РОЗДІЛ ІІ
Теоретична фізика і астрономія

УДК 538.9

Ірина Дмитрук
Павло Шигорін
Анатолій Свідзинський

Вплив в'язкості на дисперсію звуку в просторово однорідному конденсованому бозе-газі

Використовуючи узагальнене рівняння Гросса−Пітаєвського для конденсату та квантове кінетичне рівняння Больцмана для теплової хмарини, отримано замкнене лінеаризоване рівняння Больцмана, яке описує надконденсатні ступені вільності на фоні конденсату. За схемою опису поширення звуку Ван Чан та Уленбека досліджено дисперсійне співвідношення між хвильовим числом та частотою звукової хвилі, яке включає згасання, пов'язане із коефіцієнтами переносу, зокрема в'язкістю. У роботі досліджено задачу на власні функції та власні значення оператора лінеаризованого інтеграла зіткнень квантового кінетичного рівняння Больцмана для моделі слабко неідеального однорідного бозе-газу за наявності в ньому бозе-конденсату. Систему власних функцій та значень оператора лінеаризованого інтеграла зіткнень застосовано до теоретичного опису звукових хвиль, розрахунку коефіцієнта в'язкості.

Ключові слова: бозе-газ, квантове кінетичне рівняння Больцмана, лінеаризований інтеграл зіткнень, метод Ван Чан−Уленбека, коефіцієнт в'язкості.

Постановка наукової проблеми та її значення. Основним інструментом опису нерівноважних процесів у розріджених газах є кінетичні рівняння. У класичних газів − це кінетичне рівняння Больцмана. При описі квантових систем тотожних частинок використовують рівняння Улінга−Уленбека [15, с. 4], яке є квазікласичним розширенням рівняння Больцмана. Значно складніший опис квантових систем із спонтанно порушеною симетрією, до яких відносяться розріджені гази атомів Бозе нижче температури Бозе−Айнштайнівської конденсації. Додаткові труднощі опису таких систем пов'язані із наявністю Бозе−Айнштайнівського конденсату. Відповідна система рівнянь динаміки конденсованого бозе-газу складається із кінетичного рівняння типу Улінга−Уленбека для атомів надкондесату та рівняння Гросса−Пітаєвського, яке описує еволюцію хвильової функції конденсатних атомів.

Роботу присвячено теоретичному описові процесу поширення звукових хвиль у розріджених газах атомів Бозе за наявності Бозе−Айнштайнівського конденсату. Оскільки у процесі поширення звукової хвилі відбуваються незначні відхилення від стану локальної термодинамічної рівноваги, відповідний опис можна проводити на рівні лінеаризованих кінетичних рівнянь.

У нашій роботі побудовано рівняння, яке описує слабко нерівноважні процеси в розрідженому просторово-однорідному бозе-газі за наявності конденсату. Воно поєднує лінеаризоване кінетичне рівняння та рівняння Гросса−Пітаєвського. Одержане рівняння застосовано до опису звукових хвиль у розглядуваній системі. Зокрема одержано й досліджено дисперсійне співвідношення між частотою та хвильовим числом звукової хвилі. Одержано температурну залежність в'язкості газу. Проаналізовано вплив в'язкості на згасання звуків.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження

Дисперсійне співвідношення

У цьому пункті коротко розглянемо виведення дисперсійного співвідношення між частотою та хвильовим числом звукової хвилі. Виходимо з ККРБ для функції розподілу атомів надконденсату

©Дмитрук І., Шигорін П., Свідзинський А., 2014

$f(\vec{r},\vec{p},t)$ (1) та УРГП (2)−(3). Ці рівняння описують об'єднану динаміку конденсату та надконденсату [7]. Вони мають вигляд:

$$\frac{\partial f(\vec{p},\vec{r},t)}{\partial t}+\frac{\vec{p}}{m}\cdot\nabla f(\vec{p},\vec{r},t)-\nabla_r U(\vec{r},t)\cdot\nabla_{\vec{p}} f(\vec{p},\vec{r},t)=C_{22}[f]+C_{12}[f,\Phi], \tag{1}$$

$$\frac{\partial n_c}{\partial t}+\nabla(n_c\vec{\upsilon}_c)=R[f], \tag{2}$$

$$m\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{\upsilon}_c\nabla\right)\vec{\upsilon}_c=-\nabla\mu_c. \tag{3}$$

де $U(\vec{r},t)\equiv U_{ext}(\vec{r})+2g[n_c(\vec{r},t)+\tilde{n}(\vec{r},t)]$, n_c − густина конденсату, $\tilde{n}$ − густина теплової хмарини, $\vec{\upsilon}_c$ − надплинна швидкість, константа парної ваємодії $g=4\pi h^2 a/m$, a − довжина розсіяння [14]. Оскільки ми розглядаємо *просторово-однорідний* випадок, то потенціал утримування пастки $U_{ext}=0$. Величина $R[f]$ у рівнянні (2) має зміст джерела, яке описує обмін частинками між конденсатом та надконденсатом (при подальших обчисленнях $R[f]=0$, оскільки розглядаємо явище дифузійної рівноваги). Праворуч у рівнянні (1) записаний інтеграл зіткнень, що складається з двох доданків: $C_{22}[f]$ та $C_{12}[f,\Phi]$.

$$\begin{aligned}C_{12}[f,\Phi]=&\frac{2g^2 n_c}{(2\pi)^2\hbar^4}\int d\vec{p}_1\int d\vec{p}_2\int d\vec{p}_3\,\delta(m\vec{\upsilon}_c+\vec{p}_1-\vec{p}_2-\vec{p}_3)\,\delta(\tilde{\varepsilon}_c+\tilde{\varepsilon}_{p1}-\tilde{\varepsilon}_{p2}-\tilde{\varepsilon}_{p3})\\&\times[\delta(\vec{p}-\vec{p}_1)-\delta(\vec{p}-\vec{p}_2)-\delta(\vec{p}-\vec{p}_3)][(1+f_1)f_2f_3-f_1(1+f_2)(1+f_3)],\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}C_{22}[f]=&\frac{2g^2}{(2\pi)^5\hbar^7}\int d\vec{p}_2\int d\vec{p}_3\int d\vec{p}_4\,\delta(\vec{p}+\vec{p}_2-\vec{p}_3-\vec{p}_4)\,\delta(\tilde{\varepsilon}_p+\tilde{\varepsilon}_{p2}-\tilde{\varepsilon}_{p3}-\tilde{\varepsilon}_{p4})\\&\times[(1+f)(1+f_2)f_3f_4-ff_2(1+f_3)(1+f_4)].\end{aligned} \tag{5}$$

