.н.} = x(a\cos 2x + b\sin 2x)$, де a і b – невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $y_{ч.н.}{}'$ та $y_{ч.н.}{}''$ і підставивши $y_{ч.н.}$ та $y_{ч.н.}{}''$ у вихідне рівняння, після спрощень дістанемо

$$-4a\sin 2x + 4b\cos 2x = 5\sin 2x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 2x$ та $\cos 2x$ у лівій і правій частині цієї рівності, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4a = 5; \\ 4b = 0, \end{cases}$$

звідки $a = -\frac{5}{4}, b = 0$. Отже, $y_{ч.н.} = -\frac{5}{4} x \cos 2x$ – частинний розв'язок даного рівняння, а загальний розв'язок буде

$$y = y_{з.о.} + y_{ч.н.} = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{5}{4} x \cos 2x . \bullet$$

Завдання 9. Розв'язати рівняння

$$y'' + y = tgx .$$

○ Характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm i$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $y_{з.о.} = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Права частина $f(x) = tgx$ не єфункцією спеціального виду, тому частинний розв'язок даного рівняння методом підбору шукати не можна. Знайдемо цей розв'язок методом варіації сталої. Складемо систему виду:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0; \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x), \end{cases}$$

де $y_1(x) = \sin x, y_2(x) = \cos x,$ тоді система набуде вигляду:

$$\begin{cases} C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = 0; \\ C_1'(x) \cos x - C_2'(x) \sin x = tgx, \end{cases}$$

$$C_1'(x) = \sin x, \qquad C_2'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Інтегруючи дістанемо

$$C_1(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C_1;$$

$$C_2(x) = -\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos x} = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx = -\int \frac{dx}{\cos x} + \int \cos x dx =$$

$$= -\ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \sin x + C_2,$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі. Отже, загальний розв'язок рівняння буде:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \cos x \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| . \bullet$$

Завдання 10. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + y; \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

○ Продиференціюємо перше рівняння:

$$x'' = -7x' + y' .$$

Підставимо в це рівняння значення похідної y' із другого рівняння системи:

$$x'' = -7x' + \left(-2x - 5y \right).$$

Знайшовши з першого рівняння значення $y = x' + 7x$ і підставивши його в знайдене рівняння, дістанемо

$$x'' + 12x' + 37x = 0 .$$

Маємо лінійне однорідне рівняння другог порядку з сталими коефіцієнтами. Інтегруючи його, одержуємо

$$x = e^{-6t} \left(C_1 \cos t + C_2 \sin t \right).$$

Оскільки $y = x' + 7x$, то

$$y = -6e^{-6t}\left(C_1\cos t + C_2\sin t\right) + e^{-6t}\left(-C_1\sin t + C_2\cos t\right) +$$
$$+7e^{-6t}\left(C_1\cos t + C_2\sin t\right) = e^{-6t}\left(\left(C_1 + C_2\right)\cos t + \left(C_2 - C_1\right)\sin t\right).$$

Отже, загальний розв'язок даної системи має вигляд:

$$x = e^{-6t}\left(C_1\cos t + C_2\sin t\right),$$
$$y = e^{-6t}\left(\left(C_1 + C_2\right)\cos t + \left(C_1 - C_2\right)\sin t\right)$$

Завдання для самостійної підготовки до модульних контрольних робіт

1.-10. Розв'язати систему лінійних рівнянь: а) матричним методом; б) за правилом Крамера; в) методом Гауса.

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 7 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$; 4. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$; 6. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$; 8. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$; 10. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$.

11.-20. Задані вершини $\boldsymbol{A}(x_1, y_1)$, $\boldsymbol{B}(x_2, y_2)$, $\boldsymbol{C}(x_3, y_3)$ трикутника. Знайти: 1) довжину сторони ***BC***; 2) величину кута ***ABC***; 3) рівняння висоти ***AD***; 4) рівняння медіани ***CE***; 5) довжину висоти ***AD***; 6) площу трикутника ***ADC***.

11. ***A***(2,5), ***B***(-3,4),***C***(1,-2); 12.. ***A***(3,-1), ***B***(-5,5),***C***(-4,0);
13. ***A***(10,-1), ***B***(2,5),***C***(3,0); 14.. ***A***(9,1), ***B***(1,7),***C***(2,2);
15. .***A***(4,-2), ***B***(-4,4),***C***(-3,1); 16. ***A***(5,1), ***B***(-3,7),***C***(-2,2);
17. ***A***(9,3), ***B***(-2,-3),***C***(-6,8); 18. ***A***(2,10), ***B***(-7,8),***C***(2,-6);
19. ***A***(12,1), ***B***(-6,-3),***C***(8,-4); 20. ***A***(13,4), ***B***(6,10),***C***(7,5).

