Східноєвропейський національний університет
імені Лесі Українки

Факультет інформаційних систем, фізики та математики
Кафедра вищої математики та інформатики

Ярослав Мамчич

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Методичні рекомендації

Луцьк
2015

УДК 519.6(072)
ББК 22.19я73-9
М 22

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки
(протокол № 2 від 21 жовтня 2015р).

Рецензенти:
Дутчак Б.І. – канд. технічних наук, зав. кафедри вищої математики Луцького національного технічного університету;
Музика Л.П. – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики та інформатики Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки.

Мамчич Я.М.
М 22 **Обчислювальні методи лінійної алгебри**: методичні рекомендації/ Ярослав Минович Мамчич. – Луцьк: ПП. Іванюк В.П., 2015. – 56 с.

Методичні рекомендації призначені для проведення занять з курсу «Обчислювальна математика та програмування» зі студентами хімічного факультету.
Рекомендовано студентам денної форми навчання.

УДК 519.6(072)
ББК 22.19я73-9

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Діяльність інженера-хіміка в умовах сучасного виробництва потребує проведення різних, як правило, досить складних, розрахунків. Обробка експериментальних даних у дослідній лабораторії, обґрунтування і вибір оптимальних умов проведення хімічного процесу, визначення об'ємів подачі і витрати сировини, розрахунок виходу хімічного продукту - усе це лише незначна частина обчислювальних задач, що постають перед хіміком.

Широке впровадження у дослідну і промислову хімію комп'ютерної техніки не тільки не звільняє хіміка від потреби поглибленого вивчення математичних методів стосовно до задач, що він має розв'язувати, але і робить це вивчення одним із обов'язкових етапів підготовки сучасного інженера-хіміка і хіміка-дослідника.

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ. ЗАСТОСУВАННЯ. ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ

Досвід розв'язування науково-дослідних і прикладних задач показує, що незалежно від їхньої складності кінцевої мети можна досягти або постановкою експерименту, або методом математичного моделювання. Кожен з цих методів має свої переваги і недоліки.

За допомогою експерименту можна розв'язувати навіть дуже складні задачі, при цьому достовірність результатів тим вища, чим ретельніше відпрацьована методика експерименту. Водночас здобуті результати будуть стосуватися тільки тих умов, за яких проводився експеримент, внаслідок чого узагальнення результатів на інші умови не коректне. Крім того, треба враховувати економічний бік постановки складного експерименту. Щодо цього, то більші можливості має метод математичного моделювання за допомогою ЕОМ, коли аналізують не реальну задачу, а її модельне зображення.

Процес математичного моделювання зображують у такій послідовності: фізична постановка задачі; математична постановка задачі; математичне дослідження задачі; аналіз і осмислення математичного розв'язку та порівняння його з експериментом.

Розглянемо докладніше математичну постановку і математичне дослідження задачі.

Математична постановка полягає у формуванні математичної моделі досліджуваної задачі, яка звичайно е системою рівнянь математичної фізики (диференціальних, Інтегральних, інтегрально-диференціальних).

Математичне дослідження задачі власне зводиться до розв'язування системи рівнянь і аналізу здобутих результатів.

Для порівняно простих задач вдається розв'язати вихідну систему рівнянь і розв'язок подати у вигляді залежностей, виражених через елементарні та інші відомі функції. Якщо це можливо, то говорять, що знайдено аналітичний (точний) розв'язок задачі. Однак переважна більшість практично важливих задач аналітичних розв'язків не має. У цих випадках використовують чисельні методи, які, оперуючи системою алгебраїчних рівнянь (аналогів рівнянь математичної фізики), дають можливість побудувати деяку послідовність арифметичних операцій, збільшення кількості яких до нескінченності дає точний розв'язок. Оскільки на практиці здійснюють скінченне число кроків (операцій), то знайдений розв'язок є наближеним. А через те що обчислювальні операції виконують над числами, то відповідні методи дістали назву *чисельних.* Найбільшого розвитку чисельні методи набули останнім часом завдяки застосуванню ЕОМ, що мають високу швидкість обчислень і велику ємність оперативної пам'яті. Проте основна роль при цьому відводиться, звичайно, людині, яка повинна вміти сформулювати і поставити задачу, описати її математичними залежностями (створити математичну модель об'єкта), скласти алгоритм розв'язання задачі на ЕОМ, написати програму на алгоритмічній мові, зрозумілій машині, розв'язати задачу й оцінити результати.

Щодо оцінювання результатів розрахунку, то слід зазначити, що поєднання чисельних методів і ЕОМ дає можливість зробити це ефективно й оперативно, варіюючи найсуттєвіші параметри розрахункової схеми задачі з наступним чисельним аналізом впливу їх на кінцевий результат. Фактично йдеться про чисельний експеримент, оскільки умови задачі можна змінювати багато разів.

Незважаючи на відмінності в методології, до чисельного експерименту щільно примикають фізичний експеримент і фізичне дослідження, особливо у тій частині, де потрібна оцінка достовірності здобутих результатів.

Математична модель об'єкта — це та сукупність рівнянь, за допомогою якої досліджують реальні фізичні об'єкти (процеси, явища). Математична модель не тотожна досліджуваному об'єкту, а є лише його наближеним описом, оскільки її будують з деякими спрощеннями та ідеалізацією. У моделі враховують найважливіші моменти і взаємозв'язки, найхарактерніші для досліджуваного реального об'єкта. Разом з тим внаслідок заміни реального об'єкта відповідною йому математичною моделлю стало можливим сформулювати задачу як математичну і скористатися для її розв'язання тим чи іншим математичним апаратом.

Алгоритм — це зрозумілий і точний припис (вказівка) виконавцеві здійснювати послідовність дій, спрямованих на досягнення зазначеної мети або розв'язання поставленої задачі.

Точність розв'язку — це міра близькості чисельного розв'язку до аналітичного.

Збіжність розв'язку — це поступове наближення його до точного.

Після вибору математичної моделі об'єкта і опису її на алгоритмічній машинній мові здійснюють чисельну реалізацію задачі на ЕОМ.

ДІЇ З МАТРИЦЯМИ

Множення матриць

Насамперед нагадаємо, що операція множення матриць A x B визначена тільки тоді, коли кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. Отже, добутком матриці A та матриці B називається матриця C, елемент якої c_{ij} дорівнює скалярному добутку i-го вектор-рядка матриці A та j-го вектор-стовпця матриці B. Це означення можна записати у вигляді рівності C = AB, де

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Наведемо програму, що обчислює добуток двох матриць. Розмірність і значення елементів матриць вводить користувач. У програмі передбачено обробку ситуації невідповідності матриць.

```
Program pryklad;
Uses  Crt;
type matrix=array[1..10,1..10] of real;
var i,j:integer;
  a,b, c:matrix;
  row1,row2:integer;
  col1,col2:integer;
procedure input(var mas:matrix;var line,kol:integer);
begin
  repeat
           write('Введіть кількість рядків >=1 ');
            readln(line);
            write('Введіть кількість стовпців >=1 ');
            readln(kol);
            if (line<1) or (kol<1) then
              writeln('Помилка');
    until (line>=1) and (kol>=1);
          writeln('input matrix:');
```

```
        for i:=1 to line do
    for j:=1 to kol do
      read(mas[i,j]);
end;
procedure output(mas:matrix;line,kol:integer);
begin
  for i:=1 to line do
    begin
      for j:=1 to kol do
        write(mas[i,j]:6:2,'                                   ');
      writeln;
    end;
end;
procedure mult;
var k:integer;
begin
  if col1<>row2 then
    writeln('multiplication is impossible - matrix are unconformable')
          else
      begin
        for i:=1 to row1 do
          for j:=1 to col2 do
            begin
              c[i,j]:=0;
              for k:=1 to col1 do
                c[i,j]:=c[i,j]+a[i,k]*b[k,j];
            end;
      end;
end;
begin
      clrscr;
```

```
writeln('Введіть матрицю А: ');
 input(A,row1,col1);
 writeln(''Введіть матрицю  В: ');
 input(B,row2,col2);
 writeln(Матриця А:');
 output(A,row1,col1);
 writeln('Матриця  В:');
 output(B,row2,col2);
 mult;
 writeln(‘Рельтат :');
 output(c,row1,col2);
writeln(‘Для виходу натисніть Enter');
readln;
end.
```

Обчислення визначника квадратної матриці

Поняття визначника застосовне лише до квадратних матриць. Матриця називається квадратною, якщо кількість її рядків дорівнює кількості стовпців. Означення поняття визначника квадратної матриці можна знайти у будь-якому підручнику з лінійної алгебри. Обчислення визначника за його означенням є неефективним, і на практиці цей метод не використовується. Нижче буде наведено програмну реалізацію набагато ефективнішого методу, що ґрунтується на зведенні матриці до трикутного вигляду. Перш ніж розглядати цей метод, дамо означення декількох базових понять.

