Східноєвропейський національний університет
імені Лесі Українки

Я.М. Мамчич

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

**Методичні рекомендації
для студентів спеціальності
«Міжнародні економічні відносини»**

Луцьк
2015

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.17а73
М 22

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки
(протокол № 4 від 16 грудня 2015 р).

<u>Рецензенти:</u>
Дутчак Б.І. – канд. технічних наук, доц. кафедри вищої математики Луцького національного технічного університету;
Ройко Л.Л. – канд. пед. наук, доцент кафедри вищої математики та інформатики Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки.

Мамчич Я.М.
М 22 **Теорія ймовірностей та математична статистика:** Методичні рекомендації/ Ярослав Минович Мамчич, – Луцьк: ПП. Іванюк В.П., 2015. – 60 с.

Методичні рекомендації призначені для проведення практичних занять з курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика» із студентами спеціальності «Міжнародні економічні відносини».

Рекомендовано студентам як денної, так і заочної форм навчання. Методичні рекомендації можуть бути корисними і для тих, хто вивчає предмет самостійно.

УДК 519.2
ББК 22.17а73

Зміст

Вступ

Теорія ймовірностей та математична статистика, які дедалі ширше застосовуються в багатьох галузях науки і техніки, є важливими складовими фундаментальної фахової підготовки сучасних економістів.

Пропоновані методичні рекомендації призначені для проведення практичних занять з курсу "Теорія ймовірностей та математична статистика".

Матеріал розділено на 7 занять, кожне з яких розраховане на вивчення окремої теми. У межах кожного заняття виклад матеріалу побудовано за однією і тією самою методикою: короткі теоретичні відомості, які ілюструються численними прикладами, зокрема графічними, що розкривають зміст усіх означень та тверджень; контрольні запитання, що зосереджують увагу на головних теоретичних положеннях, потрібних для розв’язування задач, і задачі для аудиторного та самостійного розв’язування.

У кінці наводяться індивідуальні завдання, додатки та список використаної літератури.

Методичні рекомендації розраховані на студентів спеціальності «Міжнародні економічні відносини», однак можуть бути використані і при викладанні даного курсу студентам інших спеціальностей.

Практичне заняття №1

Класичне означення ймовірності.Статистичне означення ймовірності. Геометрична ймовірність

Класичне означення ймовірності. Ймовірністю події *A* називають відношення числа елементарних результатів досліду, які сприяють настанню події *A*, до загального числа можливих елементарних результатів досліду

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Приклад 1. Кидають гральний кубик.

Знайти ймовірність того, що а) випаде 5 очок, б) випаде більше 5 очок

Розв'язок. а) Загальне число можливих результатів дорівнює 6 (кількість випавших очок може бути від 1 до 6). Сприятливим є лише один результат – випало 5 очок. Таким чином, ймовірність випадання 5 очок дорівнює P=1/6.

б) Загальне число можливих результатів дорівнює 6. Сприятливими є два результати – випало 5 очок або 6 очок. Ймовірність того, що випаде більше 5 очок дорівнює P=2/6=1/3.

Приклад 2. Кидають два гральних кубики.

Знайти ймовірність того, що сума очок на випавших гранях а) дорівнює 12, б) більше 10.

Розв'язок. а) Кожен із результатів кидання "одного" кубика може сполучатися із кожним результатом кидання "іншого" кубика. Таким чином, загальне число можливих елементарних результатів випробування дорівнює $6 \cdot 6 = 36$. Сприятливим є тільки один результат – на обох кубиках випало число 6. Ймовірність того, що сума очок на випавших гранях дорівнює 12: P=1/36.

б) Загальне число можливих елементарних результатів випробування дорівнює $6 \cdot 6 = 36$. Сприятливими є такі три результати: 1) 5,6; 2) 6,5 та 3) 6,6. Таким чином, ймовірність того, що сума очок на випавших гранях більша 10 буде дорівнювати P=3/36=1/12.

Приклад 3. У групі 15 студентів. Серед них 3 відмінники. Навмання відбирають 6 студентів.

Знайти ймовірність того, що серед відібраних 2 відмінники.

Розв'язок. Загальна кількість способів, якими можна відібрати 6 студентів із 15 дорівнює C_{15}^{6}. Підрахуємо кількість сприятливих варіантів, коли серед відібраних є 2 відмінники і 4 не відмінники. Двох відмінників із трьох можна вибрати C_3^2 способами. Залишається вибрати ще чотири студенти із тих, що є не відмінниками. Це можна зробити C_{13}^{4} способами, тому кількість сприятливих варіантів дорівнює $C_3^2 \cdot C_{13}^4$.

Ймовірність того, що серед шести відібраних студентів буде двоє відмінників дорівнює

$$P = C_3^2 \cdot C_{13}^4 / C_{15}^6 .$$

Статистичне означення ймовірності. При статистичному означенні в якості ймовірності події приймають її відносну частоту, яка визначається формулою

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

де m – число дослідів, у яких подія А відбулась, n – загальне число проведених дослідів.

Геометрична ймовірність. Нехай відрізок l складає частину відрізка L. На відрізок L навмання ставлять точку. Якщо вважати, що ймовірність попадання точки на відрізок l пропорційна довжині цього відрізку і не залежить від його розміщення відносно відрізка L, то ймовірність попадання точки на відрізок l визначається рівнянням

$$P = \frac{l}{L}.$$

Нехай плоска фігура s складає частину плоскої фігури S. На фігуру S навмання ставлять точку. Якщо вважати, що ймовірність попадання точки на фігуру s пропорційна площі цієї фігури і не залежить ні від її розміщення відносно S, ні від форми s, то ймовірність попадання точки у фігуру s визначається рівнянням

$$P=\frac{s}{S}.$$

Аналогічно визначається ймовірність попадання точки у просторову фігуру v, яка складає частину фігури V.

Приклад 1. На відрізку L довжиною 25 см знаходиться менший відрізок l довжиною 5 см. Знайти ймовірність того, що точка, навмання поставлена на великий відрізок, потрапить і на малий відрізок. Вважаємо, що ймовірність попадання точки на відрізок l пропорційна довжині цього відрізку і не залежить від його розміщення відносно відрізка L,

Розв'язок. Шукана ймовірність дорівнює

$$P=\frac{l}{L}=\frac{5}{25}=0{,}2.$$

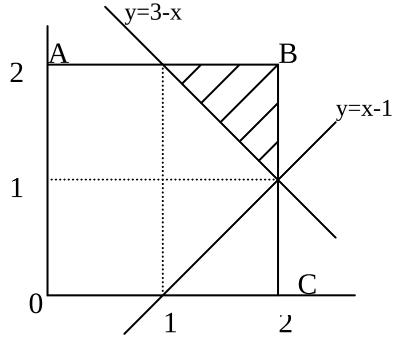
Приклад 2. У квадрат із стороною a=20 см вписано коло. У квадрат навмання ставиться точка. Знайти ймовірність того, що ця точка потрапить у середину кола. Вважаємо, що ймовірність попадання точки у круг пропорційна площі круга і не залежить від його розташування.

Розв'язок. Радіус вписаного кола $r=a/2=10$ см. Шукана ймовірність дорівнює

$$P=\frac{\text{Площа круга}}{\text{Площа квадрата}}=\frac{\pi r^2}{a^2}=\frac{314}{400}=0{,}785.$$

Приклад 3. Навмання беруть два додатних числа x та y, кожне з яких не перевищує двійки. Знайти ймовірність того, що сума цих чисел $x+y$ більша трьох, а різниця $x–y$ менша за одиницю.

Розв'язок. За умовою задачі беруть числа, які задовільняють нерівностям $0<x\le 2$ та $0<y\le 2$. Розглянемо прямокутну систему координат $x0y$. У цій системі координат наведеним вище подвійним нерівностям задовільняють координати будь–якої точки, що належить квадрату $OABC$. Таким чином, цей квадрат можна роглядати як фігуру S, координати точок якої представляють усі можливі пари значень чисел x та y.



Пара чисел x та y повинна також задовольняти нерівностям $x+y>3$ та $x–y<1$. Перепишемо нерівності у такому вигляді $y>3–x$, $y>x–1$. Ці нерівності виконуються для координат тих точок фігури S, які лежать вище прямих $y=3–x$ та $y=x–1$ і утворюють фігуру s (заштрихований трикутник).

Шукана ймовірність

$$P=\frac{s}{S}=\frac{1}{8}=0{,}125.$$

Контрольні запитання

1. Що позначає число m у класичному означенні ймовірності?

2. Що позначає число m у статистичному означенні ймовірності?

3. Що позначає число n у класичному означенні ймовірності?

4. Що позначає число n у статистичному означенні ймовірності?

5. Сформулюйте класичне означення ймовірності.

6. Сформулюйте статистичне означення ймовірності.

7.Чим класичне означення ймовірності відрізняється від статистичного?

8. Які основні властивості ймовірності?

9.Що таке геометрична ймовірність?

10.Яка ймовірність попадання точки на відрізок, який знаходиться на іншому відрізку?

Задачі.

1.Куб, усі грані якого пофарбовані, розпиляли на тисячу однакових кубиків. Знайти ймовірність того, що навмання взятий кубик має пофарбованих: а) одну грань; б) дві грані; в) три грані.

2.У ящику є п'ять однакових пронумерованих куль. Навмання виймають по одній усі кулі. Знайти ймовірність того, що номери куль з'являться у зростаючому порядку.

3.У лототроні є 40 куль, пронумерованих від 1 до 40. Навмання виймають 6 куль. Знайти ймовірність того, що кулі будуть мати номери 2, 7, 12, 25, 30, 38 неважливо у якому порядку.

4.В ящику 12 куль, серед яких 5 пофарбовані. Навмання виймають 6 куль. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих куль буде 3 пофарбованих.

5.Абонент забув дві останні цифри номера телефону. Пам'ятаючи, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано правильні цифри.

6.Під час перевірки партії із 300 виробів виявлено 21 бракований.

