11. Shim S.–A. Uniform boundedness and convergence of solutions to the systems with a single nonzero cross–diffusion // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – Vol. 279. – P. 1–21.

Музыка Лилия. Точные решения краевой задачи обобщенной системы Шигесады–Кавасаки–Теремото. Развитие методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными и их систем – актуальная проблема современной математической физики.

Статья посвящена нелинейной эволюционной системе Шигесады–Кавасаки–Терамото с поперечной диффузией, которая обобщает классическую диффузионную систему Лотки–Вольтера.

В статье построены новые точные решения обобщенной системы Шигесады–Кавасаки–Терамото на основании точних решений обобщенного уравнения Фишера. Изучается краевая задача с нулевыми условиями Ноймана. Приведены точные решения этой задачи. Исследовано ассимптотическое поведение полученых решений.

Ключевые слова: система Шиґесады–Кавасаки–Терамото, система Лотки–Вольтера, точное решение, обобщенное уравнение Фишера, краевая задача, нулевые условия Ноймана.

Muzyka Liliia. Exact Solutions of Boundary-value Problem of Generalized Shigesada–Kawasaki–Teramoto System. Development of methods for integrating the nonlinear differential equations and their systems is the actual problem of modern mathematical physics.

The article is devoted to the non-linear evolution cross–diffusion Shigesada–Kawasaki–Teramoto system, which generalizes the classical diffusion Lotka–Voltera system.

New exact solutions of the generalized Shigesada–Kawasaki–Teramoto system are built by means of exact solutions of the Fisher equation in this article. Boundary–value problem with zero Neumann conditions is investigated. Exact solutions of this problem are given. The asymptotic behaviour of these solutions is examined.

Key words: the Shigesada–Kawasaki–Teramoto system, the Lotka–Volterra system, exact solution, the generalized Fisher equation, boundary-value problem, zero Neumann conditions.

Стаття надійшла до редколегії
18.11.2013 р.

УДК 531.19

Богдан Антонюк

Деякі властивості генератора ланцюжка рівнянь Боголюбова одновимірної системи виділеної частки в термостаті

Установлено властивості генератора ланцюжка рівнянь Боголюбова одновимірної несиметричної системи виділеної частки в термостаті.

Ключові слова: ББГКІ ієрархія, несиметричні системи частинок, еволюційний оператор, багаточастинкова система.

Постановка наукової проблеми та її значення. Однією з актуальних тем сучасної математичної фізики є вивчення реальних процесів, що відбуваються в різноманітних макросередовищах, а саме: газах, рідинах, біологічних організмах різних ступенів розвитку і складу, на основі властивостей і законів руху мікрочастинок, із яких вони складаються.

Цікавим є вивчення нескінченних систем, тобто систем із нескінченною кількістю частинок [3; 2], у нескінченному фазовому просторі, стан яких повністю визначається послідовністю частинкових функцій розподілу.

Завдання статистичної механіки полягає в тому, щоб із відомого початкового стану системи знайти її стан у довільний момент часу, тобто у визначенні еволюції системи. Важливим є також питання визначення стаціонарного стану системи – тобто стану, у якому частинки перебувають у рівновазі [1].

Еволюція системи описується з використанням математичних методів рівняннями функції розподілу, серед яких важливе місце займає ланцюжок рівнянь Боголюбова – нескінченна система інтегро-диференціальних рівнянь (ієрархія ББГКІ). Ланцюжок рівнянь Боголюбова має стаціонарні розв'язки, що описують рівноважні стани. Нерівноважні стани описуються нестаціонарними розв'язками, які представляються як збурення рівноважних станів.

Ієрархія ББГКІ є фундаментальною також і в тому сенсі, що внаслідок граничних переходів із неї можна вивести феноменологічні рівняння руху статистичних систем, наприклад рівняння дифузії, рівняння гідродинаміки та інші. Рівняння Боголюбова знаходять своє застосування не лише в механіці, теоретичній та математичній фізиці, а й у біології, хімії, економіці, нанотехнологіях, що вимагає їх глибокого математичного дослідження [4].

