ФУНКЦІЯ ВПЛИВУ СТАЛОГО РОЗПОДІЛЕНОГО ЗА ОБ’ЄМОМ ТЕПЛОВИДІЛЕННЯ У КВАЗІКРИСТАЛІЧНИХ ТІЛАХ

Пастернак Вікторія Валентинівна, Пастернак Ярослав Михайлович, Козелко Віталій Ярославович
pasternak.viktoriia@vnu.edu.ua, iaroslav.pasternak@vnu.edu.ua, kozelko.vitalii@vnu.edu.ua

На даний час активно розвивається вивчення термочутливості тіл до зовнішніх впливів. Ці задачі, зокрема, моделюють на основі вивчення впливу розподіленого за об’ємом тіла сталого тепловиділення [1]. Особливо актуальною ця задача є для нетрадиційних матеріалів, зокрема й квазікристалічних [2].

Для вивчення просторових задач термопружності квазікристалічних тіл в [3] отримано такі крайові інтегральні рівняння:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_I(\mathbf{x}_0) &= \iint_{\partial\mathbf{B}}\left(U_{IJ}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\tilde{t}_J(\mathbf{x}) - T_{IJ}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\tilde{u}_J(\mathbf{x})\right)dS(\mathbf{x})\\ &+\iint_{\partial\mathbf{B}}\left[R_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\theta(\mathbf{x}) + V_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)h_n(\mathbf{x})\right]dS(\mathbf{x})\\ &+\iiint_{\mathbf{B}}U_{IJ}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,\tilde{f}_J(\mathbf{x})dV(\mathbf{x}) - \iiint_{\mathbf{B}}V_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,f_h(\mathbf{x})dV(\mathbf{x}),\end{aligned} \tag{1}$$

де $\partial\mathbf{B}$ – межа області $\mathbf{B}$; n_p – компоненти одиничного вектора зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\mathbf{B}$; $h_n = h_i n_i$ – нормальна до поверхні складова вектора теплового потоку; $\tilde{t}_i = \tilde{\sigma}_{ij} n_j$ – розширений вектор напружень на поверхні $\partial\mathbf{B}$ області $\mathbf{B}$. Узагальнені величини (позначені тильдою) задані співвідношеннями

$$\begin{aligned}&\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij},\, \tilde{\sigma}_{(i+3)j} = H_{ij},\, \tilde{u}_i = u_i,\, \tilde{u}_{i+3} = w_i;\\ &\tilde{C}_{ijkm} = C_{ijkm},\, \tilde{C}_{ij(k+3)m} = R_{ijkm},\\ &\tilde{C}_{(i+3)jkm} = R_{kmij},\, \tilde{C}_{(i+3)j(k+3)m} = K_{ijkm}\\ &\tilde{\beta}_{ij} = C_{ijkm}\alpha_{km} + R_{ijkm}\alpha'_{km}\\ &\tilde{\beta}_{(i+3)j} = R_{kmij}\alpha_{km} + K_{ijkm}\alpha'_{km} \quad (i,j,k,m = 1,2,3),\end{aligned} \tag{2}$$

де θ – зміна температури порівняно з відліковою; k_{ij} – коефіцієнти теплопровідності, причому $k_{ij} = k_{ji}$;. σ_{ij} – фононні напруження; H_{ij} – фазонні напруження; u_i – компоненти фононного вектора переміщень; w_i – відповідні для фазонного; C_{ijkm} – компоненти тензора фоннонних пружних сталих; K_{ijkm} –компоненти тензора фазонних пружних сталих; R_{ijkm} та $R'_{ijkm} = R_{kmij}$ – компоненти тензорів фононно-фазонної взаємодії; α_{ij}, α'_{ij} – фононна та фазонна складові коефіцієнтів лінійного теплового розширення.

Ядра інтегрального рівняння (1) задані такими диференціальними рівняннями:

$$\tilde{C}_{IjKm}U_{PK,jm}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) = -\delta_{PI}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0); \tag{3}$$

$$k_{pq}V_{I,pq}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) = \tilde{\beta}_{Jk}U_{IJ,k}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0). \tag{4}$$

У випадку дії у тілі сталого розподіленого за об’ємом тепловиділення $f_h = \text{const}$ останній доданок у співвідношення (1) набуде вигляду

$$\iiint_{\mathrm{B}}V_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,f_h(\mathbf{x})dV(\mathbf{x}) = f_h\iiint_{\mathrm{B}}V_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)dV(\mathbf{x}). \tag{5}$$

Зведемо останній інтеграл до поверхневого. Для цього використаємо теорему Остроградського – Ґаусса, припустивши, як і в [1], що існує така функція $S_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)$, що задовольняє рівняння

$$S_{I,kk}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)=V_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0). \tag{6}$$