21.-30. Дано чотири вектори $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, $\vec{d}(d_1, d_2, d_3)$ в деякому базисі. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

21. $\vec{a}(2,1,0), \vec{b}(4,3,-3), \vec{c}(-6,5,7), \vec{d}(34,5.-26)$;
22. $\vec{a}(1,0,5), \vec{b}(3,2,7), \vec{c}(5,0,9), \vec{d}(-4,2,-12)$;
23. $\vec{a}(-2,1,7), \vec{b}(3,-3,8), \vec{c}(5,4,-1), \vec{d}(18,25,1)$;
24. $\vec{a}(3,4,-3), \vec{b}(-5,5,0), \vec{c}(2,1,-4), \vec{d}(8,-16,17)$;
25. $\vec{a}(4,3,-1), \vec{b}(5,0,4), \vec{c}(2,1,2), \vec{d}(0,12,-6)$;
26. $\vec{a}(2,4,-6), \vec{b}(1,3,5), \vec{c}(0,-3,7), \vec{d}(3,2,52)$;
27. $\vec{a}(1,3,5), \vec{b}(0,2,0), \vec{c}(5,7,9), \vec{d}(0,4,16)$;
28. $\vec{a}(-2,3,5), \vec{b}(1,-3,4), \vec{c}(7,8,-1), \vec{d}(1,20,1)$;
29. $\vec{a}(3,-5,2), \vec{b}(4,5,1), \vec{c}(-3,0,-4), \vec{d}(-4,5,-16)$;
30. $\vec{a}(4,5,2), \vec{b}(3,0,1), \vec{c}(-1,4,2), \vec{d}(5,7,8)$.

31.-40. Знайти границі функції:

31. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+7}{2-4x+3x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+27}{x^2+5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to0} tg4x ctg2x$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-3x}{5-3x}\right)^{x-4}$.

32. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^6+x^4-7}{7x^6-3x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos5x-1}{xtg2x}$; г) $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{\frac{2x}{x-1}}$;

33. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-4}{2x^4+5x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{x\sin5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{x+4}$;

34. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+x}{4-x^4+2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{2\sin^2 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$;

35. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+1}{3x^2+4x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2+x-3}{3x^2-x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{1-\cos5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-7}\right)^{x+3}$;

36. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos2x-1}{xtg5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5+2x}{2x-3}\right)^{x+5}$;

37. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{4x^2+3x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x^3-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{arctg3x}{2\sin2x}$; г) $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$;

38. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+4}{4x^4+2x^2+3}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2 3x}{xtgx}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^2+4}$;

39. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+4x-3}{x-4x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\arcsin2x ctg3x$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{3x+2}$;

40. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^2+1}{3x^4+x^3+5}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{x\sin2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-1}\right)^{2x-7}$.

41.-50. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ заданих функцій:

41. а) $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$; б) $y=\frac{1+tgx}{1-tgx}$;

в) $x\sin y - y\cos x = 0$; г) $y = x^{\frac{2}{x}}$;

42. а) $y = \dfrac{3x}{\sqrt[3]{2+x}} - 6\sqrt[3]{2+x}$; б) $y = \sin^3\sqrt{2x+1}$;

в) $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$; г) $y = x^{e^x}$;

43. а) $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; б) $y = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$;

в) $y\sin x + \cos(x-y)$; г) $y = x^{\arcsin x}$;

44. а) $y = \sqrt[3]{x^4+5x} - \sqrt[4]{(5x-1)^3}$; б) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$;

в) $\cos(x-y) - 2x + 4y = 0$; г) $y = x^{\cos^2 x}$;

45. а) $y = x + \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$; б) $y = \sin\sqrt{x^2+x}$;

в) $xe^y + ye^x = xy$; г) $y = x^{\frac{1}{x^2}}$;

46. а) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \dfrac{5}{\sqrt[4]{(x^3+2)^3}}$; б) $y = \left(e^{\sin x} - x\right)^2$;

в) $\cos(xy) = \dfrac{y}{x}$; г) $y = 2x^{\sqrt{x}}$;

47. а) $y = x\sqrt[3]{\dfrac{2}{1+x}}$; б) $y = \dfrac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$;

в) $xy + \ln y - 2\ln x = 0$; г) $y = (\ln x)^x$;

48. а) $y = \sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$; б) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$;

в) $e^{x+y} = \sin\dfrac{y}{x}$; г) $y = (\sin x)^{\cos x}$;

49. а) $y = \sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$; б) $y = x\arcsin\dfrac{2x+1}{3}$;

в) $(x+y)^2 = (x-2y)^3$; г) $y = (arctg 2x)^{\sin 3x}$;

50. а) $y = \dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$; б) $y = e^{-x^2}\cos^3(2x+3)$;

в) $y\ln x - x\ln y = x + y$; г) $y = (\sin 3x)^{\sqrt{x}}$.