Знайти відносну частоту випуску бракованого виробу.

7.На відрізок L довжиною 15 см помістили менший відрізок l довжиною 3 см. На великий відрізок навмання ставлять точку.

Знайти ймовірність того, що: а) точка потрапить на малий відрізок; б) точка потрапить за межі малого відрізка.

8.Відрізок довжиною 12 см розділили на 3 однакових відрізка. На великий відрізок навмання кидають точку.

Знайти ймовірність того, що: а) точка потрапить у середній відрізок; б) точка потрапить у правий відрізок; в) точка потрапить в один із крайніх відрізків

9.У коло радіусом 10 см помістили коло радіусом 2см.

Знайти ймовірність того, що навмання кинута у велике коло точка потрапить також у менше коло.

10.Площину розграфлено паралельними прямими, відстань між якими 12 см. На площину навмання кидають монету діаметром 5 см.

Знайти ймовірність того, що монета не перетне жодної із прямих.

11.На площину нанесена сітка квадратів із стороною 15 см. На площину навмання кидають монету радіусом 1,5 см.

Знайти ймовірність того, що монета не перетне жодної із сторін квадрата.

12.У квадрат із стороною 10 см навмання кидають монету радіусом 1 см.

Знайти ймовірність того, що монета одночасно перетне дві сторони квадрата

13.Два студенти домовились зустрітися у певному місці між 9 та 10 годинами. Той, хто прийшов першим, чекає іншого на протязі 15 хвилин, а потім йде.

Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожен студент навмання вибирає час свого приходу між 9 та 10 годинами.

Практичне заняття №2

Протилежні події. Теореми про додавання та множення ймовірностей

Протилежні події. Подія $\bar{A}$ називається протилежною до події A, якщо вона полягає у тому, що подія A не відбулась.

Приклад 1. Кидають гральний кубик. Подія A – випаде парне число очок, значить протилежна подія $\bar{A}$ – парне число очок не випаде.

Якщо у результаті експерименту відбулась подія A, то, відповідно, подія $\bar{A}$ не відбулась. І навпаки, якщо відбулась подія $\bar{A}$, то подія A не відбулась. Звідси випливає, що

$$P(A)+P(\bar{A})=1.$$

Прийнято ймовірність події A позначати через p, а ймовірність протилежної події $\bar{A}$ – через q. Тоді отримуємо

$$p+q=1.$$

Приклад 2. Ймовірність того, що солдат влучить у мішень $p=0{,}7$. Знайти ймовірність того, солдат у мішень не влучить.

Розв'язок. Події "влучив у мішень" та "не влучив" протилежні, тому шукана ймовірність дорівнює

$$q=1-p=1-0{,}7=0{,}3.$$

Сумісні та несумісні події. Події A та B називаються сумісними, якщо вони можуть відбутись одночасно в одному і тому ж експерименті. Події A та B називаються несумісними, якщо вони не можуть відбутись одночасно в одному і тому ж експерименті.

Приклад 3. Кидають гральний кубик. Подія A – випаде число 6, подія B – випаде число очок більше 4. Події A та B сумісні, так як якщо випаде число очок 6, то відбудуться обидві події A та B.

Приклад 4. Кидають гральний кубик. Подія A – випаде парне число очок, подія B – випаде непарне число очок. Події A та B несумісні, так як не може одночасно випасти парна та непарна кількість очок.

Залежні та незалежні події. Події A та B називаються незалежними, якщо ймовірність однієї із них не залежить від настання чи ненастання іншої. Відповідно, події A та B називаються залежними, якщо ймовірність однієї із них залежить від настання чи ненастання іншої.

Умовна ймовірність. Умовною ймовірністю $P_A(B)$ називають ймовірність події B, обчислену при умові, що подія A уже відбулась.

Приклад 5. Гральний кубик кидають два рази. Подія A – випало 5 очок при першому киданні. Подія B – випало 6 очок при другому киданні. Події A та B незалежні, так як ймовірність кожної з цих подій не залежить від настання іншої, завжди залишається однаковою і дорівнює 1/6.

Приклад 6. Студент знає 20 із 25 питань програми. Він отримує два питання. Позначимо: подія A – студент знає перше питання, подія B – студент знає друге питання. Події A та B залежні, так як ймовірність події B залежить від того, відбулась подія A чи ні. Якщо студент знає перше питання, то серед 24 питань, що залишились, буде 19, які він знає і ймовірність події B буде дорівнювати

$$P_A(B) = \frac{19}{24} = 0{,}79.$$

Якщо студент не знає перше питання, то серед 24 питань, що залишились, буде 20, які він знає і ймовірність події B буде дорівнювати

$$P_A(B) = \frac{20}{24} = 0{,}83.$$

Добуток подій. Добутком двох подій *A* та *B* називається така подія *C*, яка полягає у тому, що відбулись обидві події *A* та *B*.

Теорема 1. Ймовірність того, що відбулись дві незалежні події *A* та *B* дорівнює добутку ймовірностей цих подій

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Приклад 7. Кидають два гральні кубики. Знайти ймовірність того, що на першому кубику випаде число 6, а на другому – число 5.

Розв'язок. Позначимо: подія *A* – на першому кубику випаде число 6, подія *B* – на другому випаде число 5.

Повинні відбутись і подія *A* і подія *B*. Отже маємо добуток двох подій *AB*. Події *A* та *B* незалежні. За теоремою 1 обчислюємо шукану ймовірність

$$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=0{,}028.$$

Теорема 2. Ймовірність того, що відбулись дві залежні події *A* та *B* дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність іншої при умові, що перша подія вже відбулась,

$$P(AB)=P(A)P_A(B).$$

Приклад 8. Студент знає 20 із 25 питань програми. Він отримує два питання. Знайти ймовірність того, що студент буде знати обидва питання.

Розв'язок. Позначимо: подія *A* – студент знає перше питання, подія *B* – студент знає друге питання. Події *A* та *B* залежні, так як ймовірність події *B* залежить від того, відбулась подія *A* чи ні.

Застосовуючи теорему 2 отримаємо шукану ймовірність

$$P(AB)=P(A)P_A(B)=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}=0{,}63.$$

Сума подій. Сумою двох подій *A* та *B* називається така подія *C*, яка полягає у тому, що відбулась або подія *A* або подія *B* або обидві події *A* та *B* разом.

Теорема 3. Ймовірність суми двох несумісних подій A та B дорівнює сумі ймовірностей цих подій

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Приклад 9. Кидають гральний кубик. Знайти ймовірність того, що випаде або число 6 або непарна кількість очок.

Розв'язок. Позначимо: подія A – випало число 6, подія B – випала непарна кількість очок. Події A та B несумісні. Застосовуючи теорему 3 отримуємо шукану ймовірність

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=0{,}67.$$

Теорема 4. Ймовірність суми двох сумісних подій A та B дорівнює сумі ймовірностей подій A та B без ймовірності добутку цих подій

$$P(A+B)=P(A)+P(B)–P(AB).$$

Приклад 10. Ймовірність, що перший студент здасть екзамен дорівнює 0,7. Ймовірність, що другий студент здасть екзамен дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що екзамен здасть хоча б один студент.

Розв'язок. Позначимо: подія A – перший студент здав екзамен, подія B – другий студент здав екзамен. Події A та B сумісні, тому

$$P(A+B)=P(A)+P(B)– P(AB)=0{,}7+0{,}8–0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}94.$$

Контрольні запитання

1. Які події називаються протилежними?
2. Які події називаються сумісними а які несумісними?
3. Які події називаються залежними а які незалежними?
4. Що таке умовна ймовірність?
5. Що таке добуток подій?
6. Чому дорівнює ймовірність добутку двох незалежних подій?
7. Чому дорівнює ймовірність добутку двох залежних подій?
8. Що таке сума подій?

9. Чому дорівнює ймовірність сумі двох несумісних подій?

10. Чому дорівнює ймовірність сумі двох сумісних подій?

Задачі

1. Ймовірність, що перший студент здасть екзамен дорівнює 0,7. Ймовірність, що другий студент здасть екзамен дорівнює 0,8.

Знайти ймовірність того, що

а)екзамен здасть тільки перший студент;

б)екзамен здасть тільки другий студент;

в)екзамен здадуть обидва студенти;

г)екзамен не здасть жоден студент.

2. Ймовірність здачі екзамену тільки одним студентом дорівнює 0,38.

Знайти ймовірність здачі екзамену першим студентом, якщо ймовірність здачі другим студентом дорівнює 0,8.

3. У колоді 36 карт. Беруть дві карти без повернення у колоду.

Знайти ймовірність того, що

а)обидві карти чорної масті;

б)перша карта чорної масті а друга червоної;

в)дві карти будуть різної масті.

4. Проводять розіграш лотереї 6 із 45. Тобто у лототроні 45 пронумерованих куль. Навмання виймають шість куль. Порядок номерів цих вибраних куль ролі не грає.

Знайти ймовірність того, що гравець вгадав 4 або 5 виграшних номера.

5. В ящику 10 куль, з них 6 чорних. Виймають з поверненням 3 кулі.

Знайти ймовірність того, що серед них тільки одна чорна.

6. Відрізок розділили на 4 однакові частини. На відрізок навмання кидають 4 точки.

Знайти ймовірність того, що на кожну частину потрапить одна точка.

7. Ймовірність того, що на протязі року перегорить перша лампа дорівнює 0,1. Для другої лампи ця ймовірність дорівнює 0,2.

Знайти ймовірність того, що протягом року перегорить хоча б одна лампа.

8. Прилад складено з двох блоків, з’єднаних послідовно і незалежно працюючих. Ймовірність відмови блоків дорівнює 0,05 та 0,08.

Знайти ймовірність безвідмовної роботи приладу.

9.Транспортування вантажу виконують два автопідприємства, кожне з яких виділяє для цього по одній вантажівці. Ймовірність виходу на лінію вантажівки з першого автопідприємства дорівнює 0,95, з другого – 0,9.