Нагадаємо, що квадратна матриця має дві діагоналі. Діагональ, яка проходить від лівого верхнього кута матриці до її правого нижнього кута, називається головною. Елементи матриці, що мають рівні індекси рядків і стовпців, розташовані на головній діагоналі і називаються діагональними. Інша діагональ проходить із правого верхнього кута матриці до її лівого нижнього кута. Така діагональ називається побічною. Індекси елементів побічної діагоналі відповідають такій функціональній залежності: $j = n - i + 1$, де i — номер рядка, j — номер стовпця, а n - розмірність матриці. Матриця називається верхньою трикутною, якщо значення всіх її елементів, що розташовані під головною діагоналлю, дорівнюють нулю. Визначник трикутної матриці дорівнює добутку всіх її діагональних елементів. Розглянемо алгоритм зведення матриці до трикутного вигляду.

На першому кроці алгоритму отримують нульові значення всіх елементів першого стовпця матриці, починаючи з другого елемента. Для цього визначаються коефіцієнти виключення за формулою $k_i = -a_{i1}/a_{11}$ і до елементів i-го рядка додаються відповідні елементи першого рядка, помножені на k_i. На другому кроці алгоритму аналогічним чином отримують нульові значення всіх елементів другого стовпця матриці, починаючи з його третього елемента. Коефіцієнти виключення визначатимуться як $k_i = -a_{i2}/a_{22}$. На ці коефіцієнти множитимуться елементи другого рядка, і отримані результати додаватимуться до елементів інших рядків. Процес триватиме n-1 кроків. Значення елементів трикутної матриці визначаються за формулою

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik} \times a_{kj}}{a_{kk}}$$

Отже, на кожній ітерації алгоритму опорними є діагональні елементи. Це дільники, тому їх значення не повинні дорівнювати нулю. Якщо r-й опорний елемент дорівнює нулю, то r-й і будь-який інший рядок, в r-му стовпці якого міститься ненульовий елемент, треба поміняти місцями. Внаслідок такої перестановки рядків визначник змінює знак. Всі інші дії алгоритму не змінюють значення визначника.

Запишемо програму обчислення визначника квадратної матриці за поданим вище алгоритмом. Процедури input та output виконують введення та виведення матриці, процедура triangular(k: integer) призначена для отримання нулів під головною діагоналлю в k-му стовпці, процедура change міняє місцями рядки, а процедура determinant обчислює визначник.

```
Program Pryklad;
Uses crt;
var det:real;
  n:integer;
  a:array[1..10,1..10]of real;
  sign:integer;
procedure input;
var i,j:integer;
begin
  writeln('Задайте розмір матриці');
  readln(n);
  writeln('Введіть елементи матриці');
  for i:=1 to n do
   for j:=1 to n do
     begin
       write('a[',i,',',j,']=');
       readln(a[i,j]);
     end;
end;
procedure output;
var i,j:integer;
begin
```

```
  for i:=1 to n do
    begin
      for j:=1 to n do
        write(a[i,j]:5:2,' ');
      writeln;
    end;
end;
procedure triangular(k:integer);
var l,j:integer;
  koef:real;
begin
  for l:=k+1 to n do
    begin
      koef:=a[l,k]/a[k,k];
      for j:=1 to n do
        a[l,j]:=a[l,j]-a[k,j]*koef;
    end;
end;
procedure change(ii:integer);
var j,k:integer;
  tmp:real;
begin
  sign:=1;
  for j:=1 to n-ii do
    if a[ii+j,ii]<>0 then
      begin
        for k:=1 to n do
          begin
            tmp:=a[ii,k];
            a[ii,k]:=a[ii+j,k];
            a[ii+j,k]:=tmp;
```

```
        end;
       sign:=-sign;
     end;
end;
procedure determinant;
var i:integer;
begin
  for i:=1 to n-1 do
    begin
      if a[i,i]=0 then
        change(i);
        triangular(i);
    end;
  det:=1;
  for i:=1 to n do
    det:=det*a[i,i];
  if sign<0 then det:=-det;
end;
begin
            writeln('Визначник матриці');
           input;
           writeln('Перевірка матриці');
           output;
           determinant;
           writeln('Трикутна матриця');
           output;
           writeln('Визначник дорівнює',det:5:2);
           writeln('Для виходу натисніть Enter’);
           readln;
         end.
```

ЗНАХОДЖЕННЯ КОРЕНІВ РІВНЯНЬ

Основні поняття

Будь яке рівняння з одним невідомим має вигляд:

$$f(x)=0. \qquad (1)$$

В залежності від виду функції $f(x)$ рівняння (1) є алгебраїчним або трансцендентним.

Наприклад: рівняння вигляду $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n=0$ називається алгебраїчним. Тут $a_0, a_1, ..., a_n$ будь-які дійсні числа; $\boldsymbol{n}$ натуральне число. Якщо в рівняння (1) входять трансцендентні функції (показникова a^x, логарифмічна $log_a x$, тригонометричні $cos(x)$, $tg(x)$ та ін.), то рівняння називається трансцендентним.

Розв'язати рівняння (1) - це означає знайти його корені, тобто ті значення x, які перетворюють рівняння (1) у тотожність. Корені можуть бути дійсними, або комплексними.

Порівняно з трансцендентними алгебраїчні нелінійні рівняння мають ту перевагу, що наперед відомо точну кількість їхніх коренів, а отже, відомо, коли слід закінчити їх пошук при дослідженні алгебраїчного нелінійного рівняння.

1. Алгебраїчне рівняння n-го порядку має n коренів, які можуть бути дійсними або комплексними.

2. Кількість додатних дійсних коренів дорівнює (або менша на ціле число) кількості змін знаків у послідовності коефіцієнтів a_i.

3. Кількість від'ємних дійсних коренів дорівнює (або менша на ціле число) кількості змін знаків у послідовності коефіцієнтів a_i при заміні x на $-x$.

Далі ми будемо розглядати тільки дійсні корені.

Точне розв'язання як алгебраїчних, так і трансцендентних рівнянь не завжди є можливим. На практиці іноді немає потреби у точному розв'язанні. Достатньо знайти корені рівняння наближено.

Наближене знаходження ізольованих дійсних коренів рівняння (1) складається з двох етапів.

Перший етап: відокремлення коренів, тобто розбиття області визначення функції $f(x)$ на відрізки, в кожному з яких знаходиться один і тільки один корінь рівняння (1). Границі кожного такого відрізку можна розглядати як нульове наближення кореня (ліва межа - з недостатністю, права межа - з надлишком).

Другий етап: звуження границь виділеного відрізку, тобто знаходження кореня рівняння з довільним ступенем точності. Інакше: уточнення наближених коренів.

Аналітичний, графічний та табличний методи відокремлення коренів рівняння

Відокремлення коренів здійснюють одним із трьох способів: аналітичним, графічним або табличним.

Відокремлення коренів аналітичним способом здійснюється на основі теореми з математичного аналізу.

Теорема**:** якщо неперервна функція $f(x)$ приймає значення різних знаків на кінцях відрізку $[a,b]$, тобто $f(a)f(b)<0$, то всередині цього відрізку знаходиться хоча б один корінь рівняння $f(x)=0$, тобто знайдеться хоча б одне число c з відрізку $[a,b]$, таке що $f(c) = 0$.

