

УДК 512.53

Тетяна В. Волошина, к. ф.-м. н., доцент

Котранзитивні піднапівгрупи повної напівгрупи перетворень T_n .

Описано котранзитивні піднапівгрупи повної напівгрупи перетворень T_n . Встановлено зв'язок котранзитивності піднапівгрупи із її S_n -нормальністю.

Ключові слова: котранзитивна піднапівгрупа, напівгрупа перетворень.

E-mail: vtv_lutsk@rambler.ru

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор Кириченко В.В.

Вступ. Поняття котранзитивної піднапівгрупи для напівгруп перетворень було введено Сулліваном у роботі [1] і використовувалося для опису ідеалів у інверсній симетричній напівгрупі $IS(X)$, повній напівгрупі перетворень $T(X)$ та напівгрупі усіх часткових перетворень $PT(X)$ множини X . Ми у цій роботі обмежимося розглядом повної напівгрупи T_n перетворень скінченної множини. Кожен її двосторонній ідеал буде котранзитивною піднапівгрупою. Метою роботи буде опис всіх її котранзитивних піднапівгруп.

Нехай $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Повну напівгрупу всіх відображень множини N в саму себе будемо позначати T_n . Для $\alpha \in T_n$ через $ran\alpha$ позначимо область значень відображення α . Рангом $rank\alpha$ перетворення α будемо називати потужність його області значень. Зауважимо, що елемент $\alpha \in T_n$ буде ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли обмеження α на множину $ran\alpha$ є тотожним перетворенням [2]. Для $x \in ran\alpha$ через $\alpha^{-1}(x)$ будемо позначати повний прообраз x при відображенні α . З кожним елементом α напівгрупи T_n пов'язане розбиття $\pi_\alpha = \alpha \circ \alpha^{-1}$ множини N на класи еквівалентності $N = \bigcup_{x \in ran\alpha} \alpha^{-1}(x)$, тобто $y_1 \pi_\alpha y_2$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha(y_1) = \alpha(y_2)$.

Означення відношень Гріна L, R, D, I на множині елементів напівгрупи можна знайти у [2].

Лема 1 [2]. Для $\alpha, \beta \in T_n$ $\alpha L \beta$ тоді і тільки тоді, коли $ran\alpha = ran\beta$; $\alpha R \beta$ тоді і тільки

Tatiana V. Voloshyna, PhD, Associate Professor

Cotransitive subsemigroups of the full transformation semigroup T_n .

Cotransitive subsemigroups of the full transformation semigroup T_n are described. The relations of a cotransitivity of the subsemigroup with its S_n -normality are established.

Key words: cotransitive subsemigroups, transformation semigroup.

ки тоді, коли $\pi_\alpha = \pi_\beta$; $\alpha D \beta$ тоді і тільки тоді, коли $rank\alpha = rank\beta$. Для напівгрупи T_n $D = I$.

Клас еквівалентності відношення D , що містить елементи рангу k будемо позначати через D_k .

Лема 2 [2]. Кожен ідеал напівгрупи T_n – головний; має вигляд $I_k = \{\alpha \in T_n \mid rank\alpha \leq k\}$, $k = \overline{1, n}$. При цьому $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_{n-1} \subset I_n = T_n$.

Зауважимо, що $I_k = \bigcup_{i=1}^k D_i$.

1. Котранзитивні піднапівгрупи з T_n

Нехай $ran\alpha = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subseteq N$, $A_i = \alpha^{-1}(x_i)$. Відображення $\alpha \in T_n$ будемо скорочено записувати $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix}$.

Піднапівгрупа $S \subseteq T_n$ називається котранзитивною, якщо для кожного перетворення $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix} \in S$ рангу k виконуються дві умови:

(1) для кожного $\{b_1, b_2, \dots, b_k\} \subseteq N$

$$\mu = \begin{pmatrix} A_i \\ b_i \end{pmatrix} \in S;$$

(2) для кожного $\{y_1, y_2, \dots, y_k\} \subseteq N$ існує $\lambda \in S$, таке що, $y_i \in \lambda^{-1}(x_i)$, $i = \overline{1, k}$.