Знайти ймовірність того, що замовник отримає хоча б одну вантажівку.

10. На кожній із семи однакових карток надруковано одну з літер Ц, *Н, А, І, Т*, Я, С. Картки витягують навмання і послідовно складають зліва направо.

Яка ймовірність того, що в результаті отримають слово "СТАНЦІЯ"?

Практичне заняття №3

Повторні незалежні випробування.

Формула Бернуллі. Ймовірність того, що в n незалежних дослідах, у кожному з яких ймовірність настання події дорівнює p ($0<p<1$), подія відбудеться рівно k разів (незалежно у якій послідовності), дорівнює

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

де $q=1-p$.

Ймовірність того, що в n незалежних дослідах, у кожному з яких ймовірність настання події дорівнює p ($0<p<1$), подія відбудеться не менше k_1 і не більше k_2 разів дорівнює

$$P_n(k_1) + P_n(k_1+1) + P_n(k_1+2) + ... + P_n(k_2).$$

Приклад 1. Монету кидають п’ять разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде: а)рівно три рази; б)не менше трьох разів.

Розв'язок. Ймовірність випадання герба у кожному киданні постійна p=1/2 і не залежить від результатів інших кидань монети, тому можемо використати формулу Бернуллі. Таким чином,

а) ймовірність того, що герб випаде рівно три рази дорівнює

$$P_5(3) = C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0{,}31;$$

б) ймовірність того, що герб випаде не менше трьох разів дорівнює

$$P_5(3)+P_5(4)+P_5(5) = \frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32} = 0{,}5.$$

У випадку, коли число n досить велике, то замість формули Бернуллі використовують локальну та інтегральну формули Лапласа.

Локальна формула Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних дослідах, у кожному з яких ймовірність настання події дорівнює p $(0<p<1)$, подія відбудеться рівно k разів (незалежно у якій послідовності), наближено дорівнює (тим точніше, чим більше n)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

де

$$q = 1-p, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Значення функції Гауса $\varphi(x)$ наведені у додатку 1. Функція $\varphi(x)$ парна, тобто $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Приклад 2. Гральний кубик кидають 100 разів. Знайти ймовірність того, що число 6 випаде 30 разів.

Розв'язок. Число дослідів n=100. Кількість випадань числа 6 k=30. Ймовірність випадання числа 6 при кожному киданні p=1/6=0,17, відповідно q=1– 0,17=0,83. Обчислимо значення числа x

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{30-100\cdot 0{,}17}{\sqrt{100\cdot 0{,}17\cdot 0{,}83}}=\frac{13}{3{,}76}=3{,}46.$$

Із додатку 1 знаходимо $\varphi(x)=\varphi(3{,}46)=0{,}0011$. Підставимо отримані значення у локальну формулу Лапласа

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)=P_{100}(30)=\frac{1}{3{,}76}\cdot 0{,}0011=0{,}0003.$$

Інтегральна формула Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних дослідах, у кожному з яких ймовірність настання події дорівнює p $(0<p<1)$, подія відбудеться не менше k_1 і не більше k_2 разів наближено дорівнює

$$P_n(k_1;k_2)=\Phi(x'')-\Phi(x'),$$

де

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}d(z)- \text{ функція Лапласа,}$$

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\quad x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблиця значень функції Лапласа для додатних значень x $(0\le x\le 5)$ наведена у додатку 2. Для значень $x>5$ приймають $\Phi(x)=0{,}5$. Для від’ємних значень x використовують цю ж таблицю, враховуючи, що функція Лапласа непарна $[\Phi(-x)=-\Phi(x)]$.

Приклад 3. Гральний кубик кидають 100 разів. Знайти ймовірність того, що число 6 випаде в межах від 30 до 50 разів.

Розв’язок. Число дослідів $n=100$. Кількість випадань числа 6 знаходиться в межах від $k_1=30$ до $k_2=50$ разів. Ймовірність випадання числа 6 при кожному киданні $p=1/6=0{,}17$, відповідно $q=1-0{,}17=0{,}83$. Обчислимо значення параметрів x' та x''

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{30-100\cdot 0{,}17}{\sqrt{100\cdot 0{,}17\cdot 0{,}83}}=\frac{13}{3{,}76}=3{,}46;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 100 \cdot 0{,}17}{\sqrt{100 \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}83}} = \frac{37}{3{,}76} = 9{,}8.$$

Із додатку 2 знаходимо $\Phi(x')$=Φ(3,46)=0,499, $\Phi(x'')$= Φ(9,8)=0,5. Підставимо отримані значення в інтегральну формулу Лапласа

$$P_{100}(30;50) = \Phi(9{,}8) - \Phi(3{,}46) = 0{,}5 - 0{,}499 = 0{,}001.$$

Контрольні запитання

1.Для чого використовують формулу Бернуллі?

2.Запишіть формулу Бернуллі.

3.Як за допомогою формули Бернуллі обчислити ймовірність того, що в n незалежних дослідах, у кожному з яких ймовірність настання події дорівнює p ($0<p<1$), подія відбудеться не менше k_1 і не більше k_2 разів?

4.Запишіть локальну формулу Лапласа?

5.Функція Гауса $\varphi(x)$ парна чи непарна?

6.Запишіть інтегральну формулу Лапласа?

7.Функція Лапласа $\Phi(x)$ парна чи непарна?

8.У яких випадках використовують формулу Бернуллі а у яких випадках формули Лапласа?

Задачі

1.Гральний кубик кидають 5 разів. Знайти ймовірність того, що число 6 випаде 2 рази

2.Монету кидають 10 разів. Знайти ймовірність того, герб випаде 5 разів.

3. Монету кидають 10 разів. Знайти ймовірність того, герб випаде в межах від 4 до 6 разів включно.

4.Гральний кубик кидають сто разів. Знайти ймовірність того, що число 6 випаде 16 разів.

5.Ймовірність народження хлопчика 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених виявиться а) 40 хлопчиків, б) 50 хлопчиків.

6. Ймовірність народження хлопчика 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених кількість хлопчиків буде знаходитись в межах від 40 до 60.

7.Ймовірність попадання у мішень p=0,75. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах кількість попадань буде менше 40 або більше 60.

8.Ймовірність здачі екзамену для кожного із 100 студентів p=0,7. Знайти ймовірність того, що екзамен здасть не менше половини студентів.

9. П’ять кубиків кидають 6 разів.

Знайти ймовірність того, що на 3 кубиках 2 рази випаде число 4.

Практичне заняття №4

Числові характеристики дискретних випадкових величин.

Закон розподілу дискретної випадкової величини. Законом розподілу дискретної випадкової величини називають перелік її можливих значень і відповідних їм ймовірностей. Найчастіше закон розподілу задають у вигляді таблиці

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

$x_1, x_2, \dots\ x_n$ – це значення, яких набирає випадкова величина X,
$p_1, p_2, \dots\ p_n$ – відповідні цим значенням ймовірності, причому $p_1+p_2+\dots+p_n=1$.

Математичне сподівання. Нехай дискретна випадкова величина X може приймати лише значення x_1, x_2, ..., x_n, ймовірності яких відповідно рівні p_1, p_2, ..., p_n. Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називають суму добутків усіх її можливих значень на відповідні ймовірності

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\dots+x_np_n.$$

Властивості математичного сподівання.

Властивість 1. Математичне сподівання постійної величини дорівнює самій постійній величині

$$M(C)=C.$$

Властивість 2. Постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання

$$M(CX)=CM(X).$$

Властивість 3. Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань цих величин

$$M(X+У)=M(X)+M(У).$$

Властивість 4. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань цих величин

$$M(XУ)=M(X)M(У).$$

Властивість 5. Математичне сподівання числа настання події A в n незалежних дослідах, у кожному з яких ймовірність настання події p постійна, дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність настання події у кожному випробуванні

$$M(X)=np.$$

Відхилення. Відхиленням називають різницю між випадковою величиною і її математичним сподіванням $X-M(X)$.

Дисперсія. Дисперсією дискретної випадкової величини називають математичне сподівання квадрату відхилення випадкової величини від її математичного сподівання

$$D(X)=M[X-M(X)]^2.$$

Для обчислення дисперсії зручно використовувати формулу

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2.$$

$M(X^2)$ знаходять за формулою

$$M(X^2)=x_1^2p_1+x_2^2p_2+...+x_n^2p_n\,.$$

Властивості дисперсії.

Властивість 1. Дисперсія постійної величини дорівнює нулю

$$D(C)=0.$$

Властивість 2. Постійний множник можна виносити за знак дисперсії, піднісши його до квадрату

$$D(CX)=C^2D(X).$$

Властивість 3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Властивість 4. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Властивість 5. Дисперсія числа настання події A в n незалежних дослідах, у кожному з яких ймовірність настання події p постійна, дорівнює добутку числа випробувань на ймовірності настання і ненастання події у кожному випробуванні

$$D(X)=npq.$$

Середнє квадратичне відхилення. Середнім квадратичним відхиленням називають квадратний корінь із дисперсії

$$\sigma=\sqrt{D}.$$

Приклад 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

x_i	1	2	3
p_i	0,2	0,5	0,3

Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Розв'язок. Математичне сподівання знаходимо за означенням

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}3 = 2{,}1.$$

Дисперсію знаходимо за формулою

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Спочатку знайдемо $M(X^2)$

$$M(X^2) = 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}5 + 3^2 \cdot 0{,}3 = 4{,}9.$$

Тоді

$$D(X) = 4{,}9 - 2{,}1^2 = 0{,}49.$$

Середнє квадратичне відхилення – це квадратний корінь із дисперсії

$$\sigma = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7.$$

Контрольні запитання

1.Що таке закон розподілу дискретної випадкової величини?

2.Що таке математичне сподівання дискретної випадкової величини *X*?

3.Які властивості математичного сподівання?

4.Що таке відхилення дискретної випадкової величини *X*?

5.Що таке дисперсія дискретної випадкової величини *X*?

6.Які властивості дисперсії?