Корінь буде єдиний, якщо перша похідна $f'(x)$ існує і зберігає постійний знак всередині інтервалу (a,b), тобто якщо $f'(x)>0$, або $f'(x)<0$ при $a < x < b$ інакше кажучи: $f(x)$ на інтервалі (a, b) є монотонною.

Приклад. Аналітичним способом відокремити корені рівняння:

$$x^4 – 4x – 1 = 0. \qquad (2)$$

Розв'язок. Область визначення функції $f(x)$ – уся числова вісь. Для знаходження інтервалів монотонності, знайдемо похідну функції $f(x) = x^4 – 4x – 1$.

$$f'(x) = 4x^3 – 4.$$

Розв'яжемо рівняння:

$$4x^3 – 4 = 0.$$

Зрозуміло, що $x = 1$.

Точка, в якій перша похідна дорівнює нулю розбиває область визначення $(–\infty;+\infty)$ на інтервали монотонності $(–\infty;1)$ та $(1;+\infty)$. Перевіримо знаки функції $f(x)$ на кінцях знайдених інтервалів.

Маємо: $f(–\infty) > 0$; $f(1) < 0$; $f(+\infty) > 0$.

Отже, рівняння (2) має тільки два дійсних кореня, з яких один знаходиться в інтервалі $(–\infty;1)$, а другий в інтервалі $(1;+\infty)$.

Звузити інтервали можна проаналізувавши поведінку функції $f(x)$, підставивши кілька значень x у формулу для $f(x)$.

Так, легко перевірити, що $f(–1)=4>0$, $f(2)=7>0$. Отже один корінь рівняння знаходиться в інтервалі $(–1,1)$ а інший – в інтервалі $(–1,2)$.

При графічному методі відокремлення коренів будують графік функції $y=f(x)$ і визначають абсциси точок перетину цього графіка з віссю OX, які є наближеними значеннями шуканих коренів. Якщо рівняння $f(x)=0$ не має близьких між собою коренів, то цим способом його корені легко відокремлюються. На практиці буває вигідно рівняння $f(x)=0$ замінити рівносильним йому рівнянням $\varphi(x)=\psi(x)$ (два рівняння називаються рівносильними, якщо вони мають однакову множину коренів), де функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ більш прості ніж функція $f(x)$. Тоді, побудувавши графіки функцій $y=\varphi(x)$ і $y=\psi(x)$, шукані корені знайдемо як абсциси точок перетину цих графіків.

Приклад: Відокремити графічно корені рівняння

$$x^2-\cos x=0.$$

Розв'язок.

Перепишемо рівняння у вигляді

$$x^2=\cos x.$$

Побудуємо графіки функцій

$$y=x^2 \text{ і } y=\cos x.$$

Графіки зображено на рис.1.

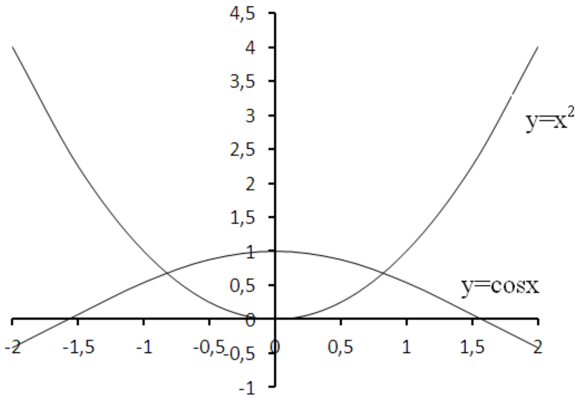


Рис.1. Геометрична інтерпретація графічного методу відокремлення коренів

З рисунка видно, що корені рівняння знаходяться в інтервалах (–1,–0,5) та (0,5,1). Так як графіки функцій $y=x^2$ та $y=cosx$ симетричні відносно осі OY, то достатньо знайти тільки один корінь. Інший матиме таке ж значення тільки з протилежним знаком.

Відокремлення коренів табличним методом проводять шляхом табулювання функції на проміжку, де передбачається наявність коренів.

Розглянемо рівняння

$$x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0 .$$

Це рівняння четвертого порядку, а отже воно може мати не більше 4 дійсних коренів.

Неважко помітити, що функція

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + x + 1 > 0$$

для усіх x>3 та x<-3. Отже корені рівняння будуть знаходитись на проміжку [-3;3].

Протабулюємо функцію

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + x + 1$$

на відрізку [-3;3] з кроком 0,5. Програми табулювання розглянуті у лабораторних роботах №5 та №6.

Результат табулювання

x=	-3	y=	34
x=	-2,5	y=	6,3125
x=	-2	y=	-5
x=	-1,5	y=	-6,6875

x=	-1	y=	-4
x=	-0,5	y=	-0,6875
x=	0	y=	1
x=	0,5	y=	0,3125
x=	1	y=	-2
x=	1,5	y=	-3,6875
x=	2	y=	-1
x=	2,5	y=	11,3125
x=	3	y=	40

Як бачимо із результатів табулювання, функція *f(x)* змінює свій знак на відрізках [-2,5;-2], [-0,5;0], [0,5;1] та [2;2,5].

Для уточнення проміжків з коренями можна повторно протабулювати функцію на кожному із вище перерахованих проміжків зменшивши крок до 0,05.

Кількаразове повторне табулювання дозволяє знайти корінь з наперед заданою точністю ε. При цьому, крок останнього табулювання повинен бути менший або рівний ε.

Для прикладу знайдемо з точністю ε=0,001 корінь рівняння на початковому відрізку [-2,5;-2]. Для цього повторно запускаємо програму табулювання, задавши нові межі для проміжку та новий крок.

Результати табулювання з кроком 0,05 наведено нижче

x=	-2,5	y=	6,3125
x=	-2,45	y=	4,567506
x=	-2,4	y=	2,9776
x=	-2,35	y=	1,535506
x=	-2,3	y=	0,2341
x=	-2,25	y=	-0,93359
x=	-2,2	y=	-1,9744
x=	-2,15	y=	-2,89499

x=	-2,1	y=	-3,7019
x=	-2,05	y=	-4,40149
x=	-2	y=	-5

Як видно із результатів табулювання, функція *f(x)* змінює свій знак на відрізку [-2,3;-2,25]. Протабулюємо функцію на цьому відрізку з кроком 0,005.

Отримаємо наступний результат

x=	-2,3	y=	0,2341
x=	-2,295	y=	0,111427
x=	-2,29	y=	-0,00992
x=	-2,285	y=	-0,12993
x=	-2,28	y=	-0,24864
x=	-2,275	y=	-0,36603
x=	-2,27	y=	-0,48212
x=	-2,265	y=	-0,59692
x=	-2,26	y=	-0,71042
x=	-2,255	y=	-0,82265
x=	-2,25	y=	-0,93359

Функція *f(x)* змінює знак на відрізку [-2,295;-2,29].

Протабулюємо функцію на вказаному проміжку з кроком 0,0005.

Отримуємо остаточний результат

x=	-2,295	y=	0,111427
x=	-2,2945	y=	0,099233
x=	-2,294	y=	0,087053
x=	-2,2935	y=	0,074885
x=	-2,293	y=	0,062731
x=	-2,2925	y=	0,05059
x=	-2,292	y=	0,038463

x=	-2,2915	y=	0,026348
x=	-2,291	y=	0,014247
x=	-2,2905	y=	0,002159
x=	-2,29	y=	-0,00992

Корінь рівняння знаходиться у відрізку [-2,2905;-2,29]. За величину шуканого кореня приймаємо середину відрізка: $x_0=-2{,}29025$. Точність дорівнює 0,00025, що менше за задану точність ε=0,001, тобто отримано значення кореня із точністю вищою за задану.

Таким чином, використовуючи процедуру табулювання функції можна відокремити корені та обчислити їх із наперед заданою точністю. Сам процес обчислення коренів не є оптимальним, тому табулювання використовують в основному для відокремлення коренів.