Як було вже зазначено, кожен ідеал $I_k, k = \overline{1, n}$, є котранзитивною піднапівгрупою в

T_n . Легко бачити, що підгрупа S_n також задовольняє умови котранзитивності.

Лема 3. Котранзитивна піднапівгрупа S з T_n разом із кожним своїм елементом α містить весь R -клас R_α , якому належить α .

▲ З умови (1) випливає, що $\pi_\alpha = \pi_\mu$. Тому, за лемою 1, $\mu \in R_\alpha$. Оскільки із $\mu \in R_\alpha$ випливає, що $\mu \in S$, то $R_\alpha \subseteq S$. ■

Лема 4. Якщо котранзитивна піднапівгрупа S з T_n містить елемент α рангу k , то існує такий набір розбиттів $\{\pi_\alpha \mid \alpha \in S\}$ множини N , що розділяє довільні її k елементів.

▲ З умови (2) випливає, що для довільних k елементів $\{y_1, y_2, \dots, y_k\} \subseteq N$ існує таке відображення $\lambda \in S$, що y_i містяться у різних класах розбиття π_λ множини N , тобто π_λ розділяє ці елементи. ■

Лема 5. Нехай $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix} \in T_n$. Рівність

$rank\alpha = rank\alpha^2$ виконується тоді і тільки тоді, коли $|A_i \cap ran\alpha| = 1$ для всіх $i = \overline{1, k}$. Якщо s – кількість таких A_i , для яких $A_i \cap ran\alpha = \emptyset$, то $rank\alpha^2 = rank\alpha - s$.

▲ Якщо всі класи розбиття π_α містять рівно по одному елементу з $ran\alpha$, то кожен клас A_i можна ототожнити з цим елементом. Тоді відображення α задає бієкцію на $ran\alpha$. У цьому випадку відображення α^2 також буде бієкцією на $ran\alpha$. Тому $ran\alpha = ran\alpha^2$, а тому і ранги у α та α^2 однакові.

Нехай тепер існує такий клас розбиття π_α , у якому більше одного елемента з $ran\alpha$. Тоді знайдеться і такий клас розбиття A_i , у якому немає жодного елемента із $ran\alpha$. Розглянемо $x_i = \alpha(A_i) \in ran\alpha$. Доведемо, що $x_i \notin ran\alpha^2$. Нехай існує $z \in X$, такий, що $\alpha^2(z) = x_i$. Тоді $\alpha(z) \in A_i$. З іншого боку, $\alpha(z) \in ran\alpha$. Але $A_i \cap ran\alpha = \emptyset$. Прийшли до суперечності. Отже, $x_i \notin ran\alpha^2$. Із $ran\alpha^2 \subseteq ran\alpha$ тоді випливає, що $rank\alpha^2 < rank\alpha$.

Кожному A_i , для якого $A_i \cap ran\alpha = \emptyset$, відповідає такий $x_i = \alpha(A_i) \in ran\alpha$, що $x_i \notin ran\alpha^2$. Якщо ж у A_i міститься хоча б один елемент із $ran\alpha$, наприклад $x_j \in A_i$, то для дові-

льного $z \in A_j$ $\alpha^2(z) = \alpha(x_j) = x_i$. Отже, у цьому випадку $x_i \in ran\alpha^2$. Тому рівність $rank\alpha^2 = rank\alpha - s$ виконується. ■

Розбиття $N = \bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{i=1}^k B_i$ будемо називати *однотипними*, якщо набори $(|A_1|, |A_2|, \dots, |A_k|)$ та $(|B_1|, |B_2|, \dots, |B_k|)$ розрізняються лише порядком елементів.

Лема 6. Нехай $\varepsilon = \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix} \in T_n$ – ідемпотент.

Тоді для кожного $g \in S_n$ елемент $g^{-1}\varepsilon g = \begin{pmatrix} B_i \\ b_i \end{pmatrix}$

також ідемпотент. Розбиття $N = \bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{i=1}^k B_i$ – однотипні, а $b_i = g(a_i)$, $B_i = g(A_i)$, $i = \overline{1, k}$.