7.Що таке середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини *X*?

Задачі

1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

x_i	2	4	5
p_i	0,1	0,3	0,6

.

Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

2. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

x_i	– 4	– 2	1	3	7
p_i	0,1	0,1	0,2.	0,4	0,2

Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення

3. Пристрій містить три незалежно працюючих елементи. Ймовірності відмови кожного елементу такі: p_1=0,1, p_2=0,2, p_3=0,5.

Записати закон розподілу випадкової величини X – числа елементів, що відмовили. Знайти математичне сподівання та дисперсію X.

4. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X – числа настання події A у п'яти незалежних дослідах, якщо ймовірність настання події A у кожному досліді дорівнює 0,4.

5. Дисперсія випадкової величини X дорівнює 2.

Знайти дисперсію таких величин: а)X+1; б)– 5X; в)3X+4.

6. Знайти дисперсію випадкової величини X – числа настання події A у десяти незалежних дослідах, якщо $M(X)=8$.

7.Записати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа випадання герба при двох киданнях монети.

8.Кидають два гральних кубика.

Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X – числа випавших очок.

Практичне заняття №5

Статистичний розподіл вибірки. Числові характеристики вибірки

Генеральна сукупність. Генеральна сукупність – множина однотипних об’єктів, кількісна чи якісна ознака яких підлягає вивченню.

Вибіркова сукупність – підмножина об’єктів, відібраних у відповідний спосіб із генеральної сукупності.

Варіанти. Коли реалізується вибірка, кількісна ознака X набуває конкретних числових значень $x_1, x_2, ..., x_k$, які називаються варіантами.

Варіаційний ряд. Числовий ряд варіант, розташованих у зростаючому порядку, називається варіаційним.

Частоти. Кожна варіанта x_i вибірки може бути спостереженою n_i раз ($n_i \geq 1$). Число n_i називають частотою варіанти x_i.

При цьому

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i ,$$

де k – кількість варіант, які відрізняються числовим значенням,
n – об’єм вибірки.

Дискретний статистичний розподіл вибірки. Дискретним статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант варіаційного ряду і відповідних їм частот або відносних частот.

У табличній формі він має вигляд

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k

або такий вигляд

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
w_i	w_1	w_2	w_3	…	w_k

Інтервальний статистичний розподіл вибірки. У разі, коли досліджувана ознака X є неперервною величиною і кількість варіант досить велика, результати вибірки подають інтервальним рядом. Для цього область значень розбивають на k інтервалів і для кожного інтервалу визначають частоти. Кількість інтервалів визначають за формулою Стерджеса

$$k=1+3{,}3\lg n,$$

де n – об'єм вибірки.

Довжину інтервалів h найчастіше беруть однаковою і визначають за формулою

$$h=(x_{max}-x_{min})/k,$$

де x_{max} та x_{min} – це максимальне та мінімальне значення у вибірці.

Інтервальним статистичним розподілом вибірки називають перелік часткових інтервалів і відповідних їм частот або відносних частот.

У табличній формі цей розподіл має вигляд

інтервал	$x_0 - x_1$	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	…	$x_{k-1} - x_k$
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k

Полігон частот і відносних частот. Дискретний статистичний розподіл вибірки можна зобразити графічно у вигляді ламаної лінії.

Полігон частот – це ламана, відрізки якої сполучають точки з координатами (x_i; n_i). Полігон відносних частот – це ламана, відрізки якої сполучають точки з координатами (x_i; W_i).

Гістограма частот і відносних частот. Для графічного зображення інтервального статистичного розподілу вибірки використовують гістограму частот і гістограму відносних частот.

Гістограмою частот називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали довжини $h=x_i-x_{i-1}$, а висотами відношення n_i/h (щільність частоти). Площа гістограми частот дорівнює об'єму вибірки.

Гістограмою відносних частот називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали довжини $h=x_i-x_{i-1}$, а висотами відношення w_i/h (щільність відносної частоти). Площа гістограми відносних частот дорівнює одиниці.

Приклад 1. У цеху встановлено 5 верстатів. Протягом 25 днів реєструвалась кількість верстатів, які не працювали. Отримали такі значення: 0, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 2, 0, 0, 2, 2, 3, 3, 1, 0, 1, 2, 1, 3, 5, 0.

Записати статистичний розподіл вибірки, побудувати полігон частот.

Розв'язок. Досліджувана величина X (кількість верстатів, які не працювали) може набирати значення 0,1,2,3,4,5. Загальний об'єм вибірки n=25.

На підставі отриманих даних складемо статистичний розподіл вибірки

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	5	7	7	4	1	1

На основі цієї таблиці будуємо полігон частот (рис.1).

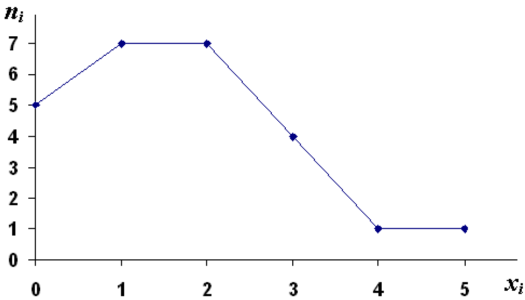


Рис.1

Приклад 2. Магазин за тиждень реалізував 30 пар жіночого взуття наступних розмірів: 37, 35, 33, 36, 41, 37, 36, 36, 39, 38, 34, 40, 37, 35, 39, 36, 38, 37, 38, 35, 34, 36, 39, 38, 35, 37, 38, 39, 38, 37.

Записати інтервальний статистичний розподіл вибірки. Побудувати гістограму частот.

Розв'язок. Мінімальне значення вибірки дорівнює 33, максимальне значення дорівнює 41. Хоча обчислена за формулою Стерджеса кількість інтервалів для вибірки об'ємом 30 дорівнює 6, однак, виходячи з практичних міркувань розіб'ємо наш діапазон значень на 4 інтервали однакової довжини: 33-35, 35-37, 37-39, 39-41. Підраховуючи кількість значень з кожного інтервалу будемо дотримуватись наступного правила: якщо значення співпадає з лівим краєм інтервалу, то це значення відносять до даного інтервалу, якщо ж значення співпадає з правим краєм інтервалу, то це значення відносять до наступного інтервалу (крім останнього).

Враховуючи усе вищесказане запишемо інтервальний статистичний розподіл вибірки

Розмір (інтервал)	33-35	35-37	37-39	39-41
Кількість пар, n_i	3	9	12	6

Гістограму частот для отриманого розподілу наведено на рис.2.

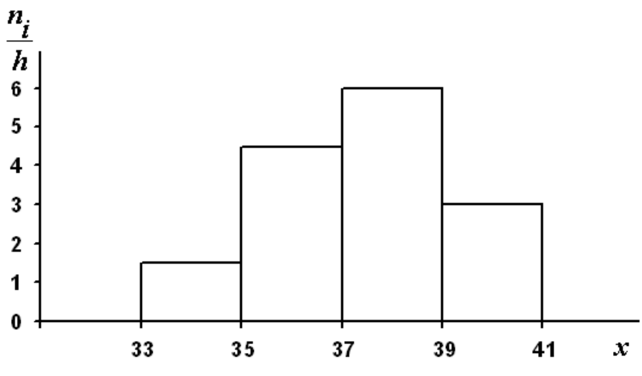


Рис.2.

Середнє вибіркове дискретного ряду. Середнє вибіркове визначають як відношення суми окремих значень вибірки до кількості цих значень. Розрізняють середнє вибіркове просте і зважене. Середнє вибіркове просте визначають за формулою

$$\overline{x_в} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

де x_i – окремі значення (варіанти), n – об'єм вибірки.

Середнє вибіркове зважене застосовують тоді, коли значення досліджуваної ознаки $x_1, x_2, ..., x_k$ повторюються відповідно з частотами $n_1, n_2, ..., n_k$ (тобто задано дискретний статистичний розподіл вибірки).

Середнє вибіркове зважене визначають за формулою

$$\overline{x_в} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n},$$

де x_i – варіанти, n_i, - частоти, n – об'єм вибірки.

Приклад 3. Студент здав 4 екзамени і отримав оцінки: 4,3,4,4. Обчислити середній бал.

Розв'язок. Використаємо формулу для середнього вибіркового простого

$$\overline{x_в} = \frac{4+3+4+4}{4} = 3{,}75.$$

Приклад 4. Результати здачі екзамену 10 студентами: 3,4,3,4,4,5,3,5,4,4. Обчислити середній бал.

Розв'язок. Запишемо статистичний розподіл вибірки:

Оцінка	3	4	5
Кількість студентів	3	5	2

Використаємо формулу для середнього вибіркового зваженого

$$\overline{x_в} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2}{10} = 3{,}9.$$

Середнє вибіркове інтервального ряду. Середнє вибіркове інтервального ряду визначають наступним способом. Спочатку записують дискретний статистичний розподіл, значення якого – це середини часткових інтервалів вихідного інтервального ряду, а частоти це – відповідно частоти для часткових інтервалів вихідного ряду. Після цього середнє вибіркове визначають за формулою для середнього вибіркового зваженого.

У випадку, коли перший та останній інтервали ряду є відкритими, тобто не мають чіткої нижньої та верхньої межі, їхні середні значення визначають наступним чином. Щоб знайти середнє значення для першого відкритого інтервалу, від його верхньої межі віднімають половину величини наступного інтервалу, а щоб знайти середнє значення останнього відкритого інтервалу, до його нижньої межі додають половину величини попереднього інтервалу.

Вибіркова дисперсія. Дисперсія – це середнє арифметичне квадратів відхилень усіх значень ознаки від її середньої величини. Її обчислюють за такою формулою

$$D_в = \frac{(x_1 - \overline{x}_в)^2 n_1 + (x_2 - \overline{x}_в)^2 n_2 + ... + (x_k - \overline{x}_в)^2 n_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_в)^2 n_i}{n},$$

де $\overline{x}_в$ – вибіркова середня, x_i – варіанти, n_i – частоти, n – об'єм сукупності.

