Syrovatsky Oleksandr. About Perturbation of Selfadjoint Operators in Case of Multiple Spectrum. One of major tasks of perturbation theory is to study spectrum of the perturbed operator and to describe spectral projectors of it. A classic result which gives the solution of this task in finite-dimensional case for operators with a simple spectrum is the Lowner theorem. In this case the fact that it is always possible to find such one-dimensional perturbation on two spectrums of original and perturbed operators, that the spectrum of perturbation will have the prescribed values is an unexpected and nontrivial statement. This work devoted to generalization of this non-trivial fact for operators with a multiple spectrum. In the paper perturbation of linear selfadjoint operator under one-dimensional and two-dimensional perturbation in case of multiple spectrum in finite-dimensional Gilbert space is described and the reverse task is solved. Reverse task in the work is the task of finding the perturbation by the given spectrums of original and perturbed operators.

Key words: finite-dimensional perturbation, selfadjoint operator, reverse task of perturbation theory.

Стаття надійшла до редколегії
02.06.2014 р.

УДК 517.983

Віталій Сировацький

Про функціональні моделі комутативних систем операторів у просторах Л. де Бранжа

Для комутативної системи лінійних обмежених операторів T_1, T_2, які діють в Гільбертовому просторі H, і не один з операторів T_1, T_2 не є стискуванням, розглянуто окремий випадок функціональної моделі, яка будується в просторі Л. де Бранжа для круга.

Ключові слова: функціональна модель, простор Л. де Бранжа, комутативна система операторів.

Постановка наукової проблеми та її значення. Функцінальну модель оператора стискування T, який діє у гільбертовому просторі H, уперше отримав Б.-С. Надь та Ч. Фояш [6]. Ця модель дає змогу реалізувати оператор T як оператор множення на незалежну змінну в спеціальному просторі функцій [5, с. 2]. Дослідження спектральних характеристик цієї моделі привело до нетривіальних завдань і функціонального аналізу, і теорії функції, серед яких: питання інтерполяції, завдання базісності й повноти тощо [1].

Якщо використовувати техніки дилатацій Надя−Фояша [6], то побудова аналогічних функціональних моделей для комутативних систем операторів $\{T_1, T_2\}$, заданих у гільбертовому просторі H, зазнало істотних труднощів, оскільки не вдалося вирішити поставлене вище завдання навіть при умові стисливості T_1, і T_2. Вихід з цієї ситуації знайдено в роботі [2], яка заснована на узагальненні поняття вузла для комутативних систем операторів і посуті висловив її М. С. Лівшиць.

У роботі [9] побудована функціональна модель пари комутативних операторів, коли один із них є стискуванням. Ці побудови засновані на техніці перетворень Фур'є. Якщо ж жоден з операторів $\{T_1, T_2\}$ не є стискуванням, цей метод не застосовний.

Мета роботи − побудувати функціональні моделі для комутативних систем операторів $\{T_1, T_2\}$, заданих у гільбертовому просторі H, якщо жоден із операторів $\{T_1, T_2\}$ не є стискуванням. Тоді функціональна модель, отримана в роботі [3], будується у просторі Л. де Бранжа, що відповідає одиничному кругу.

Завдання статті − побудувати функціональні моделі для комутативних систем операторів $\{T_1, T_2\}$ для окремого випадку, причому ні T_1, ні T_2 не є такими, що стискують.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження

1. Попередні відомості

Основним інваріантом вузла Δ (1), що описує прості вузли, є введена в 1946 р. [5] М. С. Лівшицем характеристична оператор-функція:

$$S_\Delta = K + \Psi(zI - T)^{-1}\Phi, \tag{1.1}$$

що відіграє основну роль у теорії трикутних і функціональних моделей [2; 4; 5] для операторів, близьких до унітарних.

Припустимо, що $\dim E = \dim \tilde{}$ [illegible] і $j = \tilde{}$ [illegible] Виберемо в E і $\tilde{E}$ ортонормовані базиси $\{e_\alpha\}_1^r$ і $\{e'_\alpha\}_1^r$. Тоді з результатів В. П. Потапова [1] випливає, що матриця-функція $S_\Delta(z) = \| < S_\Delta(z) e_\alpha,\ e'_\beta > \|$, якщо спектр $\sigma(T)$ оператора T належить одиничному колу [illegible] $= \{ z \in$ [illegible] $\}$, має таку мультиплікативну структуру:

$$S_\Delta(z) = \int_0^{\overset{\frown}{l}} \exp\left\{ \frac{e^{i\varphi t} + z}{e^{i\varphi t} - z} J dF_t \right\}, \tag{1.2}$$

де: φ_t − ненегативна неубутна на $[0, l]$ функція $0 \le \varphi_t \le 2\pi$; а F_t − неубутна ермітова (r × r) матриця-функція на $[0, l]$, для якої $trF_t \equiv t$.

