Східноєвропейський національний університет
імені Лесі Українки
Математичний факультет
Кафедра диференціальних рівнянь та математичної фізики

Світлана Гембарська

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

методичні рекомендації

Луцьк
2014

ЗМІСТ

Вступ

Математична фізика – це наука про математичні моделі фізики. Предмет математичної фізики – постановка й вивчення методів розв'язання задач під час розгляду явищ гідродинаміки, аеромеханіки, електродинаміки, теорії теплопровідності тощо. Натепер за допомогою рівнянь математичної фізики моделюють не тільки фізичні та інженерні задачі, але й хімічні, екологічні, біологічні, економічні, соціальні тощо.

Отже, коло питань, які вивчає математична фізика, - це диференціальні рівняння з частинними похідними, крайові задачі та методи їх розв'язання.

Задачі математичної фізики складні й нестандартні, потребують додаткових вказівок і пояснень щодо розв'язання. Існує нагальна потреба у методичній літературі саме для практичних занять з цієї математичної дисципліни.

З такою метою і створені методичні рекомендації. У них подано матеріал про диференціальні рівняння з частинними похідними і методику зведення таких рівнянь до канонічної форми, розглянуто постановку основних крайових задач та наведено основні методи їх розв'язання.

До кожного параграфу подано приклади і завдання для самостійної роботи.

§1. Поняття про диференціальні рівняння з частинними похідними або рівняння математичної фізики

Означення 1. Рівняння, що містить незалежні змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ невідому функцію $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та її частинні похідні називається диференціальним рівнянням з частинними похідними (ДРЧП)

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial {x_1}^{k_1} \ldots \partial {x_n}^{k_n}}\right) = 0, \qquad (1)$$

де $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

Як і у випадку звичайного диференціального рівняння (ЗДР), де невідома функція залежить тільки від одного аргументу, порядок ДРЧП визначається найвищим порядком похідної, що входить в нього.

Рівняння з частинними похідними першого порядку з двома незалежними змінними x та y має вигляд

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (2)$$

Аналогічно рівняння з частинними похідними другого порядку може бути записано у вигляді:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (3)$$

Означення 2. ДРЧП називається квазілінійним, якщо воно лінійне відносно старших похідних від невідомої функції.
Так, наприклад, рівняння

$$A\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$+ f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (4)$$

є квазілінійним рівнянням другого порядку.
Означення 3. ДРЧП називається лінійним, якщо воно лінійне відносно невідомої функції та її частинних похідних.
Так, наприклад, рівняння

$$a_{11}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+ b_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y)u = f(x, y) \qquad (5)$$

є лінійним рівнянням другого порядку. Якщо $f(x, y) \equiv 0$, то рівняння називається однорідним, в протилежному випадку – неоднорідним.

При розв'язанні багатьох задач механіки та фізики отримуємо ДРЧП другого порядку. Так, наприклад:

1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{6}$$

хвильове рівняння, яке отримуємо, вивчаючи різні види коливних процесів та хвильовий рух;

2) $$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{7}$$

рівняння теплопровідності, яке описує процеси теплопровідності та дифузії;

3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x, y, z) \tag{8}$$

рівняння Пуассона, що описує стаціонарний або встановлений (що не залежить від часу) тепловий стан. Якщо відсутні джерела тепла, то рівняння (8) переходить в рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{9}$$

Потенціали поля тяжіння та стаціонарного електричного поля також задовольняють рівнянню Лапласа, в якому відсутні маси і відповідно електричні заряди.

Рівняння (6) – (9) часто називають основними рівняннями математичної фізики.

Зауваження. Якщо ввести в розгляд оператор Лапласа $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, то рівняння (6) – (9) відповідно приймуть вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u; \tag{6'}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u; \tag{7'}$$

$$\Delta u = -f(x, y, z); \tag{8'}$$

$$\Delta u = 0. \qquad (9')$$

Означення 4. Розв’язком ДРЧП називається кожна n разів неперервно – диференційовна функція $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка, будучи підставлена в рівняння замість невідомої функції та її частинних похідних, перетворює це рівняння в тотожність за незалежними змінними.

Приклад 1. Перевірити, що функція $u = e^{xy}$ є розв’язком рівняння $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Розв’язання. Знайдемо $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Для цього спочатку знайдемо

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^{xy} \cdot y$ та $\dfrac{\partial u}{\partial y} = e^{xy} \cdot x$. Тоді $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{xy} \cdot y^2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{xy} \cdot x^2$.

Отже, $x^2 \cdot e^{xy} \cdot y^2 - y^2 \cdot e^{xy} \cdot x^2 \equiv 0$.

Завдання.

1) Перевірити, що функція $u = \sin^2(x - at)$ задовольняє рівнянню $a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

2) Показати, що функція $u = \dfrac{xy}{x + y}$ є розв’язком рівняння $x \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \dfrac{\partial u}{\partial y} = u$.

3) Довести, що функція $u = \ln\left[x^2 + (y+1)^2\right]$ задовольняє ДРЧП $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

4) Перевірити, що функція $u = e^{-\cos(x+at)}$ є розв’язком рівняння $a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

5) Показати, що функція $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ є розв'язком рівняння Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

6) Перевірити, що функція $u = (y - z)(z - x)(x - y)$ є розв'язком однорідного ДРЧП першого порядку $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$.

7) Довести, що функція $u = x^y$ є розв'язком ДРЧП другого порядку $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (1 + y\ln x)\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

8) Показати, що однорідне ДРЧП другого порядку $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ має розв'язок $u = \dfrac{y}{x}$.

9) Перевірити, що функція $u = y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ є розв'язком однорідного ДРЧП $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

10) Довести, що функція $u = f(x + at) + \varphi(x - at)$, де f та φ - довільні двічі диференційовні функції, $a = const$, задовільняє хвильовому рівнянню $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

11) Показати, що функція $u = e^{-kn^2 t}\sin nx$ задовольняє рівнянню теплопровідності: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

12) Довести, що рівняння Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ має розв'язок $u = arctg\,\dfrac{y}{x}$.

13) Перевірити, що функція $u(x,t) = A\sin(a\lambda t + \varphi)\sin\lambda x$ задовольняє рівнянню коливання струни $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

14) Довести, що функція $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, де φ і ψ - довільні двічі диференційовні функції, є розв'язком рівняння $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

§2. Розв'язання найпростіших ДРЧП

I. На прикладах покажемо як розв'язувати найпростіші ДРЧП

Приклад 2. Знайти функцію $u = u(x, y)$, що є розв'язком рівняння $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Розв'язання. Як видно з рівняння, шукана функція $u(x, y)$ не залежить від змінної x, але може бути довільною функцією, залежною від y: $u(x, y) = \varphi(y)$. Це і є розв'язком даного ДРЧП.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = y$, де $z = z(x, y)$.

Розв'язання. Проінтегруємо наше рівняння по y. Отримаємо $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y^2}{2} + \varphi_1(x)$, де $\varphi_1(x)$ - довільна функція. Останнє рівняння про інтегруємо ще раз по y:

$z(x, y) = \frac{y^3}{6} + \varphi_1(x)y + \varphi_2(x)$, де $\varphi_2(x)$ - довільна функція.

Отже, розв'язком нашого ДРЧП є $z(x,y)=\frac{y^3}{6}+\varphi_1(x)y+\varphi_2(x)$, де $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ - довільні функції.

Завдання.

15) Знайти функцію $z=z(x,y)$, що задовольняє рівняння $\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

Відповідь: $z(x,y)=y+\varphi_1(x)$.

16) Розв'язати рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=0$.

Відповідь: $z(x,y)=\varphi_1(x)+\varphi_2(y)$.

17) Знайти загальний розв'язок рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=1$.

Відповідь: $z(x,uy)=xy+\varphi_1(x)+\varphi_2(y)$.

18) Знайти загальний розв'язок рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=2x$.

Відповідь: $z(x,y)=x^2y+\varphi_1(x)+\varphi_2(y)$.

19) Знайти загальний розв'язок рівняння $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=0$.

Відповідь: $z(x,y)=\varphi_1(x)+\varphi_2(y)x+\varphi_3(y)$.

20) Знайти загальний розв'язок рівняння $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}=0$.

Відповідь: $z(x,y)=\varphi_1(y)+\varphi_2(x)y+\varphi_3(x)$.

21) Знайти загальний розв'язок рівняння $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}=0$.

Відповідь: $z(x,y)=x\varphi_1(y)+\varphi_2(y)+y\varphi_3(x)+\varphi_4(x)$.

Зауваження. В відповідях до завдань (15-21) $\varphi_i(x)$ - довільні функції.

II. ДРЧП першого порядку, що є лінійним відносно частинних похідних

Розглянемо рівняння

$$X\frac{\partial z}{\partial x}+Y\frac{\partial z}{\partial y}=Z\,,$$

де X, Y, Z є функції x, y, z.

Спочатку треба знайти розв'язок системи ЗДР $\frac{\partial x}{X}=\frac{\partial y}{Y}=\frac{\partial z}{Z}$. Якщо розв'язок цієї системи визначається рівностями:

$$\omega_1(x,y,z)=C_1,\quad \omega_2(x,y,z)=C_2\,,$$

то загальний інтеграл нашого рівняння є

$$\Phi[\omega_1(x,y,z),\omega_2(x,y,z)]=0\,,$$

де $\Phi(\omega_1,\omega_2)$ - довільна неперервно - диференційовна функція.