Ієрархію ББГКІ природно розглядати як абстрактне еволюційне рівняння у певному просторі функцій розподілу. Для визначення розв'язку необхідно побудувати еволюційний оператор, що діє на функції розподілу. Внаслідок складних математичних проблем побудови оператора еволюції, пов'язаних із необмеженістю нескінченних систем, до сьогодні залишається нерозв'язаною низка принципових аналітичних питань.

Матеріали і методи. Для створення моделей поведінки макроскопічних тіл широко використовуються математичні методи, серед яких важливе значення має ланцюжок рівнянь Боголюбова – нескінченна система інтегро-диференціальних рівнянь (ієрархія ББГКІ). Відомо, що всі можливі стани систем частинок повністю моделюються нескінченною послідовністю частинкових функцій розподілу, що задовольняють рівняння Боголюбова [3; 2]. Ієрархія ББГКІ є фундаментальною також і в тому сенсі, що внаслідок граничних переходів, із неї можна вивести феноменологічні рівняння руху статистичних систем, наприклад, кінетичні рівняння, рівняння гідродинаміки, рівняння дифузії. Зауважимо, що в цій роботі досліджується несиметрична багаточастинкова система, тобто система з несиметричним гамільтоніаном відносно перестановок аргументів, що характеризують кожну із частинок.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження. Розглянемо частинний випадок одномірної системи пружних куль: систему виділеної частинки в термостаті. Виділеній частинці присвоїмо номер 0 і позначимо її масу M та радіус – D. Частинки термостату пронумеруємо числами із $Z^1\backslash\{0\}$, причому при $i > 0$ частинка знаходиться справа від виділеної ($i= 0$), при $i < 0$ – зліва. Позначимо $m=m_i>0$, $d=d_i>0$ – масу та радіус частинок термостату. Зауважимо, що $M>>m$, $D>>d$ і при цьому кожна частинка взаємодіє лише з двома сусідніми. Частинки цієї системи характеризуються координатами центрів $q_i \in R$, простір R^1 усіх можливих значень q_i будемо називати конфігураційним. Зрозуміло, що при $i>j$ $q_i>q_j$, тобто частинки на прямій впорядковані звичайним способом. Позначимо імпульс кожної частинки $p_i \in R^1$. Простір можливих значень імпульсів назвемо імпульсним простором. Конфігураційний та імпульсний простори зручно об'єднати в один двовимірний фазовий простір $R^1 \times R^1$. Його точки будемо позначати $x_i=(q_i,p_i)$; зокрема, координати виділеної частинки $x_0=(q_0,p_0)$.

Очевидно, що для конфігурацій такої системи повинні виконуватись нерівності $|q_i - q_{i+1}| \ge d_i + d_{i+1}$ де $i\in Z^1$, тобто для $i\in Z^1\backslash\{-1;0\}$ $|q_i - q_{i+1}| \ge 2d$, а для $i\in\{-1;0\}$ $|q_i - q_{i+1}| \ge d + D$.

Конфігурації $W_{n_1+1+n_2} = \{(q_{-n_2},\ldots,q_{n_1}) \in R^{n_1+1+n_2} \,|\, (q_{i+1} - q_i) < d_{i+1} + d_i\}$ хоча б для однієї пари $(i;\ i+1)$ називаються забороненими і не вивчаються.

Розглянемо еволюцію системи в моменти зіткнень частинок. Зауважимо, що потенціал взаємодії частинок $\Phi = \Phi(|q_i - q_{i+1}|)$ є потенціалом взаємодії з твердою серцевиною, тобто

$$\Phi(|q_i - q_{i+1}|) = +\infty \text{ при } |q_i - q_{i+1}| < d_{i+1} + d_i .$$

Наблизившись на відстань взаємодії, частинки i та $i+1$ пружно розсіюються одна на одній, тобто обмінюються імпульсами. Значення імпульсів

до зіткнення p_i і p_{i+1} пов'язані зі значеннями імпульсів після зіткнення p_i^* і p_{i+1}^* такими співвідношеннями:

$$p_{i+1}^* = p_i\,,\; p_i^* = p_{i+1}.$$

Розглянемо лінійний простір $L_{n_1+1+n_2}$ – вимірних сумовних функцій $f_{n_1+1+n_2}(x_{-n_2},\dots,x_{n_1}),\quad x_i=(q_i,p_i)\in R^1\times R^1$, що задані на фазовому просторі n_1+1+n_2 частинок, несиметричних відносно перестановок $x_{-n_2},\dots,x_{n_1}$, причому f=0 на заборонених конфігураціях, тобто при $q_{-n_2},\dots,q_{-1},Q,q_1,\dots,q_{n_1}\in W_{n_1+1+n_2}$.