Для спрощення обчислень використовують формулу

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \, n_{x_i}}{n} - (\overline{x}_в)^2 = \overline{x^2} - (\overline{x}_в)^2,$$

де $\overline{x^2}$ – середнє арифметичне квадратів значень досліджуваної ознаки.

"Виправлена" вибіркова дисперсія Вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою дисперсії генеральної сукупності (дає занижені значення для генеральної дисперсії). Тому вибіркову дисперсію "виправляють" таким чином, щоб вона стала незміщеною оцінкою.

Для цього вибіркову дисперсію множать на коефіцієнт Бесселя $\frac{n}{n-1}$ і позначають

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_в)^2 n_i .$$

Середнє квадратичне відхилення. Вибіркове середнє квадратичне відхилення – це корінь квадратний з дисперсії

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} .$$

"Виправлене" вибіркове середнє квадратичне відхилення – це корінь квадратний з "виправленої" дисперсії

$$s = \sqrt{s^2} .$$

Приклад 5. Задано статистичний розподіл вибірки

x_i	0	1	2	4
n_i	2	3	3	2

Обчислити дисперсію, виправлену дисперсію, середнє квадратичне відхилення, виправлене середнє квадратичне відхилення.

Розв'язок. Знаходимо дисперсію за спрощеною формулою

$$D_в = \overline{x^2} - (\bar{x}_в)^2 .$$

Спочатку обчислюємо $\bar{x}_в$

$$\bar{x}_в = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{10} = 1{,}7 .$$

Для полегшення обчислення $\overline{x^2}$ додамо рядок із квадратами значень варіант

x_i	0	1	2	4
n_i	2	3	3	2
x_i^2	0	1	4	16

Величину $\overline{x^2}$ знайдемо за формулою для середнього арифметичного зваженого

$$\overline{x^2} = \frac{0\cdot 2+1\cdot 3+4\cdot 3+16\cdot 2}{10} = 4{,}7\ .$$

Тоді шукане значення дисперсії дорівнюватиме

$$D_в = 4{,}7-1{,}7^2=1{,}81.$$

"Виправлена" дисперсія

$$s^2 = \frac{n}{n-1}D_в = \frac{10}{9}\cdot 1{,}81 = 2{,}01.$$

Середнє квадратичне відхилення дорівнює

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{1{,}81} = 1{,}35\,.$$

"Виправлене" середнє квадратичне відхилення

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2{,}01} = 1{,}42\ .$$

Контрольні запитання

1. Дати визначення генеральної та вибіркової сукупності.
2. Що називається варіантою, варіаційним рядом?
3. Дати визначення дискретного статистичного розподілу вибірки.
4. Дати визначення інтервального статистичного розподілу вибірки.
5. Що являє собою полігон частот частот?
6. Що називається гістограмою частот частот?

7. Як обчислити середнє арифметичне?

8. Як обчислити дисперсію?

Задачі

1. Задано статистичний розподіл вибірки

x_i	1	2	3	4	5
n_i	3	4	7	4	2

Обчислити дисперсію, виправлену дисперсію, середнє квадратичне відхилення, виправлене середнє квадратичне відхилення. Побудувати полігон частот.

2. У цеху встановлено 15 верстатів. Протягом 30 днів реєструвалась кількість верстатів, які не працювали. Здобуто такі значення: 2, 1, 1, 0, 2, 0, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 3, 5, 0, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 2, 0, 0, 2, 2, 3, 3.

Обчислити дисперсію, виправлену дисперсію, середнє квадратичне відхилення, виправлене середнє квадратичне відхилення. Побудувати полігон частот.

3. У 100 осіб виміряли зріст. Результати вимірювання записано у таблицю у вигляді інтервального статистичного розподілу

x_{i-1} - x_i, см	168—172	172—176	176—180	180—184	184—188	188—192	192—196
n_i	10	20	30	25	10	3	2

Знайти середнє значення зросту, дисперсію, середнє квадратичне відхилення. Побудувати гістограму частот

4. На металургійному заводі зробили аналіз 30 плавок сталі. Отримали такі значення для виходу сталі X (%):

70	85	100	78	78	98	59	87	90	44
97	68	92	92	89	92	90	87	78	94
71	69	73	69	89	75	70	71	82	93

Записати інтервальний статистичний розподіл вибірки. Побудувати гістограму частот.

Практичне заняття №6

Інтервальні оцінки параметрів розподілу

Інтервальні оцінки. Інтервальною називають оцінку, яка визначається двома числами – кінцями інтервалу, який покриває досліджуваний параметр θ.

Точність оцінки. Точність оцінки – це таке додатне число δ, яке характеризує величину відхилення досліджуваного параметра θ від параметра θ^*, яким оцінюють θ, тобто виконується нерівність

$$|\theta - \theta^*| < \delta.$$

Чим менше δ, тим вища точність оцінки. Із збільшенням об'єму вибірки точність оцінки підвищується.

Надійність оцінки. Надійність оцінки – це таке число γ, яке дорівнює ймовірності того, що виконується нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$. Записують це таким чином

$$P(|\theta - \theta^*| < \delta) = \gamma \text{ або } P(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta) = \gamma.$$

Як правило, надійність оцінки вибирають рівною 0,95, 0,99 або 0,999.

Число $\alpha = 1 - \gamma$ - це ймовірність похибки при оцінюванні.

Довірчий інтервал. Довірчим називають інтервал $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$, який із заданою надійністю γ покриває досліджуваний параметр θ. Довірчий інтервал часто записують у такому вигляді $\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta$.

Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання а нормально розподіленої ознаки X при відомому середньому квадратичному відхиленні σ.

Для оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X при відомому середньому квадратичному відхиленні σ служить довірчий інтервал

$$\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

де $t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ – точність оцінки, n – об'єм вибірки, t – аргумент функції Лапласа, для якого $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, γ - надійність оцінки.

Параметр t знаходять із таблиці для значень функції Лапласа $\Phi(x)$ (додаток 2).

Таким чином можна записати

$$P\left(\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma .$$

Зміст цього виразу полягає у тому, що довірчий інтервал $\left(\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покриває оцінюваний параметр a з надійністю γ. Точність оцінки $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Приклад 1. Із генеральної сукупності отримано вибірку об'ємом 100 значень

x_i	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	4	7	9	17	24	19	10	7	3

Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 3$, побудувати з надійністю $\gamma = 0{,}95$ довірчий інтервал для математичного сподівання a.

Розв'язок. Згідно з формулою для оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої кількісної ознаки X при відомому середньому квадратичному відхиленні σ довірчий інтервал матиме вигляд

$$\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} .$$

За даними розподілу обчислимо вибіркове середнє

$$\bar{x}_в = (6\cdot 4 + 7\cdot 7 + 8\cdot 9 + 9\cdot 17 + 10\cdot 24 + 11\cdot 19 + 12\cdot 10 +$$
$$13\cdot 7 + 14\cdot 3)/100 = 10$$

Параметр t знаходимо із таблиці для інтегральної функції Лапласа (додаток 2)

$$\Phi(t)=0{,}95/2=0{,}475.$$

Звідси t=1,96.

Точність оцінки

$$\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\cdot\frac{3}{10} = 0{,}59\,.$$

Знайдемо кінці довірчого інтервалу

$$\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 10 - 0{,}59 = 9{,}41;\quad \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 10 + 0{,}59 = 10{,}51.$$

Тоді довірчий інтервал матиме вигляд

$$9{,}41<a<10{,}59.$$

Таким чином, довірчий інтервал (9,41;10,59) покриває математичне сподівання a генеральної сукупності з надійністю γ=0,95. Точність оцінки $\delta = 0{,}59$.

Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання *a* ***нормально розподіленої ознаки X при невідомому середньому квадратичному відхиленні σ.*** Для оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X при невідомому середньому квадратичному відхиленні σ служить довірчий інтервал

$$\bar{x}_в - t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}}\,,$$

де $t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}} = \delta$ – точність оцінки, n – об’єм вибірки, s – виправлене середнє квадратичне відхилення, значення t_γ знаходять із таблиці для заданих n та γ (додаток 3).

П р и к л а д 2. Із генеральної сукупності, розподіленої за нормальним законом, отримано вибірку об'ємом n=20

x_i	1	2	4	6	7
n_i	2	3	10	3	2

Знайти з надійністю $\gamma = 0{,}95$ інтервальну оцінку для математичного сподівання a генеральної сукупності.

Р о з в ' я з о к. Згідно з формулою для оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої кількісної ознаки X при невідомому середньому квадратичному відхиленні σ довірчий інтервал матиме вигляд

$$\bar{x}_в - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} .$$

За даними розподілу обчислимо вибіркове середнє

$$\bar{x}_в = (1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 4\cdot 10 + 6\cdot 3 + 7\cdot 2)/20 = 4 .$$

Знайдемо виправлену дисперсію

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^2 n_i =$$

$$= \frac{((1-4)^2\cdot 2 + (2-4)^2\cdot 3 + (4-4)^2\cdot 10 + (6-4)^2\cdot 3 + (7-4)^2\cdot 2)}{19} = 3{,}2.$$

Виправлене середнє квадратичне відхилення

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{3{,}2} = 1{,}79 .$$

Із таблиці додатку 3 для n=20 та $\gamma = 0{,}95$знаходимо t_γ=2,093.

Точність оцінки

$$\delta = t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}093 \cdot \frac{1{,}79}{\sqrt{20}} = 0{,}84.$$

Кінці довірчого інтервалу

$$\overline{x}_в - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 4 - 0{,}84 = 3{,}16; \ \overline{x}_в + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 4 + 0{,}84 = 4{,}84.$$

Довірчий інтервал матиме вигляд

$$3{,}16 < a < 4{,}84.$$

Таким чином, довірчий інтервал (3,16;4,84) покриває математичне сподівання a генеральної сукупності з надійністю $\gamma = 0{,}95$. Точність оцінки $\delta = 0{,}84$.