Завдання

Завдання 1.Відокремити корені рівняння

$$x^3 + x - 3 = 0$$

аналітичним, графічним та табличним методами.

Уточнити корінь рівняння табличним методом за допомогою табулювання функції з точністю ε=0,001.

Уточнення коренів рівняння методом половинного ділення

Нехай є рівняння

$$f(x) = 0.$$

Для знаходження кореня рівняння, який належить відрізку $[a,b]$ треба поділити цей відрізок навпіл (рис.2).

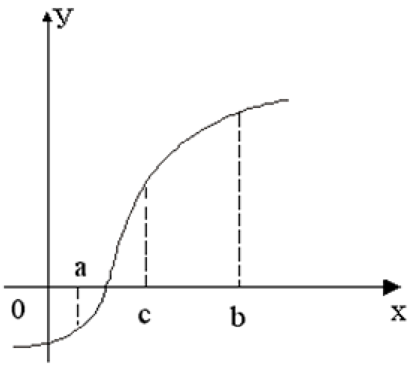


Рис.2. Геометрична інтерпретація методу половинного поділу

Якщо

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0, \text{ то } c=\frac{a+b}{2}$$

є коренем рівняння. Якщо

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0,$$

тоді обираємо ту із половин, на кінцях якої функція *f(x)* має протилежні знаки.

Новий зменшений відрізок знову поділимо навпіл і проведемо повторно ті ж самі дії. В результаті здобудемо на деякому етапі або точний корінь або послідовність вкладених один в одного відрізків $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$,…,$[a_n,b_n]$, таких що $f(a_n)f(b_n)<0$ (n= 0,1,2...). Процес поділу продовжимо до тих пір, доки довжина відрізку, на кінцях якого функція має протилежні знаки, не буде менше заданого числа ε, яке визначає потрібну точність наближення. Корінь x_0 приймається рівним середньому арифметичному значенню кінців знайденого звуженого відрізка. Похибка у цьому випадку не перевищує ε/2. Якщо корені рівняння не відділені на відрізку $[a,b]$, то таким чином можливо знайти один з коренів рівняння.

Метод половинного поділу практично зручно застосовувати для грубого знаходження кореня даного рівняння, так як при збільшені точності значно збільшується об’єм обчислювальної роботи.

Приклад: Методом половинного поділу знайти з точністю до $\varepsilon = 10^{-3}$ корінь рівняння

$$f(x)=x^4+2x^3-x-1=0,$$

який належить відрізку [0;1].

Наведемо текст програми для уточнення кореня рівняння методом половинного поділу.

```
program  pryklad;
{Метод половинного поділу}
uses Crt;
var a, b, c, eps : real;
 function f(var x : real) : real;
    begin
    f: =x*x*x*x + 2*x*x*x -x-1
    end;
         begin
            ClrScr;
            Writeln (‘Введіть a, b, eps’);
            Readln ( a, b, eps );
            Repeat c:=(a+b)/2;
            If f(a)*f(c)<=0 then b: =c else a: =c;
            Until (abs (b-a)<=eps);
            Writeln (‘корінь=’ , c:7:3);
            Writeln(‘Для виходу натисніть Enter’);
             ReadLn;
        end.
```

Завдання

Завдання 1.Відокремити корені рівняння

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

аналітичним, графічним та табличним методами.

Скласти відповідну програму для уточнення коренів рівняння методом половинного поділу з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Обчислити значення функції для знайдених коренів.

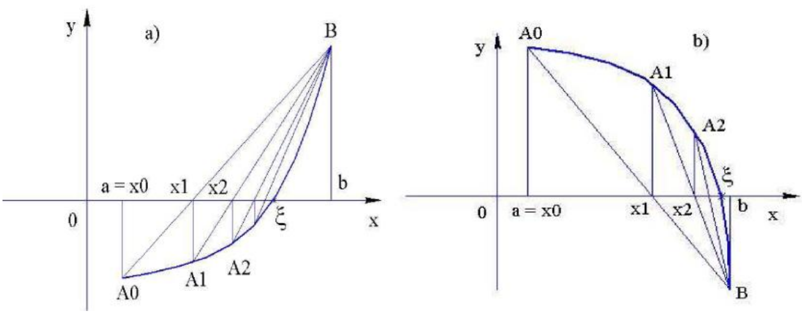
Уточнення коренів рівняння методом хорд

Нехай є рівняння

$$f(x) = 0,$$

де $f(x)$ - неперервна функція, яка має на відрізку $[a, b]$ похідні першого та другого порядків.

Відокремлений корінь ξ, знаходиться на відрізку $[a, b]$, тобто $f(a)f(b)<0$. Ідея методу полягає в тому, що на достатньо малому відрізку $[a, b]$ дуга кривої $y=f(x)$ замінюється стягуючою її хордою. Як наближене значення кореня приймається точка перетину хорди з віссю Ox (рис.3).



а) б)

Рис. 3. Геометрична інтерпретація методу хорд

Розглянемо випадки, коли перша та друга похідні мають однакові знаки, тобто $f'(x)\, f''(x) > 0$.

Нехай $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f'(x)>0$ та $f''(x)>0$ (рис.7а). Графік функції $f(x)=0$ проходить через точки $A_0(a,f(a))$ та $B(b,f(b))$. Корінь рівняння ξ є абсцисою точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю Ox. Ця точка невідома. Якщо ми замінимо дугу A_0B хордою A_0B, то точка перетину хорди з віссю Ox x_1 буде приблизно дорівнювати значенню кореня.

Рівняння хорди, яка проходить через точки A_0 та B, має вигляд:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}$$

Знайдемо значення $x = x_1$, для якого $y=0$. Воно дорівнює:

$$x_1=a-\frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

Ця формула називається формулою хорд.

Тепер корінь рівняння ξ знаходиться в середині відрізка $[x_1, b]$. Якщо значення кореня нас не задовольняє, його можна уточнити, застосовуючи метод хорд для відрізка $[x_1, b]$.

З'єднаємо точки $A_1(x_1,f(x_1)$ з точкою $B(b, f(b))$ і знайдемо точку перетину хорди A_1B з віссю Ox.

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)(b-x_1)}{f(b)-f(x_1)}$$

Продовжуючи процес, знаходимо

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(b - x_2)}{f(b) - f(x_2)}$$

………………

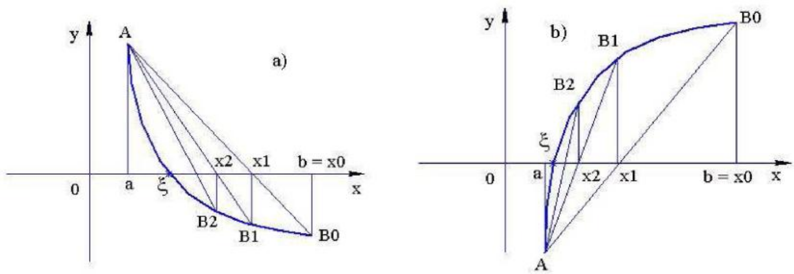
……………….

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$

Процес продовжуємо доти, доки не визначимо корінь ξ із заданою точністю, тобто $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, де ε – задана точність.

За вищенаведеними формулами обчислюються також корені для випадку, коли $f(a)>0$, $f(b)<0$, $f'(x)<0$ та $f''(x)<0$ (рис.7б).

Розглянемо випадки, коли перша та друга похідні мають різні знаки, тобто $f'(x)\,f''(x)<0$ (рис.4).



а) б)

Рис. 4. Геометрична інтерпретація методу хорд

Нехай, наприклад, $f(a)>0$, $f(b)<0$, $f'(x)<0$ та $f''(x)>0$ (рис.8а). З'єднаємо точки $A(a,f(a))$ та $B_0(b,f(b))$ і запишемо рівняння хорди, що проходить через A та B_0:

$$\frac{y - f(b)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - b}{b - a}$$

Далі, діючи як і в попередньому випадку, отримаємо формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)}$$

За такими саме формулами знаходимо наближене значення кореня і для випадку, коли $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f'(x)>0$ та $f''(x)<0$ (рис.8б).