Тут $f=f(\vec{p},\vec{r},t)$, $f_i=f(\vec{p}_i,\vec{r},t)$, [illegible]

Інтеграл зіткнень (5) описує двочастинкові зіткнення між збудженими атомами надконденсату, тоді як (4) описує зіткнення між атомами надконденсату, які «захопили» один атом конденсату. Обидва інтеграли забезпечують виконання законів збереження енергії та імпульсу. Інтеграл зіткнень $C_{22}[f]$ водночас забезпечує збереження числа атомів у конденсаті, $C_{12}[f,\Phi]$ описує взаємодію атомів конденсату та надконденсату, тобто можливі переходи із конденсату в теплову хмарину і навпаки [11, с. 3].

Застосуємо рівняння (1)−(3) до опису слабко нерівноважних процесів. Зокрема розглянемо процес поширення періодичного збурення густини, яке відповідає поширенню звукової хвилі. Розглядатимемо малі відхилення від стану рівноваги, який характеризується параметрами: n_{c0}, $\tilde{n}_0$ − рівноважні густини конденсату та теплової хмарини; $\vec{\upsilon}_{c0}=0$ − швидкість конденсату; $f_0=\dfrac{1}{e^{c^2+\beta g n_{c0}}-1}$ − рівноважна функція розподілу. Покладемо:

$$n_c=n_{c0}+\delta n_c,\quad \delta n_c(\vec{p},\vec{r},t)=\delta n_c(\vec{p})e^{[illegible]},$$

$$\tilde{n}=\tilde{n}_0+\delta\tilde{n}_c,\quad \delta\tilde{n}_c=\delta\tilde{n}_c(\vec{p})e^{[illegible]},$$

$$f=f_0[1+f_0]h,$$

де $h<<0$ − мала поправака до функції розподілу. Лінеаризована система рівнянь (1)−(3) зводиться до одного рівняння (6)

$$i(1+f_0)\left(c_z k\left[h_0(\vec{c})+2A\delta\tilde{n}_0(\vec{c})\right]-\upsilon_0 h_0(\vec{c})\right)=L_{22}[h_0(\vec{c})],\quad A=\frac{\beta g\dfrac{\omega_0^2}{k^2}+\dfrac{\beta^2 g^2 n_{c0}}{2}}{\dfrac{\omega_0^2}{k^2}-\dfrac{\beta g n_{c0}}{2}}, \tag{6}$$

де:

$$L_{22}[h]=\frac{g^2m^2}{2\sqrt{2}\pi^5\hbar^{-}}\left(\frac{m}{}\right)^{3/2}\int d\vec{c}_2\,\mathrm{J}\,a\vec{c}_3\,\mathrm{J}\,a\vec{c}_4\,o\,(\vec{c}+\vec{c}_2-\vec{c}_3-\vec{c}_4\,)\,o\,(c\ +c_2^2-c_3^2-c_4^2\,)\times$$
$$\times f_{02}\left(1+f_{03}\right)\left(1+f_{04}\right)\left[h_4+h_3+h_2+h\right], \tag{7}$$

$\vec{c}=(\rho\,/\,\angle m\,)\quad\vec{p}$ − безрозмірна швидкість, ω_0 − частота звукової хвилі, k − хвильове число, $\beta=1/k_BT$.

Ми отримали замкнене лінеаризоване рівняння Больцмана, яке описує надконденсатні ступені вільності на фоні конденсату. Це рівняння має форму інтегрального рівняння для амплітуд плоских хвиль. Зауважимо, що у рівнянні (6) збережений лише один лінеаризований інтеграл зіткнень $L_{22}[h]$. Доданок $L_{12}[h]$ відкинутий з огляду на те, що ми розглядаємо явище дифузійної рівноваги. У рівнянні (6) невідомо амплітуди плоских хвиль. Для подальшого дослідження рівняння (6) виконаємо розклад величини h за системою власних функцій оператора лінеаризованого інтеграла зіткнень, які визначаються із рівняння на власні функції ψ_i та власні значення λ_i:

$$L_{22}[\psi_i]=\lambda_i\psi_i. \tag{8}$$

Відповідний розклад має вигляд

$$h_0\,(\vec{c}\,\mathrm{J}=\underset{l}{\angle}a_l\psi_l\,(\vec{c}\,\mathrm{J}. \tag{9}$$

Вперше такий підхід до розв'язку рівняння Больцмана запропонував Уленбек та Ван Чан у 1952 р. для дослідження звуку в максвелівському газі [16, с. 1, 10]. У цій роботі вони розв'язали задачу на власні функції та власні значення лінеаризованого оператора зіткнень для моделі «максвелівського» газу та застосували отриману систему власних функцій та значень до теоретичного опису звукових хвиль, розрахунку кінетичних коефіцієнтів в'язкості та теплопровідності.

