

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ**

**Кафедра теоретичної та комп'ютерної фізики  
імені А.В. Свідзинського**

На правах рукопису

**КУБІНСЬКИЙ АНДРІЙ МИКОЛАЙОВИЧ**

**ЕФЕКТ ДЖОЗЕФСОНА В КОНТАКТАХ НА  
ОСНОВІ ДВОЩІЛНИХ НАДПРОВІДНИКІВ**

Спеціальність 104 «Фізика та астрономія»

Освітньо-професійна програма «Фізика та астрономія»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

**САХНЮК ВАСИЛЬ ЄВГЕНОВИЧ,**

кандидат фізико-математичних наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № \_\_\_\_\_

засідання кафедри теоретичної та

комп'ютерної фізики імені А.В. Свідзинського

від \_\_\_\_\_ 2024

Завідувач кафедри

доц. Сахнюк В.Є. \_\_\_\_\_

**ЛУЦЬК – 2024**

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	3
РОЗДІЛ 1 ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ.....	5
1.1. Перехід у надпровідний стан .....	5
1.2. Досягнення в надпровідності протягом останніх років .....	7
1.3. Намагніченість надпровідника .....	9
1.4. Теорія БКШ та її внесок .....	10
1.5. Типи надпровідників .....	12
1.5.1. Надпровідники першого роду .....	13
1.5.2. Надпровідники другого роду .....	14
1.6. Ефект Джозефсона .....	16
РОЗДІЛ 2 ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ДИБОРИДУ МАГНІЮ $MgB_2$ У	
НАДПРОВІДНОМУ СТАНІ .....	17
2.1. Властивості надпровідного дибориду магнію .....	18
2.1.1. Кристалічна структура $MgB_2$ .....	18
2.1.2. Фізичні властивості надпровідного дибориду магнію .....	19
2.1.3. Ізотопний ефект.....	19
2.1.4. Енергетичні щілини у $MgB_2$ .....	21
2.2. Верхнє критичне поле та його ізотропія.....	27
РОЗДІЛ 3 РІВНОВАЖНІ СТРУМОВІ СТАНИ В ДВОЗОННИХ .....	30
НАДПРОВІДНИКАХ ПОБЛИЗУ КРИТИЧНОЇ ТЕМПЕРАТУРИ .....	30
3.1. Рівняння Гінзбурга-Ландау для двохзонної надпровідності.....	30
3.2. Просторово однорідні струмові стани і струм розпаровування в теорії	
Гінзбурга-Ландау.....	40
3.3. Ефект Джозефсона в контактах на основі двощілинного надпровідника	49
Висновок .....	52
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .....	53
АНОТАЦІЯ .....	56

## ВСТУП

**Актуальність теми.** В останні роки активно виконуються як теоретичні так і експериментальні дослідження так званих двощілинних надпровідників. Початком цих досліджень слугувало відкриття у січні 2001 року надпровідності у дибориді магнію  $MgB_2$ , відомому ще з 1955 року [1]. Сплав  $MgB_2$  має найвищу температуру надпровідного переходу  $T_c$  (близько 40 К) серед бінарних сполук з відносно простою кристалічною структурою.

Незважаючи на те, що після відкриття двощілинних надпровідників виконано багато теоретичних досліджень на мікроскопічному рівні, цікавим є розгляд властивостей таких надпровідників спираючись на теорію Гінзбурга-Ландау, як асимптотичну форму теорії надпровідності поблизу критичної температури. Саме дослідженню властивостей надпровідників з двома щілинами в енергетичному спектрі на основі теорії Гінзбурга-Ландау присвячена дана робота. Ця теорія зручна тим, що придатна для опису поведінки макроскопічних величин, безвідносно до причини виникнення надпровідності [2].

**Мета і задачі дослідження.** Побудова основних рівнянь теорії Гінзбурга – Ландау для опису двощілинних надпровідників. На основі одержаних рівнянь описати деякі фізичні властивості двощілинних надпровідників, зокрема  $MgB_2$ .

**Об'єкт дослідження.** Двощілинні надпровідники та надпровідні контакти побудовані на їх основі.

**Предмет дослідження.** Рівноважні струмові стани в однорідному двощілинному надпровідникові та ефект Джозефсона в просторово-неоднорідних надпровідних системах з двощілинними надпровідниками поблизу температур, близьких до критичної.

**Наукова новизна.** Проведений системний виклад теорії Гінзбурга-Ландау для опису двощілинних надпровідників при температурах, близьких до критичної та проаналізовано ефективність використання цієї теорії для опису ефектів фазової когерентності в таких надпровідниках.

**Практичне значення.** Математична схема дослідження фізичних властивостей двошлінного надпровідника  $MgB_2$ , представлена в магістерській роботі, може бути використана для опису інших надпровідних сполук з двома енергетичними щілинами. Послідовний і докладний виклад при одержанні основних рівнянь теорії Гінзбурга-Ландау для двошлілних надпровідників може використовуватись студентами під час вивчення курсу «Фізика надпровідності».

**Особистий внесок дипломника.** Зроблено докладний вивід рівнянь теорії Гінзбурга – Ландау для двошлілних надпровідників. На основі цих рівнянь досліджено протікання струму в надпровідних системах з двошлілними надпровідниками.

# РОЗДІЛ 1

## ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

### 1.1. Перехід у надпровідний стан

Явище надпровідності було відкрито в 1911 році голландським фізиком Камерлінг-Оннесом. Основні досягнення в області низьких температур були зроблені в кінці XIX століття. Оннес присвятив свою наукову діяльність дослідженню наднизьких температур. 10 липня 1908 року він досяг успіху у зрідженні гелію, охолодивши його до 4К. Оннес отримав лише декілька мілілітрів рідкого гелію у цей день, але це стало новим поштовхом для його досліджень в температурних областях, раніше недосяжних. Рідкий гелій дозволив йому охолодити інші матеріали до температури близької до абсолютного нуля (0К), найнижчої температури. У 1911 році Оннес почав досліджувати електричні властивості металів при гелієвих температурах.

Одним із питань, які цікавили вченого, було вивчення опору матеріалів при наднизьких температурах. Було відомо, що з ростом температури  $R$  зростає. Отже, можна очікувати, що із зменшенням температури  $R$  буде зменшуватись. А от до якої межі? Тут могло б бути три варіанти:

1. При абсолютному нулі  $R \rightarrow 0$ . Дійсно, струм – це потік електронів, що проходить через кристалічну ґратку провідника. При не нульових температурах атоми в ґратці здійснюють коливання навколо центру рівноваги, між вільними електронами та атомами відбувається зіткнення (розсіювання). Звернемо увагу на два наслідки такого зіткнення. По-перше, електрони втрачають свою енергію, отриману від електричного поля джерела ЕРС. По-друге, вони відхиляються від початкового напрямку. Ці два наслідки відображаються в зменшенні струму, тобто в виникненні опору. При зниженні температури амплітуда коливань атомів зменшується, а значить, зменшується і ймовірність розсіювання на них електронів, тобто падає опір. Така модель довгий час задовольняла фізиків і якби залежність  $R(T)$  пішла б по цьому варіанту, то це сприйнялося б із розумінням.

2. Однак критики попередньої теорії звертали увагу на те, що опір  $R$  зумовлений зіткненням електронів не тільки з атомами, що коливаються. Електрони можуть розсіюватися і на нерухомих атомах. Тобто розсіювання зменшиться, але зовсім не зникне, тому  $R \neq 0$ . Крім того, існує можливість розсіювання електронів на дефектах ґраток.

3. Електрони «заморожуються» на атомних орбітах. Електронів провідності не залишається,  $R \rightarrow \infty$ .

Як бачимо, теоретично можна допустити різні варіанти, але дійсність, як часто буває, суперечить планам і теоріям.

Експериментуючи із ртуттю, Камерлінг-Оннес довів її до замерзання і продовжив знижувати температуру. При досягненні  $T=4,2\text{K}$  прилад перестав фіксувати опір. Оннес міняв прилади в дослідній установці, оскільки побоювався їхньої несправності, але прилади незмінно показували нульовий опір, незважаючи на те, що до абсолютного нуля не вистачало ще 4 К.

Згідно з Оннесом, (рис.1.1.), ртуть перейшла у новий стан, який через його екстраординарні електричні властивості можна назвати надпровідним станом. Експеримент не залишив сумнівів про зникнення опору ртутного провідника. Камерлінг-Оннес назвав це явище надпровідністю.

Оннес визнав важливість цього відкриття для наукового співтовариства, а також його комерційний потенціал. Електричний провідник без опору міг переносити струм на довільну відстань без втрат.

Якщо в замкнутому контурі, що знаходиться в надпровідному стані створити електричний струм, то він буде протікати тижні і навіть роки, не зменшуючись.

У 1913 році Хейке Камерлінг-Оннес був нагороджений Нобелівською премією за дослідження властивостей речовин при низьких температурах.

Температура, при якій відбувається перехід речовини з нормального стану в надпровідний, називається температурою надпровідного переходу (критичною температурою)  $T_c$  цієї речовини.

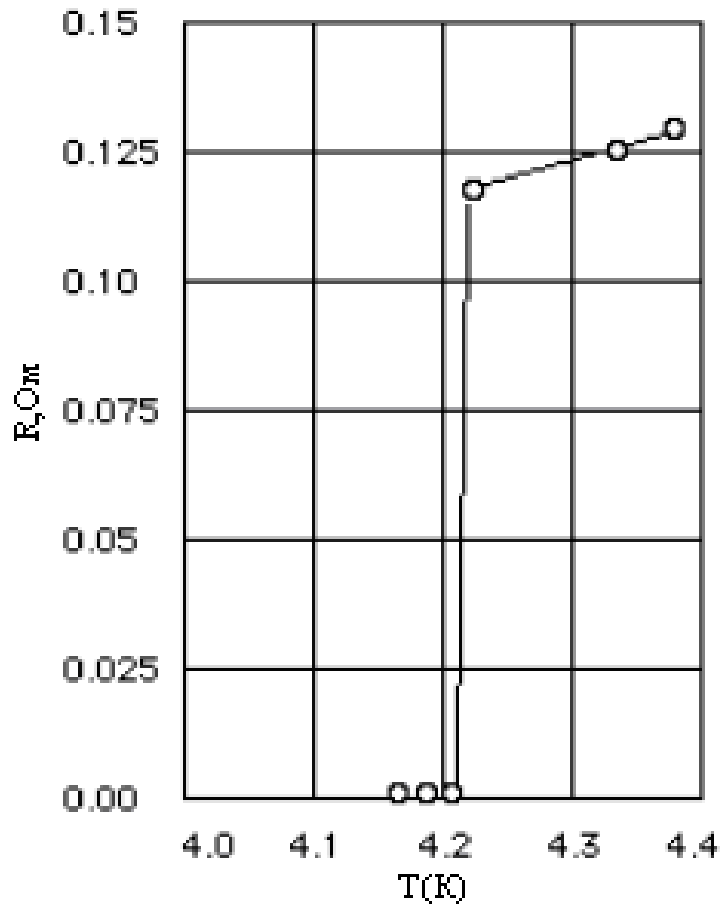


Рис.1.1. Перехід з нормального у надпровідний стан у першому надпровіднику (Hg) відкритому Оннесом,  $T_c = 4,2K$ .

## 1.2. Досягнення в надпровідності протягом останніх років

Як було сказано вище, явище надпровідності було відкрите Камерлінг-Оннесом у 1911 році в ртуті при температурі переходу 4,2К. Камерлінг зазначив, що надпровідний стан може бути зруйнованим, якщо прикласти велике магнітне поле, але струм, індукований в замкненій провідній петлі провідника, зберігається протягом довгого часу.

У 1933 році Уолтер Мейснер та Оскенфельд виявили, що надпровідники – це більш, ніж прекрасні провідники електричного струму, вони також мають цікаву магнітну властивість – виштовхування магнітного поля. Надпровідник не дозволяє магнітному полю проникати всередину. Це призводить до протікання струму, який генерується магнітним полем всередині надпровідника, що тільки зрівноважує поле, яке хоче проникнути в речовину. Цей ефект, названий ефектом

Мейснера, спричиняє явище, яке є найхарактернішою особливістю надпровідників.