Приклад 4. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=0\,.$$

Розв'язання. Система ЗДР має вигляд $\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{0}$.

Використовуючи властивості пропорцій, перше рівняння $\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}$ запишемо у вигляді $\frac{dx+dy}{x^2+y^2+2xy}=\frac{dx-dy}{x^2+y^2-2xy}$, або $\frac{d(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{d(x-y)}{(x-y)^2}$. Проінтегрувавши, отримаємо

$$-\frac{1}{x+y}=-\frac{1}{x-y}+C\,;\quad \frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=C\,;\quad \frac{2y}{x^2-y^2}=C\,.$$

Останню рівність можна переписати у вигляді $\frac{y}{x^2-y^2}=C_1$.

Друге рівняння системи $dz = 0$ дає розв'язок $z = C_2$. А тоді загальний інтеграл нашого рівняння має вигляд $\Phi\left(\frac{y}{x^2 - y^2}, z\right) = 0$, або $z = \psi\left(\frac{y}{x^2 - y^2}\right)$, де ψ - довільна функція.

Завдання.

22) Знайти загальний інтеграл рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

Відповідь: $\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ або $z = x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, де ψ - довільна функція.

23) Довести, що загальним розв'язком рівняння $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ є $u(x, y) = \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, де ψ - довільна диференційовна функція.

24) Знайти загальний інтеграл рівняння $yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = -2xy$.

Відповідь: $\Phi\left(x^2 - y^2, x^2 + \frac{z^2}{2}\right) = 0$.

25) Знайти загальний інтеграл рівняння $\sin x\frac{\partial z}{\partial x} + \sin y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \sin z$.

Відповідь: $tg\left(\frac{z}{2}\right) = tg\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \psi\left(\frac{tg\left(\frac{y}{2}\right)}{tg\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$.

26) Знайти загальний інтеграл рівняння $yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy$.

Відповідь: $z^2 = x^2 + \psi\left(y^2 - x^2\right)$.

27) Знайти загальний розв’язок рівняння $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=4$.

Відповідь: $z=2x^2\psi\left(x^2-y^2\right)$.

§3. Крайові та початкові умови

Всі попередні приклади показують, що ДРЧП має нескінченну кількість розв’язків. Розглядаючи конкретну фізичну задачу, що описується ДРЧП, ми прагнемо одержати єдиний розв’язок, щоб прогнозувати відповідне фізичне явище. А значить, необхідні додаткові умови, які б дозволили з нескінченної кількості розв’язків відокремити єдиний. Це дозволяють зробити, так звані, початкові умови (ПУ) та крайові умови (КУ), яким повинна відповідати функція-розв’язок на границі області, в якій вивчається фізичний процес.

ПУ визначають невідому функцію $u(x,y,z,t)$ у момент часу, з якого починається процес. Так, наприклад, ПУ для хвильового рівняння мають вигляд

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x,y,z);\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x,y,z);$$

для рівняння теплопровідності

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x,y,z),$$

де $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$ - задані функції. ПУ задаються у всій області розв’язання задачі.

Отже, ПУ частіше задають при $t=0$, але не обов’язково. В наступному прикладі ПУ задані при $y=1$.

ДРЧП разом з ПУ називається, як і у випадку ЗДР задачею Коші.

Приклад 5. Знайти розв’язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,1) = x^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = x \end{cases} \qquad \text{(ПУ)}$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо загальний розв'язок рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \varphi_1(x)$, де $\varphi_1(x)$ - довільна функція. Проінтегруємо ще раз по y останнє рівняння. Отримаємо $u(x, y) = \varphi_1(x)y + \varphi_2(x)$, де φ_1, φ_2 - довільні функції. А тепер підберемо функції φ_1 та φ_2 так, щоб виконувались наші ПУ:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = x^2 \\ \varphi_1(x) = x \end{cases}$$

Звідки $\varphi_1(x) = x$, а $\varphi_2(x) = x^2 - x$. Отже, розв'язком нашої задачі Коші є

$$u(x, y) = xy + x^2 - x.$$

Зауваження. Задача математичної фізики поставлена коректно (правильно), якщо її розв'язок існує, єдиний і стійкий. Стійкість розв'язку означає, що малим змінам в умові задачі повинні відповідати малі зміни у розв'язку.

КУ визначаються фізичною постановкою задачі і можуть мати різноманітний характер. Для хвильового рівняння і рівняння теплопровідності у математичній фізиці три основні типи КУ – першого, другого і третього роду:

$$u\big|_{\partial D} = \varphi_1(x, y, z, t);$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = \varphi_2(x, y, z, t);$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+h(x,y,z)u\right)\right|_{\partial D}=\varphi_3(x,y,z,t),$$

де φ_i, h - задані функції, ∂D - границя області D розв’язання задачі; $\vec{n}$ - зовнішня одинична нормаль до поверхні D. КУ називаються однорідними, якщо $\varphi_i(x,y,z,t)\equiv 0, \quad i=\overline{1,3}$.

§4. Класифікація лінійних ДРЧП II порядку та зведення їх до канонічного вигляду

Запишемо наше лінійне ДРЧП II порядку (5)

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f\,,$$

де $a_{ij}, b_i, c, f \quad (i,j=1,2)$ є функціями x та y.

Зробимо заміну незалежних змінних за формулами

$$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases} \text{ з якобіаном } I(x,y)=\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0\,, \qquad (10)$$

яке утворює взаємно-однозначне відображення точок (ξ,η) та (x,y). Будемо вважати, що функції $\varphi(x,y)$ та $\psi(x,y)$ неперервні разом з своїми частинними похідними першого та другого порядків.

Використовуючи правила диференціювання складної функції, отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y}+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y}$$

Підставимо значення похідних (11) в рівняння (5) та об’єднаємо члени з однаковими похідними:

$$\alpha_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\alpha_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\alpha_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\beta_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+\beta_2\frac{\partial u}{\partial \eta}+cu=f\,, \qquad (12)$$

де $\alpha_{11}=a_{11}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$

$$\alpha_{12}=a_{11}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+a_{12}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+a_{22}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\alpha_{22}=a_{11}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2,$$

$$\beta_1=b_1\frac{\partial \xi}{\partial x}+b_2\frac{\partial \xi}{\partial y}+a_{11}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}, \qquad (13)$$

$$\beta_2=b_1\frac{\partial \eta}{\partial x}+b_2\frac{\partial \eta}{\partial y}+a_{11}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Використовуючи формули (13) легко перевірити, що $\alpha_{12}^2-\alpha_{11}\alpha_{22}=\left(a_{12}^2-a_{11}a_{22}\right)I^2(x,y)$, тобто дискримінант старших коефіцієнтів $\delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$ не змінює знак при заміні незалежних змінних (10).

Якщо в деякій області D:

а) $\delta>0$, то рівняння (5) називається гіперболічним в D (гіперболічного типу в D);

б) $\delta=0$, то рівняння (5) називається параболічним;

в) $\delta<0$, то (5) називається еліптичним.

Для того, щоб звести рівняння (5) до канонічного виду треба скласти характеристичне рівняння

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}(dx)^2 = 0, \tag{14}$$

що є квадратним рівнянням відносно $\frac{dy}{dx}$, а тому розкладається на два рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{15}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \tag{16}$$

і знайти їх загальні інтеграли.

Розглянемо всі можливі випадки.

I. Рівняння гіперболічного типу: $\delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$.

Рівняння характеристик (14) розпадається на два диференціальних рівняння (15) та (16) з дійсними правими частинами. Якщо $\varphi(x, y) = C_1$ та $\psi(x, y) = C_2$ - загальні інтеграли цих рівнянь, то заміна

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$$

зводить рівняння (5) до канонічного вигляду

$$2\alpha_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \beta_1\frac{\partial u}{\partial\xi} + \beta_2\frac{\partial u}{\partial\eta} + cu = f, \tag{17}$$

або
$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \tag{17'}$$

Іноді зручніше користуватись іншою канонічною формою гіперболічного рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} = F_1\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial\alpha}, \frac{\partial u}{\partial\beta}\right),$$

яку можна отримати з (17) заміною $\begin{cases} \alpha = \dfrac{\xi + \eta}{2}; \\ \beta = \dfrac{\xi - \eta}{2}. \end{cases}$

Приклад 6. Звести до канонічного виду рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Розв'язання. Оскільки $a_{11} = 1$; $a_{12} = -\sin x$; $a_{22} = -\cos^2 x$; $b_1 = 0$; $b_2 = -\cos x$; $c = f = 0$, то

$\delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = (-\sin x)^2 - 1 \cdot (-\cos^2 x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 > 0$,

а значить, маємо рівняння гіперболічного типу. Складемо рівняння характеристик

$$(dy)^2 + 2\sin x dx dy - \cos^2 x (dx)^2 = 0$$

або $\quad (y')^2 + 2\sin x y' - \cos^2 x = 0$.

Звідси $\quad (y')_{1,2} = -\sin x \pm \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}$.

Маємо два диференціальних рівняння:

$$y' = -\sin x - 1 \quad \text{та} \quad y' = -\sin x + 1$$

або $\quad dy = (-\sin x - 1)dx \quad$ та $\quad dy = (-\sin x + 1)dx$.