Підставимо розклад (9) в (6) та врахуємо (8). Після інтегрування по простору швидкостей інтегральне рівняння (6) перетворюється на систему алгебричних рівнянь для коефіцієнтів розкладу:

$$\sum_l a_l\left[ik\left(M_{ml}+2AN_{ml}\right)+\lambda_lQ_{ml}-i\omega_0\delta_{ml}\right]=0, \tag{10}$$

де:

$$M_{ml}=\frac{1}{\pi^{3/2}\Lambda^3}\int d\vec{c}f_0\left(\vec{c}\right)\left(1+f_0\left(\vec{c}\right)\right)\psi_m\left(\vec{c}\right)c_z\psi_l\left(\vec{c}\right),$$

$$N_{ml}=\frac{1}{\pi^3\Lambda^6}\int d\vec{c}\mathrm{J}_0\,(\vec{c}\,\mathrm{J}\,(1+\mathrm{J}_0\,(\vec{c}\,\mathrm{J}\,)\psi_m\,(\vec{c}\,\mathrm{J}c_z\,\mathrm{J}\,a\vec{c}\mathrm{J}_0\,(\vec{c}\,\mathrm{J}\,(1+\mathrm{J}_0\,(\vec{c}\,\mathrm{J}\,)\psi_l\,(\vec{c}\,\mathrm{J}, \tag{11}$$

$$Q_{ml}=\frac{1}{\pi^{3/2}\Lambda^3}\int d\vec{c}f_0\left(\vec{c}\right)\psi_m\left(\vec{c}\right)\psi_l\left(\vec{c}\right),$$

$$\delta_{ml}=\int d\vec{c}\,f_0\left(\vec{c}\right)\left(1+f_0\left(\vec{c}\right)\right)\psi_m\psi_l.$$

λ_i − власне значення оператора $L_{22}[\psi_l]$, що відповідає власній функції ψ_l.

Дисперсійне співвідношення між частотою та хвильовим числом у неявному вигляді − це умова існування нетривіального розв'язку системи алгебричних рівнянь (10). Цією умовою є рівність нулю детермінанта, складеного із коефіцієнтів при невідомих.

Так ми одержали дисперсійне співвідношення між частотою і хвильовим числом у вигляді умови рівності нулю детермінанта, який має нескінченний порядок:

$$\left\|ik\left(M_{ml}+2AN_{ml}\right)+\lambda_lQ_{ml}-i\omega_0\delta_{ml}\right\|=0. \tag{12}$$

Для обчислення (12) потрібно розв'язати задачу на власні фукції ψ_l та власні значення λ_l інтеграла зіткнень $L_{22}[\psi_l]$.

Проблема визначення власних функцій та власних значень лінеаризованого інтеграла зіткнень L_{22}

З огляду на структуру інтеграла зіткнень (7), можемо записати перші чотири власні функції, які потрібні для дослідження впливу в'язкості на згасання частоти звукової хвилі [16]:

$$\varphi_1=1,\ \ \varphi_2=c_z,\ \ \varphi_3=c^2,\ \ \varphi_4=3c_z^2-c^2. \tag{13}$$

Власні функції, ортонормовані з вагою $f_0\left(1+f_0\right)$ подані в таблиці 1, де $z_0 = e^{-\beta g n_{c0}}$, $g_{n/2}\left(z_0\right)$ − g-функція Бозе−Айнштайна, $\Lambda = \left(2\pi\hbar\right.$ [illegible] $^{1/2}$ − довжина теплової хвилі де Бройля.

Таблиця 1

Перші чотири власні функції оператора зіткнень L_{22} для бозе-газу [2]

ψ_1	$\sqrt{\dfrac{\Lambda^3}{g_{1/2}\left(z_0\right)}}$
ψ_2	$\sqrt{\dfrac{2\Lambda^3}{g_{3/2}\left(z_0\right)}}c_z$
ψ_3	$\sqrt{\dfrac{4\Lambda^3 g_{1/2}\left(z_0\right)}{3\left(5g_{5/2}\left(z_0\right)g_{1/2}\left(z_0\right)-3g_{3/2}^2\left(z_0\right)\right)}}\left(c^2-\dfrac{3}{2}\dfrac{g_{3/2}\left(z_0\right)}{g_{1/2}\left(z_0\right)}\right)$
ψ_4	$\sqrt{\dfrac{\Lambda^3}{3g_{5/2}\left(z_0\right)}}\left(3c_z^2-c^2\right)$

Власні значення, яким відповідають три перші власні функції 1, c_z, c^2 дорівнюють нулю. Це пов'язано з існуванням законів збереження числа частинок, імпульсу та енергії, які виконуються при зіткненнях частинок. Наступні власні значення відмінні від нуля і є від'ємними (див. Додаток А).

Визначимо власне значення λ_4, яке відповідає четвертій власній функції ψ_4 оператора зіткнень, співвідношенням:

$$\lambda_4 = \frac{\int d\vec{c} j_0 \left(1+j_0\right)\psi_4 L\left[\psi_4\right]}{\int d\vec{c} j_0 \left(1+j_0\right)\psi_4^2} = \frac{I_{22}^4}{D_4}. \tag{14}$$

Провівши перетворення, наведені в додатку А, одержимо вираз для λ_4 (15) та їх значення, знайдені чисельними методами (табл. 2):

$$\lambda_4 = \frac{8}{3}\frac{ma^2}{\beta^2\pi^{9/2}\hbar}\frac{I_{22}^4}{\text{[illegible]}}. \tag{15}$$

Таблиця 2

Власні значення λ_4

T/T_c	λ_4, $\times 10^6$
0,5	-0,099521
0,6	-0,175526
0,7	-0,292043
0,8	-0,474607
0,9	-0,739518
1,0	-1,241656

Переконуємося, що λ_4 має розмірність c^{-1}.

Матричні елементи

Матричні елементи, потрібні для розв'язку дисперсійного співвідношення (12), обчислюємо за формулами (11), використовуючи явні вирази для власних функцій (табл. 1). Докладно не виводячи M_{ml}, Q_{ml} та N_{ml}, в цьому пункті обговоримо співвідношення між матричними елементами та фізичними величинами. Для цього скористаємося зв'язком g-функції Бозе−Айнштайна із густиною надконденсату [illegible] і тиском P:

$$\text{[illegible]} \int \frac{d\vec{p}}{\left(2\pi\hbar\right)^3} f_0 = \frac{1}{\text{[illegible]}^3} g_{3/2}\left(z_0\right),$$

$$P = \int \frac{d\vec{p}}{\left(2\pi\hbar\right)^3}\frac{p^2}{3m} f_0 = \frac{1}{\beta\Lambda^3} g_{5/2}\left(z_0\right).$$