51.-60. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$ та $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

51. а) $y = \dfrac{x-1}{x+1}e^{-x}$; б) $\begin{cases} x = t + \ln\cos t \\ y = t - \ln\sin t \end{cases}$;

52. а) $y = arctg x^2$; б) $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$;

53. а) $y = x^2\ln x$; б) $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{2}\sin 2t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$;

54. а) $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; б) $\begin{cases} x = t^5 + 2t \\ y = t^3 + 8t - 1 \end{cases}$;

55. а) $y = \ln ctg 4x$; б) $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{t} \end{cases}$;

56. а) $y = \sqrt[3]{(1-x)^2}$; б) $\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1) \\ y = \arccos(2t) \end{cases}$;

57. а) $y = \cos^2 x$; б) $\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ y = t^3 + t \end{cases}$;

58. а) $y = xe^{\frac{1}{x}}$; б) $\begin{cases} x = ctgt \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$;

59. а) $y = xe^{-x}$; б) $\begin{cases} x = \dfrac{2-t}{2+t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{2+t^2} \end{cases}$;

60. а) $y = \ln \ln x$; б) $\begin{cases} x = 2\cos^3 2t \\ y = \sin^3 2t \end{cases}$.

61.-70. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$:

61. $y = \dfrac{x+6}{x^2+13}, [-5;5]$; 62. $y = \dfrac{1}{2}x + \cos x, \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$;

63. $y = \dfrac{x-3}{x^2+16}, [-5;5]$; 64. $y = \dfrac{1}{2}x - \sin x, \left[\dfrac{3}{2}\pi; 2\pi\right]$;

65. $y = 4 - x - \dfrac{4}{x^2}, [1;4]$; 66. $y = 2\sqrt{x} - x, [0;4]$;

67. $y = \dfrac{8x+4}{x^2-15}, \left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$; 68. $y = \dfrac{10x}{1+x^2}, [0;3]$;

69. $y = x - 4\sqrt{x} + 5, [1;9]$; 70. $y = \dfrac{1}{2}x + \cos x, \left[-2\pi; -\dfrac{3}{2}\pi\right]$;

71.-80. Дослідити методами диференціального числення функцію та побудувати її графік:

71. $y = \dfrac{x^3-4}{4x^2}$; 72. $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$;

73. $y = \dfrac{x^2-11}{4x-3}$; 74. $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$;

75. $y = \dfrac{x^2-6x+4}{3x-2}$; 76. $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$;

77. $y = \dfrac{x^3+16}{x}$; 78. $y = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$;

79. $y = \dfrac{12x}{9+x^2}$ 80. $y = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

«Елементи інтегрального числення функцій»

1.-10. Знайти невизначені інтеграли:

1. а) $\int \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{2+\cos^2 x}}dx$; б) $\int (3x+4)e^{-2x}dx$,

в) $\int \dfrac{x^3-7}{x^3-x^2-2x}dx$, г) $\int \dfrac{dx}{5+\sin x}$;

2. а) $\int \frac{dx}{(3+tgx)\cos^2 x}$, б) $\int (x^2-2x)\cos 5x dx$,

в) $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2-1)}dx$, г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+3x}-\sqrt{2+3x}}$,

3. а) $\int \sqrt[3]{7-\cos 2x}\cdot \sin 2x dx$, б) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$,

в) $\int \frac{x^4-3}{x^3-4x}$, г) $\int \frac{1+\sqrt[4]{5-2x}}{\sqrt{5-2x}}dx$,

4. а) $\int \frac{\cos 5x}{3+2\sin 5x}dx$, б) $\int x^3 \cdot \ln(1+x^2)dx$,

в) $\int \frac{x^3+1}{x^3+x^2-2x}dx$, г) $\int \frac{dx}{4+\cos x}$,

5. а) $\int \frac{\ln x-1}{x\sqrt{\ln x}}dx$, б) $\int x\cdot arctg\frac{x}{2}dx$,

в) $\int \frac{x^3}{x^2-16}dx$, г) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$,

6. а) $\int \frac{e^{3x}}{16+3e^{6x}}dx$, б) $\int (3x^2+2x)e^x dx$,

в) $\int \frac{x^3-3}{(x-2)(x+4)}dx$, г) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$,

