Фаза фототермічного сигналу в фононній підсистемі масивних зразків (рис. 2б, криві 1, 3) при малих частотах (до 10^2 c^{-1}) приблизно дорівнює нулю. При подальшому збільшенні частоти фаза зменшується і прямує до $-\pi$.

Фототермічний сигнал у фононній підсистемі тонких зразків (рис. 2а і 2б, криві 2, 4) аналізувати не будемо, тому що амплітуда в них набуває дуже малих значень.

Література

1. Progress in Photothermal and Photoacoustic Science and Technology / Ed. by A. Mandelis.– New York: Prentise Hall, 1994.
2. Vargas H. and Miranda L.C.M. Photoacoustic and related photothermal techniques // Phys. Rep.– 1988.– Vol. 161, № 2.– P. 43–101.
3. Rosencwaig A. Thermal-Wave Imaging // Science.– 1982.– Vol. 218, № 4569.– P. 223–228.
4. Gonzalez de la Cruz G., Gurevich Yu.G. Electron and phonon thermal waves in semiconductors: an application to photothermal effects // J.Appl.Phys.– 1996.– Vol. 80.– P. 1726–1730.
5. Гуревич Ю.Г., Гонзалез де ла Круз Г., Логвинов Г.Н., Касянчук М.Н. Влияние электрон-фононного энергообмена на распространение тепловых волн в полупроводниках // ФТП.– 1998.– Т. 32, № 11.– С. 1325–1330.
6. Гуревич Ю.Г., Логвінов Г.М., Гонзалез де ла Круз Г., Карбало Санчез А.Ф., Дрогобицький Ю.В., Касянчук М.М. Динамічний тепловий транспорт в напівпровідникових субмікронних плівках // Фізика і хімія твердих тіл (Івано-Франківськ, Україна).– 2000.– Т. 1, №1.– С. 27–40.
7. Басс Ф.Г., Бочков В.С., Гуревич Ю.Г. Электроны и фононы в ограниченных полупроводниках.– М.: Наука, 1984.– 287 с.
8. Закордонец В.С., Логвинов Г.Н. Термоэлектрическая добротность полупроводников ограниченных размеров // ФТП.– 1997. – Т. 31, № 3.– С. 323–325.
9. Логвинов Г.Н. Электронная температура в неоднородно нагретом полупроводниковом субмикронном слое // ФТП.– 1991.– Т. 25, № 10.– С. 1815–1818.
10. Касянчук М.М., Лашкевич І.М. Нестаціонарні електронна і фононна температури у невироджених напівпровідниках субмікронних товщин // Фізика і хімія твердих тіл (Івано-Франківськ, Україна). – 2000.– Т. 1, № 1.– С. 49–53.
11. Rozencwaig A., Gersho A. Theory of the photoacoustic effect with solids // J.Appl.Phys.– 1976.– Vol. 47, № 1.– P. 64-69.
12. Смит Р. Полупроводники.– М.: Мир, 1982.– 528 с.

Адреса для листування:
46000 Тернопіль, вул. Львівська, 11.
Тел. 8-0352-33-08-30.
E-mail: kasyanchuk@ukr.net

Статтю подано до редколегії
13.03.2003 р.

УДК 530; 517

В.М. Купоров – молодший науковий співробітник кафедри теоретичної і математичної фізики Волинського державного університету імені Лесі Українки;
П.П. Шигорін – асистент кафедри теоретичної і математичної фізики Волинського державного університету імені Лесі Українки

Побудова функцій Гріна для систем із дискретним спектром

Роботу виконано на кафедрі теоретичної і математичної фізики ВДУ ім. Лесі Українки

Розглянуто особливості побудови функцій Гріна для систем, які мають неперервний і дискретний спектр енергії. Побудову виконано методом розкладу за власними функціями. Докладно розглянуто модель

δ-функційної потенціальної ями. На даному прикладі показано, що "дискретна" складова функції Гріна в остаточний вираз для повної функції Гріна не ввійде. Зроблено висновки й узагальнення про розглянуту властивість функції Гріна та можливість її застостосування.