Маємо:

$$N_{21}M_{12} = \frac{1}{\Lambda^3}\sqrt{\frac{g_{1/2}(z_0)g_{3/2}(z_0)}{2}}\sqrt{\frac{g_{3/2}(z_0)}{2g_{1/2}(z_0)}} = \frac{\tilde{n}_0}{2},$$

$$M_{12}^2 + M_{23}^2 = \frac{g_{3/2}(z_0)}{2g_{1/2}(z_0)} + \left(\frac{5}{6}\frac{g_{5/2}(z_0)}{g_{3/2}(z_0)} - \frac{g_{3/2}(z_0)}{2g_{1/2}(z_0)}\right) = \frac{5}{6}\frac{g_{5/2}(z_0)}{g_{3/2}(z_0)} = \frac{5}{6}\frac{\beta P}{\tilde{}} \equiv \upsilon_0^2 \qquad (16)$$

$$M_{24}^2 = \frac{2}{3}\frac{g_{5/2}(z_0)}{g_{3/2}(z_0)} = \frac{4}{5}\upsilon_0^2,$$

де υ_0^2 − безрозмірна швидкість звуку в ідеальному газі. Домноживши υ_0^2 на множник розмірності швидкості $(2/\beta m)^{1/2}$, одержимо:

$$\upsilon_0^2\sqrt{\frac{2}{\beta m}} = \sqrt{\frac{5}{6}\frac{\beta P}{\tilde{}}}\sqrt{\frac{2}{}} = \sqrt{\frac{5}{3}\frac{P}{\tilde{}}}$$

$$\frac{1}{\lambda_4 Q_{44}} = \frac{1}{\lambda_4}\frac{g_{5/2}(z_0)}{g_{7/2}(z_0)} = \underbrace{\frac{1}{}\frac{g_{5/2}(z_0)}{\beta\Lambda^3}}_{-\eta}\frac{\beta\Lambda^3}{(z_0)} = -\eta\frac{\beta\Lambda^3}{g_{7/2}(z_0)}, \qquad (17)$$

де $\eta = -\frac{3}{16\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m}{\beta}}\frac{\pi^3}{a^2}\frac{g_{5/2}(z_0)}{I_{22}^4}$ − коефіцієнт в'язкості.

Наближене обчислення дисперсійного співвідношення

Для аналізу дисперсійного співвідношення (12) використовуватимемо метод послідовного наближення, який заснований на врахуванні різної кількості рядків і стовпців у детермінанті [16]. Така процедура еквівалентна розкладу дисперсійного співвідношення за хвильовим числом.

Нульове наближення за степенями хвильового числа відповідає детермінанту, у якому зберігається тільки три рядки і стовпці, що відповідають нульовим власним значенням оператора зіткнень.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -\omega_0 & kM_{12} & 0 \\ kM_{12} + 2AkN_{21} & -\omega_0 & kM_{23} \\ 0 & kM_{23} & -\omega_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (18)$$

Розкривши детермінант (18), і використавши співвідношення (16), одержимо рівняння, яке описує *незгасаючі* коливання:

$$\frac{\omega_0^2}{k^2} - \upsilon_0^2 + A\tilde{}$$

Воно має біквадратну структуру відносно ω_0/k. Розкладаючи розв'язки в ряд по g, одержуємо в наближенні g^2 рівняння:

$$\frac{\omega_{0I}^2}{k^2} = \upsilon_0^2 + \beta g\tilde{} \quad \frac{\beta g n_{c0}}{2}\varsigma, \qquad (19\text{ а})$$

$$\frac{\omega_{0II}^2}{k^2} = \frac{\beta g n_{c0}}{2} - \frac{\beta g n_{c0}}{2}\varsigma, \qquad (19\text{ б})$$

де $\varsigma = 2\beta g\tilde{}$ Одержали відомі дисперсійні співвідношення між частотою та хвильовим числом для швидкостей першого і другого звуків [9].

Побудувавши залежність швидкостей звуків від температури (рис. 1), бачимо що при $T \approx 0{,}1T_c$ відбувається гібридизація цих двох звукових мод, яка обговорюватиметься в цій роботі нижче.

Для отримання дисперсійного співвідношення, яке пов'язує фазову швидкість і частоту *згасаючих* коливань звукової хвилі, додатково врахуємо рядок і стовпець у детермінанті (12). Так, щоб описати вплив в'язкості на згасання першого і другого звуків, досить розглянути дисперсійне співвідношення у вигляді детермінанта розмірності 4×4 [16]. Використовуючи формули (16)−(17), одержимо:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -\omega_0 & kM_{12} & 0 & 0 \\ kM_{12} + 2AkN_{21} & -\omega_0 & kM_{23} & kM_{24} \\ 0 & kM_{23} & -\omega_0 & 0 \\ 0 & kM_{24} & 0 & -\omega_0 - i\lambda_4 Q_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= i\omega^5 \eta \frac{\beta\Lambda^3}{g_{7/2}(z_0)} - \omega^4 - i\omega^3 k^2 \eta \frac{\beta\Lambda^3}{g_{7/2}(z_0)} \left(\frac{9}{5} \upsilon_0^2 + \beta g \tilde{} \quad \frac{\beta g n}{2} \quad 0 \right) + \tag{20}$$

$$+\omega^2 k^2 \left(\upsilon_0^2 + \beta g \tilde{} \quad \frac{\beta g n}{2} \right) \qquad \frac{\beta\Lambda^3}{g_{7/2}(z_0)} \quad \frac{\beta g n}{2} \left(\frac{9}{5} \tilde{} \right) \qquad \frac{\beta g n}{2} \tilde{}$$