З 1911 до 1957 року не було ніякої теорії для пояснення явища надпровідності. Три американських фізики з Університету Іллінойс, Джон Бардін, Леон Купер та Роберт Шріффер, створили модель, яка до нашого часу є хорошою мисленою картиною поведінки надпровідників. Модель виражена в термінах передових ідей квантової механіки, але головна ідея моделі полягає в тому, що електрони у надпровіднику конденсують (переходять) в основний квантовий стан і рухаються разом і когерентно. Ця теорія в надпровідності відома як теорія БКШ. Теорія пояснює надпровідність у більшості надпровідних речовин при температурах близьких до абсолютного нуля.

Феноменологічний опис надпровідного струму був зроблений у 1935 році Лондоном. Відповідно, надпровідність – квантове явище в макроскопічному масштабі з найнижчим енергетичним станом, відділеним скінченим інтервалом від збурених (збуджених) станів, а відповідно діамagnetизм – фундаментальна властивість надпровідника.

У 1986 році Джордж Беднорз та Алекс Мюллер, працюючи в ІВМ в Цюріху (Швейцарія), досліджували специфічний клас керамічних оксидів металів, названих перовскитами. Беднорз та Мюллер досліджували сотні інших оксидних сумішей. Працюючи з керамічними оксидами лантану, міді, барію, вони виявили виникнення явища надпровідності при температурі 35К, що на 12К більше досягнутого раніше результату для надпровідника  $Nb_3Ge$  ( $T_c \sim 23K$ ). Отже, почалась нова ера в дослідженні надпровідності. (Див. рис.1.2.)



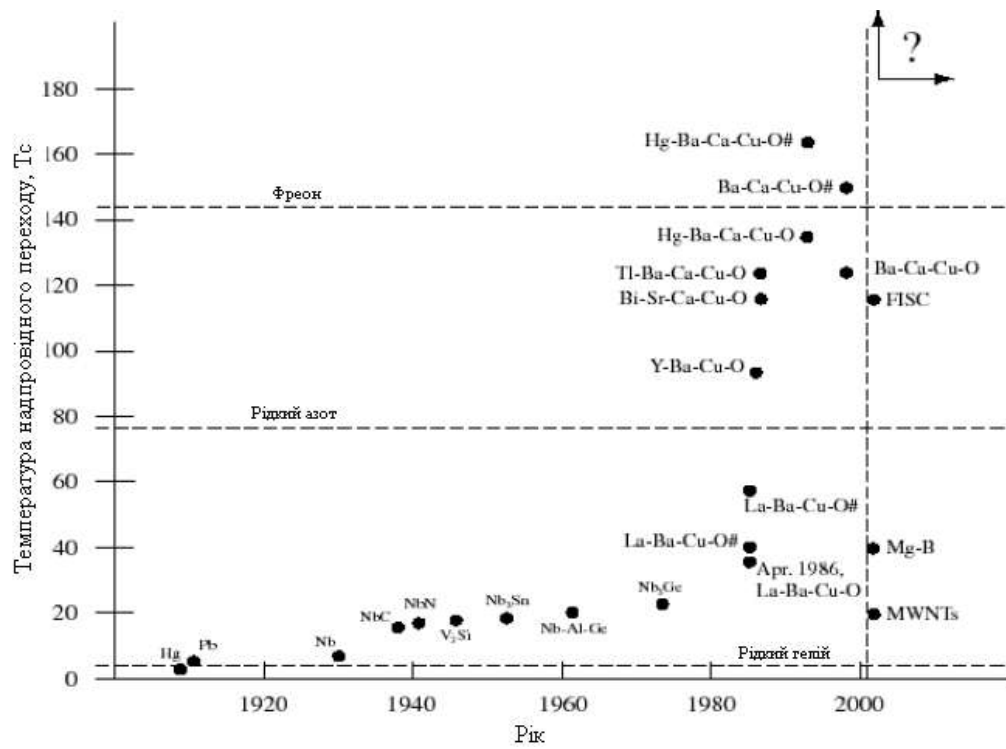


Рис.1.2. Досягнення в надпровідності протягом останніх років.

### 1.3. Намагніченість надпровідника

Лише в 1933 році фізики виявили другу властивість надпровідників – це прекрасний діамагнетизм. Це сталося тоді, коли Мейснер та Оскенфельд, охолодивши надпровідну речовину до температури, що нижча її критичної температури, за відсутності зовнішнього магнітного поля, виявили магнітний потік. Цей ефект зараз відомий як ефект Мейснера (рис.1.3).

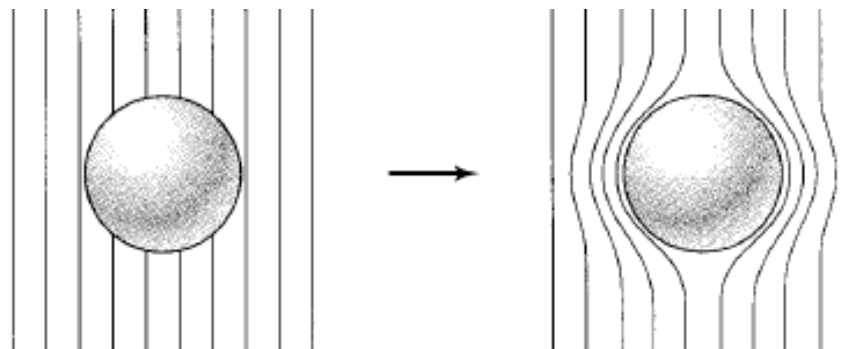


Рис.1.3. Ефект Мейснера.

Граничне значення зовнішнього магнітного поля, яке надпровідник може виштовхнути, називають критичним полем  $H_c$ .

Інша властивість, виявлена Оннесом незадовго після його спостереження за зникненням опору при температурі нижче критичної  $T_c$ , що мале магнітне поле руйнує надпровідність. Наближена залежність критичного поля від температури описана законом Тюна

$$H_c = H_0 \left( 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right) \quad (1.1)$$

Оннес помітив, що надпровідник може перейти у нормальний стан при проходженні через нього струму. Магнітне поле, створене проходженням струму, намагається повернути провідник у нормальний стан.

#### 1.4. Теорія БКШ та її внесок

Теорія БКШ добре показує, що електрони можуть притягуватись один до одного через взаємодію з кристалічною решіткою. Це відбувається не дивлячись на те, що електрони мають однойменні заряди. Коли атоми решітки коливаються, два електрони, рухаючись поруч, об'єднуються і рухаються далі без зіткнень (як єдине ціле). Взаємодія електронів відбувається тому, що має місце ефект переходу речовини на нижчий енергетичний рівень. З'єднані в пари електрони впорядковано рухаються через надпровідник. Взагалі перехід речовини в надпровідний стан в теорії БКШ відбувається завдяки ефективній взаємодії між парою електронів з протилежними спінами та імпульсами.

В цілому є два основних положення в мікроскопічній теорії надпровідності розвинутих Бардіном, Купером та Шріффером. Перше – ефективне притягання між двома електронами з протилежними імпульсами та спінами, що призводить до виникнення так званих «куперівських пар», як показано на рис.1.4. Друге – конденсація куперівських пар в єдиний (однозв'язний) квантовий стан, який називають «надпровідним конденсатом». Саме цей стан відповідає за всі прояви надпровідної поведінки [6].

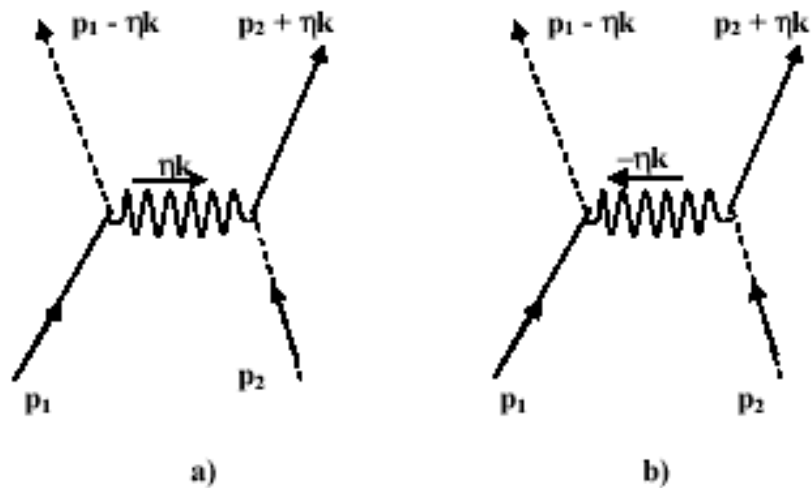


Рис.1.4. Куперівська пара

Теорія БКШ пояснює надпровідність при температурах близьких до абсолютного нуля. Купер зрозумів, що коливання атомів решітки безпосередньо відповідають за перенесення струму. Ці коливання змушують електрони об'єднуватись в пари, що допомагає подолати опір у провіднику. Нижче температури надпровідного переходу  $T_c$  (у надпровідному стані) електронні пари переходять в конденсат, макроскопічно заповнюючи єдиний квантовий стан, що відбувається без опору і протидіє мізерному зовнішньому магнітному полю, викликаючи таким чином явище прекрасного діамagnetизму, назване ефектом Мейснера. При низьких температурах для того, щоб електронні пари перейшли у конденсат, необхідна енергія

$$\Delta \approx 1,75 K_B T_c \quad (1.2)$$

- це енергетична щілина.

На завершення даного пункту можемо дати таке пояснення теорії БКШ. Електрони можна уявити собі як автомобілі, що беруть участь у перегонах вниз з високої гори. Оскільки швидкість автомобіля зростає, він ніби розсікає повітря попереду. Простір позаду автомобіля є вакуумом, вакансія в атмосфері швидко заповнюється повітрям, що рухається в цей вакуум. Зустрічний автомобіль, фактично, з'єднаний з даним спереду. Коли від'ємно заряджені електрони проходять через кристалічну решітку речовини, вони притягують навколишні

позитивні іони до себе. Оскільки деформована решітка повертається в нормальний стан, то електрон, що рухається поблизу, буде притягуватись до позитивних іонів майже таким же способом, як один автомобіль буде відсунений вперед ведучим автомобілем. Електрони у надпровідному стані схожі на велику кількість транспортних засобів, що швидко рухаються. Області вакууму між автомобілями згуртовують їх у певну множину так, як відбувається конденсація електронів в макроскопічний, основний квантовий стан. Випадкові пориви вітру через дорогу можуть бути причиною зіткнень, подібно до теплових фононів, що руйнують пари. З кожним зіткненням одна або більше вулиць закриті для руху машин подібно до того, як багато квантових станів однієї частинки відділені від макроскопічного, основного багаточастинкового стану.

### **1.5. Типи надпровідників**

Немає ніякої різниці в механізмі надпровідності у надпровідниках першого та другого роду. У обох типів є подібні теплові властивості при переході з нормального у надпровідний стан за відсутності магнітного поля. Але ефект Мейснера повністю відрізняється. Надпровідник першого роду виштовхує магнітне поле, поки надпровідність раптово не руйнується і поле повністю проникає всередину надпровідника. Надпровідник другого роду виштовхує поле повністю до значення поля  $H_c$ . Вище  $H_c$  поле виштовхується частково аж до значення поля  $H_{c2}$ . Вище  $H_{c2}$  поле проникає повністю і зразок руйнується.

Для розгляду важливих відмінностей між двома типами надпровідників ми повинні спочатку ввести дві характерні довжини надпровідника. Це глибина проникнення ( $\lambda$ ), що показує відстань, на яку поле проникає у надпровідник та довжина когерентності ( $\xi$ ), що визначає відстань, на якій існують великі кореляції, які стабілізують стан надпровідності, або, що еквівалентно, це – відстань, на якій надпровідний стан пов'язаний з коливаннями зовнішнього поля чи іншими змінами. Основним для цих двох величин  $\lambda$  і  $\xi$  є залежність від

температури їхнього відношення  $k = \frac{\lambda}{\xi}$ , що й слугує критерієм для поділу надпровідників на два типи (першого та другого роду) [3].

### 1.5.1. Надпровідники першого роду

Надпровідники першого роду це, головним чином, метали чи металоїди, що мають певну провідність при кімнатних температурах. Надпровідники, для яких  $k < \frac{1}{\sqrt{2}}$  відносять до надпровідників першого роду. Це Al, Sn, In та Pb.