7. а) $\int \frac{(5-6x)dx}{\sqrt[3]{5x-3x^2}}$, б) $\int (x-3)\cdot \arcsin x dx$,

в) $\int \frac{x^3+5}{x^2+4x+3}dx$, г) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$,

8. а) $\int \frac{\ln^2 x+1}{x}dx$, б) $\int x^2\cdot arctgxdx$,

в) $\int \frac{(2x^2+1)dx}{x^3-4x}$, г) $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$,

9. а) $\int tgx\cdot \ln(\cos x)dx$, б) $\int x\cdot \ln(x^2+1)dx$,

в) $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-x}dx$, г) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$,

10. а) $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$, б) $\int (3x+2)\cdot 3^x dx$,

в) $\int \frac{x^3}{(x+2)(x-3)}dx$, г) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$.

11.-20. Обчислити означений інтеграл:

11. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$, 12. $\int_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$,

13. $\int_\pi^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$, 14. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$,

15. $\int_{-1}^1 xarctgxdx$, 16. $\int_0^{2\pi} (3-7x^2)\cos 2x dx$,

17. $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$, 18. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$,

19. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3}{x^2+1} dx,$ 20. $\int\limits_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x} dx..$

21.-30. Обчислити невласний інтеграл, або довести його розбіжність:

21. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+4x+5},$ 22. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}},$

23. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x},$ 24. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x-2)^2},$

25. $\int\limits_{-3}^{2} \frac{dx}{(x+3)^2},$ 26. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2},$

27. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}},$ 28. $\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{x dx}{(x^2+1)^2},$

29. $\int\limits_{0}^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx,$ 30. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}.$

31.-40. За допомогою означеного інтегралу обчислити площу фігури, яка обмежена лініями:

31. $y = -(x+1)^2 + 1, \quad x = -y.$

32. $y = -x^2 + 2x + 3, \quad y = 0, \quad y = \frac{2}{3}x, \quad x \geq 0.$

33. $y = \sin 2x, \quad y = \sin x, \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$

34. $y = -x^2 + 4, \quad y = 2x + 4, \quad y = 0.$

35. $xy = 4, \quad x + y - 5 = 0, \quad x = 0, \quad x = 4, \quad y = 0.$

36. $y = x^2, \quad y = (x-6)^2 - 4, \quad y = 0.$

37. $y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = 3x - \frac{1}{2}x^2, \quad y = 0.$

38. $y = \sqrt{x}, \quad y = -x + 2, \quad y = 0.$

39. $y = -x^2 + 4, \quad y = -(x+3)^2 + 9, \quad y = 0.$

40. $y = 12 + 6x - x^2, \quad y = x^2 - 2x + 2.$

41.-50. Знайти похідну $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функції $z = f(x, y)$:

41. $z = \ln\left(x^2 + e^{-2y}\right);$ 42. $z = \sqrt[3]{2x^3 - \ln y}$;

43. $z = tg\left(y^3 - 3x^2\right);$ 44. $z = e^{y^3 - 2x^2}$;

45. $z = ctg\left(y^2 - 2x^3\right);$ 46. $z = \sin\left(x^2 - 2y^3\right);$

47. $z = \cos\left(e^{-x} + y^2\right);$ 48. $z = \ln\left(x^2 - \sin y\right);$

49. $z = \sqrt[4]{2x^3 - \sin y}$; 50. $z = e^{\sin 2x + y^3}$.

51.-60. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

51. $z = -2x^2 + xy - 2y^2 + 5x - 5y - 8$;

52. $z = 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 10x + 8y + 7$;

53. $z = x^2 + 6xy + 2y^2 - 4x + 2y + 5$;

54. $z = 3x^2 - 2xy + 4y^2 - 8x + 10y - 3$;

55. $z = -3x^2 + 4xy - 2y^2 + 10x - 8y + 2$;

56. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 2$;

57. $z = x^2 - 3xy + y^2 - 5x + 5y + 3$;

58. $z = -x^2 + xy - y^2 - 9x + 6y + 5$;

59. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 5$;

60. $z = 2x^2 + 3xy + y^2 + 7x + 5y - 7$.