Вибір формул для уточнення кореня за методом хорд виконують за такими правилами.

Правило 1.

Якщо $f'(x)f''(x)>0$ на відрізку $[a,b]$, то нерухомим кінцем буде "b" і всі наближення до кореня знаходяться з боку кінця "a".

Якщо $f'(x)f''(x)<0$, то нерухомий кінець "a", і всі наближення до кореня знаходяться з боку кінця "b".

Правило 2.

Нерухомим є той кінець відрізку, для якого знак функції $f(x)$ співпадає зі знаком її другої похідної $f''(x)$.

Узагальнена формула методу хорд має вигляд

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - c)}{f(x_n) - f(c)},$$

де c - нерухома точка.

Приклад: Методом хорд знайти з точністю до $\varepsilon = 10^{-3}$ корінь рівняння

$$f(x)=x^4+2x^3-x-1=0,$$

який належить відрізку [0;1].

Для уточнения кореня методом хорд скористаємося наступною програмою

```
program  pryklad;
{Метод хорд}
uses Crt;
var a, b, x, s, eps : real;
 function f(var x : real) : real;
   begin
   f: =x*x*x*x + 2*x*x*x -x-1
   end;
function f2(x:real):real;
   begin
   f2:=12*x*x+12*x;
   end;
begin
   ClrScr;
   Writeln (‘введіть a, b, eps’);
   Readln ( a, b, eps );
   If f(b)*f2(b)>0 then
      begin
         s:=a;
         Repeat
         x:=s;
         s:=x-f(x)/(f(b)-f(x))*(b-x);
         Until(ABS(x-s)<=eps);
         Writeln('Корінь рівняння - ',s:7:3);
      end;
   If f(a)*f2(a)>0 then
      begin
         s:=b;
         Repeat
```

```
        x:=s;
        s:=x-f(x)/(f(x)-f(a))*(x-a);
        Until(ABS(x-s)<=eps);
        Writeln('Корінь рівняння - ',s:7:3);
      end;
    Writeln('Для виходу натисніть Enter');
    ReadLn;
end.
```

Завдання

Завдання 1.Відокремити корені рівняння

$$\ln x + \sqrt{x} = 0$$

графічним або табличним методами.

Скласти відповідну програму для уточнення коренів рівняння методом хорд з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Обчислити значення функції для знайдених коренів.

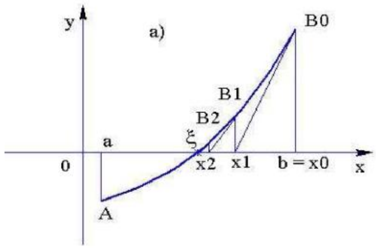
Уточнення коренів рівняння методом дотичних

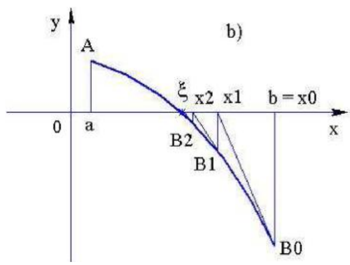
Нехай задано рівняння

$$f(x) = 0,$$

де $f(x)$ - неперервна функція, яка має на відрізку $[a, b]$ похідні першого та другого порядків.

Відокремлений корінь ξ, знаходиться на відрізку $[a, b]$, тобто $f(a)f(b) < 0$. Ідея методу полягає в тому, що на достатньо малому відрізку $[a, b]$ дуга кривої $y=f(x)$ замінюється дотичною. Як наближене значення кореня ξ приймається точка перетину дотичної з віссю Ox (рис.5).





а) б)

Рис.5. Геометрична інтерпретація методу дотичних

Розглянемо випадки, коли перша та друга похідні мають однакові знаки, тобто $f'(x)\, f''(x) > 0$ (рис.5).

Нехай $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f'(x)>0$ та $f''(x)>0$ (рис.5а). Графік функції $f(x)=0$ проходить через точки $A_0(a,f(a))$ та $B(b,f(b))$. Корінь рівняння $f(x)=0$ є абсцисою точки перетину графіка функції $y=f(x)$ з віссю Ox. Ця точка поки невідома. Якщо провести дотичну до кривої в точці A, то вона перетне вісь Ox у точці, що не належить відрізку $[a,b]$. Тоді проведемо дотичну у точці B_0.

Рівняння дотичної в точці $B_0(b; f(b))$ має вигляд:

$$y-f(b)=f'(b)\,(x-b).$$

Знайдемо значення x_1, для якого $y = 0$:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}\ .$$

Ця формула називається формулою дотичних.

Тепер корінь рівняння знаходиться в середині відрізка $[a,x_1]$. Якщо значення кореня нас не задовольняє, його можна уточнити, застосовуючи метод дотичних для відрізка $[a,x_1]$. Проведемо дотичну в точці $B_1(x_1, f(x_1))$ і знайдемо точку перетину дотичної з віссю *Ox*.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f^{'}(x_1)}\,.$$

Продовжимо процес і знаходимо

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f^{'}(x_2)}\,,$$

………………

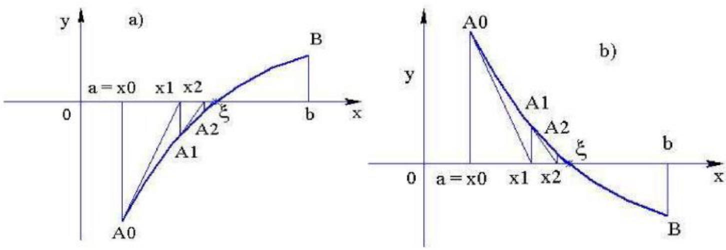
………………

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}.$$

Процес продовжуємо доки не визначимо корінь із точністю $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, де ε– задана точність.

За вищенаведеними формулами обчислюються також корені для випадку, коли $f(a)>0$, $f(b)<0$, $f^{'}(x)<0$ та $f^{''}(x)<0$ (рис.5б).

Розглянемо випадки, коли перша та друга похідні мають різні знаки, тобто $f^{'}(x)\,f^{''}(x)<0$ (рис.6).



а) б)

Рис.6. Геометрична інтерпретація методу дотичних

Нехай, наприклад, $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f^{'}(x)>0$ та $f^{''}(x)<0$

(рис.6а).

Якщо провести дотичну до кривої в точці В, то вона перетинатиме вісь *Ox* у точці, що не належить відрізку [*a, b*]. Тоді проведемо дотичну в точці A_0. Рівняння дотичної в точці A_0 *(a;f(a))* має вигляд:

$$y - f(a) = f(a)(x - a).$$

Знайдемо значення x_1, для якого $y = 0$:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Процес продовжуємо доки не визначимо корінь із точністю $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, де ε – задана точність.

За такими ж формулами знаходимо наближене значення кореня і для випадку, коли $f(a)>0$, $f(b)<0$, $f'(x)<0$ та $f''(x)>0$ (рис.6б).

У першому і другому випадках формули відрізняються тільки початковим наближенням: у першому випадку за x_0 приймаємо кінець відрізка *b*, у другому - початок *a*.

Вибір формул для уточнення кореня за методом дотичних виконують за такими правилами.

Правило 1.

Якщо $f'(x)f''(x)<0$ на відрізку [*a,b*], то нерухомим кінцем буде «*b*" і всі наближення до кореня знаходяться з боку кінця "*a*".

Якщо $f'(x)f''(x)>0$, то нерухомий кінець «*a*», і всі наближення до кореня знаходяться з боку кінця "*b*".

Правило 2.

Дотичну належить проводити у тому кінці дуги *AB*, для якого знак функції *f(x)* співпадає зі знаком її другої похідної $f''(x)$.

Приклад: Методом дотичних знайти з точністю до $\varepsilon = 10^{-3}$ корінь рівняння

$$f(x)=x^4+2x^3-x-1=0,$$

який належить відрізку [0;1].