Надпровідники першого роду характеризуються як «м'які» надпровідники. Вони були виявлені найраніше і вимагали дуже низьких температур, щоб перейти у надпровідний стан. Вони дуже різко переходять у надпровідний стан, а також проявляють хороший діамagnetизм (рис.1.5).

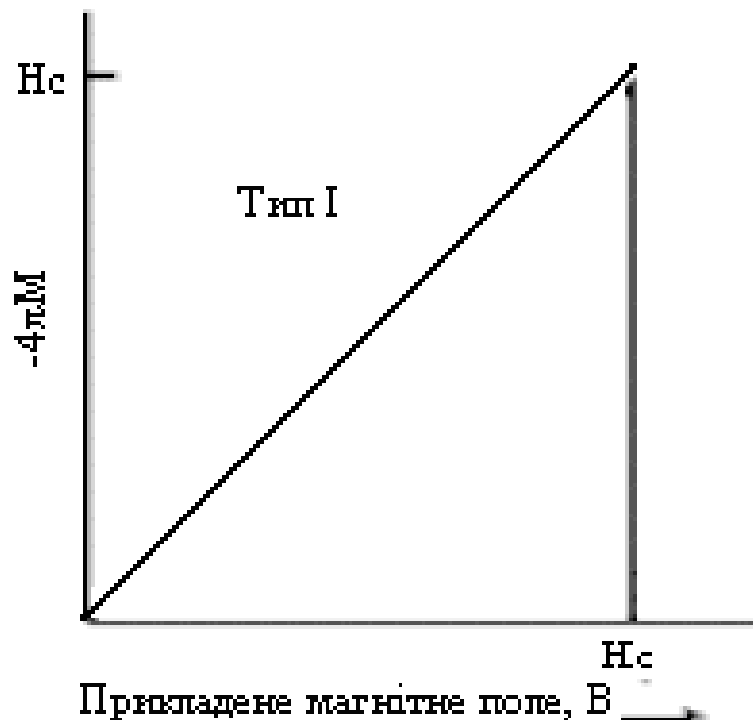


Рис.1.5. Графік кривої намагнічення для надпровідників першого роду

Відмінність від надпровідників другого роду в термінах  $k$  – це відношення енергії зв'язку між нормальною та надпровідною частинами. У надпровідників першого роду енергія зв'язку додатна і зразок намагається мінімізувати її розколюючись на мікроскопічну нормальну та надпровідну області з найменшою енергією. (Див. табл.1.1.)

Таблиця 1.1

Надпровідники першого роду з відповідними критичними температурами

Надпровідник	$T_c(K)$	Надпровідник	$T_c(K)$
Свинець (Pb)	7,196	Молібден (Mo)	0,915
Лантан (La)	4,48	Цинк (Zn)	0,85
Тантал (Ta)	4,47	Осмій (Os)	0,66
Ртуть (Hg)	4,15	Цирконій (Zr)	0,61
Олово (Sn)	3,72	Америцій (Am)	0,60
Індій (In)	3,41	Кадмій (Cd)	0,517
Паладій (Pd)	3,3	Рутеній (Ru)	0,49
Хром (Cr)	3	Титан (Ti)	0,40
Талій (Tl)	2,38	Уран (U)	0,20
Реній (Re)	1,697	Гафній (Hf)	0,128
Протактиній (Pa)	1,40	Іридій (Ir)	0,1125
Торій (Th)	1,38	Берилій (Be)	0,023
Алюміній (Al)	1,175	Вольфрам (W)	0,0154
Галій (Ga)	1,083	Платина (Pt)	0,0019

### 1.5.2. Надпровідники другого роду

До надпровідників другого роду відносять металічні суміші та сплави за винятком деяких елементів, таких як Ванадій, Технецій та Ніобій. Недавно було виявлено надпровідність керамічних оксидів металів, що мають відношення двох атомів металу до трьох атомів кисню, названих перовскитами, і які належать до надпровідників другого роду. У надпровідниках другого роду при  $H_{c1} \leq H \leq H_{c2}$  надпровідність руйнується лише частково. Дану область називають проміжним

станом, оскільки це сукупність нормальних та надпровідних ділянок (рис.1.6.). Взагалі проміжний, або вихровий, стан є нестійким для надпровідників першого роду, але стійким для надпровідників другого роду (див. табл.1.2).

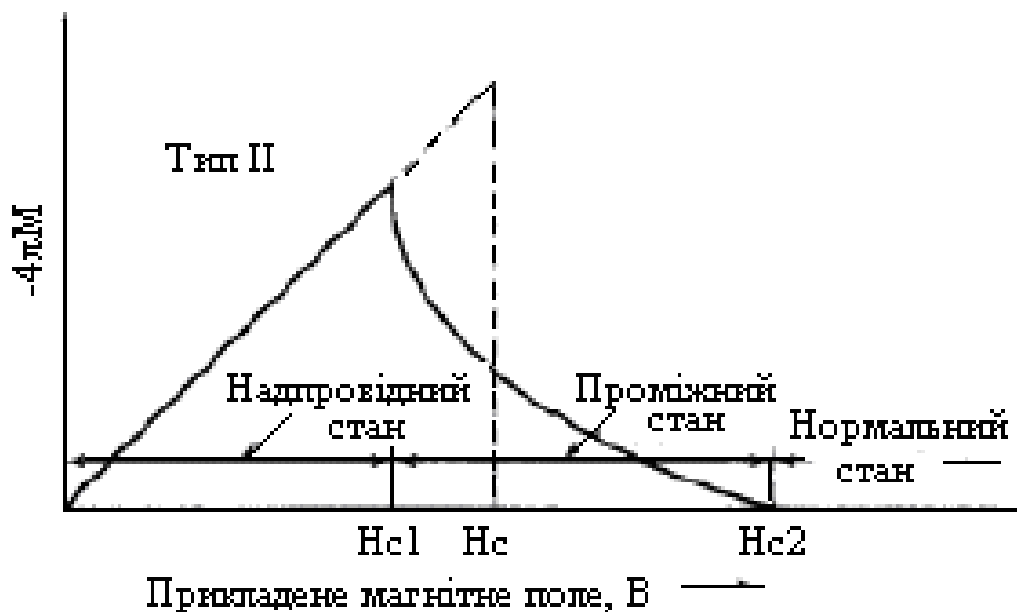


Рис.1.6. Крива намагнічення для надпровідників другого роду

Таблиця 1.2

Надпровідники другого роду з відповідними критичними температурами

Речовина	$T_c(K)$	Речовина	$T_c(K)$
$HgBa_2Ca_3Cu_3O_8$	133	$TmBaSrCu_3O_7$	88
$Ti_2Ca_2Ba_2Cu_3O_{10}$	128	$EuBaSrCu_3O_7$	88
$HgBa_2CaCu_2O_6$	127	$HoBaSrCu_3O_7$	87
$HgBa_2Ca_3Cu_4O_{10}$	126	$GdBaSrCu_3O_7$	86
$TiCaBa_2Cu_2O_8$	119	$SmBaSrCu_3O_7$	84
$TiCa_2Ba_2Cu_3O_8$	110	$MgB_2$	39
$BiCa_2Sr_2Cu_3O_{10}$	110	$Nb_3Ge$	23.2
$TiCaBa_2Cu_2O_7$	103	$Nb_3Si$	19
$HgBa_2CuO_4$	94	$Nb_3Sn$	18.1
$YBa_2Cu_3O_7$	93	$Nb_3Al$	18
$YBa_4Cu_7O_{15}$	93	$V_3Si$	17.1

$\text{Ti}_2\text{Ba}_2\text{CuO}_6$	92	$\text{Ta}_3\text{Pb}$	17
$\text{Bi}_2\text{CaSr}_2\text{Cu}_2\text{O}_8$	92	$\text{V}_3\text{Ga}$	16.8
$\text{DyBaSrCu}_3\text{O}_7$	90	$\text{Nb}_3\text{Ga}$	14.5
$\text{TiSr}_2\text{Y}_{0.5}\text{Ca}_{0.5}\text{Cu}_2\text{O}_7$	90	$\text{V}_3\text{In}$	13.9

### 1.6. Ефект Джозефсона

У 1962 році Брайан Джозефсон зробив своє знамените передбачення щодо можливості протікання надструму через тунельний контакт, утворений двома надпровідниками, навіть у відсутності різниці потенціалів між ними. При цьому було розкрито значення для опису ефекту когерентної різниці фаз параметрів впорядкування лівого та правого надпровідників. Джозефсон показав, що в разі, коли тунельний струм перевищує певне критичне значення, на контакті з'являється відмінна від нуля напруга  $V$  і струм стає нестационарним, він осцилює з частотою  $\omega = 2e\nu$ . Всі теоретичні результати невдовзі знайшли експериментальне підтвердження (Андерсон, Роуелл (1963), Янсон, Свистунов, Дмитренко (1965)).



## РОЗДІЛ 2

### ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ДИБОРИДУ МАГНІЮ $MgB_2$ У НАДПРОВІДНОМУ СТАНІ

Металева суміш  $MgB_2$  була створена у хімічних лабораторіях у 1950-х роках, але тільки у січні 2001 року було виявлено її надпровідність з критичною температурою  $T_c \approx 39K$ , про яке повідомили Наганатсу та інші [1]. Дана критична температура є найвищою серед температур надпровідного переходу усіх металевих сумішей, але все ж меншою у порівнянні з деякими іншими високотемпературними надпровідниками. Протягом останніх років існує великий дослідницький інтерес світового співтовариства фізиків до даної суміші. Було видано велику кількість статей, що охоплюють теоретичні та експериментальні дослідження цієї суміші. Що ж змушує  $MgB_2$  бути гарячою темою? Внаслідок великої довжини когерентності ( $\xi=50\text{\AA}$ ) ця суміш має слабко-зв'язні вільні межі зерен, і, до того ж, високу густину протікання струму порядку  $10^6 \text{ A/cm}^2$  і велике верхнє критичне магнітне поле (39Тл) в діапазоні температури від 4,2К до 25К у масивному зразку [4], [5]. Іншою важливою причиною для дослідження  $MgB_2$  як багатообіцяючого кандидата для промислового застосування при температурі нижче 30К – це низька ціна матеріального виробництва, тому що цей вид матеріалу не вимагає використання Ag для покриття як багато інших високотемпературних надпровідних плівок (чи проводів).

В дибориді магнію проявляється чіткий ізотопний ефект. Вимірювання швидкості спін-решіткової релаксації ядер [6] вказують на те, що  $MgB_2$  є надпровідником типу Бардіна-Купера-Шріффера (БКШ) зі спарюванням, зумовленим фононами. Результати розрахунку зонної структури і фононного спектру передбачають наявність двох енергетичних щілин [7, 8], більша з яких відноситься до двовимірних  $p_{x,y}$ -орбіталей, а менша – до тривимірних  $p_z$ -орбіталей. Властивість двощілинності надпровідного стану  $MgB_2$  чітко

проявляється у недавно виконаних тунельних вимірюваннях і вимірюваннях теплоємності.

Другий клас надпровідників, для яких характерною ознакою є двоцілінність енергетичного спектру – це рідкоземельні борокарбіди з загальною формулою  $RNi_2B_2C$ , які зацікавили багатьох вчених великою різноманітністю фізичних властивостей: об'єднання з  $R=Lu, Y$  мають досить високі температури надпровідного переходу  $T_c$ , близько 15-16 K [6]; при  $R=Dy, Ho, Er, Tm$  магнетизм співіснує з надпровідністю, тоді як при  $R=Pr, Nb, Sm, Gb, Tb$  виникає тільки антиферомагнітний порядок. Цим об'єднанням властива шарова структура, тому їх вважають близькими до квазидвовимірних купратів. Проте результати багатьох обчислень зонної структури в наближенні локальної густини явно вказують на тривимірну електронну структуру.

## 2.1. Властивості надпровідного дибориду магнію

### 2.1.1. Кристалічна структура $MgB_2$

Диборид магнію має дуже просту кристалічну структуру типу графіту (рис.2.1.). Вона складається з гексагональних шарів атомів бору розділених гексагональними щільно упакованими шарами магнію. При кімнатній температурі параметри решітки  $a = b = 3.0581 \text{ \AA}$ ,  $c = 3.5201 \text{ \AA}$  [10]. Коливання решітки  $MgB_2$  є дуже сильним через інтенсивне формування електронних пар.

