# РОЗДІЛ II
# Теоретична фізика

УДК 538.945

**Анатолій Свідзинський**
**Василь Сахнюк**
**Олександр Пастух**
**Арсен Шутовський**

## Узагальнення моделі Охти для дослідження багатошарових Джозефсонівських контактів

У статті зроблено узагальнено напівкласичну модель Охти для використання її для дослідження *n* послідовно розміщених тунельних надпровідних контактів. Використавши запропоновану загальну схему макроскопічного аналізу таких систем, отримано аналітичний результат для залежності надпровідного струму від різниці фаз параметрів упорядкування в крайніх надпровідниках.
**Ключові слова**: модель Охти, Джозефсонівський контакт, явище тунелювання.

**Постановка наукової проблеми та її значення.** Згідно зі стаціонарним ефектом Джозефсона, достатньо невеликий за значенням струм може проходити через Джозефсонівський контакт (систему двох надпровідників, розділених тонким прошарком діелектрика) бездисипативно. Інакше кажучи, при проходженні струму на контакті не виникає спаду напруги. Цю особливість відкрито ще 1962 року [2], проте й сьогодні є важливим аспектом досліджень фізики надпровідності й відкриває широкі можливості для практичного застосування.

На сьогодні існують різні моделі й підходи для дослідження цього ефекту в тунельних надпровідних контактах різної структури. У моделі, яку запропонував Файнман [1], однобар'єрний Джозефсонівський контакт розглянуто як дворівневу квантово-механічну систему. Ця теорія дає змогу отримати відомий вираз для залежності струму, що проходить через контакт від різниці фаз надпровідників:

$$I = I_0 \sin\varphi. \qquad (1)$$

Подальше дослідження стаціонарного ефекту Джозефсона провів Охта [6]. На відміну від моделі Файнмана, де систему надпровідників розглянуто лише з квантово-механічного погляду, ця напівкласична теорія передбачала врахування впливу на контакт енергії зовнішнього джерела. Такий підхід виявився більш універсальним і дав змогу не лише отримати залежність (1) для однобар'єрного Джозефсонівського контакту, а й дав можливість розширити дослідження рівноважних струмових станів для багатошарових надпровідних структур. Зокрема, було отримано вираз для залежності надпровідного струму від різниці фаз для двобар'єрного Джозефсонівського контакту в разі, коли джерело струму не впливає на проміжний шар надпровідної системи [4]:

$$I = I_0\left(\alpha\sin\frac{\varphi}{2} + \beta\sin\varphi\right), \qquad (2)$$

$$\text{тут } I_0 = \frac{4e\tilde{K}}{\hbar}\sqrt{N_0N_2}, \alpha = sign\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right), \beta = \frac{K}{\tilde{K}}\sqrt{\frac{N_0}{N_2}},$$

де $N_0$ та $N_2$– значення густини куперівських пар крайніх і середнього надпровідників, відповідно, $K$ та $\tilde{K}$– константи, які характеризують тунелювання між зовнішніми електродами й сусідніми, відповідно. Також було отримано аналогічну рівність для трибар'єрної надпровідної системи [3]

$$I = I_0 \left\{ \gamma + \frac{(1-\varepsilon^2)}{2\sqrt{\varepsilon^2 + (1-\varepsilon^2)cos^2\frac{\varphi}{2}}} \right\} \sin\varphi, \qquad (3)$$

тут $\gamma = \frac{\tilde{I}}{I_0} = \frac{2\tilde{I}}{I_1 + I_2}$,

де $I_1$ – струм, що проходить з першого надпровідника до третього; $I_2$ – струм, який протікає з другого надпровідника до четвертого; та $\tilde{I}$ – струм із першого надпровідника до четвертого; $\varepsilon$ – параметр, що характеризує неоднорідність надпровідних шарів.

**Мета й завдання статті** – теоретично дослідити ефект тунелювання в багатошарових надпровідних Джозефсонівських контактах.

**Завдання** – розширити напівкласичну модель Охти й отримати аналітичний результат для залежності струму від різниці фаз у разі довільної кількості надпровідних шарів.

**Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження.** Розглянемо систему, яка складається з $n$ – надпровідників ($S_1$, $S_2$,…,$S_n$), розділених між собою ізолюючими областями (рис. 1).