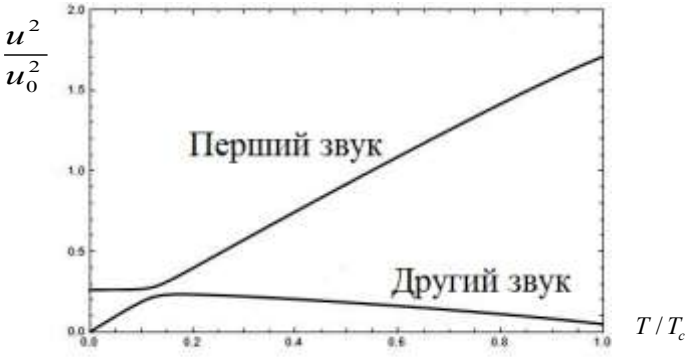

Рис. 1. **Квадрати швидкостей першого і другого звуку (нормовані до швидкості першого звуку $u_0 = 5P/3m\tilde{}_0$ ідеального газу ($g = 0$) при $T = T_c$, T_c − критична температура), $gn = 0{,}2k_BT_c$. Довжина розсіяння для ^{23}Na : $a = 2{,}75$ *нм***

Оскільки ми розглядаємо хвилю, яка поширюється вздовж осі z і згасає з відстанню, то хвильове число є комплексною функцією $k = \sigma_1 - i\sigma_2$, для якої реальна компонента σ_1 відповідає фазі хвилі, а уявна σ_2 − згасанню (σ_1 та σ_2 є додатними). Отже, $-\mathrm{Im}k \geq 0$ (рис. 2 (б)) та $u = \omega_0/\mathrm{Re}k$, де u − фазова швидкість звукової хвилі (рис. 3).

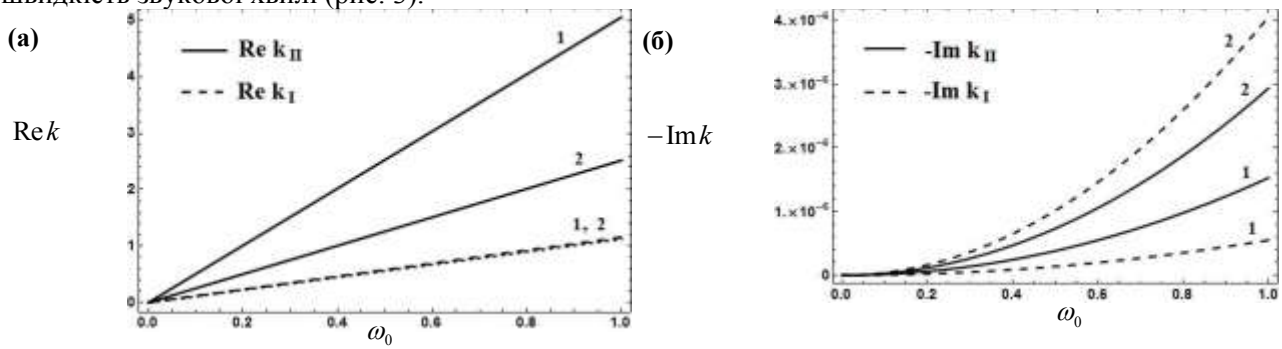

Рис. 2. **Залежність безрозмірного хвильового числа першого (*I*) і другого (*II*) звуків від частоти ω при:** 1) $T = 0{,}9T_c$, $\bar{\eta} = 0{,}12$; 2) $T = 0{,}5T_c$, $\bar{\eta} = 0{,}15$. $gn / k_BT_c = 0{,}2$. Довжина розсіяння для ^{23}Na: $a = 2{,}75$ нм

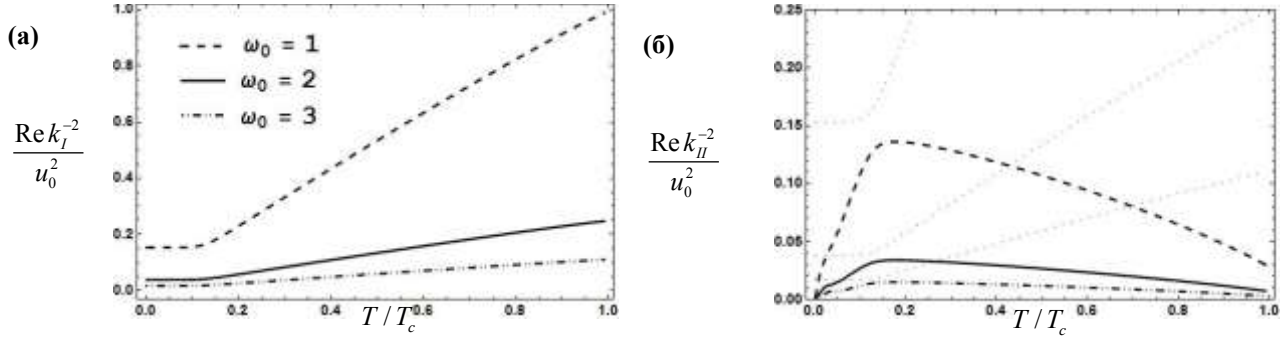

Рис. 3. **Обернені квадрати хвильового числа першого (а) і другого звуку (б) (нормовані до швидкості першого звуку в нульовому наближенні u_0 (19А) при $T = T_c$) при різних частотах. $gn = 0{,}2k_BT_c$. Довжина розсіяння для ^{23}Na : $a = 2{,}75$ *нм***

Запровадивши квадрати швидкостей звуків співвідношенням $u^2 = (2/\beta m)(\omega_0^2/\mathrm{Re}k^2)$, де $2/\beta m$ − розмірний множник, ми побудували їх температурну залежність (рис. 3).

Як і очікувалося, перший і другий звук гібридизуються при низьких температурах. Вперше це явище обговорено в роботі Лі і Янга, присвяченій колективним модам в однорідному бозе-газі [12]. За дуже низьких температур, коли $u_I^2 \approx u_{II}^2$, змінюється фізичний зміст цих двох мод в результаті гібридизації. Перший звук має скіченну швидкість при прямуванні температури до нуля. Отже, в низькотемпературній області перший звук − це коливання густини конденсату. Вище температури гібридизації перший звук відповідає коливанням густини теплової хмарини, другий звук − це в основному коливання густини конденсату.

Дослідження дисперсійних співвідношень у двох наближеннях (18) та (20) показало, що в'язкість істотно не впливає на швидкості першого і другого звуків для $\omega_0 < 1$. Графіки залежності хвильового числа від частоти для незгасаючих звукових коливань збігаються з графіками, зображеними на рис. 2 (а). На рис. 2 (б) зображено вплив в'язкості на згасання звуків.