Довірчі інтервали для оцінки середнього квадратичного відхилення σ нормально розподіленої ознаки X. Для оцінки середнього квадратичного відхилення σ нормально розподіленої ознаки X з надійністю γ за виправленим вибірковим середнім квадратичним відхиленням s використовують довірчі інтервали

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q), \text{ для } q<1;$$

$$0 < \sigma < s(1+q), \text{ для } q>1,$$

де значення q знаходять із таблиці додатку 4 для заданих n та γ.

Приклад 3. Із генеральної сукупності, розподіленої за нормальним законом, отримано вибірку об’ємом n=20

x_i	1	2	4	6	7
n_i	2	3	10	3	2

Знайти з надійністю γ=0,95 інтервальну оцінку для середнього квадратичного відхилення σ генеральної сукупності.

Розв'язок. У прикладі 2 для даного розподілу було знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення s=1,79.

Із таблиці додатку 4 для n=20 та $\gamma = 0{,}95$ знаходимо q=0,37. Так як q<1, то використовуємо наступну формулу для довірчого інтервалу

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q).$$

Кінці інтервалу

$$s(1-q)=1{,}79\cdot(1-0{,}37)= 1{,}13; \quad s(1+q)= 1{,}79\cdot(1+0{,}37)= 2{,}45.$$

Довірчий інтервал матиме вигляд

$$1{,}13 < \sigma < 2{,}45.$$

Таким чином, довірчий інтервал (1,13;2,45) покриває середнє квадратичне відхилення σ генеральної сукупності з надійністю $\gamma = 0{,}95$. Точність оцінки $\delta = 0{,}66$.

Довірчі інтервали для оцінки ймовірності настання події. Для оцінки з надійністю γ ймовірності настання події A в кожному із n незалежних випробувань, якщо подія A відбулась m раз, використовують довірчий інтервал

$$p_1 < p < p_2,$$

де

$$p_1 = \frac{1}{t^2+n}\left(m + \frac{t^2}{2} - t\sqrt{\frac{m(n-m)}{n} + \frac{t^2}{4}}\right),$$

$$p_2 = \frac{1}{t^2+n}\left(m + \frac{t^2}{2} + t\sqrt{\frac{m(n-m)}{n} + \frac{t^2}{4}}\right).$$

Параметр t – аргумент функції Лапласа, для якого $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$, γ - надійність оцінки. Його знаходять із таблиці для значень функції Лапласа $\Phi(x)$ (додаток 2).

У випадку, коли число випробувань n велике (кілька сотень), в якості кінців довірчого інтервалу можна прийняти

$$p_1=w-t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}\ ,$$

$$p_1=w+t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}\ ,$$

де $w=\frac{m}{n}$ - статистична ймовірність для події A.

Приклад 4. Знайти з надійністю $\gamma=0{,}95$ інтервальну оцінку для ймовірності настання події A в кожному із n =100 незалежних повторних випробувань, якщо подія відбулась m = 40 раз.

Розв'язок. Параметр t знаходимо із таблиці для інтегральної функції Лапласа (додаток 2)

$$\Phi(t)=0{,}95/2=0{,}475.$$

Звідси t=1,96.

Обчислимо межі довірчого інтервалу

$$p_1=\frac{1}{t^2+n}\left(m+\frac{t^2}{2}-t\sqrt{\frac{m(n-m)}{n}+\frac{t^2}{4}}\right)=$$

$$=\frac{1}{(1{,}96)^2+100}\left(40+\frac{(1{,}96)^2}{2}-1{,}96\sqrt{\frac{40\cdot 60}{100}+\frac{(1{,}96)^2}{4}}\right)=0{,}31$$

$$p_2 = \frac{1}{t^2+n}\left(m + \frac{t^2}{2} + t\sqrt{\frac{m(n-m)}{n} + \frac{t^2}{4}}\right) =$$

$$= \frac{1}{(1{,}96)^2 + 100}\left(40 + \frac{(1{,}96)^2}{2} + 1{,}96\sqrt{\frac{40 \cdot 60}{100} + \frac{(1{,}96)^2}{4}}\right) = 0{,}49$$

Отже, інтервальною оцінкою для ймовірності настання події *A* буде довірчий інтервал (0,31;0,49).

Величина об'єму вибірки, необхідного для інтервальної оцінки математичного сподівання *a*. Якщо необхідно забезпечити наперед задані точність оцінки δ та надійність оцінки γ, то об'єм вибірки повинен бути не меншим за таке число

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2},$$

де параметр t – аргумент функції Лапласа, для якого $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, γ – надійність оцінки (t знаходять із таблиці для значень функції Лапласа $\Phi(x)$ додатку 2), δ – точність оцінки, σ – середнє квадратичне відхилення.

Приклад 5. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю $\gamma = 0{,}99$ точність оцінки математичного сподівання *a* нормально розподіленої ознаки дорівнює $\delta = 0{,}6$, якщо середнє квадратичне відхилення $\sigma = 3$.

Розв'язок. Параметр t знаходимо із таблиці для інтегральної функції Лапласа (додаток 2)

$$\Phi(t)=0{,}99/2=0{,}495.$$

Звідси t=2,58.

Об'єм вибірки дорівнює

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2} = \frac{(2{,}58)^2 \cdot 3^2}{(0{,}6)^2} = 166.$$

Контрольні запитання

1. Що таке інтервальна оцінка?
2. Що таке точність оцінки?
3. Що таке надійність оцінки?
4. Яка ймовірність похибки при оцінюванні?
5. Який інтервал називають довірчим?
6. Який довірчий інтервал служить для оцінки математичного сподівання нормально розподіленої ознаки, якщо середнє квадратичне відхилення відоме?
7. За допомогою якого довірчого інтервалу можна оцінити математичне сподівання нормально розподіленої ознаки, якщо середнє квадратичне відхилення невідоме?
8. Які довірчі інтервали служить для оцінки середнього квадратичного відхилення нормально розподіленої ознаки?
9. Як оцінити ймовірність настання події?
10. Як знайти величину об'єму вибірки, необхідного для інтервальної оцінки математичного сподівання із наперед заданими точністю та надійністю оцінки?

Задачі

1. Із нормально розподіленої генеральної сукупності, середнє квадратичне відхилення якої дорівнює $\sigma = 2$, зробили вибірку об'ємом n=25. Середнє вибіркове дорівнює $\overline{x}_в = 10$.

Знайти з надійністю $\gamma = 0{,}95$ довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання генеральної сукупності.

2. Із нормально розподіленої генеральної сукупності, середнє квадратичне відхилення якої дорівнює $\sigma = 20$, зробили вибірку об'ємом n=30

x_i	200	250	300	350	400	450	500
n_i	2	7	6	8	4	2	1

Із надійністю $\gamma = 0{,}99$ побудувати довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання генеральної сукупності.

3. Статистичний розподіл вибірки наведено у таблиці

x_i	0	2	4	6	8
n_i	3	4	9	5	4

З надійністю $\gamma = 0{,}95$ побудувати довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання генеральної сукупності, якщо вона розподілена за нормальним законом.

4. Результати вимірювання зросту 20 осіб наведено у таблиці

x_i, см	165—170	170—175	175—180	180—185
n_i	4	6	8	2

З надійністю $\gamma = 0{,}95$ побудувати довірчий інтервал для оцінки середнього зросту, якщо величина зросту розподілена за нормальним законом.

5. Із нормально розподіленої генеральної сукупності зробили вибірку об'ємом n=25

x_i	1	2	3	4	5
n_i	3	4	9	5	4

З надійністю а) $\gamma = 0{,}95$, б) $\gamma = 0{,}99$, в) $\gamma = 0{,}999$ побудувати довірчі інтервали для оцінки математичного сподівання генеральної сукупності, якщо вона розподілена за нормальним законом. Порівняти точність оцінки для різних значень γ.

6. Із нормально розподіленої генеральної сукупності, середнє квадратичне відхилення якої дорівнює $\sigma = 20$, зробили вибірку об'ємом n=100.

Якою буде надійність оцінки, якщо необхідно, щоб точність оцінки не перевищувала $\delta = 4$?

7. За даними вибірки об'ємом $n = 20$ обчислили виправлене середнє квадратичне відхилення $s = 3$.

Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, знайти з надійністю $\gamma = 0{,}95$ довірчий інтервал для оцінки генерального середнього квадратичного відхилення.

8. Вважаючи, що зріст людини розподілений за нормальним законом із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 8$, знайти об'єм вибірки, необхідний для забезпечення точності оцінки $\delta = 2$ см і надійності оцінки $\gamma = 0{,}95$.

Практичне заняття №7

Кореляція. Вибірковий коефіцієнт кореляції

Двовимірний статистичний розподіл вибірки. Двовимірним статистичним розподілом вибірки, елементам якої притаманні кількісні ознаки X і Y, називають перелік варіант x_i, y_i та відповідних цим парам варіант частот n_i.

У табличній формі розподіл має такий вигляд

x_i	x_1	x_2	...	x_k
y_i	y_1	y_2	...	y_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

де $n_1+n_2+...+n_k=n$ – об’єм вибірки.

Кореляційна залежність. Кореляційною називають таку залежність між ознаками X та Y, коли при зміні однієї з ознак змінюється середнє значення іншої.

Кореляційне поле. Кореляційне поле ознак X та Y – це графічне представлення результатів досліджень на координатній площині xOy у вигляді точок з координатами (x_1,y_1), (x_2,y_2),..., (x_n,y_n). На основі аналізу кореляційного поля можна вирішити питання про наявність чи відсутність залежності між ознаками, прослідкувати характер залежності (лінійна, нелінійна, функціональна чи статистична) та її тенденцію (додатну чи від’ємну).

Приклад 1. Задано двовимірну вибірку

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2	3,7	6,2	7,9	9,9	12	14,1	16,3	17,8	19,9

Побудувати кореляційне поле.