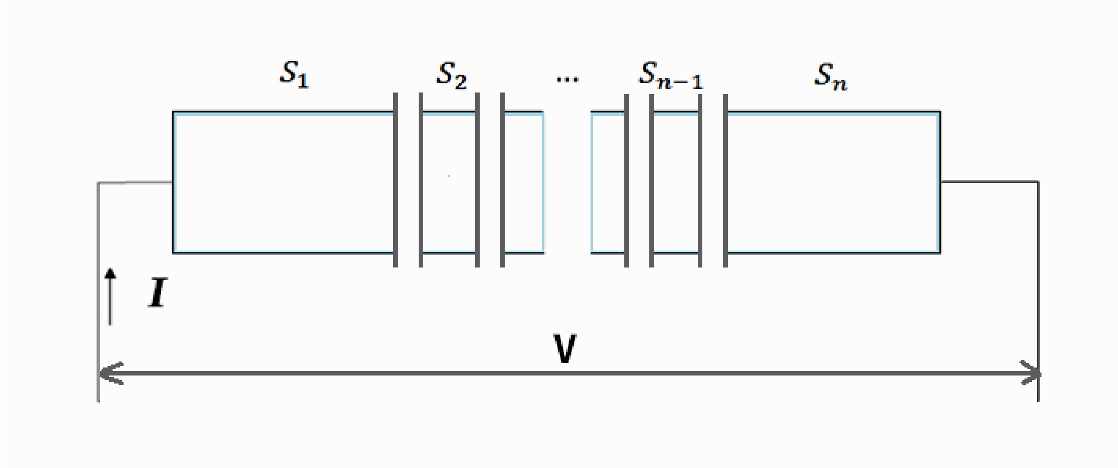


***Рис. 1.* Схематичне зображення багатошарового Джозефсонівського контакту**

Напівкласичний гамільтоніан такої системи згідно з моделлю Охти [6] запишемо в такому вигляді:

$$H_0 = \langle \Psi \mid \widehat{H}_0 \mid \Psi \rangle = (\psi_1^* \, \psi_2^* \, \psi_3^* \ldots \psi_n^*) \begin{pmatrix} E_1 & -K_{12} & -K_{13} & \cdots & -K_{1n} \\ -K_{21} & E_2 & -K_{23} & \cdots & -K_{2n} \\ -K_{31} & -K_{32} & E_3 & \cdots & -K_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -K_{n1} & -K_{n2} & -K_{n3} & \cdots & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix},$$

де константи $K_{ij}$ характеризують взаємодію між $i$-м та $j$-м надпровідниками, причому $K_{ij} = K_{ji}$. Уважатимемо значення фаз надпровідників $S_2$, $S_3$,…$S_{n-1}$ однаковими, й дорівнюватимуть вони нулю. Тоді хвильві функції надпровідників задамо у вигляді

$$\begin{cases} \psi_1 = \sqrt{N_1} e^{-i\theta_1}, \\ \psi_2 = \sqrt{N_2}, \\ \psi_3 = \sqrt{N_3}\,, \\ \quad \ldots \\ \psi_{n-1} = \sqrt{N_{n-1}}, \\ \psi_n = \sqrt{N_n} e^{-i\theta_n}, \end{cases}$$

де $N_i$ $(i = 1\ldots n)$ – густина куперівських пар $i$-го надпровідника. Уважаючи енергію, яка дорівнює:

$$E_1 = -eV, E_2 = 0, E_3 = 0, \dots, E_{n-1} = 0, E_n = 0$$

та ввівши позначення

$$E_c = -2K_{1n}\sqrt{N_1 N_n}\cos(\theta_n - \theta_1) - \sum_{i=2}^{n-1} 2K_{1i}\sqrt{N_1 N_i}\cos\theta_1 - \sum_{i=1}^{n-1} 2K_{n-i+1\,n}\sqrt{N_{n-i+1}N_n}\cos\theta_n - \sum_{i=1}^{n-2} 2K_{i\,i+1}\sqrt{N_i N_{i+1}} - \dots - 2K_{2\,n-1}\sqrt{N_2 N_{n-1}},$$

з урахуванням енергії зовнішнього джерела, повний гамільтоніан системи залишємо у такому вигляді:

$$H = E_1 N_1 + E_n N_n + E_c - W.$$

Уважаючи густину зарядів сталою, використавши закон збереження енергії

$$H = const, \qquad \dot{E}_c - \dot{W} = 0 \quad \Rightarrow \quad IV = \dot{E}_c,$$

а також рівняння Гамільтона для змінних $\theta_k$ та $\hbar N_k$ $(k = 1, 2, \dots n)$

$$\begin{cases} \hbar \dot{N}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta_k}, \\ \dot{\theta}_k = \dfrac{1}{\hbar}\dfrac{\partial H}{\partial N_k}, \end{cases}$$

вираз для залежності струму від різниці фаз надпровідників набуде такого вигляду:

$$I_n = I_{1n}\sin\varphi - \sum_{i=2}^{n-1} I_{1i}\sin\theta_1 + \sum_{i=2}^{n-1} I_{in}\sin\theta_n, \tag{4}$$