Проінтегруємо їх і отримаємо

$$y = \cos x - x + C_1 \quad \text{та} \quad y = \cos x + x + C_2,$$

тобто характеристичне рівняння дає дві дійсні сім'ї характеристик

$$x + y - \cos x = C_1 \quad \text{та} \quad x - y + \cos x = \widetilde{C}_2.$$

Введемо нові змінні $\begin{cases} \xi = x + y - \cos x \\ \eta = x - y + \cos x. \end{cases}$

Знайдемо $\quad \dfrac{\partial \xi}{\partial x} = 1 + \sin x$; $\quad \dfrac{\partial \xi}{\partial y} = 1$; $\quad \dfrac{\partial \eta}{\partial x} = 1 - \sin x$; $\quad \dfrac{\partial \eta}{\partial y} = -1$;

$\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \cos x$; $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 0$; $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0$; $\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -\cos x$; $\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0$; $\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0$.

Згідно співвідношень (13) отримаємо

$$\alpha_{11} = (1+\sin x)^2 - 2\sin x(1+\sin x) - \cos^2 x = 1 + 2\sin x + \sin^2 x -$$

$$- 2\sin x - 2\sin^2 x - \cos^2 x = 0;$$

$$\alpha_{12} = (1-\sin x)(1+\sin x) - \sin x[-(1+\sin x) + (1-\sin x)] + \cos^2 x =$$

$$= 1 - \sin^2 x + 2\sin^2 x + \cos^2 x = 2;$$

$$\alpha_{22} = (1-\sin x)^2 + 2\sin x(1-\sin x) - \cos^2 x = 1 - 2\sin x + \sin^2 x +$$

$$+ 2\sin x - 2\sin^2 x - \cos^2 x = 0;$$

$\beta_1 = -\cos x + \cos x = 0$; $\beta 2 = \cos x - \cos x = 0$.

Отже, наше рівняння прийме вигляд

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0, \text{ або } \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0 \text{ - це і є канонічний вид.}$$

Зауваження. В цьому випадку канонічний вид дуже простий і ми в змозі не тільки звести до канонічного вигляду, а й знайти загальний розв'язок цього ДРЧП. В §1 ми отримали загальний розв'язок цього рівняння

$$u(\xi,\eta) = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta),$$

де φ_1 та φ_2 - довільні функції.

Якщо повернутись до старих змінних x та y, то отримаємо

$$u(x,y) = \varphi_1(x + y - \cos x) + \varphi_2(x - y + \cos x).$$

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок хвильового рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Розв'язання. $a_{11} = 1$; $a_{12} = 0$; $a_{22} = -a^2$.

Тоді $\delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = a^2 > 0$ - рівняння гіперболічного типу.

Складемо характеристичне рівняння

$$(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0,$$

що розпадається на два рівняння

$$dx - adt = 0 \text{ та } dx + adt = 0,$$

які мають загальні інтеграли

$$x - at = C_1 \quad \text{та} \quad x + at = C_2 .$$

Використовуючи заміну $\begin{cases} \xi = x - at \\ \eta = x + at, \end{cases}$

знайдемо $\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = 1$; $\dfrac{\partial \xi}{\partial t} = -a$; $\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = 1$; $\dfrac{\partial \eta}{\partial t} = a$;

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 .$$

Продемонструємо трохи інший підхід до розв'язування нашого рівняння. Знайдемо $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ та $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ безпосередньо, використовуючи правила диференціювання складної функції (11).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} .$$

Звідки легко отримаємо рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

Загальний розв'язок цього рівняння $u(\xi, \eta) = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta)$, де θ_i, $i = 1, 2$ - довільні, двічі неперервно диференційовні функції.

В змінних x, t загальний розв'язок має вигляд

$$u(x,t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at).$$

II. Рівняння параболічного типу: $\delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$

У цьому випадку рівняння (15) та (16) співпадають, а тому ми отримаємо тільки одну сім'ю дійсних характеристик

$\varphi(x,y)=C_1$. Друга сім'я характеристик $\psi(x,y)=C_2$ вибирається довільно за однією лише умовою аби $I(x,y)=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y}\\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0$.

Зрозуміло, що функцію $\psi(x,y)$ бажано вибрати найпростішу. Тоді заміна $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$ зведе рівняння (5) до вигляду

$$\alpha_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\beta_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+\beta_2\frac{\partial u}{\partial\eta}+cu=f \tag{18}$$

або
$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=\Phi_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \tag{18′}$$

це і є канонічна форма рівняння параболічного типу.

Приклад 8. Визначити тип ДРЧП, привести його до канонічного виду і отримати його загальний розв'язок

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Розв'язання. Оскільки $a_{11}=x^2$, $a_{12}=xy$, $a_{22}=y^2$, то $\delta=(xy)^2-x^2y^2=0$ - рівняння параболічного типу. Характеристичне рівняння $x^2(dy)^2-2xydxdy+y^2(dx)^2=0$ або $(xdy-ydx)^2=0$; $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$;

Дає одну сім'ю дійсних характеристик $\frac{y}{x}=C_1$. Отже, $\xi=\frac{y}{x}$, а $\eta=x$ (η - довільна функція, для якої $I(x,y)\neq 0$).

Перевіримо виконання останньої умови:

$$I(x,y)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-\frac{1}{x}\neq 0 .$$

Знайдемо $\dfrac{\partial\xi}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}$; $\quad \dfrac{\partial\xi}{\partial y}=\dfrac{1}{x}$; $\quad \dfrac{\partial\eta}{\partial x}=1$; $\quad \dfrac{\partial\eta}{\partial y}=0$.

$\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\dfrac{2y}{x^3}$; $\quad \dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{x^2}$; а $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=0$.

Використовуючи формули (11)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cdot 1+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot 1+\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{2y}{x^3}=$$

$$=\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial\xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\left(-\frac{y}{x^2}\cdot 0+\frac{1}{x}\cdot 1\right)+\frac{\partial u}{\partial\xi}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=-\frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial\xi}$$

і підставивши вирази для других частинних похідних в початкове рівняння, отримаємо

$$x^2\left(\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+$$

$$+2xy\left(-\frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+y^2\cdot\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}=0$$

або $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0$. Звідки отримаємо канонічний вид нашого рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0$. Проінтегрувавши його перший раз по η, отримаємо $\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=\varphi_1(\xi)$, де $\varphi_1(x)$ - довільна функція.

Останню рівність проінтегруємо ще раз по η:
$u(\xi,\eta)=\int\varphi_1(\xi)d\eta+\varphi_2(\xi)=\varphi_1(\xi)\cdot\eta+\varphi_2(\xi)$, де φ_2 також довільна функція. Якщо повернутись до старих змінних x та y, то отримаємо

$u(x,y)=x\varphi_1\left(\dfrac{y}{x}\right)+\varphi_2\left(\dfrac{y}{x}\right)$ - загальний розв'язок рівняння.

III. Рівняння еліптичного типу: $\delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$

У цьому випадку праві частини рівнянь (15), (16) комплексно спряжені, а значить, отримаємо дві сім'ї комплексно спряжених характеристик:

$$\varphi_1(x,y)\pm i\varphi_2(x,y)=C.$$

Тоді заміна $\begin{cases}\xi=\varphi_1(x,y)\\ \eta=\varphi_2(x,y)\end{cases}$, тобто ξ дорівнює дійсній частині загального інтеграла характеристичного рівняння, а η - уявній, зводить ДРЧП (5) до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\gamma_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+\gamma_2\frac{\partial u}{\partial\eta}+cu=f \qquad (19)$$

або
$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=F\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \qquad (19')$$

Приклад 9. Привести до канонічного вигляду рівняння $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Розв'язання. Оскільки $a_{11}=x^2$, $a_{12}=0$, $a_{22}=y^2$, то $\delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0-x^2y^2<0$ якщо $x\neq 0, y\neq 0$, тобто дане рівняння еліптичного типу на всій площині, крім осей координат. Складемо характеристичне рівняння $x^2(dy)^2+y^2(dx)^2=0$ або $xdy\pm iydx=0$. Відокремимо змінні $\frac{dy}{y}=\mp i\frac{dx}{x}$ і проінтегруємо

$$\ln y=\mp i\ln x+C \quad \text{або} \quad \ln y\pm i\ln x=C.$$

Отримали дві сім'ї комплексно спряжених характеристик. Дійсна частина дасть першу нову змінну ξ, а уявна - η: $\begin{cases}\xi=\ln y,\\ \eta=\ln x.\end{cases}$

Знайдемо $\frac{\partial\xi}{\partial x}=0$; $\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{1}{y}$; $\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{1}{x}$; $\frac{\partial\eta}{\partial y}=0$;

$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}=0$; $\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=-\frac{1}{x^2}$; $\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=-\frac{1}{y^2}$ $\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=0$.

Згідно співвідношень (11), отримаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial\eta}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial\eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\left(\frac{1}{y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial\xi}\left(-\frac{1}{y^2}\right)=\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial u}{\partial\xi}.$$

Підставимо значення других похідних в дане рівняння:

$$x^2\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+y^2\left(\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0$$

або $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$ - це і є канонічний вигляд заданого рівняння.