Розв’язок. Відкладемо на площині xOy точки з координатами (1;2), (2;3,7), (3;6,2) та ін. Отримаємо кореляційне поле для значень ознак X та Y, на якому чітко видно лінійну залежність Y від X (рис.5).

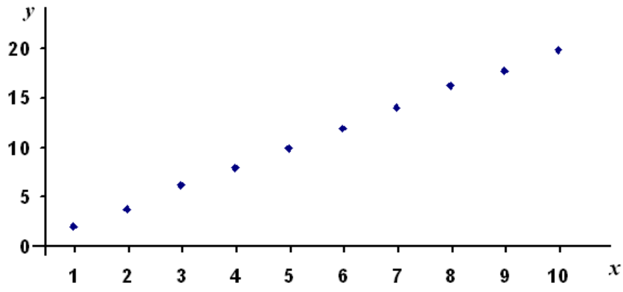


Рис.5.

Вибірковий коефіцієнт кореляції. Вибірковий коефіцієнт кореляції (коефіцієнт кореляції Пірсона) використовують для кількісної оцінки прямолінійного зв'язку між ознаками X та Y, які мають двовимірний нормальний розподіл.

На практиці для обчислення коефіцієнта кореляції незгрупованих даних використовують формулу

$$r_в = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}_в \bar{y}_в}{n\sigma_x \sigma_y},$$

для згрупованих даних

$$r_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i y_i n_i - n\bar{x}_в \bar{y}_в}{n\sigma_x \sigma_y},$$

де σ_x та σ_y – це вибіркові середні квадратичні відхилення ознак X та Y.

Вибірковий коефіцієнт кореляції знаходиться в межах від 0 до +1 при прямій залежності та від 0 до –1 при зворотній залежності. Чим ближчий коефіцієнт кореляції до ±1, тим тісніший зв'язок між ознаками X та Y і навпаки, чим ближчий коефіцієнт кореляції до 0, тим слабший зв'язок між ознаками.

Якщо вибірковий коефіцієнт кореляції дорівнює ±1, то між досліджуваними ознаками існує функціональний лінійний зв'язок.

Для оцінювання сили зв'язку між корелюючими ознаками використовують шкалу Чеддока: якщо $|r_в| = 0{,}1 - 0{,}3$, то лінійний зв'язок дуже слабкий, якщо $|r_в| = 0{,}3 - 0{,}5$ – зв'язок слабкий, якщо $|r_в| = 0{,}5 - 0{,}7$ – зв'язок середній, якщо $|r_в| = 0{,}7 - 0{,}9$ – зв'язок сильний, якщо $|r_в| > 0{,}9$ – зв'язок дуже сильний.

Приклад 3. Задано двовимірну вибірку

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2	2,2	2,2	1,9	1,9	2	2,3	2,1	1,8	2,2
n_i	2	3	1	2	2	1	3	2	1	3

Встановити, чи існує лінійний зв'язок між ознаками *X* та *Y*.

Розв'язок. Знайдемо значення $\overline{x}_в$ та $\overline{y}_в$

$$\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 + 4\cdot 2 + 5\cdot 2 + 6\cdot 1}{20} +$$

$$+\frac{7\cdot 3 + 8\cdot 2 + 9\cdot 1 + 10\cdot 3}{20} = 5{,}5.$$

$$\overline{y}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} y_i n_i}{n} = \frac{2\cdot 2 + 2{,}2\cdot 3 + 2{,}2\cdot 1 + 1{,}9\cdot 2 + 1{,}9\cdot 2 + 2\cdot 1}{20} +$$

$$+\frac{2{,}3\cdot 3 + 2{,}1\cdot 2 + 1{,}8\cdot 1 + 2{,}2\cdot 3}{20} = 2{,}085.$$

Обчислимо коваріацію за формулою для згрупованих даних

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i y_i n_i}{n} - \overline{x}_в \overline{y}_в = \frac{1\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 2{,}2\cdot 3 + 3\cdot 2{,}2\cdot 1 + 4\cdot 1{,}9\cdot 2}{20} +$$

$$+\frac{5\cdot 1{,}9\cdot 2+6\cdot 2\cdot 1+7\cdot 2{,}3\cdot 3+8\cdot 2{,}1\cdot 2+9\cdot 1{,}8\cdot 1+10\cdot 2\cdot 3}{20}=0{,}08.$$

Знайдемо дисперсії D_x та D_y

$$D_x=\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i^{\,2}n_i}{n}-(\overline{x}_в)^2=\frac{1\cdot 2+4\cdot 3+9\cdot 1+16\cdot 2+25\cdot 2+36\cdot 1}{20}+$$

$$+\frac{49\cdot 3+64\cdot 2+81\cdot 1+100\cdot 3}{20}-30{,}25=39{,}7-30{,}25=9{,}45,$$

$$D_y=\frac{\sum_{i=1}^{k}y_i^{\,2}n_i}{n}-(\overline{y}_в)^2=\frac{4\cdot 2+4{,}84\cdot 3+4{,}84\cdot 1+3{,}61\cdot 2+3{,}61\cdot 2+4\cdot 1}{20}+$$

$$+\frac{5{,}29\cdot 3+4{,}41\cdot 2+3{,}24\cdot 1+4{,}84\cdot 3}{20}-4{,}347=4{,}37-4{,}347=0{,}023.$$

Так як об’єм вибірки невеликий n=20, то у формулу для вибіркового коефіцієнта кореляції замість середніх квадратичних відхилень σ_x та σ_y підставляємо "виправлені" середні квадратичні відхилення s_x та s_y.

Знайдемо " виправлені" дисперсії

$$s_x^{\,2}=\frac{n}{n-1}D_x=\frac{20}{19}\cdot 9{,}45=9{,}95,$$

$$s_y^{\,2}=\frac{n}{n-1}D_y=\frac{20}{19}\cdot 0{,}023=0{,}024.$$

"Виправлені" середні квадратичні відхилення

$$s_x=\sqrt{s_x^{\,2}}=\sqrt{9{,}95}=3{,}07,$$

$$s_y = \sqrt{s_y{}^2} = \sqrt{0,024} = 0,15.$$

Обчислимо вибірковий коефіцієнт кореляції

$$r_в = \frac{0.08}{3,07 \cdot 0,15} = 0,17.$$

Так як вибірковий коефіцієнт кореляції є досить малим, то можна стверджувати, що ознаки *X* та *Y* лінійно незалежні.

Для додаткової перевірки будуємо кореляційне поле (рис.7), з якого видно, що ознаки *X* та *Y* лінійно незалежні.

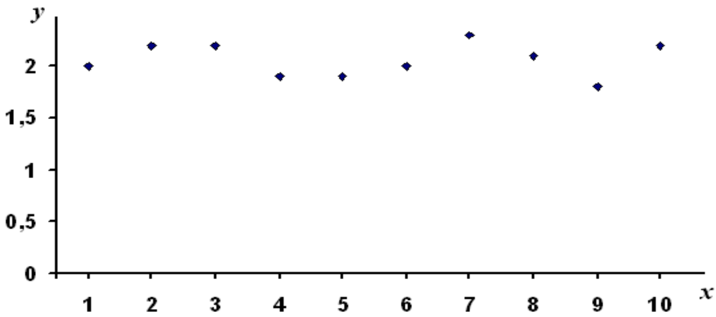


Рис.7.

Контрольні запитання

1.Що таке двовимірний статистичний розподіл вибірки?

2.Яка залежність називається кореляційною?

3.Що таке кореляційне поле? Для чого його використовують?

4.Що таке кореляційна таблиця?

5.Що таке коваріація?

6.Чому дорівнює коваріація двох незалежних ознак?

7.Що таке вибірковий коефіцієнт кореляції?

8.Чи будуть незалежними ознаки *X* та *Y*, якщо вибірковий коефіцієнт кореляції дорівнює нулю?

9.Які прямі називаються прямими регресії?

10.Що таке коефіцієнт регресії?

Задачі

1.Із генеральної сукупності зроблена двовимірна вибірка об'ємом n=5

x_i	1	2	4	6	7
y_i	10	8	7	7	6

Знайти вибірковий коефіцієнт кореляції. Побудувати кореляційне поле.

2.Для контролю якості відібрали 20 деталей. Відхилення їхніх лінійних розмірів X та Y від стандартних записані у таблиці

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-1	-1	1	0	1	2
n_i	5	3	4	3	3	2

Побудувати кореляційне поле. Проаналізувати наявність зв'язку між ознаками X та Y. Знайти вибірковий коефіцієнт кореляції.

3.Результати перевірки зросту X і ваги Y у 20 студентів наведені у таблиці

x_i	168	159	171	179	166	162	182	166	174	177
y_i	67	64	78	76	70	70	80	67	68	76
x_i	171	170	154	175	170	173	181	174	170	163
y_i	68	70	58	79	73	71	84	77	73	72

Побудувати кореляційне поле. Проаналізувати наявність зв'язку між ознаками X та Y. Знайти вибірковий коефіцієнт кореляції.

Індивідуальні завдання

Номер варіанту та значення числа n в умовах задач відповідає номеру студента у журналі.

При оформленні індивідуального завдання необхідно вказати номер варіанту і записати умови задач із врахуванням конкретного значення числа n.

Задачі

1. У групі n+12 студентів. Серед них 7 відмінники. Навмання відбирають n+5 студентів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних 4 відмінники.

2. На площину нанесена сітка квадратів із стороною n+10 см. На площину навмання кидають монету діаметром n+2 см. Знайти ймовірність того, що монета не перетне жодної із сторін квадрата.

3. В ящику n+12 куль, з них n+4 чорні. Виймають з поверненням 3 кулі. Знайти ймовірність того, що серед них тільки одна чорна.

4. Відрізок розділили на n+2 однакові частини. На відрізок навмання кидають 3 точки. Знайти ймовірність того, що усі точки потраплять в одну частину.

5. Гральний кубик кидають 2n+6 разів. Знайти ймовірність того, що парне число очок випаде n+2 рази.