Ключові слова: функція Гріна, енергетичний спектр, потенціальна яма, хвильова функція.

Kuporov V.M., Shygorin P.P. The construction of Green functions for systems with discrete spectrum. The peculiarities of the construction Green functions for systems with discrete and continuum spectra are discussed. The construction is made with help decomposition on own functions. The model of δ-functional potential hole is analyzed. The next result was received: the discrete part of Green function in finished formula for full Green function isn't included. Conclusions and generalizations about this property of Green function and possible its applications are discussed too.

Key words: Green function, energetic spectrum, potential hole, wave function.

У багатьох задачах сучасної теоретичної фізики виявляється надзвичайно ефективною техніка функцій Гріна. Найпоширеніший спосіб їх побудови випливає з формули розкладу за власними функціями даної системи. Цей розклад має вигляд [1; 3; 4]:

$$G(\vec{r},\vec{r}\,';E)=\sum_{\lambda}\frac{\psi_{\lambda}^{*}(\vec{r}\,')\psi_{\lambda}(\vec{r})}{E-E_{\lambda}}. \tag{1}$$

Тут $\psi_{\lambda}(\vec{r})$ –власні функції, а E_{λ} належить спектру оператора Гамільтона. Символ $\sum\limits_{\lambda}$ означає насправді не лише сумацію по дискретній частині спектру, а й інтегрування по неперервній його частині. Таким чином, вираз для функції Гріна можемо подати в більш розгорнутій формі:

$$G(\vec{r},\vec{r}\,';E)=\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{\psi_{\vec{k}}^{*}(\vec{r}\,')\psi_{\vec{k}}(\vec{r})}{E-E(\vec{k})}+\sum_{n}\frac{\psi_{n}^{*}(\vec{r}\,')\psi_{n}(\vec{r})}{E-E_{n}}=G^{c}+G^{d}, \tag{1a}$$

де G^c і G^d –"неперервна" та "дискретна" складові.

Отже, здавалося б, маючи власні функції та відповідні власні значення гамільтоніана, можна легко побудувати функцію Гріна. Однак в багатьох задачах із обчисленням "дискретної" складової виникає трудність, оскільки при цьому доводиться виконувати сумацію по E_n-коренях, загалом кажучи, трансцендентного рівняння, що не вдається виконати аналітично. Однак виявляється, що проблема розв'язується автоматично, оскільки така ж сума з протилежним знаком виникає внаслідок сумації по полюсах при застосуванні теореми про рештки при обчисленні контурного інтеграла для "неперервної" складової G^c. При цьому G^c розпадається на два доданки $G^c=G'-G^d$, і при підстановці в (1a) "дискретна" складова знищується. Таким чином, доданок, що містить дискретний спектр, у вихідну функцію Гріна не увійде. Така ситуація має місце в задачі про SNS-контакт [2, 252], але цей приклад доволі складний і вимагає громіздкого обчислення. Тому ми проілюструємо описану ситуацію на найпростішому прикладі, коли існує тільки один дискретний енергетичний рівень. Такою виявляється система з одновимірною δ-функційною потенціальною ямою. Рівняння Шредінгера для неї на осі $x\in(-\infty,\infty)$ виглядає так:

$$-\frac{1}{2m}\psi''(x)+g\delta(x)\psi(x)=E\psi(x), \tag{2}$$

де $g<0$ – глибина потенціальної ями.