Зауваження. Всі результати наводились для лінійного ДРЧП

II порядку (5), але вони справедливі і для лінійного відносно старших похідних ДРЧП II порядку

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0.$$

Завдання.

Привести до канонічного виду лінійні ДРЧП II порядку:

28). $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

Відповідь: $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{2}u=0$, де $\begin{cases}\xi=y-x,\\ \eta=x.\end{cases}$

29) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Відповідь: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$, де $\begin{cases}\xi=y-2x,\\ \eta=x.\end{cases}$

30) $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\quad (x\neq 0, y\neq 0).$

Відповідь: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\eta}{2(\eta^2-\xi^2)}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\xi}{2(\eta^2-\xi^2)}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$, де $\begin{cases}\xi=x^2+y^2,\\ \eta=y^2-x^2.\end{cases}$

31) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\quad (x\neq 0, y\neq 0).$

Відповідь: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$, де $\begin{cases}\xi=xy,\\ \eta=\dfrac{x}{y}.\end{cases}$

32) $\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2y\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \dfrac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2}\dfrac{\partial u}{\partial \xi} = 0$, де $\begin{cases} \xi = y\,tg\,\dfrac{x}{2}, \\ \eta = y. \end{cases}$

33) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$, де $\begin{cases} \xi = y + x, \\ \eta = x. \end{cases}$

34) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 6\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = 0$, де $\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = 3x + y. \end{cases}$

35) $\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\xi}\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{1}{\eta}\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$, де $\begin{cases} \xi = y^2, \\ \eta = x^2. \end{cases}$

36) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 6\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial \xi} = 0$, де $\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = 3x - y. \end{cases}$

37) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial u}{\partial y} + Cu = 0$

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (\alpha + \beta)\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \beta\dfrac{\partial u}{\partial \eta} + Cu = 0$, де $\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = y. \end{cases}$

38) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(3 + \sin^2 x\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \dfrac{\eta - \xi}{32}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \xi} - \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$, де $\begin{cases} \xi = 2x + \sin x + y, \\ \eta = 2x - \sin x - y. \end{cases}$

39) $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\ \ (x\neq 0,\ y\neq 0)$

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\dfrac{1}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+\dfrac{1}{2\eta}\dfrac{\partial u}{\partial \eta}=0$, де $\begin{cases}\xi=x^2-y^2,\\ \eta=x^2.\end{cases}$

40) $tg^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2ytgx\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+tg^3 x\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\dfrac{2\xi}{\eta^2}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}=0$, де $\begin{cases}\xi=y\sin x,\\ \eta=y.\end{cases}$

41) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2x\dfrac{\partial u}{\partial x}+4y\dfrac{\partial u}{\partial y}+16x^4u=0$

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\dfrac{1}{4\eta}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}-\dfrac{1}{\xi}\dfrac{\partial u}{\partial \eta}+u=0$, де $\begin{cases}\xi=xy,\\ \eta=\dfrac{x^3}{y}.\end{cases}$

42) $(1+x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$, де $\begin{cases}\xi=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),\\ \eta=\ln\left(x+\sqrt{1+y^2}\right).\end{cases}$

43) $\sin^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2y\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\dfrac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}=0$, де $\begin{cases}\xi=ytg\dfrac{x}{2},\\ \eta=y.\end{cases}$

Привести рівняння до канонічного вигляду та знайти його загальний розв’язок:

44) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2x\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$

Відповідь: $u(x,y)=y\varphi_1(xy)+\varphi_2(xy)$, де φ_i, $i=1,2$ - довільні функції.

45) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

Відповідь: $u(x,y)=\varphi_1(3x+y)+\varphi_2(x+y)$, де φ_1 та φ_2 - довільні функції.

§5. Коливання нескінченної струни. Формула Даламбера

У випадку нескінченної струни (коли умовами на її кінцях нехтуємо) маємо рівняння коливання нескінченної струни $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ та початкові умови: $u\big|_{t=0}=\varphi(x)$ - початкове відхилення від стану рівноваги та $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$ початкова швидкість, що і називається задачею Коші. Отже, задача Коші для рівняння коливання нескінченної струни має вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (20) \\ \left.\begin{aligned} & u\big|_{t=0}=\varphi(x) \\ & \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x) \end{aligned}\right\} \quad (ПУ) & (21) \end{cases}$$

У прикладі 7 ми отримали загальний розв'язок цього рівняння

$$u(x,t)=\theta_1(x-at)+\theta_2(x+at), \tag{22}$$

де θ_1,θ_2 - довільні, двічі неперервно диференційовані функції. Розв'язок (22) рівняння (20) називається *розв'язком Даламбера*.

Підберемо довільні функції θ_1 та θ_2 так, щоб виконувались (ПУ) (21):

$$\theta_1(x)+\theta_2(x)=\varphi(x)$$
$$-a\theta_1'(x)+\theta_2'\,(x)=\psi(x).$$

Проінтегруємо друге рівняння системи і отримаємо

$$\theta_1(x)-\theta_2(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x\psi(z)dz+c\,.$$

А тоді з системи

$$\begin{cases}\theta_1(x)+\theta_2(x)=\varphi(x)\\ \theta_1(x)-\theta_2(x)=-\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x\psi(z)dz+c\end{cases}$$

маємо

$$\begin{cases}\theta_1(x)=\dfrac{1}{2}\varphi(x)-\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x\psi(z)dz+\dfrac{c}{2}\\ \theta_2(x)=\dfrac{1}{2}\varphi(x)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x\psi(z)dz-\dfrac{c}{2}.\end{cases} \tag{23}$$

Підставивши (23) в (22), отримаємо

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz\,. \tag{24}$$

Формула (24), яку називають *формулою Даламбера*, дає розв’язок задачі Коші рівняння коливання нескінченної струни, якщо $\varphi(x)$ має неперервні похідні до другого порядку включно, а $\psi(x)$ - до першого.

Приклад 10. Знайти розв’язок задачі Коші рівняння коливання нескінченної струни методом Даламбера

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u\big|_{t=0}=x^2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\cos x\,.$$

Розв'язання. З формули Даламбера при $\varphi(x) \equiv x^2$ та $\psi(x) \equiv \cos x$ маємо

$$u(x,t) = \frac{(x-at)^2 + (x+at)^2}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \cos z dz = x^2 + a^2t^2 + \frac{1}{2a}\sin z\Big|_{x-at}^{x+at} =$$

$$= x^2 + a^2t^2 + \frac{1}{2a}\left(\sin(x+at) - \sin(x-at)\right)$$

або остаточно

$$u(x,t) = x^2 + a^2t^2 + \frac{\cos x \sin at}{a}.$$

Завдання.

Методом Даламбера знайти розв'язок рівняння коливання нескінченної струни $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при

(ПУ) $\qquad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$

46) $\varphi(x) = x(2-x), \quad \psi(x) = e^{-x}$

Відповідь: $u(x,t) = 2x - x^2 - a^2t^2 + \frac{e^{-x} shat}{a}$.

47) $\varphi(x) = x^2, \quad \psi(x) = \sin x$

Відповідь: $u(x,t) = x^2 + a^2t^2 + \frac{\sin at \sin x}{a}$.

48) $\varphi(x) = e^x, \quad \psi(x) = \omega x$

Відповідь: $u(x,t) = e^x chat + \omega xt$.

49) $\varphi(x) = \cos x, \quad \psi(x) = \omega x$

Відповідь: $u(x,t) = \cos x \cos at + \omega xt$.

50) $\varphi(x) = \sin x, \quad \psi(x) = \upsilon_0$

Відповідь: $u(x,t) = \sin x \cos at + \upsilon_0 t$.

51) $\varphi(x) = x, \quad \psi(x) = \cos x$

Відповідь: $u(x,t) = x + \dfrac{\cos x \sin at}{a}$.

52) $\varphi(x) = \sin x, \quad \psi(x) = \cos x$

Відповідь: $u(x,t) = \sin x \cos at + \dfrac{\sin x \cos at}{a}$.

53) $\varphi(x) = x(x-2), \quad \psi(x) = e^x$

Відповідь: $u(x,t) = x^2 + a^2 t^2 - 2x + \dfrac{e^{-x} shat}{a}$.

54) $\varphi(x) = \cos x, \quad \psi(x) = \sin x$

Відповідь: $u(x,t) = \cos x \cos at + \dfrac{\sin x \sin at}{a}$.

55) $\varphi(x) = e^{-x}, \quad \psi(x) = \upsilon_0$

Відповідь: $u(x,t) = e^{-x} chat + \upsilon_0 t$.

56) $\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = \cos x$

Відповідь: $u(x,t) = \dfrac{\cos x \sin at}{a}$.

57) $\varphi(x) = \sin x, \quad \psi(x) = 0$

Відповідь: $u(x,t) = \sin x \cos at$.

Методом Даламбера знайти розв'язок задачі Коші для рівняння коливання нескінченної струни

58) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u\big|_{t=0} = x^2, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

Відповідь: $u(x,t) = x^2 + t^2$.

59) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x$

Відповідь: $u(x,t) = xt$.

60) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u\big|_{t=0} = x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -x$

Відповідь: $u(x,t)=x(1-t)$.

61) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u\big|_{t=0}=x,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\upsilon_0$

Відповідь: $u(x,t)=x+\upsilon_0 t$.

62) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u\big|_{t=0}=\sin 5x,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\cos x$

Відповідь: $u(x,t)=\sin 5x\cos 5t+\cos x\sin t$.

63) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u\big|_{t=0}=0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sin 2x$

Відповідь: $u(x,t)=\dfrac{\sin 2x\cos 10t}{10}$.

64) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u\big|_{t=0}=x^2,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=x$

Відповідь: $u(x,t)=x^2+xt+t^2$.

65) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{9}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u\big|_{t=0}=\sin x,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$

Відповідь: $u(x,t)=\sin x\cos\dfrac{3}{2}t$.

66) Знайти форму струни з рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в момент $t=\dfrac{\pi}{2a}$, якщо $u\big|_{t=0}=\sin x,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=1$.

Відповідь: $u(x,\pi)=\dfrac{\pi}{2a}$.

67) Знайти форму струни з рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в момент $t=\pi$, якщо $u\big|_{t=0}=\sin x,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\cos x$.

Відповідь: $u(x,\pi)=-\sin x$.

§6. Застосування методу Фур'є для розв'язування ДРЧП

Метод Фур'є, або *метод розділення змінних* є одним з найбільш поширених методів розв'язування задач математичної фізики. Ми покажемо, як працює цей метод, на декількох задачах. Почнемо з однієї з самих простих: задача про вільні коливання однорідної струни, що закріплена на кінцях.

I. Вільні коливання закріпленої струни

Рівняння вільних коливань для однорідної струни має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \tag{20}$$

з початковими умовами

$$\begin{cases} u\big|_{t=0} = \varphi(x) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{l=0} = \psi(x), \end{cases} \tag{21}$$

а так як на кінцях струна закріплена, то маємо ще і крайові умови

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \tag{25}$$

Будемо шукати нетривіальні (не рівні тотожно нулеві) частинні розв'язки рівняння (20), які задовольняють (КУ) (25), у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної

$$u(x,t) = \mathrm{X}(x)\cdot \mathrm{T}(t). \tag{26}$$

Підставимо (26) в рівняння (20) і отримаємо

$$\mathrm{T}''(t)\mathrm{X}(x) = a^2\mathrm{T}(t)\mathrm{X}''(x)$$

або $$\frac{\mathrm{T}''(t)}{a^2\mathrm{T}(t)} = \frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}. \qquad 27)$$

Ліва частина рівняння (27) залежить лише від t, а права – тільки від x звідси висновок, що обидва відношення дорівнюють сталій:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\mathrm{T}''(t)}{\mathrm{T}(t)} = \frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)} = \lambda = const\,.$$

Отримаємо два ЗДР

$$\mathrm{T}''(t) - a^2\lambda\mathrm{T}(t) = 0, \tag{28}$$

$$\mathrm{X}''(x) - \lambda\mathrm{X}(x) = 0. \tag{29}$$

Для того, щоб отримати нетривіальні розв’язки виду (26), що задовільняють (КУ) (25), необхідно отримати нетривіальні розв’язки (29), які задовольняють крайовим умовам

$$\mathrm{X}(0) = \mathrm{X}(l) = 0. \tag{30}$$

Таким чином, ми отримали наступну задачу: знайти такі значення параметра λ, при яких існують нетривіальні розв’язки (29), що задовольняють (КУ) (30).

Ті значення λ, при яких задача (29)-(30) має нетривіальні розв’язки, називаються *власними числами* або *власними значеннями*, а самі ці розв’язки – *власними функціями*.

Знайдемо власні числа та власні функції задачі (29)-(30).

Потрібно розглянути три випадки: $\lambda > 0, \lambda = 0$ та $\lambda < 0$.

1) Якщо $\lambda > 0$, то характеристичне рівняння для рівняння (29) має вигляд $k^2 - \lambda = 0;\ \ k^2 = \lambda$, а тоді загальний розв’язок рівняння (29) буде

$$\mathrm{X}(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

З (КУ) (30) отримаємо систему для знаходження C_1 та C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї системи не дорівнює нулю, а значить, $C_1 = C_2 = 0$.

Отримали $\mathrm{X}(x) \equiv 0$ - тривіальний розв’язок.

2) Якщо $\lambda = 0$, то загальний розв’язок рівняння (29) є $\mathrm{X}(x) = C_1 + C_2 x$. З (КУ) (30) отримаємо $\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 0 \\ C_1 + C_2 \cdot l = 0. \end{cases}$

Звідси $C_1 = C_2 = 0$, а значить, $\mathrm{X} \equiv 0$.

3) $\lambda < 0$. Позначимо $\lambda = -\mu^2$, тоді характеристичне рівняння прийме вигляд $k^2 + \mu^2 = 0$, а загальним розв'язком рівняння (29) буде

$$\mathrm{X}(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x.$$

C_1 і C_2 знайдемо з (КУ) (29):

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \\ C_1 \cos \mu l + C_2 \sin \mu l = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння $C_1 = 0$, а з другого $C_2 \sin \mu l = 0$. Ми шукаємо нетривіальний розв'язок, тому $C_2 \neq 0$, а значить, $\sin \mu l = 0$, тобто $\mu = \dfrac{k\pi}{l}$, $k \in Z$. Отже, нетривіальні розв'язки задачі (29)-(30) можливі лише при

$$\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{l^2}, \quad k \in Z.$$

Цим власним числам λ_k відповідають власні функції

$$\mathrm{X}_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Знайдемо тепер функції $\mathrm{T}(t)$ з рівняння (28):

$$\mathrm{T}''(t) + a^2 \frac{k^2\pi^2}{l^2} \mathrm{T}(t) = 0.$$

Характеристичне рівняння $r^2 + a^2 \dfrac{k^2\pi^2}{l^2} = 0$ знову має уявні корені $r = \pm \dfrac{k\pi a}{l}$, а тому загальний розв'язок рівняння (28) є

$$\mathrm{T}_k(t) = a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t,$$

де a_k та b_k - довільні числа.

Таким чином, функції

$$u_k(x,t) = \mathrm{X}(x)\mathrm{T}(t) = \left(a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

задовольняють рівнянню (20) та (КУ) (25). Рівняння (20) лінійне і однорідне, а тому розв'язком цього рівняння буде всяка скінченна сума. Але розв'язком рівняння (20) буде і ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x, \tag{31}$$

якщо він збігається і його можна двічі диференціювати по x та t. Кожний доданок ряду (31) задовольняє (КУ) (25), тому цим умовам буде задовольняти і сума ряду, тобто функція $u(x,t)$. Залишається підібрати коефіцієнти a_k та b_k так, щоб виконувались (ПУ) (21):

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x = \varphi(x) \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{k\pi a}{l} \sin \frac{k\pi}{l} x = \psi(x). \end{aligned} \tag{32}$$

Формули (32) є розкладами в ряди Фур'є по синусах відповідно функцій $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ в інтервалі $(0,l)$. Ці коефіцієнти знаходяться за формулами

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \tag{33}$$

Коефіцієнти (33) підставимо в (31) і отримаємо розв'язок змішаної задачі (20), (21), (25).

Якщо позначити $a_k = A_k \sin \varphi_k$, $b_k = A_k \cos \varphi_k$, то розв'язок (31) можна записати у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \left(\frac{k\pi a t}{l} + \varphi_k \right). \tag{34}$$

Кожен член цього ряду є гармонічна функція з амплітудою $A_k \sin \frac{k\pi x}{l}$, з частотою $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$ і фазою φ_k. В точках $x = 0, \frac{l}{k}, \frac{2l}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k} l, l$ амплітуда коливань k-ої гармоніки дорівнює нулеві. Ці точки називаються *вузлами* k-ої гармоніки.

А в точках $x=\frac{l}{2k},\frac{3l}{2k},\ldots,\frac{2k-1}{2k}l$, які називають збурення, амплітуда k-ої гармоніки досягає найбільшого значення.

Приклад 11. Однорідна струна, що закріплена на кінцях в точках $x=0$ та $x=l$, в початковий момент часу має форму параболи, яка симетрична відносно перпендикуляра, проведеного через точку $x=\frac{l}{2}$, та найбільше відхилення h. Знайти зміщення точок струни від прямолінійного положення рівноваги при умові, що початкова швидкість відсутня.

Розв'язання. Спочатку знайдемо рівняння параболи:

$$u(x,0)=\varphi(x)=Ax^2+Bx+C.$$

Ми знаємо, що $\varphi(0)=0,\quad \varphi(l)=0,\quad \varphi\left(\frac{1}{2}\right)=h$, а тому $\varphi(0)=C=0$, а для A та B маємо систему

$$\begin{cases} Al^2+Bl=0 \\ \dfrac{Al^2}{4}+\dfrac{Bl}{2}=h \end{cases},$$

звідки $A=-\frac{4h}{l^2},\quad B=\frac{4h}{l}$.