де

$$I_{1n} = \frac{4eK_{1n}}{\hbar}\sqrt{N_1 N_n},$$

$$\sum_{i=2}^{n-1} I_{1i} = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{2eK_{1i}}{\hbar}\sqrt{N_1 N_i}, \tag{5}$$

$$\sum_{i=2}^{n-1} I_{in} = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{2eK_{n-i+1\,n}}{\hbar}\sqrt{N_{n-i+1}N_n}. \tag{6}$$

Зазначимо, що у формулі (4) множник $I_{1\,n}$ характеризує струм, який проходить із першого надпровідника до $n$ – го, множник, що задається виразом (5), визначає струм, що тече послідовно до кожного із шарів від першого, а той, що задається (6), – струм, що протікає послідовно від кожного надпровідника до останнього, починаючи з другого.

Рівність (4) виражає залежність стуму, що проходить через багатошаровий Джозефсонівський контакт від різниці фаз крайніх надпровідників. У цьому виразі число $n$ позначає кількість надпровідних шарів у контакті.

Варто зазначити, що з допомогою рівняння (4) можна отримати вирази для залежності струму від різниці фаз у дво- та трибар'єрному контакті, які повністю збігаються з тими, що були отримані під час безпосереднього аналізу [3; 5].

**Висновки та перспективи подальшого дослідження. У статті** представлено загальну схему дослідження багатошарових Джозефсонівських контактів через розширення моделі Охти на випадок довільної кількості надпровідних шарів й отримано аналітичний вираз для залежності надпровідного струму від різниці фаз. Отримані теоретичні результати можуть бути використані для експериментального дослідження ефекту Джозефсона в таких системах, пояснення емпіричних даних, а також для подальшого аналізу тунельних властивостей надпровідних контактів.

***Джерела та література***


1. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс: пер. А. Ефремова, Г. Копылова, О. Хрусталева ; ред. Я. Смородинского, — М. : МИР, 1965. – Т. 9 : Квантовая механіка. – Ч. 2 – 256 с.
2. Josephson B. D. Possible New Effects in Superconducting Tunnelling / B. D. Josephson // Phys. – Lett 1. 1962. – P. 251–253.
3. De Luca R. Double- and triple-barrier Josephson junction // Supercond. Sci. Technol. – 2014. – 27.115001.
4. De Luca R. Sawtooth current-phase of a superconducting trilayer system described using Ohta's formalism. F. Romeo, R. de Luca // Phys. Rev. – 2009. – 79.094516.
5. De Luca R. Magnetic field dependence of the maximum Josephson current in a double-barrier junction // Physica C. – 2010. – 470. – P. 487–490.
6. Ohta H. A. Self-consistent model of Josephson junction // IC-SQUID. – 1976. – 76. – P. 35–49.


**Свидзинский Анатолий, Сахнюк Василий, Пастух Александр, Шутовский Арсений. Обобщение модели Охты для исследования многослойных Джозефсоновских контактов.** В работе рассматривается эффект туннелирования в многобарьерном Джозефсоновском контакте. Сделана модификация полуклассической модели Охты для исследования равновесных токовых состояний в многослойных сверхпроводящих структурах. Получен аналитический результат для зависимости тока от разности фаз в таком контакте и приведено общую схему макроскопического анализа в случае произвольного количества сверхпроводящих слоев.

**Ключевые слова:** модель Охты, Джозефсоновский контакт, эффект туннелирования.

**Svidzinskiy Anatoliy, Sakhnyuk Vasyl, Pastukh Oleksandr, Shutovskiy Arsen. Generalization of Ohta's Model for Description of Multilayer Josephson Junctions.** The effect of tunneling in many layers Josephson junction was analyzed. Modification of Ohta's model for investigation equilibrium current states in many layers superconducting structures was also proposed. The expression for the dependence of current from phase difference in many barrier contacts was received.

**Key words:** tunneling effect, Ohta's model, Josephson junction.

Стаття надійшла до редколегії
26. 03. 2015 р.

УДК 539.2

**Олена Тарасова**
**Павло Мерзликін**

## Сучасні методи комп'ютерного моделювання наночастинок і наносистем

У статті представлено огляд сучасних обчислювальних методів і оцінено ступінь їх застосованості для дослідження нанорозмірних матеріалів. Описано чотири основні підходи, які використовують для моделювання наносистем. Проаналізовано переваги й недоліки кожної групи розглянутих методів. Оцінено співвідношення точності розрахунків і розмірів системи для різних квантово-механічних методів.

**Ключові слова:** комп'ютерне моделювання, наносистеми, квантово-механічні методи.

**Постановка наукової проблеми та її значення.** Нанорозмірні атомні системи (наносистеми) є фізичними об'єктами, розмір яких хоча б в одному напрямку вимірюється одиницями, десятками або