Означимо норму в $L_{n_1+1+n_2}$ таким чином:

$$\left\|f_{n_1+1+n_2}\right\|=\int dx_{-n_2},\dots,dx_{n_1}\left|f_{n_1+1+n_2}(x_{-n_2},\dots,x_{n_1})\right|.$$

Виділимо в ньому підпростір $L_{n_1+1+n_2,s}$ функцій, що мають властивість:

$$f_{n_1+1+n_2}(x_{-n_2},\dots,q_i,p_i,q_{i+1},p_{i+1},\dots,x_{n_1})=f_{n_1+1+n_2}(x_{-n_2},\dots,q_i,p_{i+1},$$
$$q_{i+1},p_i,\dots,x_{n_1})\ \text{при}\ |q_i-q_{i+1}|=d_i+d_{i+1}.$$

Через $L^0_{n_1+1+n_2}$ позначимо множину в $L_{n_1+1+n_2,s}$, яка складається з один раз неперервно-диференційованих функцій, визначених на компактах і рівних нулю в деякому ε-околі заборонених конфігурацій W, тобто $f=0$, якщо хоча б для однієї пари (q_i,q_{i+1}) виконується $|q_i-q_{i+1}|=d_i+d_{i+1}+\varepsilon$.

У просторі $L_{n_1+1+n_2,s}$ визначимо оператор еволюції несиметричної системи:

$$\left(S^{n_1+1+n_2}(t)f_{n_1+1+n_2}\right)(x_{-n_2},\dots,x_{n_1})=$$
$$=\begin{cases} f_{n_1+1+n_2}(X_{-n_2}(t,x),\dots,X_{n_1}(t,x)), & \text{ÿêùî}\ (q_{-n_2},\dots,q_{n_1})\in R^{n_1+1+n_2}\setminus W_{n_1+1+n_2},\\ 0, & \text{ÿêùî}\ (q_{-n_2},\dots,q_{n_1})\in W_{n_1+1+n_2}\end{cases}$$

де $X_{-n_2}(t,x),\dots,X_{n_1}(t,x)=X(t,x)$ – стан системи, отриманий зі стану x рухом уздовж фазової траєкторії за час t.

Оператори $S^{n_1+1+n_2}(t)$ мають такі властивості:

1. Сім'я операторів $S^{n_1+1+n_2}(t)\ \ t\in(-\infty;+\infty)$ є однопараметричною групою ізометричних операторів в $L_{n_1+1+n_2,s}$.

2. Сім'я операторів $S^{n_1+1+n_2}(t)\ \ t\in(-\infty;+\infty)$ утворює ізометричну сильно неперервну групу, інфінітезимальний оператор якої на всюди щільній у $L_{n_1+1+n_2,s}$ задається дужкою Пуассона та граничними умовами при $|q_i-q_{i+1}|=d_i+d_{i+1}$:

$$\frac{d}{dt}S^{n_1+1+n_2}(t)\Big|_{t=0}f_{n_1+1+n_2}=\left[f_{n_1+1+n_2},H_{n_1+1+n_2}\right].$$

Позначимо через L^1_α та $L^1_{\alpha,0}$ простори двосторонніх послідовностей функцій

$$f=\{f_{n_1+1+n_2}(x_{-n_2},\dots,x_{n_1})\}_{n_1,n_2\ge 0}$$

із визначеною нормою:

$$\|f\|=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{\substack{n_1,n_2\ge 0\\ n_1+1+n_2=n}}\int dx_{-n_2},\dots,dx_{n_1}\left|f_n(x_{-n_2},\dots,x_{n_1})\right|,\alpha>0.$$