Для уточнення кореня методом дотичних скористаємося наступною програмою

```
program  pryklad;
{Метод дотичних}
uses Crt;
var a, b, x, s, eps : real;
 function f(var x : real) : real;
    begin
    f: =x*x*x*x + 2*x*x*x –x-1
    end;
function f1(var x : real) : real;
    begin
    f1: =4*x*x*x + 6*x*x-1
    end;
function f2(x:real):real;
    begin
    f2:=12*x*x+12*x;
    end;
begin
    ClrScr;
    Writeln (‘введіть a, b, eps’);
```

```
    Readln ( a, b, eps );
    If f(b)*f2(b)>0 then
        begin
            s:=b;
            Repeat
            x:=s;
            s:=x–f(x)/f1(x);
            Until(ABS(x–s)<=eps);
            Writeln('Корінь рівняння – ',s:7:3);
        end;
    If f(a)*f2(a)>0 then
        begin
            s:=a;
            Repeat
            x:=s;
            s:=x–f(x)/f1(x);
            Until(ABS(x–s)<=eps);
            Writeln('Корінь рівняння – ',s:7:3);
        end;
    Writeln('Для виходу натисніть Enter');
    ReadLn;
end.
```

Завдання

Завдання 1.Відокремити корені рівняння

$$\ln x + x^2 = 0$$

графічним та табличним методами.

Скласти відповідну програму для уточнення коренів рівняння методом дотичних з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Обчислити значення функції для знайдених коренів.

ТОЧНІ ТА ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Дано систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

Розв'язком системи називають таку сукупність значень невідомих $x_1, x_2, .., x_n$, яка при підстановці в дану систему перетворює всі рівняння на тотожності.

Систему (1) можна записати у матричній формі

$$A \cdot \overline{X} = \overline{B} \tag{2}$$

де $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Розв’язком системи (2) називається n-компонентний вектор-стовпець

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

який перетворює матричне рівняння (2) у числову тотожність.

Система називається сумісною, якщо є хоча б один розв’язок. У протилежному випадку система називається несумісною.

Дві системи еквівалентні, якщо множини їх розв’язків співпадають.

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того що б система лінійних неоднорідних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці коефіцієнтів дорівнював рангу розширеної матриці.

Теорема Крамера. Для того що б система n лінійних неоднорідних рівнянь з n невідомими мала єдиний розв’язок, необхідно і достатньо, щоб визначник матриці коефіцієнтів відрізнявся від нуля. У противному випадку неоднорідна система не має розв’язків або має їх безліч.

Існуючі чисельні методи розв'язування систем лінійних рівнянь можна поділити на дві групи: прямі (скінченні) та ітераційні (нескінченні). Прямі методи дозволяють одержати розв'язок за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій (звідси назва «скінченні»), причому цей розв'язок буде точним, якщо обчислювати точно (без округлень). Тому прямі методи називають ще точними. Ітераційні методи дозволяють одержати розв'язок системи із заданою точністю шляхом збіжних нескінченних процесів (звідси назва «нескінченні»).

Точні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Метод Крамера

Дано систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Система має єдиний розв'язок, якщо визначник цієї системи відрізняється від нуля: $|A| \neq 0$. Позначимо: $|A_k|$ - визначник, отриманий з $|A|$ заміною стовпця коефіцієнтів a_{ik} стовпцем коефіцієнтів b_i ($i = 1 \ldots n$, $k = 1 \ldots n$).

Наприклад,

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тоді розв'язок системи рівнянь (1) отримуємо за формулами Крамера:

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|}, \quad k = 1..n.$$

Якщо $|A| = 0$ і не всі $|A_k| = 0$, то система (1) несумісна, тобто не має жодного розв'язку.

Метод оберненої матриці

Якщо система записана у матричному вигляді:

$$A \cdot \overline{X} = \overline{B},$$

тоді, розв'язок системи можна знайти із рівняння:

$$\overline{X} = A^{-1}\overline{B},$$

де A^{-1} - матриця, обернена до матриці A.

Метод Крамера і метод оберненої матриці мають велике теоретичне значення, але через великий обсяг обчислювальної роботи мало ефективні при чисельному розв'язуванні лінійних алгебраїчних систем, тому що за цими формулами треба обчислювати значення $(n+1)$ визначників порядку n.

Метод Гауса

Дано систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases} \tag{1}
$$

Прямий хід методу Гауса полягає у приведенні системи (1) до трикутного вигляду

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2j}x_j + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad a'_{ij}x_j + \ldots + a'_{in}x_n = b'_i \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad a'_{nn}x_n = b'_n
\end{cases} \tag{2}
$$

де a_{ij} - нові коефіцієнти при змінних, b_i' - нові праві частини.

Зворотній хід методу Гауса починають з останнього рівняння і поступово піднімаються до першого рівняння:

$$
x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}}\left(b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right), \quad i = n, n-1, n-2, \ldots 1 \tag{3}
$$

Корені лінійних систем алгебраїчних рівнянь за методом Гауса на сучасних ЕОМ обчислюють за спеціальними стандартними програмами. При розв’язуванні систем рівнянь методом Гауса виконують округлення, тому виникають різниці між значеннями лівих частин і значеннями правих частин (нев’язки). Якщо нев’язки досить малі, то можна стверджувати, що розв’язок системи знайдено з малими похибками.

Приклад 1. Розв’язати систему рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x+7y+13z=0 \\ 3x+14y+12z=18 \\ 5x+25y+16z=39 \end{cases}$$

Розв’язок. Приведемо систему до трикутного вигляду. Для цього друге рівняння складемо з першим, яке помножимо на $-\frac{3}{2}$ і виключимо x із другого рівняння. Аналогічно, третє рівняння складемо з першим, яке помножимо на $-\frac{5}{2}$ і виключимо x із третього рівняння.

Прямий хід:

$$\begin{cases} 2x+7y+13z=0 \\ \frac{7}{2}y-\frac{15}{2}z=18 \\ \frac{15}{2}y-\frac{33}{2}z=39 \end{cases}$$

Зворотній хід:

$$\begin{cases} z=1 \\ y=\frac{2}{7}\left(18+\frac{15}{2}z\right) \\ x=-\frac{1}{2}(7y+13z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+7y+13z=0 \\ \\ \dfrac{7}{2}y-\dfrac{15}{2}z=18 \\ \\ -\dfrac{3}{7}z=\dfrac{3}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} z=1 \\ \\ y=\dfrac{2}{7}(18+\dfrac{15}{2}\cdot 1)=3 \\ \\ x=-\dfrac{1}{2}(7\cdot 3+13\cdot 1)=-4 \end{cases}$$

Відповідь: $x=-4$, $y=3$, $z=-1$.

Приклад програми для розв'язування системи трьох рівнянь з трьома невідомими методом Гауса.

```
Program pryklad;
{Метод Гауса для системи рівнянь з трьома невідомими }
Uses Crt;
 var
a: array[1..3,1..3] of real;
d, b, x : array [1..3] of real;
 m,s:real;
 i,j,k:integer;
Begin
   Clrscr;
   Writeln('Введіть коефіцієнти при змінних');
   for i:=1 to  3 do
     for j:=1 to 3 do
        begin
```

```
          Write('x[',i,',',j,']=');
          Readln(a[i,j]);
      end;
 Writeln;
 Writeln('Введіть стовпець вільних членів');
     for i:=1 to 3 do
      begin
          Write('b[',i,']=');
          Readln(b[i]);
      end;
{Прямий хід}
for k:=1 to 2 do
  for i:=k+1 to 3 do
    begin
      m:=a[i,k]/a[k,k];
      for  j:=k+1 to 3 do
      a[i,j]:=a[i,j]-m*a[k,j];
       b[i]:=b[i]-m*b[k];
    end;
{Зворотній хід}
x[3]:=b[3]/a[3,3];
for i:=2 downto 1 do
  begin
    s:=0;
```

```
      for j:=i+1 to 3 do
         s:=s+a[i,j]*x[j];
      x[i]:=(b[i]-s)/a[i,i];
    end;
  Writeln;
  Writeln('Розв’язок системи');
  for i:=1 to 3 do
  Writeln('x',i,'=',x[i]:8:2);
  Writeln('Для виходу натисніть Enter');
   Readln
End.
```

Ітераційні методи розв'язання систем лінійних рівнянь

Метод простої ітерації

Дано систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

або $A \cdot X = B$.