Знайти загальний та частинний розв'язок рівняння:

1. $(y' + 1)e^{2y} = 1$
2. $x \ln \frac{x}{y} dy - y dx = 0$
3. $y' - \frac{y}{1 - x^2} = 1 + x$
4. $(1 + y^2)dx = \left(\sqrt{1 + y^2} \sin y - xy\right)dy$
5. $xy^2 y' = x^2 + y^3$
6. $2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0$
7. $y'' + 2x(y')^2 = 0$
8. $yy'' - (y')^2 = y^4$
9. $y'' - 5y' + 6y = x^2 - x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{9}$
10. $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$
11. $y'' + 2y' = 5x + 1$
12. $y'' - 6y' + 8y = 3\sin x$
13. $y'' + 9y = \cos 3x$
14. $y'' - 2y' + y = e^x \sin 2x$
15. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$
16. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$

Список рекомендованих джерел:
"Вища математика"

1. Барановська Л. В. Завдання для практичних занять з "Вищої математики": Методичний посібник / Л. В. Барановська. – К. : Європейський університет, 2003. – 62 с.
2. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник / Т.І. Бубняк. – Львів : Новий світ – 2000, 2007. – 436 с.
3. Бугір М.К. Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі: Посібник [для студ. вищ. навч. закл.] / М.К. Бугір. – К. : Академія, 1998 – 272 с.
4. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. Навч. Посібник. У двох книгах. Книга 2 / [Васильченко У.П., Данилов В.Я., Лобаков А.У., Таран С.Ю]. – [2-е вид.]. – К. : Либідь, 1994. – 208 с.
5. Вища математика: Зб. задач у 2 ч. Ч.1. Лінійна і векторна алгебра / За заг. ред. П.П.Овчиннікова. – [2-е вид.]. – К. : Техніка, 2004. – 280 с.
6. Вища математика: Підручник / В.А. Домбровський, І.М. Крижанівський та інші; за ред. М.І. Шинкарика. – Тернопіль : В-во Карп'юка, 2003 – 480 с.
7. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. Навч. Посібник У двох книгах. Книга 1 / [Г.Л. Кулініч, Л.О. Максименко, В.В. Плахотник, Т.Й. Призва]. – [2-е вид.]. – К. : Либідь, 1994. – 312 с.
8. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик – К. : А.С.К., 2005. – 648 с.
9. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. Підручник / [Ю.К. Рудавський, П.П. Костробій, Х.П. Луник, Д.В. Уханська]. – Львів : Бескид Біт, 2002. – 262 с.
10. Лунгу К.Н., Письменный Д.Г. та др. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К.Н. Лунгу, Д.Г. Письменный. – [3-е изд., испр. и доп.]. – М. : Айрис – пресс, 2003. – 576 с.
11. Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д. Математичний аналіз для економістів: Навч.посібник / В.М. Міхайленко, Н.Д. Федоренко. – К. : Вид-во Європ. Ун-ту, 2002. – 298 с.
12. Рудавський Ю.К. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / Ю.К. Рудавський, П.П. Костробій, Д.В. Уханська. – Львів : Бескид Біт, 2002. – 256 с.
13. Шкіль М.І. Вища математика. Підручник у 3 кн.: Книга 1. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М. Котлова. – К. : Либідь, 1994. – 280 с.
14. Шкіль М.І. Вища математика. Підручник у 3 кн.: Книга 2. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М. Котлова. – К. : Либідь, 1994. – 352 с.
15. Шкіль М.І. Вища математика. Підручник у 3 кн.: Книга 3. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М. Котлова. – К. : Либідь, 1994. – 352 с.

"Теорія ймовірностей"

1. Бабак В.П., Білецький А.Я. та ін. Основи теорії ймовірностей та математичної статистики. – К., 2003
2. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: "Новий світ – 2000", 2007. – 436 с.

3. Бугір М.К. Посібник з теорії ймовірностей та математичної статистики. – Тернопіль, 1998. – 176 с.
4. Булига К.Б., Барановська Л.В. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики: Навч. посіб. для студ. економ. спец. – К., 2000
5. Валь О.Д. та ін. Теорія ймовірностей … від найпростішого: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закладів. – Чернівці, 2004
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1977. – 479 с.
7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1979. – 479 с.
8. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей із елементами математичної статистики. – К.: НМК ВО, 1991. –252 с.
9. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Практикум з курсу “Теорія ймовірностей і математична статистика”. – К.: КІНГ, 1991.
10. Лянце В., Чуйко Г. Вступ до нестандартної теорії ймовірностей: Тексти лекцій. – Л., 2002
11. Рабик В.М. Основи теорії ймовірностей: Навчальний посібник. – Львів: Магнолія плюс, 2006. – 176 с
12. Сеньо П.С. Теорія ймовірностей та математична статистика: Підручник. – К.: Центр навч. літератури, 2004. – 448 с.
13. Турчин В.М. Теорія ймовірностей: Основні поняття, приклади, задачі: Навч.посіб. – К.: Вид-во А.С.К., 2004
14. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл./ Р.К.Чорней та ін. – К.: МАУП, 2003. – 328 с.
15. Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей. – К.: Вища школа, 1994.