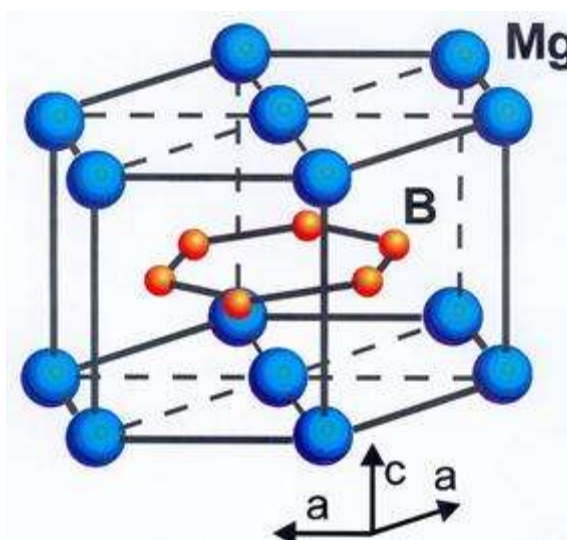


Рис.2.1. Кристалічна структура дибориду магнію

### 2.1.2. Фізичні властивості надпровідного дибориду магнію

Основними фізичними властивостями, що характеризують речовину диборид магнію ( $\text{MgB}_2$ ), є подані нижче.

- 1) Диборид магнію ( $\text{MgB}_2$ ) є ізотропною речовиною.
- 2) На відміну від інших надпровідників, було підтверджено, що  $\text{MgB}_2$  має дві енергетичні щілини.
- 3) Магнітна глибина проникнення становить  $850\text{\AA}$ .
- 4) Поки що ніякий інший борид не має такої температури надпровідного переходу.
- 5) Температура надпровідного переходу дибориду магнію становить приблизно  $39\text{K}$ .
- 6) Довжина когерентності  $\text{MgB}_2$ , як обчислено, рівна  $50\text{\AA}$ .
- 7) Це дуже хороший метал кращий за деякі чисті метали з відношенням питомого опору  $\frac{R(300\text{K})}{R(40\text{K})} > 15$  і біля  $300\text{K}$   $R=9\div 10\text{мкОм}$ , але біля  $40\text{K}$   $R=0.38\text{мкОм}$ .
- 8) Довжина вільного пробігу електронів при  $40\text{K}$  рівна  $600\text{\AA}$ .

### 2.1.3. Ізотопний ефект

Перше повідомлення про сильний ізотопний ефект бору зробила група Келфілда [11, 12]. Воно базувалось на спостереженні температурної залежності намагнічення, опору та питомої теплоємності у зразках  $\text{Mg}^{10}\text{B}_2$  та  $\text{Mg}^{11}\text{B}_2$ .

Очевидно, як бачимо з рис.2.2, зміна температури переходу на один кельвін відбувалась послідовно у всіх трьох експериментах. З формалізму БКШ надпровідності

$$T_c \propto (\hbar\omega_\phi) \exp\left(\frac{-1}{\gamma N_{E_F}}\right), \quad (2.1)$$

де  $\hbar\omega_\phi$  - енергія фонона,  $N_{E_F}$  - густина станів на рівні Фермі,  $\gamma$  - стала електрон-фононної взаємодії.

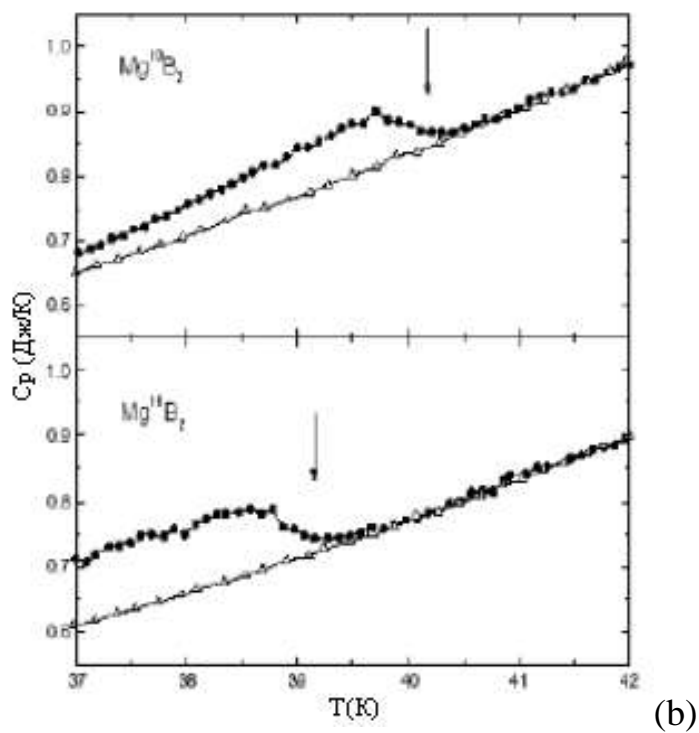
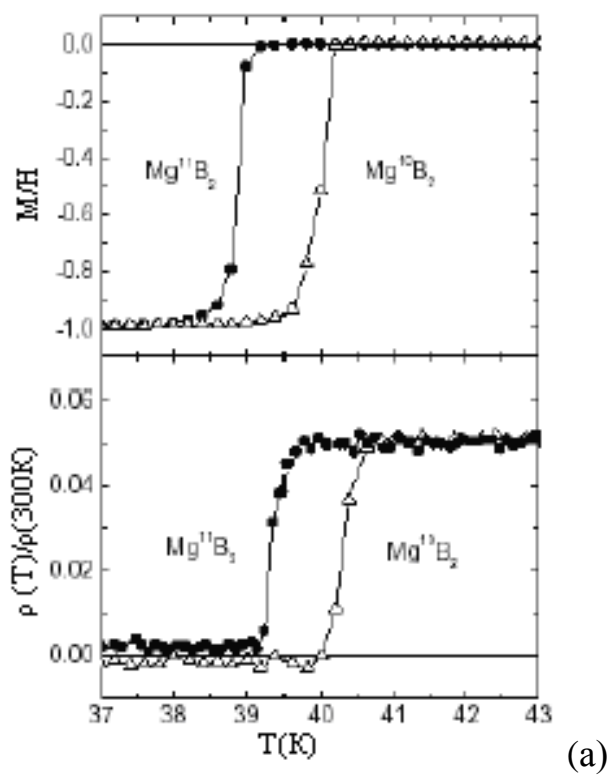


Рис.2.2. (a) Температурна залежність намагнічення та опору у  $\text{Mg}^{10}\text{B}_2$  та  $\text{Mg}^{11}\text{B}_2$ .  
(b) Температурна залежність питомої теплоємності у  $\text{Mg}^{10}\text{B}_2$  та  $\text{Mg}^{11}\text{B}_2$ .

Елементи малої маси приводять до збільшення частоти фононів та до зростання температури переходу. Таким чином, великі атоми бору відіграють важливу роль у надпровідності  $\text{MgB}_2$ , яка не є екзотичним механізмом, а зумовлена фононами БКШ. При перевірці ефектів коливань атомів магнію в надпровідному  $\text{MgB}_2$  вони також виявили ізотопний ефект магнію. Для більшої зручності можна визначити показник ізотопності для бору  $\alpha_B = \frac{\Delta \ln(T_c)}{\Delta \ln(M_B)}$ , який рівний  $\alpha_B = 0.26$  та для магнію  $\alpha_{Mg} = 0.02$  [13]. Таке значення для Mg доводить, що коливання атомів Mg не мають великого впливу на  $T_c$ , але коливання шарів бору є ключовими в механізмі надпровідності  $\text{MgB}_2$ .

#### 2.1.4. Енергетичні щілини у $\text{MgB}_2$

Теоретики Національної лабораторії ім. Лоуренса в Берклі та Каліфорнійського університету в Берклі на чолі з Марвіном Коеном та Стівеном Луї з відділу матеріалознавства цієї лабораторії, обоє професори фізики, розрахували властивості цього унікального надпровідника від основних принципів до пояснення таємниці його аномальної поведінки. У журналі Nature від 15 серпня 2002 року теоретики повідомляють, що незвичайні особливості  $\text{MgB}_2$  виникають з двох окремих популяцій електронів – так званих "червоних" і "синіх" – які утворюють різні види зв'язків між атомами матеріалу. Окрім пояснення суперечливих спостережень, їх розрахунки привели до прогнозів, які згодом були підтверджені в результаті експерименту. Крім того, вони не виключають можливість створення радикально нових матеріалів з аналогічною електронною структурою.

Пляшки з порошкоподібним  $\text{MgB}_2$  не використовувалися в хімічній лабораторії з 1950-х років, але тільки до січня 2001 року, коли японські дослідники оголосили про своє відкриття, що ця сполука – відносно високотемпературний надпровідник. Подібно до високотемпературних надпровідників, виготовлених з купратової кераміки,  $\text{MgB}_2$  - це шаруватий

матеріал. Однак купрати є діелектриками при звичайних температурах, а  $MgB_2$  завжди є металом.

Структурно, диборид магнію є майже таким простим, як свинцевий олівець, графіт. Він складається з гексагональних зрешечених площин атомів бору, розділених площинами атомів магнію, з магнієм, розташованим вище і нижче шестикутників бору.

Ця надзвичайно проста атомна структура вешті-решт виявиться ключем до розуміння  $MgB_2$ . Але в сотнях робіт, зроблених під час першої хвили вивчення нового надпровідника, експериментатори, використовуючи різні методики, виявляли багато різних, незвичайних, а іноді й суперечливих властивостей. Це було схоже на сліпих, які дивляться на слона. Кожен, хто досліджував  $MgB_2$ , бачив іншу картину. Деякі говорили про те, що надпровідний енергетичний розрив був одного роду, другі говорили, що це зовсім не так; інші виявили аномалії в вимірах теплоти.

Швидко стало очевидним, що теорії, розроблені для пояснення надпровідності в шаруватих купратах з високим значенням  $T_c$ , неефективні для дослідження  $MgB_2$ . Замість цього Луї і Коен та їхні колеги використовували усталену теорію Бардіна-Купера-Шріффера для вивчення фундаментальних властивостей  $MgB_2$ , що стало можливим завдяки методу, розробленому для розв'язання рівнянь Бардіна-Купера-Шріффера для матеріалів зі складною електронною структурою.

В теорії Бардіна-Купера-Шріффера електрони долають взаємне відштовхування, утворюючи пари, які можуть рухатися через матеріал без опору. Дуже важливим для утворення пари є квантовані коливання кристалічної решітки, відомі як фонони. Електронні пари обмінюються фононом. Розглядаючи решітку позитивних іонів, можемо уявити, що вони «стягнуть» електрони в пари, оскільки коливання переміщує їх у бік електронів, які рухаються поруч.