L_{α}^{1} і $L_{\alpha,0}^{1}$ є прямими сумами банахових просторів:

$$L_{\alpha}^{1}=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\oplus\alpha^{n_1+1+n_2}L_{n_1+1+n_2,s},$$

$$L_{\alpha,0}^{1}=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\oplus\alpha^{n_1+1+n_2}L^{0}{}_{n_1+1+n_2,s}.$$

Простір $L_{\alpha,0}^{1}$ всюди щільний у L_{α}^{1}. Означимо в L_{α}^{1} оператор $S(t)$:

$$S(t)=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\oplus S^{n_1+1+n_2}(t),\ S(0)=I\text{, тобто}$$

$$\left(S(t)f\right)_{n_1+1+n_2}(x_{-n_2},\dots,x_{n_1})=S^{n_1+1+n_2}(t)f_{n_1+1+n_2}(x_{-n_2},\dots,x_{n_1}).$$

Оператор $S(t)$ визначений спершу на всюди щільній у L_{α}^{1} множині фінітних послідовностей, а оскільки $\|S(t)\|=1$, то оператори $S(t)$ утворюють сильно неперервну групу, інфінітезимальний оператор якої H на L_{α}^{0} є прямою сумою інфінітезимальних операторів $S^{n_1+1+n_2}(t)$. Зауважимо, що оператор $S^{n_1+1+n_2}(t)$ визначений майже скрізь на фазовому просторі $R^n\times\left(R^n\setminus W_n\right)$, тобто кругом поза множиною μ_n^0. Лебегова міра $\mu_n^0=0$. Взагалі, μ_n^0 складається з двох підмножин: початкових даних, при яких у системі проходять кратні (потрійні і т. д.) взаємодії, і початкових даних, що ведуть до нескінченного числа зіткнень на скінченному проміжку часу.

Справедлива лема:

Лема 1. Множина початкових даних, при яких на скінченному інтервалі часу частинки можуть зіткнутися нескінченну кількість разів, має лебегову міру нуль.

Доведення: Якщо для деяких початкових даних $(x_{-n_2},\dots,x_{n_1})$ число зіткнень усіх n_1+1+n_2 частинок нескінченне, то серед них знайдуться принаймні дві частинки, які між собою стикаються нескінченну кількість разів. Припустимо, для означеності, що нескінченна кількість ударів проходить між першою та другою частинкою в моменти часу $t_{i_1}(x),\dots,t_{i_2}(x),\dots$. Очевидно, що із цієї послідовності можна виділити збіжну підпослідовність, яка має границю $t_0(x)$. Для цієї підпослідовності введемо позначення: $t_{j_1}(x),\dots,t_{j_2}(x),\dots$. Тоді маємо: $\lim\limits_{n\to\infty}t_{j_n}(x)=t_0(x)$.

Між зіткненнями імпульс кожної частинки повинен змінюватися на скінченну величину. Але для нескінченно малого проміжку часу між зіткненнями при скінченних силах, що діють на частинки, – це неможливо. Тому виконується співвідношення:

$$\left|P_1\left(t_{j_n}(x),x\right)-P_2\left(t_{j_n}(x),x\right)\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0;$$

і, крім цього, послідовності $P_1\left(t_{j_n}(x),x\right),P_2\left(t_{j_n}(x),x\right)$ фундаментальні і збігаються при $n\to\infty$ до границь $P_1\left(t_0(x),x\right),P_2\left(t_0(x),x\right)$. Тоді в момент часу $t_0(x)$ імпульси часток повинні співпадати:

$$P_1\left(t_0(x),x\right)=P_2\left(t_0(x),x\right).$$

Оскільки за нескінченно малий проміжок часу частинки можуть проходити лише нескінченно малий проміжок шляху, то послідовності $Q_1\left(t_{j_n}(x),x\right),Q_2\left(t_{j_n}(x),x\right)$ фундаментальні і збігаються при $n \to \infty$ до границь $Q_1(t_0(x),x), Q_2(t_0(x),x)$. Але в моменти зіткнень t_{j_n} виконуються рівності:

$$\left|Q_1\left(t_{j_n}(x),x\right) - Q_2\left(t_{j_n}(x),x\right)\right| = d_1 + d_2 .$$

Перейшовши до границі при $n \to \infty$, отримуємо:

$$\left|Q_1\left(t_0(x),x\right) - Q_2\left(t_0(x),x\right)\right| = d_1 + d_2 .$$

Отримані співвідношення задають рівняння гіперповерхні у фазовому просторі. Розмірність цієї гіперповерхні нижча, ніж розмірність фазового простору. Множина тих початкових даних, за яких можливе нескінченне число парних зіткнень на скінченому інтервалі часу, має лебегову міру нуль. Отже, лема доведена.