Використовуючи напрацювання В. П. Потапова (1.2) для $S_\Delta(z)$ (5), можна побудувати [1] трикутну модель оператора T. Позначимо через $L^2_{r,l}(F_x)$ гільбертовий простір вектор-функцій:

$$L^2_{r,l}(F_x) = \left\{ f(x) = \left(f_1(x), ..., f_r(x)\right); \int_0^l f(x) dF_x f^*(x) < \infty \right\}. \tag{1.3}$$

Задамо в $L^2_{r,l}(F_x)$ (1.3) лінійний оператор T:

$$Tf(x) = f(x) e^{i\varphi x} - 2\int_x^l f(t) dF_t \Phi_t^* \Phi_x^{*-1} J e^{i\varphi x}, \tag{1.4}$$

де матриця Φ_x є вирішенням інтегрального рівняння:

$$\Phi_x + \int_0^x \Phi_t dF_t J = I, \quad x \in [0, l]. \tag{1.5}$$

Розглянемо також матрицю-функцію Ψ_x:

$$\Psi_x + \int_x^l \Psi_t dF_t J = J, \quad x \in [0, l]. \tag{1.6}$$

Визначимо тепер оператори $\Phi : E \mapsto$ [illegible] $\mapsto$ [illegible] Отже:

$$\Phi f(x) = \sqrt{2} f \Psi_x e^{i\varphi x}; \quad \Psi f(x) = \sqrt{2} \int_0^l f(x) dF_x \Phi_x^*, \tag{1.7}$$

де $f \in E$. Припустимо, що $\dim E = 2$, а $J = J_N$, де:

$$J_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

Введемо вектор-функції, як у роботі [3]:

$$L_x(z) = \left(1 - zT\right)^{-1} \Phi(1, 1) \tag{1.9}$$

$$\tilde{}_x(\ ) \ [\text{illegible}] - zT^*)^{-1} \Psi^*(1, -1). \tag{1.10}$$

Визначення 1: Гільбертовим простором Л. де Бранжа $B(E, G)$ назвемо простір, який утворюють вектор-функції $F(z) = [F_1(z), F_2(z)]$, де $F_k(z), \ (k = 1, 2)$ мають вигляд:

$$F_1(z) = \int_0^l f(t) dF_t L_t^*(\bar{z}); \quad F_2(z) = \int_0^l f(t) dF_t \ [\text{illegible}] \tag{1.11}$$

І, нехай, $B_ф$ − відображення Л. де Бранжа:

$$B_ф f = [F_1(z), F_2(z)]. \tag{1.12}$$

Скалярний твір у $B(E, G)$ індукується прообразом відображення B_φ (1.12):

$$< F(z),\ \tilde{F}(z) >_{B_\varphi(E,\,G)} = < f(t),\ \tilde{f}(t) >_{L^2_{2,l}(F_t)}, \tag{1.13}$$

причому $F(z) = B_\varphi f(t)$, $\tilde{F}(z) = B_\varphi \tilde{f}(t)$, де $f(t)$, $\tilde{f}(t) \in L^2_{2,l}(F_t)$.

Функції $E_x(z)$, $\tilde{E}_x(z)$, $G_x(z)$, $\tilde{G}_x(z)$ задаються співвідношеннями [3]:

$$L_x(z) = \left(e^{-i\phi x} - z\right)^{-1}\left[E_x(z);\ \tilde{E}_x(z)\right] \tag{1.14}$$

$$\tilde{L}_x(z) = \left(1 - ze^{-i\phi x}\right)^{-1}\left[G_x(z);\ \tilde{G}_x(z)\right]. \tag{1.15}$$

Нехай, T_1, T_2 − комутативна система лінійних обмежених операторів, що діє в гільбертовому просторі H. Сукупність гільбертових просторів E, $\tilde{E}$ й операторів $\Phi \in [E, H]$; $\Psi \in [H, \tilde{E}]$, $K \in [\tilde{E}, \tilde{E}]$, $\sigma_s, \tau_s, N_s, \Gamma \in [E, E]$; $\tilde{\sigma}_s, \tilde{\tau}_s, \tilde{N}_s, \tilde{\Gamma} \in [\tilde{E}, \tilde{E}]$ (s = 1,2) назвемо комутативним унітарним метричним вузлом Δ,

$$\Delta = \left(\Gamma, \sigma_s, \tau_s, N_s, H \oplus E, V_s, \overset{+}{V}_s, H \oplus \tilde{E}, \tilde{N}_s, \tilde{\sigma}_s, \tilde{\tau}_s, \tilde{\Gamma}\right) \tag{1,16}$$