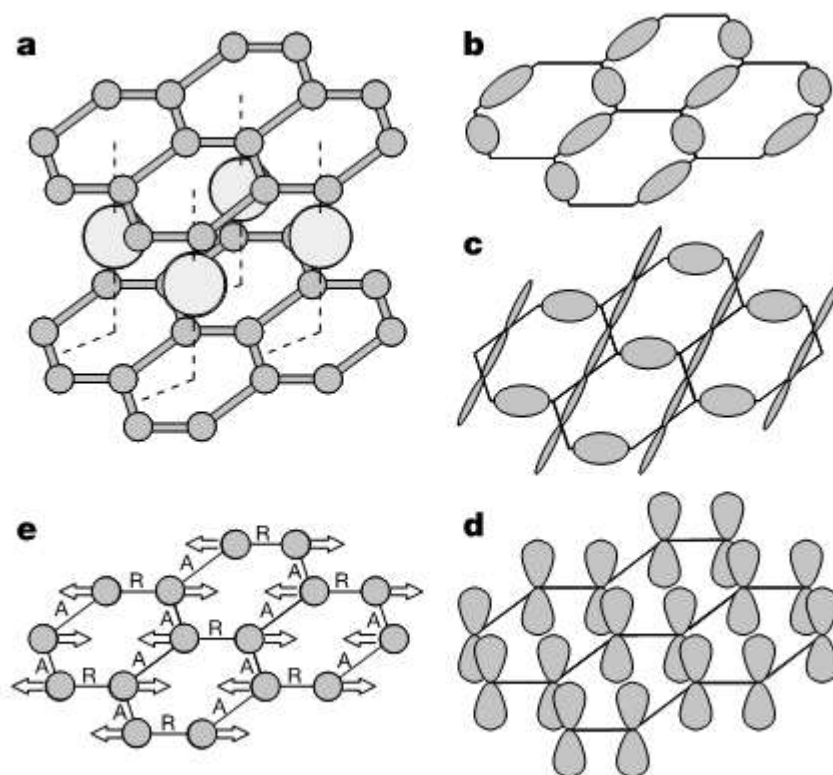


Рис.2.3. (а) Кристалічна структура  $MgB_2$ . (b, c)  $\sigma$ -зв'язуючі стани на рівні Фермі, що походять  $p_{x,y}$  орбіталей. (d)  $\pi$ -зв'язуючі стани на рівні Фермі, що походять  $p_z$ -орбіталей. (e) Коливальні моди атомів бору, що пов'язані з  $\sigma$ -зв'язуючими електронними станами на рівні Фермі. Якщо атоми бору рухаються в напрямку стрілочок, вкорочені зв'язки, позначені через «А», стають притягувальними для електронів, в той час як подовжені зв'язки, позначені «R», стають відштовхувальними.

Загадковість полягала в тому, що в теорії БКШ зв'язок з решіткою, необхідний для формування електронної пари, повинен бути еквівалентним зв'язку одного електрона, який виділяє та абсорбує фонон, що призводить до росту маси електрона. Але в  $MgB_2$  ці два значення були, ймовірно, різними - сигнал, що в парі можуть бути залучені кілька видів електронів. Тому теоретики почали розглядати базові складові  $MgB_2$  і його шарувату структуру.

Щоб зрозуміти важливість кристалічної структури для електронних станів  $MgB_2$ , порівняймо її з графітом. У гексагональних площинах графіту

кожен атом вуглецю, що має чотири валентні електрони, приєднаний до трьох інших, займаючи всі доступні плоскі стани зв'язків,  $\sigma$ -зв'язки; електрон, що залишився, рухається по орбіталях над і під площиною, утворюючи  $\pi$ -зв'язки.  $\text{MgB}_2$ , як і графіт, має сильні  $\sigma$ -зв'язки в площинах і слабкі  $\pi$ -зв'язки між ними, але оскільки атоми бору мають менше електронів ніж атоми вуглецю, не всі  $\sigma$ -зв'язки в борних площинах зайняті. І оскільки не всі  $\sigma$ -зв'язки заповнені, то коливання решітки в борних площинах має набагато сильніший ефект, в результаті чого утворюються сильні електронні пари, обмежені площинами.

Частково зайняті  $\sigma$ -зв'язки, що складають основу надпровідності в шаруватій структурі, є однією з нових концепцій, які з'явилися завдяки теоретичним дослідженням; взагалі, природа не любить незайнятих станів  $\sigma$ -зв'язків. Ще один важливий висновок полягає в тому, що не всі електрони бору необхідні для формування сильної пари для досягнення високих  $T_c$ . Крім сильно зв'язаних  $\sigma$ -пар, електрони бору залучені в  $\pi$ -зв'язки, де утворюють значно слабші пари. Інакше кажучи, електрони на різних ділянках поверхні Фермі утворюють пари з різної енергією зв'язку. Графік екстраординарної поверхні Фермі з  $\text{MgB}_2$  – спосіб візуалізації енергетичних станів, які можуть зайняти його електрони – явно вказує на дві популяції електронів і різні енергії, необхідні для розриву їх надпровідних пар. Це так звані "червоні" і "сині" електрони.



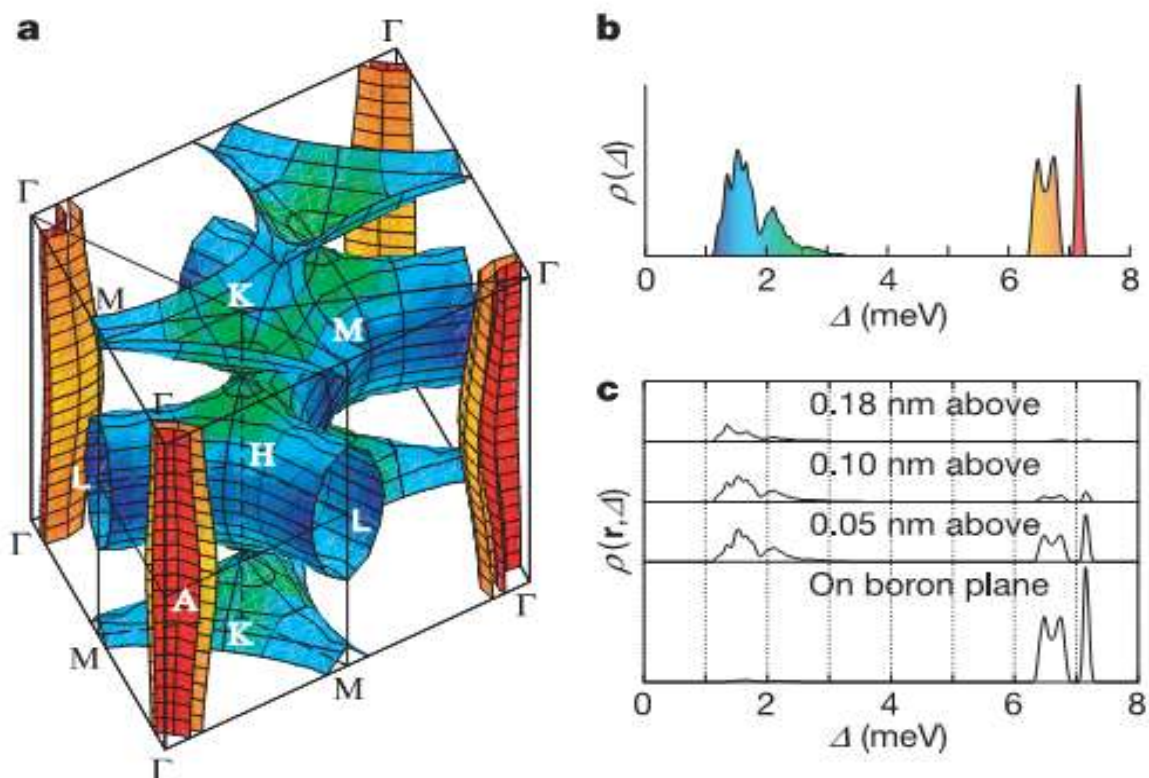


Рис 2.4. Надпровідна енергетична щілина  $\text{MgB}_2$ . (a, b) надпровідні енергетичні щілини на поверхні Фермі при 4К в кольоровій градації (a) і розподіл значень щілини при 4К (b). Поверхня Фермі  $\text{MgB}_2$  складається з чотирьох типів листів. Два  $\sigma$ -листи, що походять від  $\sigma$ -зв'язуючих  $p_{x,y}$  орбіталей бору, розділені на вісім частин навколо чотирьох вертикальних ліній  $\Gamma$ - $\Gamma$ . Два  $\pi$ -листи (перегородчасті тунелі), що походять від  $\pi$ -зв'язуючих  $p_z$ -орбіталей бору, зображені навколо ліній  $K$ - $M$  та  $H$ - $L$  (верхні та нижчі  $K$ - $M$  лінії є еквівалентними). Надпровідна енергетична щілина дорівнює приблизно 7,2 меВ на вузькому  $\sigma$ -циліндричному листові, що забарвлений в червоний колір, з варіаціями меншими за 0,1 меВ. На ширшому  $\sigma$ -циліндричному листові, що забарвлений в помаранчевий колір, енергетична щілина коливається від 6,4 до 6,8меВ, маючи максимум поблизу  $\Gamma$  і мінімум поблизу  $A$ . На  $\pi$ -листах, забарвлених в зелений і синій кольори, енергетична щілина змінюється від 1.2 до 3.7 меВ. Густина станів при енергії Фермі становить 0,12 станів на (спин атома eВ), 44% з яких походить з  $\sigma$ -листів, а інші 56% походять з  $\pi$ -листів. (c) Локальний розподіл надпровідної енергетичної щілини на площині бору і на площинах при 0,05, 0,10 і 0,18 нм вище борної площини, відповідно.

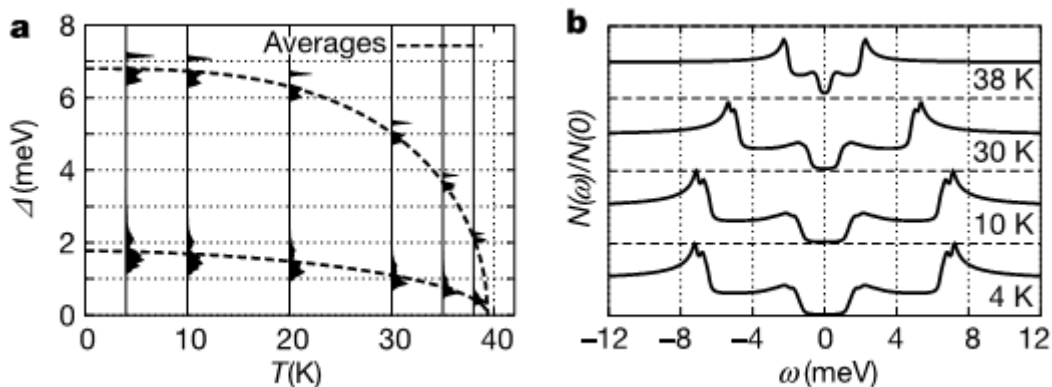


Рис.2.5. Температурні залежності надпровідних щілин і густини квазічастинкових станів. (a) Температурна залежність надпровідних щілин. Вертикальні криві представляють розподіл значень надпровідної щілини при різних температурах від 4К до 38К. (b) Густина квазічастинкових станів при різних температурах. Густина квазічастинкових станів  $N(\omega)$  для енергії квазічастинки  $\omega$  дається виразом  $\frac{N(\omega)}{N(0)} = \text{Re}\langle(\omega + i\Gamma)/((\omega + i\Gamma)^2 - \Delta^2(\vec{k}, \omega))^{1/2}\rangle$ , де  $N(0)$  є густина електронних станів на рівні Фермі,  $\langle \dots \rangle$  вказує на усереднення по поверхні сталого  $\omega$ . Ця крива є одержана з обчисленої функції щілини  $\Delta(\vec{k}, \omega)$  в припущенні скінченного часу життя

Поверхня Фермі складається з чотирьох типів листів. Дві форми вкладених циліндрів відображають по різному орієнтовані  $\sigma$ -зв'язки і пофарбовані в помаранчевий та червоний колір для позначення великого значення енергії, необхідної для розриву цих надпровідних пар – великої надпровідної "щілини" в діапазоні від 6,4 до 7,2 тисячних електрон вольт (меВ) при 4 градусах Кельвіна.

Два інших листи поверхні Фермі утворюють "переплетені тунелі" і представляють  $\pi$ -зв'язані електрони; вони пофарбовані в зелений і блакитний колір для позначення низької енергії (1,2-3,7 меВ), необхідної для розриву надпровідних пар цих електронів при 4 градусах К, що становить окремий надпровідний проміжок.

Два види електронних пар пов'язані між собою, і, зі зростанням температури, надпровідні енергетичні щілини для "червоних" і "синіх" пар швидко сходяться, поки при приблизно 39 градусах К вони обоє зникають. Вище цієї температури всі пари розриваються, а матеріал втрачає надпровідність.

Детальні теоретичні розрахунки надпровідних енергетичних щілин та їх температурна залежність для "червоних" і "синіх" електронів дозволили інтерпретувати експериментальні вимірювання.

Розрахунки з перших принципів на суперкомп'ютерах в Національному науковому-обчислювальному центрі департаменту енергетичних досліджень (NERSC) Департаменту енергетики США підтвердили багато припущень щодо властивостей  $MgB_2$ , серед них – існування двох надпровідних щілин у  $MgB_2$ , які ніколи раніше не спостерігалися в жодному матеріалі.