Зведемо систему до вигляду

$$X = C \cdot X + f \ ,$$

де C - деяка матриця, а f - вектор-стовпець.

Починаючи з вектора $X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \dots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$, будуємо ітераційний процес

$$X^{(k+1)} = C \cdot X^{(k)} + f\,, \qquad k = 0,1,2,..., \tag{3}$$

або

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \ldots + c_{1n}x_n^{(k)} + f_1 \\ x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k)} + c_{22}x_2^{(k)} + \ldots + c_{2n}x_n^{(k)} + f_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k)} + c_{n12}x_2^{(k)} + \ldots + c_{nn}x_n^{(k)} + f_n \end{cases}. \tag{4}$$

Отримуємо послідовність векторів:

$$X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}, \ldots.$$

Доведено, що якщо норма матриці C менша за одиницю

$$\|C\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2} < 1\,, \tag{5}$$

то ітераційний процес збігається до точного розв’язку системи X при довільному початковому векторі $X^{(0)}$.

Для забезпечення збіжності ітераційного процесу вихідну систему (1) перетворюють до вигляду, при якому діагональні коефіцієнти системи a_{ii} є найбільшими у своїх рівняннях.

Процес ітерацій завершують, коли оцінки свідчать про те, що задана точність отримана.

Приклад 2. Розв'язати систему методом простих ітерацій з точністю $\xi = 0{,}1$

$$\begin{cases} -7x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Для отримання системи в ітераційній формі друге рівняння зробимо першим, а третє – другим. Склавши перше і друге рівняння системи, отримаємо третє рівняння нової системи. Тоді, в ітераційній формі маємо систему

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{8}x_2 - \dfrac{3}{8}x_3 + \dfrac{2}{8} \\ x_2 = -\dfrac{1}{6}x_1 + \dfrac{1}{6}x_3 + \dfrac{3}{6} \\ x_3 = -\dfrac{1}{4}x_1 - \dfrac{1}{4}x_2 + \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Перевіримо умову збіжності

$$\|C\| = \sqrt{\left(-\frac{3}{8}\right)^2 + \left(-\frac{3}{8}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{266}{576}} < 1$$

Умова збіжності виконується, отже розв’язок може бути отриманий ітераційним методом. Результати наведені у таблиці

Ітерації	x_1	x_2	x_3	$\max\limits_i \lvert x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \rvert$
0	0,25	0,5	0,75	
1	-0,125	0,583	0,75	0,13
2	-0,217	0,583	0,575	0,18
3	-0,308	0,632	0,559	0,09

Таким чином, отримання розв’язку з точністю $\xi = 0{,}1$ потребувало три ітерації: $x_1 = x_1^{(3)} = -0{,}308$, $x_2 = x_2^{(3)} = -0{,}632$, $x_3 = x_3^{(3)} = -0{,}559$.

Метод Зейделя

Метод Зейделя - це модифікація методу простої ітерації. У методі простої ітерації при обчисленні компонентів $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_n^{(k+1)}$ вектора-стовпця $x^{(k+1)}$ на $(k+1)$-му кроці використовують значення $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$ вектора-стовпця $x^{(k)}$, обчисленого на попередньому кроці. Метод Зейделя відрізняється від методу простої ітерації тільки тим, що при обчисленні $(k+1)$-го наближення компоненти x_i враховують значення $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$, обчислені на цьому ж кроці.

Формули для знаходження послідовних наближень мають вигляд

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \ldots + c_{1n}x_n^{(k)} + f_1 \\
x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{22}x_2^{(k)} + \ldots + c_{2n}x_n^{(k)} + f_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n12}x_2^{(k+1)} + \ldots + c_{nn}x_n^{(k)} + f_n
\end{cases}.
$$

Умови збіжності для методу простої ітерації справедливі й для методу Зейделя. Перевага ітераційних методів перед точним методом Гауса в тому, що машинний час, потрібний для обчислень методом Гауса, пропорційний n^3, а ітераційними методами він пропорційний n^2 на одну ітерацію. Похибки округлень при використанні методу Гауса можуть призвести до хибного результату, тоді як незначні похибки, допущені при обчисленнях ітераційними методами, не впливають на кінцевий результат.

Приклад 3. Розв'язати систему методом простих ітерацій і методом Зейделя з точністю $\xi = 0{,}003$:

$$
\begin{cases}
5x_1 - 4x_2 - x_3 = -2 \\
4x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \\
3x_1 + x_2 - 5x_3 = 10
\end{cases}
$$

Для отримання системи в ітераційній формі за друге рівняння візьмемо рівняння, яке отримаємо як різницю першого і другого рівнянь. Третє рівняння залишимо без змін. У якості першого рівняння візьмемо друге рівняння системи. Тоді, у ітераційній формі отримаємо систему

$$\begin{cases} x_1 = 0 - 0.25x_2 + 0.5x_3 + 2 \\ x_2 = 0.1x_1 + 0 + 0.2x_3 + 2 \\ x_3 = 0.6x_1 + 0.2x_2 + 0 - 2 \end{cases}$$

Перевіримо умову збіжності

$$\|C\| = \sqrt{(-0.25)^2 + (0.5)^2 + (0.2)^2 + (0.2)^2 + (0.6)^2 + (0.2)^2} = \sqrt{0.79} < 1$$

Розв'язок може бути отриманий ітераційним методом. Результати розв'язку методом простої ітерації

Ітерації	x_1	x_2	x_3	$\max_i \left\| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right\|$
0	2	2	-2	
1	0,500	2,000	-0,400	1,600
2	1,300	2,020	-1,300	0,900
…	…	…	…	…
11	0,999	2,000	-0,999	0,003

Результати розв'язку методом Зейделя

Ітерації	x_1	x_2	x_3	$\max_i \left\| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right\|$
0	2	2	-2	
1	0,500	1,700	-1,360	1,500
2	0,895	1,907	-1,082	0,395
…	…	…	…	…
6	1,000	2,000	-1,000	0,000

Розв'язок методом Зейделя має більшу швидкість збіжності.

Відповідь: $x_1 = x_1^{(6)} = 1.000$, $x_2 = x_2^{(6)} = 2.000$, $x_3 = x_3^{(6)} = -1.000$.

Контрольні питання

1.Яка система називається сумісною?

2.Охарактеризувати методи розв’язання СЛАР?

3.Алгоритм методу Гауса.

4.Загальна стратегія розв’язання СЛАР ітераційними методами.

5.Яка умова є достатньою для збіжності ітераційних методів розв’язання СЛАР?

6.Приклади ітераційних методів.

7.Яким чином можна забезпечити виконання умови збіжності при використанні ітераційних методів?

8.Яку систему називають системою записаною в ітераційній формі?

Завдання

Модифікувати програму для розв’язування системи трьох рівнянь з трьома невідомими методом Гауса так, щоб можна було розв’язувати системи, які містять до 10 рівнянь з 10 невідомими. Розмір системи задається користувачем у процесі виконання програми.

Використовуючи модифіковану програму знайти розв’язок системи

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -2 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 + 3x_5 = 10 \\ x_1 - 9x_2 - 5x_3 + 12x_4 - 3x_5 = -20 \\ 15x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 30 \end{cases}$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1.Для заданого рівняння уточнити корінь з точністю $\varepsilon=10^{-4}$ методами хорд та дотичних. Порівняти результати обчислень.