▲ Твердження лема випливає із того, що для кожного $g \in S_n$ відображення $\alpha \mapsto g^{-1}\alpha g$ є автоморфізмом напівгрупи T_n . ■

Розбиття $N = \bigcup_{i=1}^k A_i$ будемо називати *меншим* за розбиття $N = \bigcup_{i=1}^r B_i$, якщо кожен блок B_i

другого розбиття є об'єднанням кількох блоків першого розбиття. Решітку всіх розбиттів множини N позначимо через $PartN$.

Теорема 1. Піднапівгрупа $S \subseteq T_n$ буде котранзитивною тоді і тільки тоді, коли вона належить до одного з таких типів:

1. $S = S_n$.

2. Нехай $(\rho(k)_j)_{j \in J}$ – така родина розбиттів множини N на k блоків, яка розділяє довільні її k елементів, а $Q_k = \{\rho \in PartN \mid \rho(k)_j \leq \rho \text{ для деякого } j \in J\}$.

Тоді $S = \{\alpha \in T_n \mid \pi_\alpha \in \bigcup_{i=1}^k Q_k\}$.

3. Нехай $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ – набір розбиттів множини N на k блоків, $(\rho_j)_{j \in J}$ – родина всіх розбиттів множини N , однотипних одному з $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$, а $Q = \{\rho \in PartN \mid \rho_j \leq \rho \text{ для деякого } j \in J\}$. Тоді $S = S_n \cup \{\alpha \in T_n \mid \pi_\alpha \in Q\}$.

▲ Очевидно, що S_n – котранзитивна піднапівгрупа з T_n . Якщо у котранзитивній піднапівгрупі S міститься хоча б один елемент α

рангу n , то, за лемою 3, вона містить і весь R_α . Але усі елементи S_n складають єдиний R -клас, бо в них однакове тривіальне розбиття на одно-елементні класи. Отже, якщо S – котранзитивна піднапівгрупа з T_n , то вона або містить S_n повністю, або не містить жодного елемента рангу n .

Нехай тепер найбільший ранг елемента із котранзитивної піднапівгрупи S дорівнює $k < n$. Тоді, за лемою 4, то існує такий набір розбиттів $\{\pi_\alpha \mid \alpha \in S\}$ множини N , що розділяє довільні її k елементів. Позначимо його $(\rho(k)_j)_{j \in J}$. Для елементів $\{y_1, y_2, \dots, y_k\} \subseteq N$ існує таке $\lambda \in S$, що кожен усі y_i містяться у різних класах розбиття π_λ . Разом з елементом $\lambda \in S$ у цій напівгрупі міститься весь R -клас R_λ , що відповідає цьому розбиттю. Отже, в S містяться всі R -класи, відповідні розбиттям із родини $(\rho(k)_j)_{j \in J}$. Всі ці R -класи містяться в одному D -класі D_k . Тому $D_k \cap S = \{\alpha \in T_n \mid \pi_\alpha \in (\rho(k)_j)_{j \in J}\}$.

При множенні між собою їх елементів із $D_k \cap S$ можна отримати елемент рангу $k-1$. Доведемо це. Нехай $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix} \in S$ – елемент рангу $k < n$. Виберемо у кожній підмножині A_i по одному представнику $a_i \in A_i$. Тоді $\varepsilon = \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix} \in S$ – ідемпотент того самого рангу. Для всіх $i = \overline{1, k}$ $|A_i \cap \text{ran } \varepsilon| = 1$. Оскільки $k < n$, існує така A_j , що $|A_j| > 1$. Виберемо у A_j елемент z , відмінний від a_j . Для деякої $A_l \neq A_j$ замінимо a_l на z . Отримаємо $\mu = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_j & \dots & A_l & \dots & A_k \\ a_1 & \dots & a_j & \dots & z & \dots & a_k \end{pmatrix}$. У підмножині A_l немає жодного елемента із $\text{ran } \mu$. У всіх інших A_i існує принаймні один елемент із $\text{ran } \mu$. Тому, за лемою 5, $\text{rank } \mu^2 = \text{rank } \mu - 1 = k - 1$. За умовою (1), $\mu \in S$, а тому і $\mu^2 \in S$. Отже, в S існує елемент рангу $k-1$. Для довільних двох A_m, A_l , відмінних від A_j розглянемо елемент

$$\mu_{ml} = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_j & \dots & A_l & \dots & A_m & \dots & A_k \\ a_1 & \dots & a_m & \dots & z & \dots & a_j & \dots & a_k \end{pmatrix}.$$