Сім’я операторів $S(t)$, де $t \in (-\infty;+\infty)$ утворює сильно неперервну однопараметричну групу ізометричних операторів у просторі L^1_α. Інфінітезимальний оператор H групи $S(t)$ замкнений $H\,S(t) = S(t)\,H$ і на множині $L^1_{\alpha,0}$ визначений дужкою Пуассона з гамільтоніаном системи частинок, що не взаємодіють:

$$(Hf)_n = H_n f_n = H^0_n f_n \text{ (де } H^0_n f_n = \sum_{i=-n_2}^{n_1} p_i \frac{\partial}{\partial q_i} f_n \text{)}$$

з граничними умовами на ∂W_n. Задамо граничні умови на ∂W_n (взаємодія пружних кульок): якщо $t > 0$, то при $|q_i - q_{i+1}| = d_i + d_{i+1}$ у випадку $p_i > p_{i+1}$, оператор еволюції в момент зіткнення міняє імпульси (p_i, p_{i+1}) на (p_{i+1}, p_i). Якщо $t < 0$ – замінює при $p_i < p_{i+1}$.

У просторі L_α, який є лінійним простором двосторонніх послідовностей сумовних функцій

$$f = \{ f_{n_1+1+n_2}(x_{-n_2}, \ldots, x_{n_1}) \}_{n_1,n_2 \geq 0},$$

визначимо такі оператори:

$$\left(A^+ f\right)_n(x_{-n_2}, \ldots, x_{n_1}) = \int dx_{n_1+1} f_{n+1}(x_{-n_2}, \ldots, x_{n_1}, x_{n_1+1}),$$

$$\left(A^- f\right)_n(x_{-n_2}, \ldots, x_{n_1}) = \int dx_{-(n_2+1)} f_{n+1}(x_{-(n_2+1)}, x_{-n_2}, \ldots, x_{n_1}),$$

$$A = A^+ + A^-;$$

$$\left(\left(1 - A^+\right)^{-1} f\right)_{n_1+1+n_2}(x_{-n_2}, \ldots, x_{n_1}) =$$

$$= \sum_{s_1=0}^{\infty} \int dx_{n_1+1} \ldots dx_{n_1+s_1} f(x_{-n_2}, \ldots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_1+s_1});$$

$$\left(\left(1 - A^-\right)^{-1} f\right)_{n_1+1+n_2}(x_{-n_2}, \ldots, x_{n_1}) =$$

$$\sum_{s_2=0}^{\infty} \int dx_{-(s_2+n_2)} \ldots dx_{-(n_2+1)} f(x_{-(s_2+n_2)}, \ldots, x_{-(n_2+1)}, x_{-n_2}, \ldots, x_{n_1}).$$

У таких позначеннях оператор $(1 - A)^{-1}$ буде мати вигляд:

$$(1 - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_1, n_2 > 0 \\ n_1+1+n_2 = n}} (A^+)^{n_1} (A^-)^{n_2} .$$

Оберненим до нього є оператор:

$$(1-A+A^{+}+A^{-})=(1-A^{+})(1-A^{-}).$$

Розглянемо такий оператор:

$$U(t)=(1-A)^{-1}S(t)(1-A+A^{+}+A^{-}).$$

Справедлива теорема

Теорема 1. Оператор $U(t)$:

а) визначений при $t\in(-\infty;+\infty)$ і обмежений $\|U(t)\|\le(\alpha+1)^{2}/(\alpha-1)^{2}$ у просторі L_{α}^{1};

б) сильно неперервний по *t*;

в) утворює групу, інфінітезимальний оператор **A** якої замкнений: **A**U(t)= U(t) **A** і на множині $L_{\alpha,0}^{1}\subset L_{\alpha}^{1}$ співпадає з оператором +[,A].