На рис. 4 зображено чисельні результати для температурної залежності безрозмірного коефіцієнта в'язкості $\overline{\eta} = \eta / n\upsilon_{cl}^2 m\tau_0$ в *однорідному* бозе-газі. Тут $\upsilon_{cl} \equiv (5k_B T_c/3m)^{1/2}$ − швидкість звуку в класичному газі при $T = T_c$, $\tau_0^{-1} \equiv \sqrt{2}(8\pi a^2)n(8k_B T_c/\pi m)^{1/2}$ − класичний середній час зіткнень при $T = T_c$. Зауважимо, що температурна залежність коефіцієнта в'язкості конденсованого бозе-газу в пастці ($U_{ext} \neq 0$) цілком відмінна від її поведінки в однорідному бозе-газі. Оскільки тут густина конденсату в центральній частині пастки набагато більша, ніж густина теплової хмарини ($n_c >> \tilde{n}_0$) навіть при температурах, близьких до критичної температури T_c, то основним є внесок інтеграла зіткнень C_{12}.

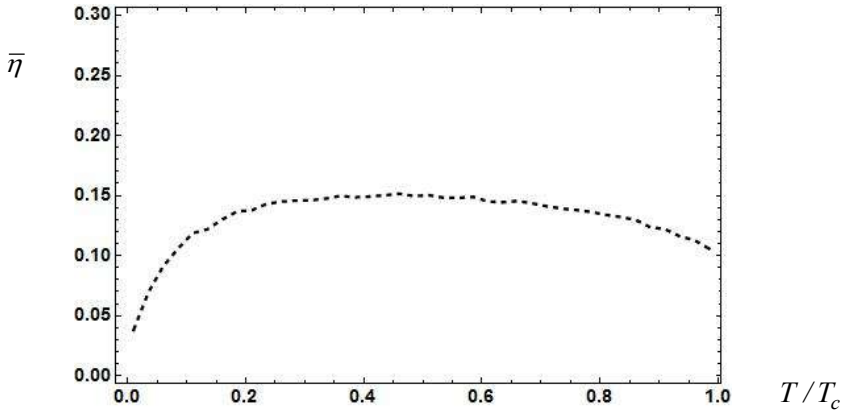

Рис. 4. **Температурна залежність безрозмірного коефіцієнта в'язкості gn/k_BT_c = 0,2. Довжина розсіяння для ^{23}Na : a = 2,75 нм**

Висновки та перспективи подальшого дослідження. Ми дослідили дисперсійне співвідношення між частотою та хвильовим числом за схемою опису поширення звуку Ван Чан та Уленбека в нульовому наближенні, яке описує незгасаючі коливання звукових хвиль, та наближенні, яке враховує вплив в'язкості на згасання звуку. У роботі наведено чисельні результати для моделі просторово-однорідного бозе-конденсованого газу. Тут ми показали наявність згасання першого і другого звуків та дослідили вплив в'язкості газу на його величину.

Роботу виконано за сприяння Міністерства освіти і науки України (держбюджетна тема № 0113U002220).

Додаток А

Власне значення λ_4 визначається співвідношенням (14), де: $L[\psi_4] = \sqrt{\frac{2}{\beta m}}\frac{g^2m^2}{2\sqrt{2}\hbar^7\pi^5}\left(\frac{m}{\beta}\right)^{3/2} L_{22}[\psi_4]$.

$$L_{22}[\psi_i] = \int d\vec{c}_2 \int d\vec{c}_3 \int d\vec{c}_4 \delta(\vec{c} + \vec{c}_2 - \vec{c}_3 - \vec{c}_4)\delta(c^2 + c_2^2 - c_3^2 - c_4^2) \times \\ \times f_{02}(1 + f_{03})(1 + f_{04})[\psi_4 + \psi_3 - \psi_2 - \psi]. \qquad \text{(A1)}$$

Розгляньмо безрозмірний лінеаризований інтеграл зіткнень (для спрощення громіздких записів працюємо з безрозмірними виразами)

$$L'_{22}[\psi_i]=\int dc_2\int dc_3\int dc_4\delta(\vec{c}+\vec{c}_2-\vec{c}_3-\vec{c}_4)\delta\left(c^2+c_2^2-c_3^2-c_4^2\right)\times \\ \times f_0f_{02}(1+f_{03})(1+f_{04})[\psi_4+\psi_3-\psi_2-\psi], \tag{A2}$$

де $\psi_i=\psi(\vec{c}_i)$. Внаслідок виконання законів збереження імпульсу та енергії при зіткненнях частинок інтеграл (А2) задовільняє такі умови:

$$L'_{22}(\vec{c})=0, L'_{22}\left(c^2\right)=0. \tag{A3}$$

Інтеграл зіткнень (А2) має важливу властивість ермітовості:

$$\int d\vec{c}\,\phi L'_{22}[\psi]=\int d\vec{c}\,\psi L'_{22}[\phi], \tag{A4}$$

де $\phi_i=\phi(\vec{c}_i)$. Ця властивість пов'язана з двочастинковими зіткненнями і добре відома для класичного газу [5].

Також, використовуючи рівноважне співвідношення:

$$f_0f_{02}(1+f_{03})(1+f_{04})=f_{03}f_{04}(1+f_0)(1+f_{02}), \tag{A5}$$

(А2) можна переписати так:

$$\int d\vec{c}L'_{22}[\psi_i]=-\frac{1}{4}\int d\vec{c}\int d\vec{c}_2\int d\vec{c}_3\int d\vec{c}_4\delta(\vec{c}+\vec{c}_2-\vec{c}_3-\vec{c}_4)\delta\left(c^2+c_2^2-c_3^2-c_4^2\right) \\ \times f_0f_{02}(1+f_{03})(1+f_{04})[\psi_4+\psi_3-\psi_2-\psi]^2. \tag{A6}$$

Оскільки цей інтеграл записаний у чисельнику (14), а знаменник (14) додатний, то з (А6) видно, що власні значення від'ємні.