якщо для розширень

$$V_s = \begin{bmatrix} T_s & \Phi N_s \\ \Psi & K \end{bmatrix}, \qquad \overset{+}{V}_s = \begin{bmatrix} T_s^* & \Psi^* \tilde{N}_s \\ \Phi^* & K^* \end{bmatrix}$$

справедливі такі співвідношення:

1) $V_s^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_s \end{bmatrix} V_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tau_s \end{bmatrix}$, $\overset{+}{V}{}_s^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \sigma_s \end{bmatrix} \overset{+}{V}_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{\tau}_s \end{bmatrix}$.

2) $T_2 \Phi N_1 - T_1 \Phi N_2 = \Phi\Gamma$, [illegible]

3) [illegible]

де $\sigma_s, \tau_s, (\tilde{\sigma}_s, \tilde{\tau}_s)$ самоспряжені в $E(\tilde{E})$, (s = 1, 2).

Оператори, що діють в просторах E і $\tilde{E}$, вузла Δ (1.16) залежні. Довільну комутативну систему лінійних обмежених операторів T_1, T_2 завжди можна включити у вузол Δ (1.16) [5]. При оборотності «дефектних» операторів σ_1 і σ_1 в E і $\tilde{E}$ завжди можна вважати, що N_1 і N_1 оборотні. Введемо N, N, Γ, Γ такому вигляді:

$$N = N_1^{-1} N_2;\ \Gamma = N_1^{-1}\Gamma_1;\ \tilde{N} = \tilde{N}_1^{-1}\tilde{N}_2,\ \tilde{\Gamma} = \tilde{N}_1^{-1}\tilde{\Gamma}_1. \tag{1.17}$$

Задамо в $L^2_{r,l}(F_x)$ (1.3) лінійні оператори T_1 і T_2:

$$T_1 f(x) = f(x)e^{i\varphi x} - 2\int_x^l f(t)\,dF_t \Phi_e^* \Phi_x^{*-1} J e^{i\varphi x}. \tag{1.18}$$

$$T_2 f(x) = f(x)\left(N(x)e^{i\varphi x} + \Gamma(x)\right) - 2\int_x^l f(t)\,dF_t \Phi_t^* \Phi_x^{*-1} J N(x) e^{i\varphi x}. \tag{1.19}$$

Основна система комутативних операторів $\{T_1, T_2\}$ вузла Δ (1.16) унітарно еквівалентна [7] системі операторів, які діють у просторі Л. де Бранжа $B(E, G)$, отже:

$$T_1 F_1(z) = \left(z + \overline{\mu(\overline{z})}\right) F_1(z) + \overline{\nu(\overline{z})} F_2(z) + \frac{\overline{E_0(\overline{z}) - \tilde{E}_0(\overline{z})}}{2} F_2(0) \tag{1.20}$$

$$T_1 F_2(z) = \frac{F_2(z) - F_2(0)}{z} \tag{1.21}$$

$$T_2 F_1(z) = \frac{F_1(z)}{m(z)} + \frac{\tilde{\mu}(z)}{m(z)} F_1(z) + \frac{\tilde{\nu}(z)}{m(z)} F_2(z) \tag{1.22}$$

$$T_2 F_2(z) = \frac{F_2(z)n(z) - F(0)n(0)}{z}, \tag{1.23}$$

де $\left(F_1(z), F_2(z)\right) \in B(E, G)$, а $m(z)$ і $n(z)$ задовільняють рівнянням $\left(N + z\Gamma\right)\left(1, 1\right)^T = m(z)\left(1, 1\right)^T$ і $\left(\tilde{N} + z\tilde{\Gamma}\right)\left(1, -1\right)^T = n(z)\left(1, -1\right)^T$. При цьому коефіцієнти $\mu(z)$ і $\nu(z)$ мають такий вигляд:

$$\nu(z)=\frac{c_2(z)c_3(z)-c_1(z)c_4(z)}{c_2(z)-c_4(z)} \tag{1.24}$$

$$\mu(z)=\frac{c_1(z)-c_3(z)}{c_2(z)-c_4(z)} \tag{1.25}$$

$$c_1(z)=\frac{\left(E_0(z)+\tilde{E}_0(z)\right)\left(1-z^2\right)}{2\left(E_0(z)\overline{E_0(\bar z)}-\tilde{E}_0(z)\overline{\tilde{E}_0(\bar z)}\right)}\int_0^l \Psi_t^*(1,1)\,dF_t L_t^*(\bar z) \tag{1.26}$$