Висновки і перспективи подальших досліджень. Отже, в основі статистичної механіки лежать абстрактні еволюційні рівняння Боголюбова, як моделі рівноважних та нерівноважних станів системи. Щоб визначити еволюцію системи, необхідно побудувати для них еволюційний оператор. У нашій роботі розглянуто властивості генератора ланцюжка рівнянь Боголюбова на прикладі типової несиметричної системи – системи виділеної частинки в термостаті. Методи вивчення групових властивостей операторів, які застосовуються в роботі, можна використовувати і при вивченні одномірних несиметричних систем іншого роду.

Джерела та література

1. Герасименко В. И. О решениях уравнений Боголюбова для одномерной системы упругих шаров / В. И. Герасименко // Теоретическая и математическая физика. – 1992. – Т. 91, № 1. – С. 120–128.
2. Петрина Д. Я. Математическое описание эволюции состояния бесконечных систем классической статистической механики / Д. Я. Петрина, В. И. Герасименко // Успехи мат. наук. – 1983. – Т. 38, вып. 5. – С. 3–58.
4. Петрина Д. Я. Математические основы классической статистической механики / Д. Я. Петрина, В. И. Герасименко, П. В. Малышев. – Киев : Наук. думка, 1985. – 265 с.
5. Cercignani C. Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations / C. Cercignani, V. I. Gerasimenko, D. Ya. Petrina. – Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 1997. – 252 p.

Антонюк Богдан. Некоторые свойства генератора цепочки уравнений Боголюбова одномерной системы выделенной частицы в термостате. Одной из наиболее актуальных проблем современной математической физики является изучение реальных процессов, происходящих в различных макросредах, исходя из законов движения и свойств микрочастиц, из которых они состоят. Особый интерес вызывают бесконечные системы, то есть системы бесконечного числа частиц, которые рассматриваются в бесконечном фазовом пространстве. Их состояния полностью описываются последовательностью частичных функций распределения.

Считается, что эволюция системы определена, если из известного начального состояния системы можно определить её состояние в произвольный момент времени. Такая эволюция описывается задачей Коши для цепочки уравнений Боголюбова (иерархии ББГКИ), которая является бесконечной системой интегро-дифференциальных уравнений. ББГКИ иерархию принято рассматривать как абстрактное уравнение эволюции для определённого пространства функций распределения.

В этой статье рассматривается бесконечная одномерная несимметрическая система частиц, взаимодействующих посредством потенциала конечного радиуса действия с твердой сердцевиной. Установлено свойства генератора цепочки уравнений Боголюбова для одномерной несимметрической системы выделенной частицы в термостате.

Ключевые слова: ББГКИ иерархия, несимметрическая система частиц, эволюционный оператор, многочастичная система.

Antonuk Bogdan. Some Properties of the Generator of the Bogoliubov Equations Chainlet for One-dimensional System of a Highlighted Part in the Thermostat. One of the problems which is of great current relevance in modern mathematical physics is the study of the real processes which occur in different macro-spaces based on the properties and laws of motion of the microparticles of which they are composed. The study of infinite systems – systems with an infinite number of particles — is very interesting. These systems are considered in terms of infinite phase space. Their condition is completely described by the sequence of particle distribution functions.

The evolution of the system is considered to be certain, if from the known initial state of the system it is possible to define its state at some arbitrary moment in time. This evolution is described by the Cauchy problem for Bogolyubov's chain of equations – the infinite system of integro-differential equations (BBGKY hierarchy). The BBGKY hierarchy is seen as an abstract evolution equation for a given space of distribution functions. In order to find a solution it is necessary to construct an evolutional operator for the distribution function.

This article is devoted to the infinite one-dimensional non-symmetrical system of particles interacting via the hard-core potential. The properties of the generator of the Bogoliubov equations chainlet for the one-dimensional non-symmetrical system of a highlighted part of a thermostat are derived.

Key words: BBGKY hiererchy, nonsymmetrical particle systems, evolution operator, many-particle system.

Стаття надійшла до редколегії
22.10.2013 р.