Використовуючи співвідношення для функції розподілу:

$$f_0=\frac{1}{e^{c^2+\beta gn_{c0}}-1}=\frac{1}{e^{c^2-\alpha}-1},\quad \alpha_1=-\beta gn_{c0},\quad f_0(1+f_0)=\frac{df_0}{d\alpha_1},$$

інтеграл зіткнень $L_{22}[\psi_i]$ (А1) пов'язаний з $L'_{22}[\psi_i]$ (А2) співвідношенням:

$$f_0(1+f_0)L_{22}[\psi_i]=\frac{d}{d\alpha_1}L'_{22}[\psi_i],\alpha_1=-\beta gn_{c0}. \tag{A7}$$

Тоді, скориставшись властивостями (А3), (А4), маємо вираз у чисельнику (14):

$$I_{22}^4=\frac{d}{d\alpha_1}\int d\vec{c}L_{22}\left[3c_z^2-c^2\right]\left(3c_z^2-c^2\right)=9\frac{d}{d\alpha_1}\int d\vec{c}L_{22}\left[c_z^2\right]c_z^2. \tag{A8}$$

Використавши (А6), I_{22}^4 набуває вигляду:

$$I_{22}^4=-\frac{9}{4}\int d\vec{c}\int d\vec{c}_2\int d\vec{c}_3\int d\vec{c}_4\delta(\vec{c}+\vec{c}_2-\vec{c}_3-\vec{c}_4)\delta\left(c^2+c_2^2-c_3^2-c_4^2\right)\times \\ \times F(c^2,c_2^2,c_3^2,c_4^2)\left(c_{z4}^2+c_{z3}^2-c_{z2}^2-c_z^2\right)^2, \tag{A9}$$

де $F\left(c^2,c_2^2,c_3^2,c_4^2\right)=f_0f_{02}(1+f_{03})(1+f_{04})$.

Знімаючи інтегрування по $\vec{c}_4$ та c_2 та переходячи до сферичної системи координат, маємо

$$I_{22}^4=-\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{2\pi}d\phi_2\int_0^{2\pi}d\phi_3\int_{-1}^{1}dy\int_{-1}^{1}dy_2\int_{-1}^{1}dy_3\int_0^{\infty}dc\int_0^{\infty}dc_3\times \\ \times F\left(c^2,\tilde{c}_2^2,c_3^2,\tilde{c}_4^2(\tilde{c}_2)\right)\frac{c^2\tilde{c}_2^2c_3^2}{\left|c\chi_{12}-c_3\chi_{23}\right|}\left(c_3^2y_3^2+c\tilde{c}_2yy_2-cc_3yy_3-\tilde{c}_2c_3y_2y_3\right)^2, \tag{A10}$$

де, в результаті обрахунків, введено такі позначення:

$$\tilde{c}_4^2(\tilde{c}_2)=c^2+c_2^2+c_3^2+2c\tilde{c}_2\chi_{12}-2cc_3\chi_{13}-2\tilde{c}_2c_3\chi_{23},$$

$$\tilde{c}_2=\frac{c_3^2-cc_3\chi_{13}}{c_3\chi_{23}-c\chi_{12}},$$

$$\chi_{12} = \sqrt{\left(1-y^2\right)\left(1-y_2^2\right)}\cos\left(\varphi-\varphi_2\right)+yy_2,$$
$$\chi_{13} = \sqrt{\left(1-y^2\right)\left(1-y_3^2\right)}\cos\left(\varphi-\varphi_3\right)+yy_3,$$
$$\chi_{23} = \sqrt{\left(1-y_2^2\right)\left(1-y_3^2\right)}\cos\left(\varphi_2-\varphi_3\right)+y_2y_3.$$

Знаменник в (14) $D_4 = \int d\vec{c} f_0\left(1+f_0\right)\left(3c_z^2-c^2\right)^2 = 3\pi^{3/2} g_{5/2}\left(z_0\right)$.

Остаточно, переходячи до розмірних величин, маємо вираз для числових обрахунків (15).

Джерела та література

1. Уленбек Дж. Лекции по статистической механике / Дж. Уленбек, Дж. Форд. − М. : Мир, 1965. − 308 с.
2. Шигорін П. П. Проблема власних функцій та власних значень в теорії нерівноважних процесів у конденсованому бозе-газі / П. П. Шигорін, І. П. Дмитрук // Вісн. СНУ ім. Лесі Українки. Фізич. науки. − 2013. − № 2 (251). − С. 53−60.
3. Erich D. Relaxation rates and collision operators for Bose-Einstein condensates / D. Erich, L. E. Reichl // Phys. J. Low. Temp. Phys. − 2013. − Vol. 170. − P. 43.
4. Erich D. Transport coefficient from the boson Uehling-Uhlenbeck equation / D. Erich, L. E. Reichl // Phys. Rev. E. − 2013. − Vol. 87. − P. 042109−042117.
5. Erich D. Transport theory for a dilute Bose-Einstein condensate / D. Erich, L. E. Reichl // Phys. Rev. A. − 2013 − Vol. 88. − P. 053603.
6. Ferziger J. H. Mathematical theory of transport processes in gases / J. H. Ferziger, H. G. Kaper. − North-Holland Publishing Company. − Amsterdam, 1972. − 568 p.
7. Griffin A. Bose condensed gases at finite temperatures / A. Griffin, T. Nikuni, E. Zaremba. − Cambridge : University Press, 2009. − 462 p.
8. Griffin A. Two-fluid hydrodynamics of a Bose gas including damping from normal fluid transport coefficients / A. Griffin, T. Nikuni, E. Zaremba // Canadian Journal of Physics. − 2000. − Vol. 78 (5−6). − P. 425−432.
9. Griffin A. First and second sound in a uniform Bose gas / A. Griffin, E. Zaremba // Phys. Rev. A. − 1997. − Vol. 56 − P. 4839.
10. Gross E. P. Kinetic models and the linearized Boltzmann Equation / E. P. Gross, E. A. Jackson // Phys. Fluids. − 1959. − Vol. 2. − P. 432.
11. Kirkpatrick T. R. Transport in a dilute but condensed non-ideal Bose gas: Kinetic equations / T. R. Kirkpatrick, J. R. Dorfman // J. Low Temp. Phys. − 1985. − Vol. 58. − P. 301−331.
12. Lee T. D. Low-temperature behavior of a dilute bose sysytem of hard spheres II. Nonequilibrium properties / T. D. Lee, C. N. Yang // Phys. Rev. − 1959. − Vol. 113. − 1406 p.
13. Nikuni T. Landau-Khalatnikov two-fluid hydrodynamiscs of trapped Bose gas / T. Nikuni, A. Griffin // Phys. Rev. A. − 2001. − Vol. 63. − P. 033608−033628.
14. Pethick C. J. Bose-Einstein condensation in dilute gases / C. J. Pethick, H. Smith. − Cambridge : University Press, 2008. − 570 p.
15. Uehling E. A. Transport phenomena in Einstein-Bose and Fermi-Dirac gases / E. A. Uehling, G. E. Uhlenbeck // Phys. Rev. − 1933. − Vol. 43. − P. 552−561.
16. Wang Chang C. S. On the propagation of sound in monatomic gases / C. S.Wang Chang, G. E. Uhlenbeck. − University of Michigan Press, 1952.