$$c_2(z)=\frac{\left(G_{l'}(z)+\tilde{G}_{l'}(z)\right)\left(1-z^2\right)}{2\left(E_0(z)\overline{E_0(\bar z)}-\tilde{E}_0(z)\overline{\tilde{E}_0(\bar z)}\right)} \tag{1.27}$$

$$c_3(z)=\frac{E_0(z)+\tilde{E}_0(z)}{E_{0'}(z)-\tilde{E}_{0'}(z)}\int_0^l \Psi^*(1,1)\,dF_t\tilde{L}_t(\bar z), \tag{1.28}$$

$$c_4(z)=\frac{2\left(G_l(z)\overline{G_l(\bar z)}-\tilde{G}_l(z)\overline{\tilde{G}_l(\bar z)}\right)}{\left(E_{0'}(z)-\tilde{E}_{0'}(z)\right)\left(1-z^2\right)}, \tag{1.29}$$

а коефіцієнти $\tilde{\mu}(z)$ і $\tilde{\nu}(z)$ дорівнюють:

$$\tilde{\mu}(z)=\frac{I_1(z)d_3(z)-I_2(z)d_1(z)}{d_2(z)d_3(z)-d_1(z)d_4(z)} \tag{1.30}$$

$$\tilde{\nu}(z)=\frac{I_1(z)d_4(z)-I_2(z)d_2(z)}{d_1(z)d_4(z)-d_2(z)d_3(z)} \tag{1.31}$$

$$I_1(z)=\frac{1}{2z}(1,1)\sqrt{2}S\left(\frac{1}{2}\right)\tilde{\ }\left(\text{[illegible]}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-J\left(\overline{E_0(\bar z)},\overline{\tilde{E}_0(\bar z)}\right)\right) \tag{1.32}$$

$$I_2(z)=\frac{1}{2z}(1,1)\sqrt{2}S\left(\frac{1}{2}\right)\tilde{\ }\left(\text{[illegible]}\begin{pmatrix}\overline{G_l(\bar z)}\\ \tilde{G}_l(\bar z)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \tag{1.33}$$

$$d_1(z)=\frac{E_0(z)\overline{E_0(\bar z)}-\tilde{E}_0(z)\overline{\tilde{E}_0(\bar z)}}{1-|z|^2} \tag{1.34}$$

$$d_2(z)=\frac{G_{l'}(z)+\tilde{G}_{l'}(z)}{2} \tag{1.35}$$

$$d_3(z)=\frac{E_{0'}(z)-\tilde{E}_{0'}(z)}{2} \tag{1.36}$$

$$d_4(z)=\frac{G_l(z)\overline{G_l(\bar z)}-\tilde{G}_l(z)\overline{\tilde{G}_l(\bar z)}}{1-|z|^2}. \tag{1.37}$$

2. Дія операторів T_1 і T_1^* на вектори L_x і $\tilde{L}_x$

Нехай заданий вузол Δ (1.16), що відповідає комутативній системі операторів $\{T_1, T_2\}$ (1.18), (1.19). Припустимо, що $E = E$, dim$E$ = dim$E$ = 2, а $\sigma_1 = \sigma_1 = J_N$ (1.8). Позначимо також через $L_x(z)$ і $L_x(z)$ вектор-функції (1.9), (1.10), які відповідають операторові T_1, а також функції $E_x(z)$, $E_x(z)$, $G_x(z)$, $G_x(z)$ (1.14), (1.15).

Спираючись на результати роботи [7], неважко отримати такі леми 1–4, що визначають дії операторів T_1 і T_1^* на вектори L_x і L_x:

Лема 1. *Оператор T_1 діє на вектор-функцію $L_x(z)$ (1.9) так:*

$$T_1L_x(z)=\frac{L_x(z)-L_x(0)}{z}. \tag{2.1}$$

Лема 2. *Оператор* T_1 *діє на вектор-функцію* $L_x(z)$ *(1.10) так:*

$$T_1\tilde{L}_x(z) = z\tilde{L}_x(z) + \frac{[illegible]\,\tilde{G}_l(z)}{2}L_x(0) - \frac{\tilde{G}_l(z) + G_l(z)}{2}(1,-1)\Psi_x. \qquad (2.2)$$

Лема 3. *Оператор* T_1^* *діє на вектор-функцію* $L_x(z)$ *так:*

$$T_1^*\tilde{L}_x(z) = \frac{\tilde{L}_x(z) - \tilde{L}_x(0)}{z}. \qquad (2.3)$$