А значить рівняння параболи має вигляд

$$\varphi(x)=-\frac{4h}{l^2}x^2+\frac{4h}{l}x.$$

У нас початкові швидкості відсутні, тому $\psi(x)=0$. Отже, наша змішана задача:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<l, \quad t>0 \\ u(0,t)=u(l,t)=0, \quad t>0 \\ u\big|_{t=0}=-\dfrac{4hx^2}{l^2}+\dfrac{4hx}{l}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, \quad 0<x<l \end{cases}$$

Розв’язком цієї задачі є ряд (34), коефіцієнти якого знаходяться за формулами (33).
У нас

$$b_k = 0, \quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \left(-\frac{4h}{l^2}x^2 + \frac{4h}{l}x\right)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{8h}{l^3}\int_0^l \left(lx - x^2\right)\sin\frac{k\pi}{l}x dx.$$

Два рази інтегруємо останній інтеграл частинами і отримаємо

$$a_k = \frac{16h}{k^3\pi^3}\left(1-\cos k\pi\right) = \frac{16h}{k^3\pi^3}\left(1-\left(-1\right)^k\right)$$

або

$$a_k = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ \dfrac{32h}{k^3\pi^3}, & k = 2n+1. \end{cases}$$

А тоді розв’язок цієї задачі можна записати у вигляді

$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(2n+1\right)^3}\sin\frac{\left(2n+1\right)\pi}{l}x\cos\frac{\left(2n+1\right)\pi a}{l}t\,.$$

Приклад 12. Початкове відхилення струни, що закріплена на кінцях $x = 0$ та $x = l$, дорівнює нулеві, а початкова швидкість задається формулою

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} \upsilon_0, & \left|x - \dfrac{l}{2}\right| < \dfrac{h}{2} \\ 0, & \left|x - \dfrac{l}{2}\right| > \dfrac{h}{2}. \end{cases}$$

Знайти форму струни в будь-який момент часу t.

Розв’язання. У нас $\varphi(x) = 0$, а $\psi(x) = \upsilon_0$ в інтервалі $\left(\dfrac{l-h}{2}, \dfrac{l+h}{2}\right)$ та $\psi(x) = 0$ в інших точках $(0, l)$. Отже, $a_k = 0$,

$$b_k=\frac{2}{k\pi a}\int\limits_{\frac{l-h}{2}}^{\frac{l+h}{2}}\upsilon_0\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=-\frac{2\upsilon_0}{k\pi a}\cdot\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Bigg|_{\frac{l-h}{2}}^{\frac{l+h}{2}}=$$

$$=\frac{2\upsilon_0 l}{k^2\pi^2 a}\left[\cos\frac{k\pi(l-h)}{2}-\cos\frac{k\pi(l+h)}{2}\right]=\frac{4\upsilon_0 l}{k^2\pi^2 a}\sin\frac{k\pi}{2}\cdot\sin\frac{k\pi h}{2l}.$$

Звідки розв'язком нашої змішаної задачі є

$$u(x,t)=\frac{4\upsilon_0}{\pi^2 a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi h}{2l}\sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi}{l}x\,.$$

Завдання.

68) Знайти закон коливання закріпленої на кінцях струни довжиною l, якщо початкове відхилення $u(x,0)=\mathrm{H}\sin\frac{2\pi}{l}x$ $(\mathrm{H}=const)$, а початкова швидкість $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$.

Відповідь: $u(x,t)=\mathrm{H}\cos\frac{2\pi a}{l}t\sin\frac{2\pi}{l}x$.

Методом Фур'є розв'язати змішану задачу для хвильового рівняння на відрізку:

69) $$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<l, \quad t>0,\\ u(0,t)=u(l,t)=0,\\ u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{2h}{l}x, & 0<x\le\dfrac{l}{2}\\ \dfrac{2h}{l}(l-x), & \dfrac{l}{2}<x<l,\end{cases}\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0\,.\end{cases}$$

Відповідь: $u(x,t)=\frac{8h}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi a}{l}t$.

70) $$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<1, \quad t>0,\\ u(0,t)=u(1,t)=0,\\ u(x,0)=h\left(x^4-2x^3+x\right),\\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 .\end{cases}$$

Відповідь: $u(x,t)=\frac{96h}{\pi^5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^5}\cos(2k+1)2\pi t\sin(2k+1)\pi x$.

71) $$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<l, \quad t>0,\\ u(0,t)=u(l,t)=0,\\ u(x,0)=0,\\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\begin{cases}\cos\frac{\pi\left(x-\frac{l}{2}\right)}{h}, & \left|x-\frac{l}{2}\right|\le\frac{h}{2}\\ 0, & \left|x-\frac{l}{2}\right|>\frac{h}{2} .\end{cases}\end{cases}$$

Відповідь: $u(x,t)=\frac{4hl^2}{\pi^2 a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\left(l^2-k^2h^2\right)}\sin\frac{k\pi}{2}\cos\frac{k\pi h}{l}\sin\frac{k\pi at}{l}$.

$$72)\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u\big|_{t=0} = \begin{cases} \dfrac{3hx}{l}, \quad 0 < x \le \dfrac{l}{3} \\ \dfrac{3h(l-x)}{2l}, \quad \dfrac{l}{3} < x < l, \end{cases} \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\,. \end{cases}$$

Відповідь: $u(x,t) = \dfrac{9h}{\pi^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} \sin\dfrac{k\pi}{3} \sin\dfrac{k\pi x}{l} \cos\dfrac{k\pi a t}{l}$.

$$73)\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} 0, \quad 0 < x \le \dfrac{l}{4} \\ \upsilon_0, \quad \dfrac{l}{4} < x < \dfrac{3}{4} l \\ 0, \quad \dfrac{3}{4} l \le x < l \end{cases} \end{cases}$$

Відповідь: $u(x,t) = \dfrac{4\upsilon_0 t}{3\pi^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} \sin\dfrac{k\pi}{2} \sin\dfrac{k\pi}{4} \sin\dfrac{k\pi a t}{l} \sin\dfrac{k\pi x}{l}$.

74) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sin \pi x . \end{cases}$$

Відповідь: $u(x,t) = \dfrac{1}{\pi a} \sin \pi a \sin \pi x$.

ІІ. Перша змішана задача для хвильового рівняння в прямокутнику

Розглянемо малі вільні коливання однорідної прямокутної мембрани зі сторонами l, m, що закріплена по контуру. В §1 було вказано, що хвильове рівняння на площині має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \Delta u . \qquad (6')$$

Отже, нам потрібно розв'язати хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < m \qquad (6')$$

з початковими умовами

(ПУ) $$\begin{cases} u\big|_{t=0} = u_0(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x,y), \end{cases} \qquad (35)$$

а оскільки мембрана закріплена по контуру, то маємо ще і нульові крайові умови

(КУ) $$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=m} = 0 . \qquad (36)$$

Використовуючи метод Фур'є для розв'язку першої змішаної задачі (6), (35), (36) для хвильового рівняння в прямокутнику $[0, l; 0, m]$, аналогічно тому, як ми це робили в першій змішаній задачі (20), (21), (35) для малих вільних коливань закріпленої на кінцях струни, розв’язок отримаємо у вигляді

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_{nk}\cos\pi a\sqrt{\frac{n^2}{l^2}+\frac{k^2}{m^2}}t+B_{nk}\sin\pi a\sqrt{\frac{n^2}{l^2}+\frac{k^2}{m^2}}t\right)\times$$

$$\times\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{k\pi}{m}y, \qquad (37)$$

де коефіцієнти A_{nk} та B_{nk} рахуються за формулами:

$$A_{nk}=\frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m u_0(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi k}{m}ydxdy,\quad n=1,2,\dots$$

$$B_{nk}=\frac{4}{\pi a\sqrt{n^2m^2+k^2l^2}}\int_0^l\int_0^m u_1(x,y)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi k}{m}ydxdy,\ n,k=1,2,\dots \qquad (38)$$

Приклад 13. Однорідна квадратна мембрана, що має в початковий момент часу $t=0$ форму $Axy(b-x)(b-y)$, де A - стала, почала коливатись без початкової швидкості. Дослідити вільні коливання мембрани, що закріплена по контуру.

Отже, маємо задачу

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\cdot\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right),\quad 0<x,y<b,\quad t>0$$

(ПУ)
$$\begin{cases}u\big|_{t=0}=Axy(b-x)(b-y)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\end{cases}$$

(КУ)
$$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=u\big|_{x=b}=u\big|_{y=b}=0.$$

Розв’язок цієї задачі отримуємо з формул (37), (38), в яких $l=m=b$, $B_{nk}=0$ тому, що $u_1(x,y)=0$.