Хоча теорія БКШ передбачала можливість появи матеріалів з численними надпровідними розривами енергії ще на ранній стадії, відкриття  $MgB_2$  підвищує ймовірність того, що й інші такі матеріали можуть бути відкриті.  $MgB_2$  відкриває нову модель для шаруватих матеріалів, здатних до високотемпературної надпровідності.

## 2.2. Верхнє критичне поле та його ізотропія

Верхнє критичне поле – дуже важливий магнітний параметр надпровідності. З початку відкриття надпровідності у дибориді магнію було виконано багато дослідів з аналізу верхнього критичного поля ( $H_{c2}$ ). На даний момент відомо, що крива  $H_{c2}(T)$  для  $MgB_2$  у вигляді дротини має достатньо велике відношення питомого опору, приблизно 25.

Дослідження верхнього критичного поля в окремих кристалах  $MgB_2$  показали, що  $H_{c2}$  має анізотропію, як показано на рис.2.6, а також, що ця анізотропія дуже залежить від температури [23, 24]. Коефіцієнт анізотропії  $\gamma$

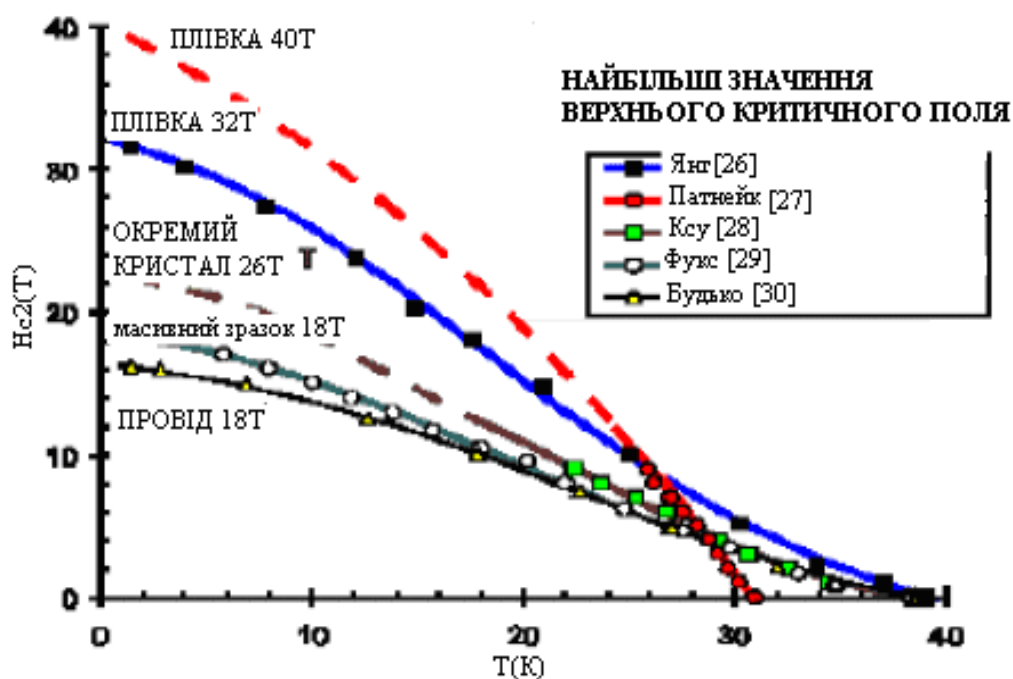
задається як  $\gamma = \frac{H_{c2}^{ab}}{H_{c2}^c}$ , де  $H_{c2}^{ab}$  - верхнє критичне поле, коли поле напрямлене

вздовж площини бору і  $H_{c2}^c$  - для поля напрямленого вздовж осі c

перпендикулярно до площини бору. При низьких температурах  $\gamma$  досягає максимального значення приблизно рівного 5. Воно зменшується із зростанням температури і досягає значення приблизно рівного 2.

Перша теоретична праця, що присвячена цій незвичайній поведінці в  $\text{MgB}_2$ , була дослідженням анізотропії щільної моделі Посаженикова та інших [25].

Нижче у таблиці подано значення надпровідних параметрів для  $\text{MgB}_2$  (табл.2.1).



**Рис.2.6.** Найбільші значення  $H_{c2}(T)$  для  $\text{MgB}_2$  у різних конфігураціях (масивний зразок, окремий кристал, провід, плівка)

**Таблиця 2.1**

### Список надпровідних параметрів для $\text{MgB}_2$

Параметр	Значення
Критична температура	$T_c=39\div 40\text{K}$
Параметри гексагональної решітки	$b=a=0.3086\text{нм}$
Теоретична густина	$c=0.3524\text{нм}$

Концентрація носіїв	$\rho=2,55\text{Г/см}^3$
Ізотопний ефект	$N=(1.7\div 2.8)10^{23}\text{носіїв/см}^3$
Верхнє критичне поле	$H_{c_2}^{ab}(0)=14\div 39\text{Т}, H_{c_2}^c(0)=2\div 24\text{Т}$
Нижнє критичне поле	$H_{c_1}(0)=27\div 38\text{мТ}$
Необоротне поле	$H_{irr}(0)=6\div 35\text{Т}$
Глибина проникнення	$\lambda(0)=85\div 180\text{нм}$
Довжина когерентності	$\xi_{ab}(0)=3,7\div 12\text{нм}, \xi_c(0)=1,6\div 3,6\text{нм}$
Енергетична щілина	$\Delta(0)=1,8\div 7,5\text{МеВ}$

**РОЗДІЛ 3**  
**РІВНОВАЖНІ СТРУМОВІ СТАНИ В ДВОЗОННИХ**  
**НАДПРОВІДНИКАХ ПОБЛИЗУ КРИТИЧНОЇ ТЕМПЕРАТУРИ**

**3.1. Рівняння Гінзбурга-Ландау для двохзонної надпровідності**

Функціонал густини вільної енергії у феноменологічній теорії Гінзбурга-Ландау (GL) для двох зв'язаних параметрів надпровідного порядку  $\psi_1$  і  $\psi_2$  можна записати у вигляді

$$F_{GL} = F_1 + F_2 + F_{12} + \frac{H^2}{8\pi}, \quad (1)$$

де

$$F_1 = \alpha_1 |\psi_1|^2 + \frac{1}{2} \beta_1 |\psi_1|^4 + \frac{1}{2m_1} \left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1 \right|^2 \quad (2)$$

$$F_2 = \alpha_2 |\psi_2|^2 + \frac{1}{2} \beta_2 |\psi_2|^4 + \frac{1}{2m_2} \left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_2 \right|^2 \quad (3)$$

і

$$F_{12} = -\gamma(\psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^*) + \eta \left\{ \begin{aligned} & \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1 \left( i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_2^* + \\ & + \left( i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1^* \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Вирази  $F_1$  і  $F_2$  є звичайними внесками від  $\psi_1$  і  $\psi_2$ , вираз  $F_{12}$  описує без обмеження загальності міжзонне зв'язування параметрів порядку. Коефіцієнти  $\gamma$  і  $\eta$  описують зв'язок двох параметрів і їх градієнтів [28;29], відповідно.

Мікроскопічна теорія для двозонних надпровідників [30;31] пов'язує феноменологічні параметри з мікроскопічними характеристиками надпровідного стану.

Мінімізуючи вільну енергію

$$F = \int \left( F_1 + F_2 + F_{12} + \frac{H^2}{8\pi} \right) d^3r$$

по  $\psi_1^*$ ,  $\psi_2^*$  і  $\vec{A}$  ми отримаємо диференціальне рівняння Гільзбурга-Ландау для двозонного надпровідника. Для спрощення математичних викладок спочатку будемо мінімізувати внесок вільної енергії від  $F_1$ , потім від  $F_2$ , а далі і від  $F_{12}$  і, як кінцевий результат, ми одержимо суму від цих доданків. Отже, мінімізуючи  $F_1$  по  $\psi_1^*$  маємо:

$$\begin{aligned} \delta_{\psi_1^*} F_1 &= \delta\psi_1^* \int \left\{ \alpha_1 \psi_1^* \psi_1 + \frac{1}{2} \beta_1 \psi_1^* \psi_1^* \psi_1 \psi_1 + \frac{1}{2m_1} \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1 * \left( i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1^* \right\} d^3r \\ &= \int \left\{ \alpha_1 \psi_1 \delta\psi_1^* + \beta_1 |\psi_1|^2 \psi_1 \delta\psi_1^* + \frac{1}{2m_1} \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1 * \left( i\hbar\nabla \delta\psi_1^* - \frac{2e}{c} \vec{A} \delta\psi_1^* \right) \right\} d^3r = 0 \end{aligned}$$

Винести  $\delta\psi_1^*$  за фігурні дужки неможливо, тому що варіація стоїть під операцією похідної. Перетворимо цей вираз, запровадивши позначення

$$-i\hbar\nabla\psi_1 - \frac{2e}{c}\vec{A}\psi_1 = \varphi_1,$$

і виконаємо подальші розрахунки:

$$\begin{aligned} \delta_{\psi_1^*} F_1 &= \int \left\{ \alpha_1 \psi_1 \delta\psi_1^* + \beta_1 |\psi_1|^2 \psi_1 \delta\psi_1^* + \frac{1}{2m_1} (i\hbar\nabla\delta\psi_1^*)\varphi_1 - \frac{2e}{2m_1c} \vec{A}\delta\psi_1^*\varphi_1 \right\} d^3r \\ &= \\ &= \int \left\{ \alpha_1 \psi_1 \delta\psi_1^* + \beta_1 |\psi_1|^2 \psi_1 \delta\psi_1^* + \frac{i\hbar\nabla}{2m_1} (\delta\psi_1^*\varphi_1) - \frac{1}{2m_1} (i\hbar\nabla\varphi_1)\delta\psi_1^* - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{e}{m_1 c} \vec{A} \delta \psi_1^* \} d^3 r = \int \{ \alpha_1 \psi_1 \delta \psi_1^* + \beta_1 |\psi_1|^2 \psi_1 \delta \psi_1^* + \\
& + \frac{\delta \psi_1^*}{2m_1} \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \varphi_1 \} d^3 r + \frac{i\hbar}{2m_1} \int \operatorname{div}(\delta \psi_1^* \varphi_1) d^3 r = \int \delta \psi_1^* \{ \alpha_1 \psi_1 + \\
& + \beta_1 |\psi_1|^2 \psi_1 + \frac{1}{2m_1} \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1 \} d^3 r + \\
& + \frac{1}{2m_1} \oint_{sur} \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1 dS \delta \psi_1^* = 0
\end{aligned}$$

Вираз

$$\frac{1}{2m_1} \oint_{sur} \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1 dS \delta \psi_1^* = 0,$$

тому що варіація вільної енергії на поверхні надпровідника рівна нулю. Таким чином, ми приходимо до першого рівняння Гільзбурга-Ландау

$$\alpha_1 \psi_1 + \beta_1 |\psi_1|^2 \psi_1 + \frac{1}{2m_1} \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi_1 = 0.$$

Варіація  $\delta \psi_2^* F_2$  є аналогічною до  $\delta \psi_1^* F_1$ , тому ми можемо відразу виписати рівняння Гільзбурга-Ландау для  $\psi_2$

$$\alpha_2 \psi_2 + \beta_2 |\psi_2|^2 \psi_2 + \frac{1}{2m_2} \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi_2 = 0.$$

Знайдемо варіацію  $\delta \psi_1^* F_{12}$

$$\begin{aligned}
\delta \psi_1^* F_{12} &= \delta \psi_1^* \int \left\{ -\gamma (\psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^*) + \eta \left[ \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1 \left( i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_2^* + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left( i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1^* \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_2 \right] \right\} d^3 r = \\
&= \int \left\{ -\gamma \delta \psi_1^* \psi_2 + \eta \left[ \left( i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \delta \psi_1^* \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_2 \right] \right\} d^3 r = 0
\end{aligned}$$