Лема 4. *Оператор* T_1^* *діє на вектор-функцію* $L_x(z)$ *так:*

$$T_1^* L_x(z) = zL_x(z) + \frac{E_0(z) - \tilde{E}_0(z)}{2}\tilde{L}_x(0) - \frac{E_0(z) + \tilde{E}_0(z)}{2}(1,1)\Phi_x. \qquad (2.4)$$

Лема 5. *Якщо вектор-функції* L_x і L_x *− задані формулами (1.9) і (1.10), а* Φ_x *і* Ψ_x *− розв'язок інтегральних рівнянь (1.5) і (1.6), то:*

$$\int_0^l (1,-1)\Psi_t dF_t L_t^*(\bar{z}) = -1 - \frac{1}{2}R_1 J\left(\frac{\overline{E_0(\bar{z})}}{\tilde{E}_0(z)}\right) \qquad (2.5)$$

$$\int_0^l (1,-1)\Psi_t dF_t \tilde{L}_t(z) = \frac{1}{2}R_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{\overline{G_l(\bar{z})} - \overline{\tilde{G}_l(z)}}{2} \qquad (2.6)$$

$$\int_0^l (1,1)\Phi_t dF_t L_t^*(\bar{z}) = \frac{1}{2z}R_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{\overline{E_0(\bar{z})} - \overline{\tilde{E}_0(z)}}{2z} \qquad (2.7)$$

$$\int_0^l (1,1)\Phi_x dF_t \tilde{L}_t(z) = \frac{1}{2z}R_2 J\left(\frac{\overline{G_l(\bar{z})}}{\overline{\tilde{G}_l(z)}}\right) \qquad (2.8)$$

де R_1 і R_2 мають вигляд:

$$R_1 = \left(\frac{\overline{G_l(0)}E_0(0) - \overline{\tilde{G}_l(0)\tilde{E}_0(0)} \pm 1}{\overline{G_l(0)} + \overline{\tilde{G}_l(0)}}, \; \frac{\left(\overline{G_l(0)} - \overline{\tilde{G}_l(0)}\right)\left(G_l(0) + \overline{\tilde{G}_l(0)}\right) - 1}{G_l(0) + \overline{\tilde{G}_l(0)}}\right) \qquad (2.9)$$

$$R_2 = \left(\frac{G_l(\infty)\overline{E_0(\overline{\infty})} - G_l^2(\infty) - G_l(\infty)\tilde{G}_l [illegible]}{\overline{G_l(\infty)} + \overline{\tilde{G}_l(\infty)}}, \; \frac{[illegible]}{G_l(\infty) + \overline{\tilde{G}_l(\infty)}}\right) \qquad (2.10)$$

Лема 6. *Оператор* T_1^* *діє на вектор-функцію* $L_x(z)$ *(1.9) так:*

$$T_1^* L_x(z) = \left(z + \mu(z)\right)L_x(z) + \nu(z)\tilde{L}_x(z) + \frac{E_0(z) - \tilde{E}_0(z)}{2}\tilde{L}_x(0), \qquad (2.11)$$

де:

$$\nu(z) = \frac{c_2(z)c_3(z) - c_1(z)c_4(z)}{c_2(z) - c_4(z)} \qquad (2.12)$$

$$\mu(z) = \frac{c_1(z) - c_3(z)}{c_2(z) - c_4(z)} \qquad (2.13)$$

$$c_1(z) = \frac{\left(E_0(z) + \tilde{E}_0(z)\right)\left(1 - z^2\right)}{2\left(E_0(z)\overline{E_0(\bar{z})} - \tilde{E}_0(z)\overline{\tilde{E}_0(z)}\right)}\left(\frac{1}{z}R_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{\overline{E_0(\bar{z})} - \overline{\tilde{E}_0(z)}}{2z}\right) \qquad (2.14)$$

$$c_2(z) = \frac{\left(G_{l'}(z) + \tilde{G}_l(z)\right)\left(1 - z^2\right)}{2\left(E_0(z)\overline{E_0(\bar{z})} - \tilde{E}_0(z)\overline{\tilde{E}_0(z)}\right)} \qquad (2.15)$$

$$c_3(z) = \frac{E_0(z) + \tilde{E}_0(z)}{E_{0'}(z) - \tilde{E}_0(z)}\left(1 - \frac{1}{z}R_2 J\left(\frac{\overline{G_l(\bar{z})}}{\overline{\tilde{G}_l(z)}}\right)\right) \qquad (2.16)$$

$$c_4(z)=\frac{2\left(G_l(z)\overline{G_l(\overline{z})}-\ldots\right)}{\left(E_{0'}(z)-\ldots z^2\right)}, \qquad (2.17)$$

а R_1 і R_2 мають вигляд (2.9) і (2.10) відповідно.