Тоді інтеграл (5) набуде вигляду

$$\iiint\limits_{\mathrm{B}} V_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,dV(\mathbf{x})=\iiint\limits_{\mathrm{B}} S_{I,kk}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,dV(\mathbf{x})=\iint\limits_{\partial\mathrm{B}} S_{I,k}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,n_k(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}). \tag{7}$$

Застосовуючи до (3), (4) інтегральне перетворення Радона [4]

$$\breve{f}(p,\boldsymbol{\xi})=\mathrm{R}\big(f(\mathbf{x})\big)=\iiint f(\mathbf{x})\,\delta(p-\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x})\,dx_1dx_2dx_3 \tag{8}$$

в [3] отримано такий вираз для зображення функції $V_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2}\breve{V}_I(p,\boldsymbol{\xi})=-\frac{\Gamma_{IJ}^{-1}(\boldsymbol{\xi})\,\tilde{\beta}_{Jm}\xi_m}{k_{qr}\xi_q\xi_r}H(p-\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}_0), \tag{9}$$

де $H(x)$ – функція Гевісайда; $\Gamma_{IK}(\boldsymbol{\xi})=\tilde{C}_{IjKm}\xi_j\xi_m$; $\Gamma_{IK}^{-1}(\boldsymbol{\xi})\Gamma_{KJ}(\boldsymbol{\xi})=\delta_{IJ}$.

Перетворивши (6) за Радоном, отримаємо

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2}\breve{S}_I(p,\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{\xi_k\xi_k}\breve{V}_I(p,\boldsymbol{\xi}). \tag{10}$$

Підставивши (9) в (10), отримаємо

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2}\breve{S}_I(p,\boldsymbol{\xi})=-\frac{1}{\xi_k\xi_k}\frac{\Gamma_{IJ}^{-1}(\boldsymbol{\xi})\,\tilde{\beta}_{Jm}\xi_m}{k_{qr}\xi_q\xi_r}\iint H(p-\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}_0)\,dpdp\,. \tag{11}$$

Застосувавши до функції $S_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)$ зворотне перетворення Радона [4]

$$f(\mathbf{x})=\mathrm{R}^{-1}\big(\breve{f}(p,\boldsymbol{\xi})\big)=-\frac{1}{8\pi^2}\iint\limits_{|\boldsymbol{\xi}|=1}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\breve{f}(p=\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\,dS(\boldsymbol{\xi}) \tag{12}$$

на підставі (11) отримаємо

$$S_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)=\frac{1}{8\pi^2}\iint\limits_{|\boldsymbol{\xi}|=1}\frac{\Gamma_{IJ}^{-1}(\boldsymbol{\xi})\,\tilde{\beta}_{Jm}\xi_m}{k_{qr}\xi_q\xi_r}F\big(\boldsymbol{\xi}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\big)\,dS(\boldsymbol{\xi}), \tag{13}$$

де

$$F(p)=\iint H(p)\,dpdp=\frac{p^2}{2}H(p). \tag{14}$$

Оскільки для обчислення (7) необхідно знати лише похідні від функції $S_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)$ за просторовими координатами, то для них із (13) отримаємо

$$S_{I,k}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)=\frac{1}{8\pi^2}\iint\limits_{|\boldsymbol{\xi}|=1}\frac{\Gamma_{IJ}^{-1}(\boldsymbol{\xi})\,\tilde{\beta}_{Jm}\xi_m}{k_{qr}\xi_q\xi_r}\xi_k F'\big(\boldsymbol{\xi}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\big)\,dS(\boldsymbol{\xi}). \tag{15}$$

Таким чином на підставі отриманих співвідношень врахування сталого за об’ємом тіла тепловиділення зведене до обчислення поверхневого інтегралу, що зручно використовувати у схемі методу граничних елементів.

Список літератури

1. Fahmy M.A. Three-dimensional boundary element sensitivity analysis of anisotropic thermoelastic materials. Journal of Umm Al-Qura University for Applied Sciences 2025. P. 1-13. https://doi.org/10.1007/s43994-024-00210-5
2. Fan T.-Y. *Mathematical Theory of Elasticity of Quasicrystals and Its Applications*, Second Edition. Springer, 2016. https://doi.org/10.1007/978-981-10-1984-5
3. Kushnir R., Sulym H., Pasternak Ia. Boundary element method for 3D fracture mechanics analysis in quasicrystal solids under thermal loading. European Conference on Fracture 2024. Book of Abstracts. 2024. P. 7.
4. Deans S.R. The Radon transform and some of its applications. New York: Wiley-Interscience Publication, 1983.