В областях $x>0$ та $x<0$ рівняння має вигляд:

$$\psi''(x)+k^2\psi(x)=0, \tag{2a}$$

де $k=\sqrt{2mE}$. У точці $x=0$ вимагаємо неперервності хвильової функції, перша ж похідна її має стрибок, наявність якого випливає з (2). Таким чином отримуємо дві граничні умови:

$$\begin{cases}\psi(-0)=\psi(+0)\,,\\ \psi'(+0)-\psi'(-0)=2mg\psi(0).\end{cases} \tag{3}$$

Очевидно, можливі дві ситуації, коли $E>0$ і коли $E<0$. У першому випадку k дійсне і маємо суперпозицію плоских хвиль:

$$\psi(x)=\theta(-x)(c_1e^{-ikx}+c_2e^{ikx})+\theta(x)c_3e^{ikx}=\theta(-x)\psi_1(x)+\theta(x)\psi_2(x) \tag{4а}$$

у випадку хвиль, що падають зліва, і

$$\tilde\psi(x)=\theta(-x)\tilde c_1e^{-ikx}+\theta(x)(\tilde c_2e^{ikx}+\tilde c_3e^{-ikx})=\theta(-x)\tilde\psi_1(x)+\theta(x)\tilde\psi_2(x) \tag{4б}$$

для хвиль, що падають справа. Відзначимо, що сума $\sum\limits_{\lambda}\psi_\lambda{}^*(x)\psi_\lambda(x)$ включає в себе також суму по цих двох типах розв'язку, тобто:

$$\sum_\lambda\psi^*_\lambda(x')\psi_\lambda(x)=\sum_k\Big(\psi^*_k(x')\psi_k(x)+\tilde\psi^*_k(x')\tilde\psi_k(x)\Big).$$

У випадку ж $E=-|E|<0$, $k=i\sqrt{2m|E|}=iq$ маємо квадратично інтегровні експоненти:

$$\psi_d(x)=\theta(-x)Ae^{qx}+\theta(x)Be^{-qx}.$$

Із граничних умов для хвильової функції одержуємо $A=B$ і $q=m|g|$, звідки $|E|=mg^2/2$, $E=-mg^2/2$. Отже, ми одержали єдиний енергетичний рівень, який відповідає дискретній частині спектру. Далі з умови нормування на одиницю визначаємо глобальну константу: $|A|^2=m|g|$. Таким чином, маємо все необхідне для побудови "дискретної" складової функції Гріна. Її можна будувати в області *x<0* або *x>0*. Оберемо, наприклад, другу можливість. Внесок, що дає дискретний спектр, має вигляд:

$$G^d(x,x';E)=\frac{m|g|e^{-m|g|(x+x')}}{E+mg^2/2}. \tag{5}$$

Перейдемо до випадку $E>0$. Використовуючи граничні умови (3), а також ліво-праву симетрію ($|c_3|^2=|\tilde c_2|^2$), виражаємо константи c_1 і c_2 через c_3:

$$c_1=\frac{mg}{ik}c_3,\qquad c_2=\frac{ik-mg}{ik}c_3, \tag{6а}$$

а константи $\tilde c_1$ та $\tilde c_3$ через $\tilde c_2$:

$$\tilde c_1=\frac{ik}{ik+mg}\tilde c_2,\quad \tilde c_3=-\frac{mg}{ik+mg}\tilde c_2. \tag{6б}$$

Мультиплікативну константу шукаємо з умови повноти:

$$\sum_\lambda\psi^*_\lambda(x)\psi_\lambda(x')=\delta(x-x').$$

Це дає:

$$|c_3|^2=|\tilde c_2|^2=\frac{k^2}{k^2+m^2g^2}.$$

Доданок від неперервного в області *x>0* спектру виражається інтегралом:

$$G^c(x,x';E)=\int\frac{dk}{2\pi}\frac{\psi^*_2(x')\psi_2(x)+\tilde\psi^*_2(x')\tilde\psi_2(x)}{E-k^2/2m}= \tag{7}$$

$$=\int\frac{dk}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{E-k^2/(2m)}-\int\frac{dk}{2\pi}\frac{mg}{mg-ik}\frac{e^{ik(x+x')}}{E-k^2/2m}=G^0(x-x';E)-\int\frac{dk}{2\pi}\frac{mg}{mg-ik}\frac{e^{ik(x+x')}}{E-k^2/2m}.$$