Лема 7. *[10] Оператор T_1 діє на вектор-функцію $L_x(z)$ (1.10) так:*

$$T_1\ldots_x\ldots \frac{\ldots(z)}{2}L_x(0)-\ldots, \qquad (2.18)$$

де:

$$\ldots\frac{c\,(z)\ldots}{c_2(z)-c_4(z)} \qquad (2.19)$$

$$\ldots\frac{\ldots}{c_2(z)-c_4(z)} \qquad (2.10)$$

$$\ldots\frac{\left(E_0(z)+\ldots z^2\right)}{2\left(E_0(z)\overline{E_0(z)}-\ldots\right)}\left(-1-\frac{1}{2}R_1J\left(\frac{\overline{E_0(\overline{z})}}{\ldots}\right)\right) \qquad (2.21)$$

$$\ldots\frac{E_0(z)+\ldots}{E_{0'}(z)-\ldots}\left(\ldots R_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{\overline{G_l(\overline{z})}-\ldots}{2}\right), \qquad (2.22)$$

а $c_2(z)$ і $c_4(z)$ мають вигляд (2.15) і (2.17), а R_1 і R_2 − вигляд (2.9) і (2.10) відповідно.

3. Окремі випадки перетворення Л. де Бранжа

1. Розглянемо окремий випадок, припустивши, що $N^*(1,-1)^T=0$ і $N(1,1)^T=0$, а $\tilde{\Gamma}^*(1,-1)^T=z(1,-1)^T$ і $\Gamma(1,1)^T=z(1,1)^T$, тоді звідси неважко отримати такі леми:

Лема 8. П*еретворення Л. де Бранжа B_L (визначення 1) діє на T_1f так:*

$$B_L\left(T_1f\right)=\left(z+\overline{\mu(\overline{z})}\right)F_1(z)+\nu(\overline{z})F_2(z)+\frac{\overline{E_0(\overline{z})}-\ldots}{2}F_2(0), \qquad (3.1)$$

де F_1 і F_2 мають вигляд (1.11).

Лема 9. *Перетворення Л. де Бранжа B_L діє на T_1f так:*

$$B_{\ldots}\left(T\ldots f\right)=\frac{F_2(z)-F_2(0)}{z}, \qquad (3.2)$$

де F_1 і F_2 мають вигляд (1.11).

Лема 10. *Якщо вектор (1, −1) є власним для $N^*+z\tilde{\Gamma}^*$ при кожному z і $N^*(1,-1)=0$, то перетворення де Бранжа B_L діє на T_2f, де T_2f з вузла Δ (1.16) так:*

$$B_{\ldots}\left(T\ldots f(z)\right)=F_2(z)-F_2(0), \qquad (3.3)$$

де F_1 і F_2 мають вигляд (1.11), а функція $n(z)=z$.

Лема 11. *Якщо вектор (1, 1) є власним для* $(N+z\Gamma)$ *і* $N(1,1)=0$, *то перетворення де Бранжа B_L діє на T_2f, де T_2f з вузла Δ (1.16) так:*

$$B_L\left(T_2f(z)\right)=\frac{F_1(z)}{z}+\frac{\ldots}{z}F_1(z)+\frac{\ldots}{z}F_2(z), \qquad (3.4)$$

де F_1 і F_2 мають вигляд (1.11), функція $m(z)=z$, а коефіцієнти $\tilde{\mu}(z)$ і $\tilde{\nu}(z)$ мають такий вигляд:

$$\ldots\frac{I\,(z)d_3(z)-I_2(z)d_1(z)}{d_2(z)d_3(z)-d_1(z)d_4(z)} \qquad (3.5)$$

$$\ldots\frac{I\,(z)d_4(z)-I_2(z)d_2(z)}{d_1(z)d_4(z)-d_2(z)d_3(z)}, \qquad (3.6)$$

де:

$$I_1(z) = \frac{1}{2z}(1,1)\sqrt{2}S\begin{pmatrix} \frac{1}{z} \end{pmatrix} \tilde{\ } \left(\ldots \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - J\left(\overline{E_0(\bar{z})}, \overline{\tilde{E}_0(\bar{z})}\right)\right) \quad (3.7)$$

$$I_2(z) = \frac{1}{2z}(1,1)\sqrt{2}S\begin{pmatrix} \frac{1}{z} \end{pmatrix} \tilde{\ } \left(\ldots \begin{pmatrix} \overline{G_l(\bar{z})} \\ \tilde{G}_l(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad (3.8)$$

$$d_1(z) = \frac{E_0(z)\overline{E_0(\bar{z})} - \tilde{E}_0(z)\overline{\tilde{E}_0(\bar{z})}}{1 - |z|^2} \quad (3.9)$$

$$d_2(z) = \frac{G_{l'}(z) - \tilde{G}_{l'}(z)}{2} \quad (3.10)$$

$$d_3(z) = \frac{E_{0'}(z) - \tilde{E}_{0'}(z)}{2} \quad (3.11)$$

$$d_4(z) = \frac{G_l(z)\overline{G_l(\bar{z})} - \tilde{G}_l(z)\overline{\tilde{G}_l(\bar{z})}}{1 - |z|^2}. \quad (3.12)$$