Запровадимо позначення,

$$-i\hbar \nabla \psi_2 - \frac{2e}{c} \vec{A} \psi_2 = \varphi_2,$$



$$\begin{aligned}
\delta_{\psi_1^*} F_{12} &= \int \left\{ -\gamma \delta \psi_1^* \psi_2 + \eta \left( i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \delta \psi_1^* \varphi_2 \right\} d^3 r = \\
&= \int \left\{ -\gamma \delta \psi_1^* \psi_2 + \eta i\hbar \nabla \delta \psi_1^* \varphi_2 - \eta \frac{2e}{c} \vec{A} \delta \psi_1^* \varphi_2 \right\} d^3 r = \\
&= \int \left\{ -\gamma \delta \psi_1^* \psi_2 + \eta i\hbar \nabla (\delta \psi_1^* \varphi_2) - \eta i\hbar (\nabla \varphi_2) \delta \psi_1^* - \eta \frac{2e}{c} \vec{A} \delta \psi_1^* \varphi_2 \right\} d^3 r = \\
&= \int \left\{ -\gamma \delta \psi_1^* \psi_2 + \eta \delta \psi_1^* \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \varphi_2 \right\} d^3 r + \eta i\hbar \int \text{div}(\delta \psi_1^* \varphi_2) = \\
&= \int \delta \psi_1^* \left\{ -\gamma \psi_2 + \eta \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_2 \right\} d^3 r + \\
&\quad + \eta \oint_{sur} \left( -i\hbar \nabla \psi_2 - \frac{2e}{c} \vec{A} \psi_2 \right) dS \delta \psi_1^* = 0
\end{aligned}$$

Отже, маємо

$$-\gamma \psi_2 + \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi_2 = 0.$$

Знайдемо зараз варіацію  $\delta_{\psi_2^*} F_{12}$

$$\begin{aligned}
\delta_{\psi_2^*} F_{12} &= \delta \psi_2^* \int \left\{ -\gamma (\psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^*) + \eta \left[ \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1 \left( i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_2^* + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1^* \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_2 \right] \right\} d^3 r = \\
&= \int \left\{ -\gamma \psi_1 \delta \psi_2^* + \eta \left[ \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1 \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \delta \psi_2^* \right] \right\} d^3 r = \square
\end{aligned}$$

Запровадимо аналогічні позначення, як і в першому випадку

$$i\hbar \nabla \psi_1 - \frac{2e}{c} \vec{A} \psi_1 = \varphi_1,$$

$$\begin{aligned}
\delta_{\psi_2^*} F_{12} &= \int \left\{ -\gamma \psi_1 \delta \psi_2^* + \eta \varphi_1 \left( i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \delta \psi_2^* \right\} d^3 r = \\
&= \int \left\{ -\gamma \psi_1 \delta \psi_2^* + \eta \varphi_1 i\hbar \nabla \delta \psi_2^* - \eta \varphi_1 \frac{2e}{c} \vec{A} \delta \psi_2^* \right\} d^3 r = \\
&= \int \left\{ -\gamma \psi_1 \delta \psi_2^* + \eta i\hbar \nabla (\delta \psi_2^* \varphi_1) - \eta i\hbar (\nabla \varphi_1) \delta \psi_2^* - \eta \varphi_1 \frac{2e}{c} \vec{A} \delta \psi_2^* \right\} d^3 r =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left\{ -\gamma\psi_1\delta\psi_2^* + \eta\delta\psi_2^* \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\vec{A} \right) \varphi_1 \right\} d^3r + \eta i\hbar \int \operatorname{div}(\delta\psi_2^* \varphi_1) = \\
&= \int \delta\psi_2^* \left\{ -\gamma\psi_1 + \eta \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\vec{A} \right) \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\vec{A} \right) \psi_1 \right\} d^3r + \\
&\quad + \eta \oint_{sur} \left( -i\hbar\nabla\psi_1 - \frac{2e}{c}\vec{A}\psi_2 \right) dS\delta\psi_2^* = 0.
\end{aligned}$$

Маємо

$$-\gamma\psi_1 + \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\vec{A} \right)^2 \psi_1 = 0.$$

Ми відшукали варіації вільної енергії (по частинно) для  $\delta\psi_1^*F_1$ ,  $\delta\psi_2^*F_2$ ,  $\delta\psi_1^*F_{12}$  та  $\delta\psi_2^*F_{12}$ . Просумувавши одержані результати, одержимо варіацію вільної енергії в загальному вигляді для двохзонного надпровідника, а додавши одержанні результати при обчисленні варіацій  $\delta\psi_1^*$  та  $\delta\psi_2^*$ , відповідно, одержимо систему з двох рівнянь Гінзбурга-Ландау

$$\begin{cases} \alpha_1\psi_1 + \beta_1|\psi_1|^2\psi_1 + \frac{1}{2m_1} \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\vec{A} \right)^2 \psi_1 - \gamma\psi_2 + \eta \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\vec{A} \right)^2 \psi_2 = 0, \\ \alpha_2\psi_2 + \beta_2|\psi_2|^2\psi_2 + \frac{1}{2m_2} \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\vec{A} \right)^2 \psi_2 - \gamma\psi_1 + \eta \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\vec{A} \right)^2 \psi_1 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Наступне наше завдання відшукати друге рівняння Гільзбурга-Ландау. Вивід цього рівняння подібний до попереднього, але потрібно мінімізувати вільну енергію по векторному потенціалу  $\vec{A}$ . Для спрощення математичних викладок будемо знову розбивати рівняння на частини.

Отже, знайдемо варіацію  $\delta_{\vec{A}}F_1$ . Приступимо до обрахунку

$$F_1 = \alpha_1|\psi_1|^2 + \frac{1}{2}\beta_1|\psi_1|^4 + \frac{1}{2m_1} \left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\vec{A} \right) \psi_1 \right|^2 + \frac{\vec{H}^2}{8\pi},$$

де  $\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}$ .

$$\delta_{\vec{A}}F_1 = \delta\vec{A} \int \left\{ \alpha_1|\psi_1|^2 + \frac{1}{2}\beta_1|\psi_1|^4 + \frac{1}{2m_1} \left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\vec{A} \right) \psi_1 \right|^2 + \frac{(\operatorname{rot}\vec{A})^2}{8\pi} \right\} d^3r =$$

$$= \int \left\{ \frac{1}{2m_1} \left[ \left( -\frac{2e}{c} \delta \vec{A} \psi_1^* \right) \left( -i\hbar \nabla \psi_1 - \frac{2e}{c} \vec{A} \psi_1 \right) + \left( i\hbar \nabla \psi_1^* - \frac{2e}{c} \vec{A} \psi_1^* \right) \left( -\frac{2e}{c} \delta \vec{A} \psi_1 \right) \right] + \frac{\text{rot} \vec{A} \text{rot} \delta \vec{A}}{4\pi} \right\} d^3 r.$$

Як і вище варіацію (зараз  $\delta \vec{A}$ ) неможливо винести за дужки через присутність цієї величини під операцією  $\text{rot} \delta \vec{A}$ . Тому використовуємо векторну тотожність

$$\text{div}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b} \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \text{rot} \vec{b},$$

яка дає можливість переписати попередній вираз наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int \text{rot} \vec{A} \text{rot} \delta \vec{A} d^3 r &= \frac{1}{4\pi} \int \text{rot} \text{rot} \vec{A} \delta \vec{A} d^3 r - \frac{1}{4\pi} \int \text{div}[\text{rot} \vec{A}, \delta \vec{A}] d^3 r = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \delta \vec{A} \text{rot} \text{rot} \vec{A} d^3 r - \frac{1}{4\pi} \oint_{\text{sur}} [\text{rot} \vec{A}, \delta \vec{A}] d^3 r = \frac{1}{4\pi} \int \delta \vec{A} \text{rot} \text{rot} \vec{A} d^3 r. \end{aligned}$$

Поверхневий інтеграл рівний нулю, тому що магнітне поле на поверхні надпровідника має бути заданим, а отже варіація рівна нулю. В результаті маємо

$$\begin{aligned} \delta_{\vec{A}} F_1 &= \int \delta \vec{A} \left\{ \frac{1}{2m_1} \left[ \frac{2e}{c} i\hbar \psi_1^* \nabla \psi_1 + \frac{4e^2}{c^2} |\psi_1|^2 \vec{A} - \frac{2e}{c} i\hbar \psi_1 \nabla \psi_1^* + \frac{4e^2}{c^2} |\psi_1|^2 \vec{A} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4\pi} \int \delta \vec{A} \text{rot} \text{rot} \vec{A} \right\} d^3 r = \int \left\{ \frac{i\hbar e}{m_1 c} (\psi_1^* \nabla \psi_1 - \psi_1 \nabla \psi_1^*) + \frac{4e^2}{m_1 c^2} |\psi_1|^2 \vec{A} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4\pi} \text{rot} \text{rot} \vec{A} \right\} \delta \vec{A} d^3 r = 0 \\ \frac{i\hbar e}{m_1 c} (\psi_1^* \nabla \psi_1 - \psi_1 \nabla \psi_1^*) + \frac{4e^2}{m_1 c^2} |\psi_1|^2 \vec{A} + \frac{1}{4\pi} c &= 0, \end{aligned}$$

знайдемо вираз для струму в цьому випадку

$$\text{rot} \vec{H} = \text{rot} \text{rot} \vec{A}, \quad (6)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (7)$$

Прирівнюючи (6) і (7) одержимо

$$rotrot\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad (8)$$

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c} \left[ \frac{i\hbar e}{m_1 c} (\psi_1^* \nabla \psi_1 - \psi_1 \nabla \psi_1^*) + \frac{4e^2}{m_1 c^2} |\psi_1|^2 \vec{A} \right],$$

отже кінцевий результат для струму

$$\vec{j}_1 = \frac{i\hbar e}{m_1} (\psi_1 \nabla \psi_1^* - \psi_1^* \nabla \psi_1) - \frac{4e^2}{m_1 c} |\psi_1|^2 \vec{A}.$$

Виведення другого рівняння Гільзбурга-Ландау і виразу для струму для рівняння (3) є аналогічним до попереднього випадку, тому ми можемо одразу їх виписати

$$\frac{i\hbar e}{m_2 c} (\psi_2^* \nabla \psi_2 - \psi_2 \nabla \psi_2^*) + \frac{4e^2}{m_2 c^2} |\psi_2|^2 \vec{A} + \frac{1}{4\pi} rotrot\vec{A} = 0,$$

$$\vec{j}_2 = \frac{i\hbar e}{m_2} (\psi_2 \nabla \psi_2^* - \psi_2^* \nabla \psi_2) - \frac{4e^2}{m_2 c} |\psi_2|^2 \vec{A}. \text{де}$$

$$\begin{aligned} \delta_{\vec{A}} F_{12} &= \delta \vec{A} \int \left\{ -\gamma (\psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^*) + \eta \left[ \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1 \left( i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_2^* + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1^* \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_2 \right] + \frac{(rot\vec{A})^2}{8\pi} \right\} d^3 r = \\ &= \int \eta \left\{ \left( -\frac{2e}{c} \delta \vec{A} \psi_1 \right) \left( i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_2^* + \left( -\frac{2e}{c} \delta \vec{A} \psi_2^* \right) \left( i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{2e}{c} \delta \vec{A} \psi_1^* \right) \left( i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_2 + \left( -\frac{2e}{c} \delta \vec{A} \psi_2 \right) \left( i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1^* + \right. \\ &\quad \left. \frac{rot\vec{A} rot\delta \vec{A}}{4\pi} \right\} d^3 r = \int \delta \vec{A} \eta \left\{ -i\hbar \frac{2e}{c} \psi_1 \nabla \psi_2^* + \frac{4e^2}{c^2} \vec{A} \psi_1 \psi_2^* + \right. \\ &\quad \left. + i\hbar \frac{2e}{c} \psi_2^* \nabla \psi_1 + \frac{4e^2}{c^2} \vec{A} \psi_2^* \psi_1 + i\hbar \frac{2e}{c} \psi_1^* \nabla \psi_2 + \frac{4e^2}{c^2} \vec{A} \psi_1^* \psi_2 - i\hbar \frac{2e}{c} \psi_2 \nabla \psi_1^* + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4e^2}{c^2} \vec{A} \psi_2 \psi_1^* + \frac{1}{4\pi} rotrot\vec{A} \right\} d^3 r = \eta \left\{ \frac{2i\hbar e}{c} (\psi_2^* \nabla \psi_1 - \psi_1 \nabla \psi_2^*) + \right. \\ &\quad \left. \frac{2i\hbar e}{c} (\psi_1^* \nabla \psi_2 - \psi_2 \nabla \psi_1^*) + \frac{8e^2}{c^2} \vec{A} \psi_1 \psi_2^* + \frac{8e^2}{c^2} \vec{A} \psi_1^* \psi_2 + \frac{1}{4\pi} rotrot\vec{A} \right\} \delta \vec{A} d^3 r = 0, \end{aligned}$$

$$\vec{j}_{12} = \eta \left\{ 2i\hbar e(\psi_1 \nabla \psi_2^* - \psi_2^* \nabla \psi_1) + 2i\hbar e(\psi_2 \nabla \psi_1^* - \psi_1^* \nabla \psi_2) - \frac{8e^2}{c} \vec{A} \psi_1 \psi_2^* - \right. \\ \left. - \frac{8e^2}{c} \vec{A} \psi_1^* \psi_2 \right\}.$$