6. Ймовірність попадання у мішень p=1-n/100. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах кількість попадань буде менше n+40 або більше n+60.

7. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	n-5	n-4	n-3	n-2	n-1	n
p	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення. Записати у вигляді формули функцію $F(x)$ та побудувати її графік.

8. Результати перевірки значення ознак X та Y у 20 об'єктів наведені у таблиці

Номер об’єкта	Ознака X	Ознака Y
1	$168–n$	$67–n$
2	$159–n$	$64–n$
3	$171–n$	$78–n$
4	$179–n$	$76–n$
5	$166–n$	$70–n$
6	$162–n$	$70–n$
7	$182–n$	$80–n$
8	$166–n$	$67–n$
9	$174–n$	$68–n$
10	$177–n$	$76–n$
11	$171–n$	$68–n$
12	$170–n$	$70–n$
13	$154–n$	$58–n$
14	$175–n$	$79–n$
15	$170–n$	$73–n$
16	$173–n$	$71–n$
17	$181–n$	$84–n$
18	$174–n$	$77–n$
19	$170–n$	$73–n$
20	$163–n$	$72–n$

Побудувати кореляційне поле. Проаналізувати наявність зв’язку між ознаками X та Y. Знайти вибірковий коефіцієнт кореляції. Записати рівняння прямих регресії Y на X та X на Y.

Додатки

Додаток 1

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3478	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2813	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2293	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1646	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1107
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0978	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0525	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0279	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0164	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0118	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0,0040	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0014	0014	0013	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006

Додаток 2

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	Φ (x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)
0.00	0.0000	0.50	0.1915	1.00	0.3413	1.50	0.4332	2.02	0.4783
0.01	0.0040	0.51	0.1950	1.01	0.3448	1.51	0.4345	2.04	0.4793
0.02	0.0080	0.52	0.1985	1.02	0.3461	1.52	0.4357	2.06	0.4803
0.03	0.0120	0.53	0.2019	1.03	0.3485	1.53	0.4370	2.08	0.4812
0.04	0.0160	0.54	0.2054	1.04	0.3508	1.54	0.4382	2.10	0.4821
0.05	0.0199	0.55	0.2088	1.05	0.3531	L55	0.4394	2.12	0.4830
0.06	0.0239	0.56	0.2123	1.06	0.3554	1.56	0.4406	2.14	0.4838
0.07	0.0279	0.57	0.2157	1.07	0.3577	1.57	0.4418	2.16	0.4846
0.08	0.0319	0.58	0.2190	1.08	0.3599	1.58	0.4429	2.18	0.4854
0.09	00359	0.59	0.2224	1.09	0.3621	1.59	0.4441	2.20	0.4861
0.10	0.0398	0.60	0.2257	1.10	0.3643	1.60	0.4452	2.22	0.4868
0.11	0.0438	0.61	0.2291	1.11	0.3665	1.61	0.4463	2.24	0.4875
0.12	0.0478	0.62	0.2324	1.12	0.3686	1.62	0.4474	2.26	0.4881
0.13	0.0517	0.63	0.2357	1.13	03708	1.63	0.4484	2.28	0.4887
0.14	0.0557	0.64	0.2389	1.14	0.3729	1.64	0.4495	2.30	0.4893
0.15	0.0596	0.65	0.2422	1.15	0.3749	1.65	0.4505	2.32	0.4898
0.16	0.0636	0.66	0.2454	1.16	0.3770	1.66	0.4515	2.34	0.4904
0.17	0.0675	0.67	0.2486	1.17	0.3790	1.67	0.4525	2.36	0.4909
0.18	0.0714	0.68	0.2517	1.18	0.3810	1.68	0.4535	2.38	0.4913
0.19	0.0753	0.69	0.2549	1.19	0.3830	1.69	0.4545	2.40	0.4918
0.20	0.0793	0.70	0.2580	1.20	0.3849	1.70	0.4554	2.42	0.4922
0.21	0.0832	0.71	0.2611	1.21	0.3869	1.71	0.4564	2.44	0.4927
0.22	0.0871	0.72	0.2642	1.22	0.3883	1.72	0.4573	2.46	0.4931
0.23	0.0910	0.73	0.2673	1.23	0.3807	1.73	0.4582	2.48	0.4934
0.24	0.0948	0.74	0.2703	1.24	0.3925	1.74	0.4591	2.50	0.4938
0.25	0.0987	0.75	0.2734	1.25	0.3944	1.75	0.4599	2.52	0.4941
0.26	0.1026	0.76	0.2764	1.26	0.3962	1.76	0.4608	2.54	0.4945

0.27	0.1064	0.77	0.2794	1.27	0.3980	1.77	0.4616	2.56	0.4948
0.28	0.1103	0.78	0.2823	1.28	0.3997	1.78	0.4625	2.58	0.4951
0.29	0(1141	0.79	0.2852	1.29	0.4015	1.79	0.4633	2.60	0.4953
0.30	0.1179	0.80	0.2881	1.30	0.4032	1.80	0.4641	2-62	0.4956
0.31	0.1217	0.81	0.2910	1.31	0.4049	1.81	0.4649	2.64	0.4959
0.32	0.1255	0.82	0.2939	1.32	0.4066	1.82	0.4656	2.66	0.4961
0.33	0.1293	0.83	0.2967	1.33	0.4082	1.83	0.4664	2.68	0.4963
0.34	0.1331	0.84	0.2995	1.34	0.4099	1.84	0.4671	2.70	0.4965
0.35	0.1368	0.85	0.3023	1.35	0.4115	1.85	0.4678	2.72	0.4967
0.36	0.1406	0.86	0.3051	1.36	0.4131	1.86	0.4686	2.74	0.4969
0.37	0.1443	0.87	0.3076	1.37	0.4147	1.87	0.4693	2.76	0.4971
0.38	0.1480	0.88	0.3106	1.38	0.4162	1.88	0.4699	2.78	0.4973
0.39	0.1517	0.89	0.3133	1.39	0.4177	1.89	0.4706	2.80	0.4974
0.40	0.1554	0.90	0.3159	1.40	0.4192	1.90	0.4713	2.82	0.4976
0.41	0.1591	0.91	0.3186	1.41	0.4207	1.91	0.4719	2.84	0.4977
0.42	0.1628	0.92	0.3212	1.42	0.4222	1.92	0.4726	2.86	0.4979
0.43	0.1664	0.93	0.3238	1.43	0.4236	1.93	0.4732	2.88	0.4980
0.44	0.1700	0.94	0.3264	1.44	0.4251	1.94	0.4738	2.90	0.4981
0.45	0.1736	0.95	0.3289	1.45	0.4265	1.95	0.4744	2.92	0.4982
0.46	0.1772	0.96	0.3315	1.46	0.4279	1.96	0.4750	2.94	0,4985
0.47	0.1808	0.97	0.3340	1.47	0.4292	1.97	0.4756	2.96	0.4985
0.48	0.1884	0.98	0.3365	1.48	0.4306	1.98	0.4761	2.98	0.4986
0.49	0.1879	0.99	0.3389	1.49	0.4319	1.99	0.4767	3.00	0.49865
								3.20	0.49931
								3.40	0.49966
								3.60	0.499841
								3.80	0.499928
								4.00	0.4999468
								4.50	0.499997
								5.00	0.499997

Додаток 3

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			*n*	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	oo	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Додаток 4

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Додаток 5

КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ СТЬЮДЕНТА

Число ступенів вільності, *k*	Рівень значущості, α						
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001	0,0005
1	3,08	6,31	12,7	31,82	63,66	127,32	636,62
2	1,89	2,92	4,30	6,97	9,93	14,09	31,60
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	12,94
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	8,61
5	1,48	2,02	2,57	3,37	4,03	4,77	6,86
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,96
7	1,42	1,90	2,36	3,00	3,50	4,03	5,41
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83	5,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50	4,44
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05	3,43	4,32
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37	4,22
14	1,34	1,76	2,14	2,62	2,98	3,33	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29	4,07
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,25	4,02
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,22	3,97
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,20	3,92
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,17	3,88
20	1,33	1,73	2,09	2,53	2,85	3,15	3,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,14	3,82
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,12	3,79
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,10	3,77
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,09	3,75
25	1,32	1,71	2,06	2,48	2,79	3,08	3,73
26	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78	3,07	3,71
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,06	3,69
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,05	3,67
29	1,31	1,70	2,04	2,46	2,76	3,04	3,66
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03	3,65
40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70	2,97	3,55
60	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66	2,91	3,46
120	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62	2,86	3,37
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	2,81	3,29

Література

1.Барковський В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч. – метод. Посібник / В. В. Барковський, Н. В. Барковська, О. К. Лопатін. – К . : Центр навчальної літератури, 2006. – 424 с.

2.Валєєв К. Г. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики: Навч. посіб. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2005. – 334 с.

3.Волощенко А. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч. – метод. посібник для сам. вивчення дисц. / А. Б. Волощенко, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2003. – 256 с.

4.Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1977. – 378 с.

5.Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1975. – 332 с.

6.Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч. – метод. посібник. У 2 ч. – Ч. І. Теорія ймовірностей / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечный. – К. : КНЕУ, 2000. – 304 с

7.Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика / А. И. Кобзарь. – М. : Физматлит, 2006. – 816 с.

8.Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв’язування задач : Навч. Посібник / Г. І. Кармелюк. – К. : Центр учбової літератури, 2007. – 576 с.

Навчально-методичне видання

Мамчич Ярослав Минович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні рекомендації
для студентів спеціальності
«Міжнародні економічні відносини»

Друкується в авторській редакції

Підписано до друку 17.10.2013 р. формат 60×84//16.
Папір офсетний. Гарнітура Times. Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 9,75. Зам. № 235. Тираж 50.
Друк ПП Іванюк В.П. 43021, м. Луцьк, вул. Винниченка, 63
Свідоцтво Держкомінформу України
ВЛн №31 від 04.02.2004р

Для нотаток