Перший доданок, що залежить від різниці $x-x'$, є просторово-однорідною функцією Гріна вільної частинки:

$$G^0(x-x';E)=\int\frac{dk}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{E-k^2/2m}=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{m}{2E}}e^{i\sqrt{2mE}(x-x')}.$$

Останній інтеграл обчислюємо контурним інтегруванням [1,14]:

$$\int\frac{dk}{2\pi}\frac{mg}{mg-ik}\frac{e^{ik(x+x')}}{E-k^2/2m}=\frac{m|g|e^{-m|g|(x+x')}}{E+mg^2/2}+\sqrt{\frac{m}{2E}}\frac{mge^{i\sqrt{2mE}(x+x')}}{mg-i\sqrt{2mE}}=$$

$$=G^d(x,x';E)+\sqrt{\frac{m}{2E}}\frac{mge^{i\sqrt{2mE}(x+x')}}{mg-i\sqrt{2mE}}.$$

Отже,

$$G^c(x,x';E)=G^0(x-x';E)-G^d(x,x';E)-\sqrt{\frac{m}{2E}}\frac{mge^{i\sqrt{2mE}(x+x')}}{mg-i\sqrt{2mE}}.$$

Бачимо, що у виразі для G^c з'являється доданок $-G^d$, який знищує “дискретну” складову у виразі для G. Остаточний результат для повної функції Гріна має вигляд:

$$G(x,x';E)=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{m}{2E}}\left\{e^{i\sqrt{2mE}(x-x')}+\frac{im|g|}{mg-i\sqrt{2mE}}e^{i\sqrt{2mE}(x+x')}\right\}.$$

Бачимо, що з останнього виразу для функції Гріна внесок від дискретного спектру випав. Фізичний зміст доданків, що залишилися, такий: перший є функцією Гріна для вільної частинки, другий, пропорційний $e^{ik(x+x')}$, зумовлений наявністю ями і перетворюється на нуль за її відсутності ($g=0$). Зауважимо, що полюс його знаменника, $mg=i\sqrt{2mE}$, визначає дискретний рівень енергії $E=-mg^2/2$.

Можна розглянути складнішу задачу, а саме яму скінченної ширини. У цьому випадку дискретний спектр є багаторівневий. Тоді вираз для G^d являє собою суму по цих рівнях, які визначаються трансцендентним рівнянням (її, очевидно, точно підрахувати неможливо). Аналогічна сума, але з протилежним знаком, виникає внаслідок сумації по полюсах у виразі для G^c. У результаті складова G^d функції Гріна G знищиться. Та ж ситуація виникає в теорії SNS-контакту і розв'язується також унаслідок описаного знищення.

Можна очікувати, що це загальна закономірність, а саме для певного класу потенціалів, які дають неперервний і дискретний спектр енергії, у виразі для функції Гріна доданки “дискретної” складової випадають. Цей факт є особливо корисним для обчислення в тих випадках, коли рівняння на дискретний спектр є трансцендентним і явно відповідні доданки виписати проблематично. Проте в переглянутій нами науковій літературі інформації про цей факт не виявлено. Формулювання і доведення загальної теореми про це може бути цікавим для сучасної математичної фізики.

Література

1. Свідзинський А. В. Математичні методи теоретичної фізики.– Луцьк: РВВ Вежа, 2001.– 563 с.
2. Свидзинский А.В. Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости.– М.: Наука, 1982.– 310 с.
3. Садовский М. В. Лекции по статистической физике.– Екатеринбург.:ИЭ УрО РАН, 1999.– 262 с.
4. Schulten K. Notes on Quantum Mechanics.– Department of Physics and Beckman Institute University of Illinois at Urbana, 2000.– 390 p.

Адреса для листування:
43025 Луцьк, пр. Волі, 13.
Тел. 4-92-61.
E-mail: qark@ukr.net, pashyg@yahoo.com

Статтю подано до редколегії
15.10.2002 р.