Маємо

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_{nk}\cos\frac{\pi a}{b}\sqrt{n^2+k^2}t\sin\frac{n\pi}{b}x\sin\frac{k\pi}{b}y.$$

Знайдемо коефіцієнт A_{nk}:

$$A_{nk}=\frac{4}{b^2}\int_0^b\int_0^b Axy(b-x)(b-y)\sin\frac{\pi n}{b}x\sin\frac{\pi k}{b}ydxdy=$$

$$=\frac{4A}{b^2}\int_0^b x(b-x)\sin\frac{\pi n}{b}xdx\cdot\int_0^b y(b-y)\sin\frac{\pi k}{b}ydy=\frac{4A}{b^2}I_1\cdot I_2$$

Спочатку, використовуючи формулу інтегрування частинами, знайдемо I_1:

$$I_1=\int_0^b\left(bx-x^2\right)\sin\frac{\pi n}{b}xdx=\left|\begin{matrix} u=bx-x^2; & du=(b-2x)dx \\ dv=\sin\frac{n\pi}{b}xdx; & v=-\frac{b}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{b}x\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{b\left(bx-x^2\right)}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{b}x\Big|_0^b-\int_0^b-\frac{b}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{b}x(b-2x)dx=$$

(Перший доданок дорівнює нулю за рахунок $\left(bx-x^2\right)$)

$$=\frac{b}{n\pi}\int_0^b(b-2x)\cos\frac{n\pi}{b}xdx=\left|\begin{matrix} u=b-2x; & du=-2dx \\ dv=\cos\frac{n\pi}{b}xdx; & v=\frac{b}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{b}x\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{b}{n\pi}\left(\frac{b(b-2x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{b}x\Big|_0^b-\int_0^b\frac{b}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{b}x(-2)dx\right)=$$

(Перший доданок дорівнює нулю за рахунок $\sin\frac{n\pi}{b}x$)

$$=\frac{2b^2}{n^2\pi^2}\int_0^b\sin\frac{n\pi}{b}xdx=-\frac{2b^2}{n^2\pi^2}\cdot\frac{b}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{b}x\Big|_0^b=\frac{2b^3}{n^3\pi^3}(\cos 0-\cos n\pi)=$$

$$=\frac{2b^3}{n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0, & n=2p\\ \frac{4b^3}{n^3\pi^3}, & n=2p-1.\end{cases}$$

Зрозуміло, що

$$I_2=\int_0^2\left(by-y^2\right)\sin\frac{k\pi}{b}dy=\begin{cases}0, & k=2q\\ \frac{4b^3}{n^3\pi^3}, & k=2q-1.\end{cases}$$

А тоді

$$A_{nk}=\frac{4A}{b^2}\cdot\frac{4b^3}{(2n-1)^3\pi^3}\cdot\frac{4b^3}{(2k-1)^3\pi^3}=\frac{64Ab^4}{\pi^6(2n-1)^3(2k-1)^3}\,.$$

Отже, наша змішана задача має розв'язок

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{64Ab^4}{\pi^6(2n-1)^3(2k-1)^3}\cos\frac{\pi a}{b}\sqrt{(2n-1)^2+(2k-1)^2}\times$$
$$\times\sin\frac{(2n-1)\pi}{b}x\sin\frac{(2k-1)\pi}{b}y$$

або

$$u(x,y,t)=\frac{64Ab^4}{\pi^6}\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi x}{b}\cdot\sin\frac{(2k-1)\pi y}{b}}{(2n-1)^3(2k-1)^3}\cos\frac{\pi a}{b}\sqrt{(2n-1)^2+(2k-1)^2}\,t.$$

Завдання

75) Розв'язати першу змішану задачу для хвильового рівняння в квадраті

$$u_{tt}=\Delta u,\quad 0<x,\quad y<\pi,\quad t>o\,,$$
$$u\big|_{t=0}=xy(\pi-x)(\pi-y),\quad u_t\big|_{t=0}=0\,,$$
$$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=u\big|_{x=\pi}=u\big|_{y=\pi}=0\,.$$

Відповідь:

$$u(x,y,t)=\frac{64}{\pi^2}\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x\cdot\sin(2k-1)y}{(2n-1)^3(2k-1)^3}\cos a\sqrt{(2n-1)^2+(2k-1)^2}\,t\,.$$

Розв'язати першу змішану задачу для хвильового рівняння в прямокутнику

76) $$u_{tt}=49\Delta u,\quad 0<x<7,\quad 0<y<2,\quad t>o\,,$$
$$u\big|_{t=0}=xy(7-x)(2-y),\quad u_t\big|_{t=0}=0\,,$$
$$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=u\big|_{x=7}=u\big|_{y=2}=0\,.$$

Відповідь:

$$u(x,y,t)=\frac{12544}{\pi^6}\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi}{7}x\cdot\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}y}{(2n-1)^3(2k-1)^3}\cos\frac{\sqrt{4(2n-1)^2+49(2k-1)^2}\,\pi}{2}t$$

77) $$u_{tt}=64\Delta u,\quad 0<x<6,\quad 0<y<3,\quad t>o\,,$$

$$u\big|_{t=0}=xy(6-x)(3-y),\quad u_t\big|_{t=0}=0,$$
$$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=u\big|_{x=6}=u\big|_{y=3}=0.$$

Відповідь:

$$u(x,y,t)=\frac{20736}{\pi^6}\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi}{6}x\cdot\sin\frac{(2k-1)\pi}{3}y}{(2n-1)^3(2k-1)^3}\cos\frac{4\sqrt{(2n-1)^2+4(2k-1)^2}\,\pi}{3}t.$$

ІІІ. Поширення тепла в обмеженому стержні

Нехай, маємо одновимірне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<l,\quad t>0 \tag{7′}$$

Для того, щоб отримати єдиний розв’язок цього рівняння необхідно задати (ПУ) та (КУ). (ПУ) в цій задачі складаються з однієї умови $u(x,0)=\varphi(x)$, а ось (КУ) можуть бути різними в залежності від температурного режиму на кінцях стержня.

Якщо на кінцях стержня задана *температура* ($u(0,t)$ та $u(l,t)$), то задача з такими (КУ) називається *першою крайовою задачею*. Якщо ж на кінцях стержня підтримується *заданий потік тепла*, то задача з такими (КУ) називається *другою крайовою задачею*. Розглядаються і більш складні крайові умови.

Зараз ми розглянемо першу крайову задачу.

Нехай, маємо тонкий теплопровідний стержень довжиною l, бокова поверхня якого теплоізольована, а на кінцях підтримується нульова температура, тобто знайти розв’язок першої крайової задачі.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<l,\quad t>0 \tag{7′}$$

(ПУ) $$u(x,0)=\varphi(x) \tag{39}$$

(КУ) $$u(0,t)=u(l,t)=0 \tag{40}$$

Розв’язок цієї задачі, як і попередньої, шукаємо за методом Фур’є у вигляді

$$u(x,t)=\mathrm{X}(x)\cdot\mathrm{T}(t). \qquad (41)$$

Рівняння теплопровідності (7′) можна записати у вигляді

$$\frac{1}{a^2}\frac{\mathrm{T}'(t)}{\mathrm{T}(t)}=\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=\lambda=const\,.$$

Як і у попередній задачі для $\mathrm{X}(x)$ отримаємо задачу Штурма-Ліувілля

$$\mathrm{X}''(x)-\lambda\mathrm{X}(x)=0,$$
$$\mathrm{X}(0)=\mathrm{X}(l)=0.$$

Оскільки нас цікавить нетривіальний розв'язок, то власними числами цієї задачі є $\lambda_k=-\frac{k^2\pi^2}{l^2}$, $k\in Z$, а власні функції - $\mathrm{X}_k=\sin\frac{k\pi}{l}x$. А тому для знаходження $\mathrm{T}(t)$ маємо рівняння

$$\mathrm{T}'(t)+\frac{a^2k^2\pi^2}{l^2}\mathrm{T}(t)=0,$$

розв'язком якого є

$$\mathrm{T}_k(t)=a_k e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t}, \quad \text{де} \quad a_k=const\,.$$

Отже, функції $u(x,t)=a_k e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{k\pi}{l}x$ задовольняють рівняння (7′) та (КУ) (40), а тому і ряд

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{k\pi}{l}x\,. \qquad (42)$$

Підбираємо коефіцієнти a_k так, щоб виконувалась (ПУ) (39):

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi}{l}x=\varphi(x).$$

Останній ряд є розкладом функції $\varphi(x)$ в ряд Фур'є по синусах на інтервалі $(0,l)$. Коефіцієнти цього ряду рахуються за формулами

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx \qquad (43)$$

Якщо функція $\varphi(x)$ неперервна, має кусково неперервну похідну та дорівнює нулеві на кінцях стержня, то з теорії тригонометричних рядів відомо, що ряд (42) з коефіцієнтами (43) при $t \geq 0$ збігається абсолютно і рівномірно і є шуканим розв'язком першої крайової задачі (7′), (39), (40).

Приклад 14. Знайти закон поширення тепла в стержні з тепло ізольованою бічною поверхнею, який розміщений на відрізку $[0, l]$, якщо в початковий момент

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq \dfrac{l}{2} \\ l - x, & \dfrac{l}{2} < x < l \,, \end{cases}$$

а на кінцях підтримується нульова температура. Отже, маємо задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t \geq 0$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u(0,t) = u(l,t) = 0\,.$$

Розв'язком цієї задачі буде ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{l^2}t}\sin\frac{k\pi}{l}x\,,$$

де $$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx = \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx + \frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx =$$

$$= \frac{4l}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ \dfrac{4l}{k^2\pi^2}(-1)^n, & k = 2n+1\,. \end{cases}$$

А тоді шуканий розв'язок має вигляд

$$u(x,t)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{k\pi}{l}x$$

або
$$u(x,t)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cdot e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x.$$

Зауваження. Якщо (КУ) будуть іншими, то кожного разу, виходячи з них, потрібно знаходити власні числа λ_k та власні функції $X_k(x)$.

Завдання.

Розв’язати першу крайову задачу для рівняння теплопровідності на відрізку:

78) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<l,\quad t>0$

$$u\big|_{t=0}=A\sin\frac{3\pi x}{l},\quad u(0,t)=u(l,t)=0\quad (A=const)$$

Відповідь: $u(x,t)=A\cdot e^{-\frac{9\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\dfrac{3\pi x}{l}$.

79) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<l,\quad t>0$

$$u\big|_{t=0}=\frac{Cx(l-x)}{l^2},\quad u(0,t)=u(l,t)=0.$$

Відповідь: $u(x,t)=\dfrac{8C}{\pi^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cdot e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x$.

80) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=36\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<3,\quad t>0$

$$u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{2x^2}{3}, & 0\le x\le\dfrac{3}{2}\\ 3-x, & \dfrac{3}{2}<x\le 3\end{cases}$$

$$u(0,t) = u(3,t) = 0.$$

Відповідь:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{18}{k^2\pi^2} \sin\frac{k\pi}{2} + \frac{24}{k^3\pi^3} \left(\cos\frac{k\pi}{2} - 1 \right) \right] e^{-k^2\pi^2 4t} \sin\frac{k\pi}{3} x .$$

IV. Задача Діріхле для рівняння Лапласа в крузі

У крузі радіуса r потрібно знайти розв'язок рівняння Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{9'}$$

На границі круга радіуса r цей розв'язок співпадає з заданою функцією $g(x,y)$. Отже, маємо першу крайову задачу на площині, яку ще інакше називають задачею Діріхле:

$$\Delta u = 0 \tag{9'}$$

$$u\big|_S = g(x,y). \tag{44}$$

Запишемо задачу Діріхле (9′), (44) в полярній системі координат (ρ, φ), яка дозволить нам застосувати метод Фур'є для знаходження розв'язку цієї задачі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \le \rho < r, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \tag{45}$$

$$u\big|_{\rho=r} = f(\varphi), \tag{46}$$

причому зрозуміло, що для $f(\varphi)$ та $u(\rho,\varphi)$ повинна виконуватись умова періодичності $f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi), \quad u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi)$.

Розв'язок шукаємо у вигляді (метод розділення змінних): $u(\rho,\varphi) = R(\rho)\cdot\Phi(\varphi)$ і підставимо в рівняння (45):

$$R''(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Phi''(\varphi) = 0$$

або
$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

Ліва частина залежить тільки від ρ, а права тільки від φ, тому

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda^2 .$$

Для знаходження $R(\rho)$ та $\Phi(\varphi)$ отримаємо два ЗДР:

$$\rho R'' + \rho R' - \lambda^2 R = 0$$

$$\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0.$$

Друге рівняння має розв'язок

$$\Phi(\varphi) = A\cos\lambda\varphi + B\sin\lambda\varphi$$

і щоб він мав період 2π, потрібно щоб λ було цілим числом $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$. Отже,

$$\Phi_k(\varphi) = A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi . \tag{47}$$

Для $R(\rho)$ отримаємо рівняння $\rho^2 R'' + \rho R' - k^2 R = 0$.

Його частинні розв'язки будемо шукати у вигляді $R(\rho) = \rho^s$.

Тоді $\rho^2 s(s-1)\rho^{s-2} + \rho s \rho^{s-1} - k^2 \rho^s = 0;\quad s^2 = k^2;\quad s = \pm k$.

Отже, $R_k(\rho) = C_k \rho^k + D_k \rho^{-k}$,

але функція ρ^{-k} в початку координат має розрив, тому неперервними в середині круга є функції:

$$R_k(\rho) = C_k \rho^k . \tag{48}$$

Тоді $u_k(\rho,\varphi) = (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)C_k \rho^k = (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)\cdot \rho^k$.

Крім того, при $\lambda = 0$ отримаємо розв'язок $u_0(\rho,\varphi) = const$, який ми позначимо $\frac{a_0}{2}$.

Ряд
$$u(\rho,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)\rho^k \tag{49}$$

при довільних обмежених a_k, b_k збігається і задовольняє рівняння (44) в будь-якій внутрішній точці круга. Коефіцієнти a_k та b_k підберемо так, щоб виконувалась (КУ) (46)

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) r^k = f(\varphi).$$

Маємо розклад функції $f(\varphi)$ в ряд Фур'є на інтервалі $(-\pi,\pi)$, а значить

$$\left.\begin{aligned} &a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)d\varphi\,; \qquad a_k=\frac{1}{\pi r^k}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\cos k\varphi d\varphi,\\ &b_k=\frac{1}{\pi r^k}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\sin k\varphi d\varphi, \quad k=1,2,\ldots \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Отже, розв'язком задачі Діріхле (45)–(46) для круга радіуса r є ряд (49), коефіцієнти якого знаходяться за формулами (50).

Зауваження. Функції, що є неперервними в області разом з своїми похідними до другого порядку включно, і які задовольняють рівняння Лапласа, називаються гармонійними.

Приклад 15. Знайти функцію $u(\rho,\varphi)$, гармонійну всередині круга радіуса a з центром в початку координат, яка задовольняє (КУ): $u(a,\varphi)=1+2\sin\varphi$.

Розв'язання. Маємо задачу Діріхле для рівняння Лапласа в крузі радіуса a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

$$u\big|_{\rho=a}=1+2\sin\varphi\,.$$

Розв'язком цієї задачі є ряд

$$u(\rho,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi\right)\rho^k\,.$$

Знайдемо коефіцієнти цього ряду

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1+2\sin\varphi)d\varphi=\frac{1}{\pi}\left(\varphi\big|_{-\pi}^{\pi}-2\cos\varphi\big|_{-\pi}^{\pi}\right)=2\,;$$

$$a_k=\frac{1}{\pi a^k}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1+2\sin\varphi)\cos k\varphi d\varphi=0, \quad k=1,2,\ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi a^k}\int_{-\pi}^{\pi}(1+2\sin\varphi)\sin k\varphi d\varphi = \begin{cases} 0, & k \neq 1 \\ \dfrac{2}{a}, & k = 1. \end{cases}$$

А тоді розв'язок цієї задачі прийме вигляд

$$u(\rho,\varphi) = 1 + \frac{2\rho}{a}\sin\varphi.$$

Завдання.

Знайти розв'язок першої крайової задачі для рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0$ в крузі радіуса a, якщо (КУ) мають вигляд $u(a,\varphi) = f(\varphi)$:

81) $f(\varphi) = \cos 5\varphi$.

Відповідь: $u(\rho,\varphi) = \left(\frac{\rho}{a}\right)^5 \cos 5\varphi$.

82) $f(\varphi) = A\sin^3\varphi + B$.

Відповідь: $u(\rho,\varphi) = B + \frac{3A}{a}\rho\sin\varphi - 4A\left(\frac{\rho}{a}\right)^3 \sin 3\varphi$.

83) Знайти розв'язок першої крайової задачі для рівняння Лапласа в крузі радіуса 1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0$$

$$u(1,\varphi) = 2\cos 3\varphi + 5\sin 2\varphi.$$

Відповідь: $u(\rho,\varphi) = 2\rho^3\cos 3\varphi + 5\rho^2\sin 2\varphi$.

Список літератури

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1977. – 735 с.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. М: ФИЗМАТЛИТ, 2000. - 400 с.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / Владимиров В.С. М: Наука,1971.
4. Бицадзе А.Б. Уравнения математической физики. 2-е изд. / Бицадзе А.Б. М: Наука, 1982. – 336 с.
5. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка / Смирнов М.М. М: Наука, – 1964. – 206с.
6. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / Голубев В.В. – М. – Л.: ГИТТЛ. 1950. – 436 с.
7. Будак Б.М. Сборник задач по математической физике / Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. М: Наука. – 1972. – 688 с.
8. Юрачківський А.П. Метод відокремлення змінних у задачах математичної фізики: Навч. посібник для студентів природничих факультетів / А.П. Юрачківський, В.О. Грязнова. – К.: РВЦ "Київський університет", 1988. – 142 с.
9. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнение в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. М.: Высшая школа, 1970.
10. Білоколос Є.Д. Спеціальні функції в задачах математичної фізики / Є.Д. Білоколос, А.П. Юрачківський, Д.Д. Шека. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2000. – 92 с.
11. Боголюбов А.Н. Задачи математической физики: уч. Пособие / А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. – М: Изд-во МГУ. – 1998. – 350 с.
12. Бейтман Г. Высшие трансцендентные функции. Т.1 / Г. Бейтман, А. Ердейи. – М.: Н. – 1973.

13. Гончаренко В.М. Основы теории управлений с частными производными / Гончаренко В.М. – К.: Вища школа, 1985. – 311 с.

Основна література для студентів

1. Перестюк М.О. Теорія рівнянь математичної фізики / М.О. Перестюк, В.В. Маринець. – К.: Либідь, 1993. – 247 с.
2. Будак Б.М. Сборник задач по математической физике / Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. М: Наука. – 1972. – 688 с.
3. Бицадзе А.Б. Уравнения математической физики. 2-е изд. / Бицадзе А.Б. М: Наука, 1982. – 336 с.
4. Юрачківський А.П. Метод відокремлення змінних у задачах математичної фізики: Навч. посібник для студентів природничих факультетів / А.П. Юрачківський, В.О. Грязнова. – К.: РВЦ "Київський університет", 1988. – 142 с.

Додаткова література для студентів

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1977. – 735 с.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. М: ФИЗМАТЛИТ, 2000. - 400 с.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / Владимиров В.С. М: Наука,1971.

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Автор : **Гембарська** Світлана Борисівна

Рівняння математичної фізики

Друкується в авторській редакції