За умовою (1), $\mu_{ml} \in S$, а тому і $\mu_{ml}^2 \in S$. Оскільки

$a_j, z \in A_j$, один із блоків розбиття $\mu_{ml}^2 \in S$ є об'єднанням вибраних блоків A_m, A_l розбиття $\mu_{ml} \in S$. Отже, разом із кожним елементом $\alpha \in D_k \cap S$ в S міститься підмножина $\{\beta \in T_n \cap D_{k-1} \mid \pi_\alpha \leq \pi_\beta\}$.

Далі аналогічно доводимо, що в S містяться елементи рангів $k-2, k-3, \dots, 2, 1$, а також, що в S містяться ті елементи $\alpha \in T_n$, розбиття π_α яких задовольняють умову $\rho(k)_j \leq \pi_\alpha$ для деякого $j \in J$. Провівши аналогічні міркування для елементів рангу $k-1, k-2, \dots, 2$, отримуємо, що $S = \{\alpha \in T_n \mid \pi_\alpha \in \bigcup_{i=1}^k Q_k\}$.

Нехай тепер $S_n \subset S$, і в котранзитивній піднапівгрупі S існують елементи меншого за n рангу. Нехай k – найбільший відмінний від n ранг елемента із S , а $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix} \in S$ – елемент рангу k .

Для α розглянемо ідемпотент $\varepsilon_\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix} \in S$, вибравши по одному представнику $a_i \in A_i$. За лемою 6, для кожного $g \in S_n$ елемент $g^{-1}\varepsilon_\alpha g = \begin{pmatrix} B_i \\ b_i \end{pmatrix} \in S$ також ідемпотент. Розбиття $N = \bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{i=1}^k B_i$ – однотипні, а $b_i = g(a_i)$, $B_i = g(A_i)$, $i = \overline{1, k}$. Застосувавши всі елементи $g \in S_n$, отримаємо ідемпотенти виду $g^{-1}\varepsilon_\alpha g \in S$ із всіма можливими розбиттями множини N , що однотипні з розбиттям елемента $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix} \in S$. За лемою 3, піднапівгрупа S містить усі R -класи, що відповідають розбиттям, однотипним із π_α . Далі доведення подібне до відповідного фрагменту попереднього випадку.

Зауважимо насамкінець, що для усіх трьох типів $S \subseteq T_n$ є об'єднанням R -класів, а тому задовольняють умову (1). Якщо $D_k \cap S \neq \emptyset$, то R -класам із D_k відповідають розбиття, що утворюють набір, яким можна розділити довільні елементи $\{y_1, y_2, \dots, y_k\} \subseteq N$. Тому і умова (2) для S також виконується. Замкненість множення на S випливає із того, що для довільних $\alpha, \beta \in T_n$ $\pi_\alpha \leq \pi_{\alpha\beta}$. ■

Наслідок. Ідеал I_1 міститься у кожній відмінній від S_n котранзитивній піднапівгрупі з T_n .

Зауваження. Якщо із піднапівгруп третього типу вилучити підгрупу S_n , то отримаємо піднапівгрупу другого типу. Зворотнє твердження хибне.

Приклад 1. У напівгрупі T_4 піднапівгрупа S містить усі елементи рангу 1 і всі ті елементи рангу 2, для яких розбиттями є $\{1,2\} \cup \{3,4\}$ та $\{1,3\} \cup \{2,4\}$. Це котранзитивна піднапівгрупа другого типу. У ній 28 елементів.

Приклад 2. У напівгрупі T_4 піднапівгрупа U містить усі елементи рангу 1 і всі ті елементи рангу 2, для яких розбиттями є $\{1,2,3\} \cup \{4\}$, $\{1,2,4\} \cup \{3\}$, $\{1,3,4\} \cup \{2\}$ та $\{2,3,4\} \cup \{1\}$. Це котранзитивна піднапівгрупа другого типу. В ній 52 елемента.