Варіант №	Рівняння	Інтервал пошуку
1	2	3
1	$x^3+0,2x^2+0,5x+0,8=0$	$(-2;\ 2)$
2	$3x^4+4x^3-8x^2-17=0$	$(-1,2;\ 2,1)$
3	$x^4-4x^3-8x^2+1=0$	$(0;\ 7)$
4	$x^3+0,1x^2+0,4x-1,2=0$	$(-2;\ 2)$
5	$3x^4+4x^3-12x^2+1=0$	$(-4;\ 2)$
6	$x^4-2x^3+8x-1=0$	$(-15;\ 15)$
7	$x^4-26x^3+131x^2-226x+120=0$	$(-12;\ 12)$
8	$3x^4-4x^3-12x^2-5=0$	$(-8;\ 5)$
9	$x^4-x-1=0$	$(-2;\ 2)$
10	$3x^4+8x^3+6x^2-10=0$	$(-2;\ 2)$
11	$x^4-18x^2+6=0$	$(-7;\ 4)$
12	$x^4-x^3-2x^2+3x-3=0$	$(-4;\ 3)$
13	$3x^4-8x^3-18x^2+2=0$	$(-7;\ 1)$
14	$2x^4-8x^3+3x^2-1=0$	$(-1;\ 1)$
15	$2x^4-x^2-10=0$	$(-0,6;\ 2,8)$
16	$3x^4-8x^3-18x^2+2=0$	$(0;\ 7)$
17	$2x^3-9x^2-60x+1=0$	$(-5,6;\ 10)$
18	$2x^4-3x^2-10=0$	(-3)
19	$2x^4+8x^3+8x^2-1=0$	$(-3;\ 2,1)$
20	$3x^4+4x^3-12x^2-5=0$	$(-3;\ 2)$

Завдання 2. Для рівняння а) відокремити корені рівняння графічним методом і уточнити корінь методом половинного поділу. Для рівняння б) відокремити корені рівняння і уточнити один із коренів табличним методом. Точність $\varepsilon=10^{-4}$.

1. a) $x - \sin x = 0{,}25;$ ƅ) $x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0;$
2. a) $tg(0{,}85x + 0{,}1) = x^2;$ ƅ) $x^3 - 6x - 8 = 0;$
3. a) $\sqrt{x} - \cos(0.387x) = 0;$ ƅ) $x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0;$
4. a) $tg(0{,}4x + 0{,}4) = x^2;$ ƅ) $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}5 = 0;$
5. a) $\lg x - \frac{7}{2x+6} = 0;$ ƅ) $x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0;$
6. a) $tg(0{,}5x + 0{,}2) = x^2;$ ƅ) $x^2 + x - 5 = 0;$
7. a) $3x - \cos x - 1 = 0;$ ƅ) $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1{,}2 = 0;$
8. a) $x + \lg x = 0{,}5;$ ƅ) $x^3 + 3x + 1 = 0;$
9. a) $tg(0{,}5x + 0{,}2) = x^2;$ ƅ) $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 2 = 0;$
10. a) $x^2 + 4\sin x = 0;$ ƅ) $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0;$
11. a) $ctg\,1{,}05x - x^2 = 0;$ ƅ) $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}3x - 12 = 0;$
12. a) $tg(0{,}45x + 0{,}3) = x^2;$ ƅ) $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0;$
13. a) $x\lg x - 1{,}2 = 0;$ ƅ) $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}5 = 0;$
14. a) $1{,}8x^2 - \sin 10x = 0;$ ƅ) $x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0;$
15. a) $ctg\,x - x/4 = 0;$ ƅ) $x^3 + 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}2 = 0;$
16. a) $tg(0{,}3x + 0{,}4) = x^2;$ ƅ) $x^3 + 4x - 6 = 0;$

17. a) $x^2 - 24\sin x = 0;$ b) $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 1 = 0;$

18. a) $ctg\, x - x/3 = 0;$ b) $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0;$

19. a) $tg\,(0{,}47x + 0{,}2) = x^2;$ b) $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}3x + 1{,}2 = 0;$

20. a) $x^2 + 4\sin x = 0;$ b) $x^3 - 2x + 4 = 0;$

Завдання 3.Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

1) методом Гауса;

2) методом Зейделя.

1. $\begin{cases} 5x+8y-z=-7; \\ x+2y+3z=1; \\ 2x-3y+2z=9. \end{cases}$	11. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=7; \\ x_1+3x_2-2x_3=0; \\ 2x_2-x_3=2. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x+2y+z=4; \\ 3x-5y+3z=1; \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$	12. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3=20; \\ 2x_1-x_2-3x_3=3; \\ 3x_1+4x_2-5x_3=-8. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x+2y+z=5; \\ 2x+3y+z=1; \\ 2x+y+3z=11. \end{cases}$	13. $\begin{cases} x_1-x_2=4; \\ 2x_1+3x_2+x_3=1; \\ 2x_1+x_2+3x_3=11. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31; \\ 5x_1+x_2+2x_3=29; \\ 3x_1-x_2+x_3=10. \end{cases}$	14. $\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=7; \\ 2x_1-x_2-x_3=4; \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x-3y+2z=9; \\ 2x+5y-3z=4; \\ 5x+6y-2z=18. \end{cases}$	15. $\begin{cases} 11x+3y-z=2; \\ 2x+5y-5z=0; \\ x+y+z=2. \end{cases}$
6. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4; \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11; \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$	16. $\begin{cases} 7x+5y+2z=18; \\ x-y-z=3; \\ x+y+2z=-2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1; \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4; \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$	17. $\begin{cases} 2x+3y+z=1; \\ x+z=0; \\ x-y-z=2. \end{cases}$
8. $\begin{cases} 3x_1-x_2=5; \\ -2x_1+x_2+x_3=0; \\ 2x_1-x_2+4x_3=15. \end{cases}$	18. $\begin{cases} x-2y-2z=3; \\ x+y-2z=0; \\ x-y-z=1. \end{cases}$
9. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=4; \\ 2x_1-5x_2-3x_3=-17; \\ x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$	19. $\begin{cases} 3x_1+x_2-5x_3=-7; \\ 2x_1-3x_2+4x_3=-1; \\ 5x_1-x_2+3x_3=0. \end{cases}$
10. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2; \\ 2x_1-x_2-6x_3=-1 \\ 3x_1-2x_2=8 \end{cases}$	20. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=15; \\ 2x_1+x_2+3x_3=9; \\ 2x_1+3x_2+2x_3=-2. \end{cases}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С. Численные методы/ Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. – М.: Наука, 2001. – 598 с.

2. Брановицька С.В. Обчислювальна математика та програмування: Обчислювальна математика в хімії та хімічній технології/ Брановицька С.В., Медведєв Р.Б., Фіалков Ю.Я.: Підручник. – К.: ІВЦ Видавництво “Політехніка”, 2004. – 220 с.

3. Вержбицкий В.М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения)/ Вержбицкий В.М. – М.: Оникс 21 век, 2005. – 432с.

4. Волков Е.А. Численные методы/ Волков Е.А. – М.: Наука, 2008. –256 с.

5. Воробьева Г.Н. Практикум по вычислительной математике/ Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. – М.: Высшая школа, 1990. – 208 с.

6. Жалдак М.І. Чисельні методи математики/ Жалдак М.І., Рамський Ю.С. – К.: Радянська школа, 1984. – 208 с.

7. Заварыкин В.М. Численные методы/ Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П.. – М.: Просвещение, 1991. – 175 с.

8. Костомаров, Д.П. Программирование и численные методы: учеб. пособие/ Костомаров Д.П., Корухова Л.С., Манжелей С.Г. – М.: Наука, 2001. – 224 с.

9. Ляшенко М.Я. Чисельні методи/ Ляшенко М.Я., Головань М.С. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.

10. Самарский А.А. Численные методы/ Самарский А.А., Гулин А.В.– М.: Наука, 1989. – 432 с.

Навчально−методичне видання

Автор: Мамчич Ярослав Минович

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Методичні рекомендації

Друкується в авторській редакції

Підписано до друку ____________формат 60×84//16
Папір офсетний. Гарнітура Times. Друк офсетний
Ум. друк. арк. 7,75.
Друк ПП Іванюк В.П. 43021, м. Луцьк, вул. Винниченка, 63
Свідоцтво Держкомінформу України
ВЛн №31 від 04.02.2004р.