З лем 8−11 формулюємо твердження:

Теорема. *Нехай заданий комутативний вузол Δ (1.16) такий, що* $E = \tilde{E}$, $\dim E = \dim \tilde{E} = 2$, *а* $\sigma_1 = \tilde{\sigma}_1 = J_N$, *а (1.8), спектр оператора* T_1 *зосереджений в* $\{1\}$ *та виконуються такі рівняння:* $N^*(1, -1)^T = 0$ і $N(1, 1)^T = 0$, а $\tilde{\Gamma}^*(1, -1)^T = z(1, -1)^T$ *і* $\Gamma(1, 1)^T = z(1, 1)^T$.

Тоді основна система комутативних операторів $\{T_1, T_2\}$ *вузла Δ (1.16) унітарно еквівалентна системі операторів, яка діє в просторі Л. де Бранжа B(E, G) так:*

$$T_1F_1(z) = \left(z + \overline{\mu(\bar{z})}\right)F_1(z) + \nu(\bar{z})F_2(z) + \frac{\overline{E_0(\bar{z})} - \overline{\tilde{E}_0(\bar{z})}}{2}F_2(0)$$

$$T_1F_2(z) = \frac{F_2(z) - F_2(0)}{z}$$

$$T_2F_1(z) = \frac{1}{z}\left((1 + \tilde{\ } \ldots) + \tilde{\ } \ldots\right)$$

$$T_2F_2(z) = F_2(z) - F(0),$$

де $\left(F_1(z), F_2(z)\right) \in B(E, G)$. *А коефіцієнти* $\mu(z)$, $\nu(z)$, $\tilde{\mu}(z)$ *і* $\tilde{\nu}(z)$ *мають вигляд (2.12), (2.13), (3.5) і (3.6) відповідно.*

2. Розглянемо окремий випадок, припустивши, що $\tilde{\Gamma}^*(1, -1)^T = 0$ і $\Gamma(1, 1)^T = 0$, а $\tilde{\Gamma}^*(1, -1)^T = 0$ і $\Gamma(1, 1)^T = 0$, де m і n − деякі константи, тоді основна теорема матиме такий вигляд:

Теорема. *Нехай, заданий комутативний вузол Δ (1.16) такий, що* $E = \tilde{E}$, $\dim E = \dim \tilde{E} = 2$, *а* $\sigma_1 = \tilde{\sigma}_1 = J_N$, *(1.8), спектр оператора* T_1 *зосереджений в* $\{1\}$, *та виконуються рівняння* $N^*(1, -1)^T = m(1, -1)^T$ *і* $N(1, 1)^T = n(1, -1)^T$, *а* $\tilde{\Gamma}^*(1, -1)^T = 0$ *і* $\Gamma(1, 1)^T = 0$, *де m і n − деякі константи.*

Тоді основна система комутативних операторів $\{T_1, T_2\}$ *вузла Δ (1.16) унітарний еквівалентна системі операторів, яка діє в просторі Л. де Бранжа B(E, G) так:*

$$T_1F_1(z) = \left(z + \overline{\mu(\bar{z})}\right)F_1(z) + \nu(\bar{z})F_2(z) + \frac{\overline{E_0(\bar{z})} - \overline{\tilde{E}_0(\bar{z})}}{2}F_2(0)$$

$$T_1F_2(z) = \frac{F_2(z) - F_2(0)}{z}$$

$$T_2F_1(z) = \frac{1}{m}\left((1 + \tilde{\ } \ldots) + \tilde{\ } \ldots\right)$$

$$T_2F_2(z) = \frac{n}{2}\left(F_2(z) - F(0)\right),$$

де $\left(F_1(z), F_2(z)\right) \in B(E, G)$. *А коефіцієнти* $\mu(z)$, $\nu(z)$, $\tilde{\mu}(z)$ *і* $\tilde{\nu}(z)$ *мають вигляд (2.12), (2.13), (3.5) і (3.6) відповідно.*

Зауваження. *Розглянемо, яке значення мають рівняння:* $N^*(1, -1)^T = 0$; $N(1, 1)^T = 0$; $\tilde{\Gamma}^*(1, -1)^T = z(1, -1)^T$; $\Gamma(1, 1)^T = z(1, 1)^T$ у першому випадку, та рівняння: $N^*(1, -1)^T = m(1, -1)^T$; $N(1, 1)^T = n(1, -1)^T$; $\tilde{\Gamma}^*(1, -1)^T = 0$; $\Gamma(1, 1)^T = 0$ у другому.