Наступне поняття було введено І. Леві [3]. Піднапівгрупа S із T_n називається S_n -нормальною, якщо для довільного $g \in S_n$ $g^{-1}Sg = S$.

Теорема 2. Котранзитивна піднапівгрупа S із T_n буде S_n -нормальною тоді і тільки тоді, коли вона належить або до третього типу, або до третього типу із вилученою підгрупою S_n .

▲ Якщо котранзитивна піднапівгрупа S із T_n є S_n -нормальною і в ній є елемент

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix} \in S \text{ рангу } k, \text{ то в } S \text{ існує ідемпотент}$$

$$\varepsilon_\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix} \in S, \quad a_i \in A_i. \text{ За лемою 6, для кожного}$$

$$g \in S_n \text{ елемент } g^{-1}\varepsilon_\alpha g = \begin{pmatrix} B_i \\ b_i \end{pmatrix} \in S \text{ також ідемпотент. Розбиття } N = \bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{i=1}^k B_i \text{ – однотипні. За-}$$

стосовавши всі елементи $g \in S_n$, отримаємо, що в S містяться ідемпотенти із всіма можливими розбиттями множини N , що однотипні з розбиттям елемента $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix}$.

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix}.$$

Нехай тепер для котранзитивної піднапівгрупи S із того, що $S \cap D_k \neq \emptyset$, випливає, що вона разом із кожним своїм елементом

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ x_i \end{pmatrix} \in D_k \text{ містить усі елементи, розбиття}$$

яких однотипне із π_α . Розглянемо довільний $g \in S_n$. Позначимо $B_i = g(A_i)$. Тоді $|B_i| = |A_i|$.

Отже, розбиття $N = \bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{i=1}^k B_i$ – однотипні.

Позначимо $b_i = g(x_i)$, $i = \overline{1, k}$. Доведемо рівність

$$g^{-1}\alpha g = \begin{pmatrix} B_i \\ b_i \end{pmatrix}. \text{ Справді,}$$

$$(g^{-1}\alpha g)(B_i) = g(\alpha(g^{-1}(B_i))) = g(\alpha(A_i)) = g(x_i) = b_i \text{ для } i = \overline{1, k}.$$

Оскільки у S містяться елементи із усіма можливими розбиттями такого ж типу, як

$$N = \bigcup_{i=1}^k A_i, \text{ то в } S \text{ існує принаймні один елемент}$$

із розбиттям $N = \bigcup_{i=1}^k B_i$. Нехай це $\beta = \begin{pmatrix} B_i \\ c_i \end{pmatrix} \in S$. Із

котранзитивності S випливає, що і

$$g^{-1}\alpha g = \begin{pmatrix} B_i \\ b_i \end{pmatrix} \in S. \text{ Отже, } S \text{ є } S_n\text{-нормальною. } \blacksquare$$

Зауваження. Котранзитивна піднапівгрупа S із T_4 (приклад 1) не містить елементів із розбиттям $\{1,4\} \cup \{2,3\}$, яке є однотипним із розбиттями $\{1,2\} \cup \{3,4\}$ та $\{1,3\} \cup \{2,4\}$. Вона не є S_n -нормальною, бо для $g = (2\ 4)$, елемент

$$g^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \notin S. \text{ Натомість}$$

котранзитивна піднапівгрупа U із T_4 (приклад 2) містить елементи із усіма можливими розбиттями типу $1 \leq i \leq 3$ і є S_n -нормальною.

Список використаних джерел

1. R.P. Sullivan, Ideals in transformation semigroups // Commentationes mathematicae Universitatis Carolinae. – V.19, 3 (1978), 431-446.

2. А. Клиффорд, Г. Престон. Алгебраическая теория полугрупп: Пер. с англ. В 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т.1. – 283 с.

3. I. Levi, Congruences on normal transformation semigroups // Math. Jap. 52 (2), 2000, 247-261.

Надійшла до редколегії 29.04.2010 р.