Дмитрук Ирина, Шигорин Павел, Свидзинский Анатолий. Влияние вязкости на дисперсию звука в пространственно-однородном конденсированном бозе-газе. Используя обобщенное уравнение Гросса−Питаевского для конденсата и квантовое кинетическое уравнение Больцмана для тепловых атомов, получено замкнутое линеаризованное уравнение Больцмана, описывающее надконденсатные степени свободы на фоне конденсата. По схеме описания распространения звука Ван Чан и Уленбека исследовано дисперсионное соотношение между волновым числом и частотой звуковой волны, которое включает поглощение, связанное с коэффициентами переноса, в частности вязкостью. В работе исследована задача на собственные функции и собственные значения оператора линеаризованного интеграла столкновений квантового кинетического уравнения Больцмана для модели слабо неидеального однородного бозе-газа при наличии в нем бозе-конденсата. Построены первые четыре ортогонализованные и нормированные собственные функции и рассчитаны соответствующие собственные значения. Систему собственных функций и значений оператора линеаризованного интеграла столкновений применено для теоретического описания звуковых волн, расчета коэффициента вязкости.

Ключевые слова: квантовое кинетическое уравнение Больцмана, линеаризованной интеграл столкновений, метод Ван Чан−Уленбека, коэффициент вязкости.

Dmytruk Iryna, Shygorin Pavlo, Svidzynskij Anatoliy. Viscosity Influence on Sound Dispersion in a Uniform Bose-Condensed Gas. Using the generalized Gross−Pitaevskii equation for the condensate and the quantum kinetic Boltzmann equation for the thermal cloud, we derive the closed set of linearized equations that describes noncondensate degrees of freedom on the background of the condensate. Our analysis of the dispersion relation between wave number and frequency of the sound wave is based on the Wang Chang−Uhlenbeck method. In this approach we derive the dispersion relation that includes the dissipation associated with viscosity. We study the problem of the eigenfunctions and the eigenvalues for the linearized collision operator of quantum kinetic Boltzmann equation. We calculate the first few normalized eigenfunctions and eigenvalues for a weakly interacting uniform Bose-condensed gas. We apply the set of the eigenfunctions and the eigenvalues to a discussion of the propagation sound waves and to calculate the viscosity coefficient.

Key words: quantum kinetic Boltzmann equation, linearized collision integral, the Wang Chang−Uhlenbeck method, viscosity.

Стаття надійшла до редколегії
02.06.2014 р.

УДК 539.104:519.46:537.311.33

Петр Трохимчук

Моделирование процессов и явлений релаксационной оптики. Кристаллооптические аспекты

Обсуждаются проблемы моделирования процессов и явлений релаксационной оптики. Кристаллооптические аспекты рассматриваются на основании классификации явлений, в основу которой положено разложение вектора Пойнтинга в ряд по степеням напряженностей электрического и магнитного полей. Анализируются возможные механизмы предполагаемых явлений.

Ключевые слова: релаксационная оптика, кристаллооптика, нелинейная оптика, вектор Пойнтинга, разложение в ряд, диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость.

Постановка научной проблемы и её значение. Релаксационной оптикой был назван раздел современной физики, в котором изучаются процессы необратимого взаимодействия оптического излучения со средой [16; 17]. Необходимость создания такого раздела физики была обусловлена технологическими применениями лазерного излучения. Для этого необходимо было синтезировать в единую систему квантовую электронику (включая нелинейную оптику и параметрическую кристаллооптику), радиационную физику твердого тела, физическую химию, физику необратимых процессов. В основу релаксационной оптики была положена энергетически-хронологическая классификация процессов взаимодействия оптического излучения с веществом [16; 17].

Релаксационную оптику можно рассматривать и как расширение нелинейной оптики на безизлучательные процессы [17], так как в основу нелинейной оптики положено разложение в ряд поляризуемости среды по степеням напряженности электрического поля. При этом рассматривается лишь действительная часть этого разложения [17]. Однако существует целый ряд материалов (металлы, некоторые полупроводники и т. п.) для которых относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости больше единицы. Поэтому, естественно, необходимо расширить «нелинейнооптический» подход и на такие материалы, включить в рассмотрение и комплексную часть диэлектрической и магнитной проницаемости, а также их тензорное произведение, что соответствует коэффициенту вектора Пойнтинга. Такой подход целесообразно использовать для описания процессов нелинейной и релаксационной оптики, а также их взаимосвязи и взаимовлияния.

Поэтому данная работа и посвящена кристаллооптическим аспектам моделирования процессов релаксационной оптики.

Изложение основного материала и обоснование полученных результатов исследования. Явления релаксационной оптики можно рассматривать как явления нелинейной оптики и параметрической кристалооптики с безизлучательной релаксацией процесса взаимодействия излучения с веществом. Если в классической кристаллооптике [3; 5; 8; 9; 13; 17] рассматривается, как правило,

© *Трохимчук П., 2014*