Якщо використати (1.17), то умова сплетіння [2]: $S(z)N_1^{-1}\left(N_2 + z\Gamma_1\right) =$ [illegible] матиме вигляд: $S(z)\left(N + z\Gamma\right) = \big($[illegible].

Тепер, помноживши це рівняння на (1, −1) ліворуч та $(1, 1)^T$ праворуч, отримаємо у першому випадку:

$$z(1,-1)S(z)(1,1)^T = z(1,-1)S(z)(1,1)^T,$$

та в другому випадку:

$$m(1,-1)S(z)(1,1)^T = n(1,-1)S(z)(1,1)^T.$$

Тобто маємо таку умову на константи $m = n$.

Висновки та перспективи подальшого дослідження. Отже, для комутативної системи операторів T_1, T_2, що є основною для комутативного вузла Δ (1.16), яка задовольняє припущенням теореми, побудована функціональна модель для окремого випадку. При цьому T_1, і T_2 на одну з компонент $\left[F_1(z), F_2(z)\right]$ діють як зрушення, а на другу – як множення на спеціальні голоморфні функції.

Джерела та література

1. Золотарёв В. А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряжённых и неунитарных операторов / В. А. Золотарёв. – Харьков : ХНУ, 2003. – 342 с.
2. Золотарёв В. А. Модельные представления коммутативных систем линейных операторов / В. А. Золотарёв // Функциональный анализ и его приложения. – 1988. – Т. 22, вып. 1. – С. 66–68.
3. Золотарёв В. А. Преобразование де Бранжа относительно круга / В. А. Золотарёв, В. Н. Сыровацкий // Вестн. ХНУ им. В. Н. Каразина. Сер. : Математика и прикладная механика. – 2005. – № 711. – С. 80–92.
4. Лившиц М. С. Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве / М. С. Лившиц // Математический сборник. – 1946. – 19. 61:2. – С. 236–260.
5. Лившиц М. С. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах / М. С. Лившиц, А. А. Янцевич. – Харьков : Изд-во Харьк. ун-та, 1971. – 160 с.
6. Надь Б. С. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве / Б. С. Надь, Ч. Фояш. – М. : Мир, 1970. – 431 с.
7. Сыровацкий В. Н. Функциональные модели коммутативных систем операторов близких к унитарным / В. Н. Сыровацкий // Вестн. ХНУ им. В. Н. Каразина. Сер. : Математика и прикладная механика. – 2012. – № 1018. – С. 41–61.
8. De Branges L. Hilbert spaces of entire functions / L. de Branges. – London : Prentice-Hall, 1968. – 326 c.
9. Zolotarev V. A. Functional model of commutative operator systems / V. A. Zolotarev // J. of Math. Physics, Analysis, Geometry. – 2008. – Vol. 4, No 3. – P. 420–440.

Сыровацкий Виталий. О функциональных моделях коммутативных систем операторов в пространствах Л. де Бранжа. Рассмотрена коммутативная система линейных ограниченных операторов T_1, T_2, которые действуют в гильбертовом пространстве H, и ни один из операторов T_1, T_2 не является сжатием. В пространстве Л. де Бранжа, которое отвечает единичному кругу, строится функциональная модель для данной системы операторов. Рассмотрен частный случай функциональной модели, когда на векторах $(1, -1)^T$ и $(1, 1)^T$ операторы N и $\tilde{N}$ обращаются в ноль, а для операторов Γ и они являются собственными векторами. Также рассмотрено значение полученных уравнений для данного частного случая.

Ключевые слова: функциональная модель, пространство Л. де Бранжа, коммутативная система операторов.

Syrovatskyi Vitaliy. About Functional Models of Commutative Systems of Operators in Spaces of Louis De Branges. The commutative system of the linear limited operators T_1, T_2 which operate in Hilbert space H, and not one of operators T_1, T_2 is compression, is studied. Functional model for given system of operators is build in space of Louis De Branges for a circle. Special case is studied in model when on vectors $(1, -1)^T$ and $(1, 1)^T$ operators N and $\tilde{N}$ turns to zero, but for operators Γ and they are eigenvectors. Also the meaning of the equations of the special case is studied.

Key words: functional model, space of Louis De Branges, commutative system of the linear operators.

Стаття надійшла до редколегії 11.06.2014 р.