Випишемо загальний вираз для густини струму

$$\vec{j} = \frac{i\hbar e}{m_1} (\psi_1 \nabla \psi_1^* - \psi_1^* \nabla \psi_1) - \frac{4e^2}{m_1 c} |\psi_1|^2 \vec{A} + \frac{i\hbar e}{m_2} (\psi_2 \nabla \psi_2^* - \psi_2^* \nabla \psi_2) - \\ - \frac{4e^2}{m_2 c} |\psi_2|^2 \vec{A} - 2i\hbar e c \eta (\psi_2^* \nabla \psi_1 - \psi_1 \nabla \psi_2^* + \psi_1^* \nabla \psi_2 - \psi_2 \nabla \psi_1^*) - \\ - \frac{8e^2 \eta}{c} (\psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^*) \vec{A} \\ \vec{j} = -\frac{i\hbar e}{m_1} (\psi_1^* \nabla \psi_1 - \psi_1 \nabla \psi_1^*) - \frac{i\hbar e}{m_2} (\psi_2^* \nabla \psi_2 - \psi_2 \nabla \psi_2^*) - \\ - 2i\hbar e \eta (\psi_1^* \nabla \psi_2 - \psi_2 \nabla \psi_1^* - \psi_1 \nabla \psi_2^* + \psi_2^* \nabla \psi_1) - \\ - \left( \frac{4e^2}{m_1 c} |\psi_1|^2 + \frac{4e^2}{m_2 c} |\psi_2|^2 + \frac{8e^2 \eta}{c} (\psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^*) \right) \vec{A}. \quad (9)$$

При відсутності струму і градієнтів рівноважні значення параметрів порядку  $\psi_{1,2} = \psi_{1,2}^{(0)} e^{i\chi_{1,2}}$  визначаються набором взаємопов'язаних рівнянь

$$\alpha_1 \psi_1 + \beta_1 |\psi_1|^2 \psi_1 - \gamma \psi_2 = 0, \\ \alpha_2 \psi_2 + \beta_2 |\psi_2|^2 \psi_2 - \gamma \psi_1 = 0.$$

Використовуючи заміну  $\psi_{1,2} = \psi_{1,2}^{(0)} e^{i\chi_{1,2}}$  приведемо ці рівняння до наступного вигляду

$$\alpha_1 \psi_1^{(0)} e^{i\chi_1} + \beta_1 \psi_1^{(0)3} e^{i\chi_1} - \gamma \psi_2^{(0)} e^{i\chi_2} = 0, \\ \alpha_2 \psi_2^{(0)} e^{i\chi_2} + \beta_2 \psi_2^{(0)3} e^{i\chi_2} - \gamma \psi_1^{(0)} e^{i\chi_1} = 0.$$

Домножуючи перше рівняння на  $e^{-i\chi_1}$ , а друге на  $e^{-i\chi_2}$  отримаємо наступні рівняння

$$\begin{aligned}\alpha_1\psi_1^{(0)} + \beta_1\psi_1^{(0)3} - \gamma\psi_2^{(0)}e^{i(\chi_2-\chi_1)} &= 0, \\ \alpha_2\psi_2^{(0)} + \beta_2\psi_2^{(0)3} - \gamma\psi_1^{(0)}e^{i(\chi_1-\chi_2)} &= 0.\end{aligned}\tag{10}$$

Для випадку двох параметрів порядку виникає питання про різницю фази  $\varphi = \chi_1 - \chi_2$  між  $\psi_1$  і  $\psi_2$ . В однорідному безструмовому стані, шляхом аналізу вільної енергії  $F_{12}$  (4), можна отримати, що для  $\gamma > 0$  фазовий зсув  $\varphi = 0$  і для  $\gamma < 0$   $\varphi = \pi$ . Твердження, що  $\varphi$  може мати тільки значення 0 або  $\pi$  чинне також в струмових станах, але й для коефіцієнта  $\eta \neq 0$  критерій  $\varphi$  дорівнює 0 або  $\pi$  тепер залежить від значення струму (див. нижче).

Якщо міжзонна взаємодія ігнорується, рівняння (9) розділяються на два незалежні рівняння Гільзбурга-Ландау з двома різними критичними температурами  $T_{c_1}$  і  $T_{c_2}$ . У загальному випадку, незалежно від знаку  $\gamma$ , температура фазового переходу перевищує як  $T_{c_1}$  і  $T_{c_2}$ , і визначається з рівняння:

$$\alpha_1(T_c)\alpha_2(T_c) = \gamma^2.\tag{11}$$

Нехай перший параметр порядку більший ніж другий, тобто  $T_{c_1} > T_{c_2}$ . Представимо температурні залежності для коефіцієнтів у вигляді

$$\begin{aligned}\alpha_1(T) &= -\alpha_1(1 - T/T_{c_1}), \\ \alpha_2(T) &= \alpha_{20} - \alpha_2(1 - T/T_{c_1}).\end{aligned}$$

Феноменологічні константи  $\alpha_{1,2}$ ,  $\alpha_{20}$  і  $\beta_{1,2}$ ,  $\gamma$  можуть бути пов'язані з мікроскопічними параметрами в двохзонній моделі БКШ. З (9) і (10) отримуємо для критичної температури  $T_c$ :

$$T_c = T_{c_1} \left( 1 + \sqrt{\left(\frac{\alpha_{20}}{2\alpha_2}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{\alpha_1\alpha_2} - \frac{\alpha_{20}}{2\alpha_2}} \right).\tag{12}$$

Для довільного значення міжзонного зв'язку  $\gamma$  рівняння (9) може бути розв'язано чисельно. Для  $\gamma = 0$ ,  $T_c = T_{c_1}$  і температурі близькій до  $T_c$  (звідси для  $T_{c_2} < T \leq T_c$ ) рівноважні значення параметрів порядку  $\psi_2^{(0)}(T) = 0$ ,  $\psi_1^{(0)}(T) =$

$\sqrt{\alpha_1(1 - T/T_{c_1})/\beta_1}$ . Беручи до уваги в наступному слабкий міжзонний зв'язок, ми маємо з рівнянь (9-11) поправки  $-\gamma^2$  для цих значень:

$$\begin{aligned}\psi_1^{(0)}(T)^2 &\approx \frac{\alpha_1}{\beta_1} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) + \frac{\gamma^2}{\beta_1} \left( \frac{1}{\alpha_{20} - \alpha_2 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)} - \frac{T}{T_c} \frac{1}{\alpha_{20}} \right), \\ \psi_2^{(0)}(T)^2 &\approx \frac{\alpha_1}{\beta_1} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \frac{1}{\left(\alpha_{20} - \alpha_2 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)\right)^2}.\end{aligned}\quad (13)$$

Розкладаючи вираз (13) по  $\left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \ll 1$  ми маємо звичайну температурну залежність параметрів рівноважного порядку при слабких міжзонних зв'язках

$$\begin{aligned}\psi_1^{(0)}(T) &= \sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_{20} + \alpha_2}{\alpha_{20}^2 \alpha_1} \gamma^2\right) \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}, \\ \psi_2^{(0)}(T) &= \sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} \frac{\gamma}{\alpha_{20}} \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}.\end{aligned}\quad (14)$$

Розглянуті вище випадки (вирази (11) - (13)) відповідають різним критичним температурам  $T_{c_1} > T_{c_2}$  за відсутності міжзонного зв'язку  $\gamma$ . Параметр порядку в другому рядку  $\psi_2^{(0)}$  виникає через «ефект близькості» більший  $\psi_1^{(0)}$  і пропорційний величині  $\gamma$ .

Розглянемо тепер іншу ситуацію, яку ми будемо використовувати в подальшому в якості модельного випадку. Припустимо для простоти, що два конденсати за відсутності струму є ідентичні. В цьому випадку при довільному значенні  $\gamma$  ми маємо

$$\alpha_1(T) = \alpha_2(T) \equiv \alpha(T) = -\alpha \left(1 - \frac{T}{T_c}\right), \beta_1 = \beta_2 \equiv \beta. \quad (15)$$

$$\psi_1^{(0)} = \psi_2^{(0)} = \sqrt{\frac{|\gamma| - \alpha}{\beta}}. \quad (16)$$

### 3.2. Просторово однорідні струмові стани і струм розпаровування в теорії Гінзбурга-Ландау

В цьому розділі ми будемо розглядати однорідні струмові стани в тонкому провідникові або плівці, поперечні розміри яких  $d \ll \xi_{1,2}(T), \lambda_{1,2}(T)$ , де  $\xi_{1,2}(T)$  і  $\lambda_{1,2}(T)$  довжини когерентності і глибини проникнення для кожного параметра порядку, відповідно. Ця умова приводить до одновимірної задачі і дозволяє знехтувати власним магнітним полем системи (див. Рис.3.1). За відсутності зовнішнього магнітного поля ми використовуємо калібрування  $\vec{A} = 0$ .

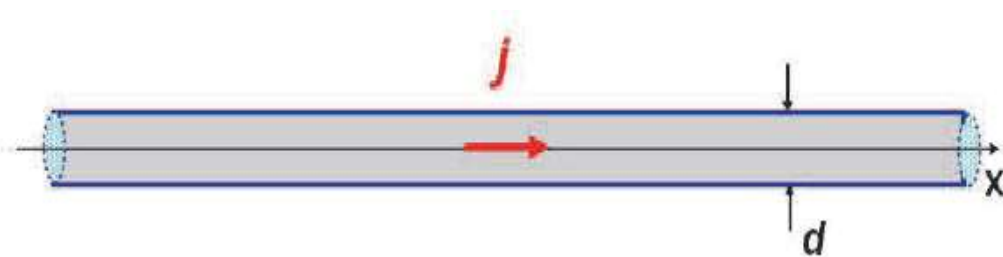


Рис. 3.1 Геометрія системи.

Густина струму  $j$  і модулі параметрів порядку не залежать від поздовжнього напрямку  $x$ , тоді  $\psi_{1,2} = |\psi_{1,2}| \exp(i\chi_{1,2}(x))$ . Запровадимо різницю та розподілену суму фаз:

$$\begin{cases} \varphi = \chi_1 - \chi_2, \\ \theta = c_1\chi_1 + c_2\chi_2. \end{cases} \quad (17)$$

Використовуючи цю систему, відшукаємо  $\chi_1$  і  $\chi_2$  та їхні похідні по  $x$ :

$$\varphi * c_2 + \theta: c_2\varphi + \theta = c_2\chi_1 - c_2\chi_2 + c_1\chi_1 + c_2\chi_2 = c_2\chi_1 + c_1\chi_1,$$

$$\chi_1 = \frac{c_2\varphi + \theta}{c_1 + c_2};$$

$$\varphi * (-c_1) + \theta: -c_1\varphi + \theta = -c_1\chi_1 + c_1\chi_2 + c_1\chi_1 + c_2\chi_2 = c_1\chi_2 + c_2\chi_2,$$

$$\chi_2 = \frac{\theta - c_1\varphi}{c_1 + c_2};$$

$$\frac{d\chi_2}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\theta - c_1\varphi}{c_1 + c_2} \right) = \frac{1}{c_1 + c_2} \left( \frac{d\theta}{dx} - c_1 \frac{d\varphi}{dx} \right) = \left( \frac{d\theta}{dx} - c_1 \frac{d\varphi}{dx} \right);$$



$$\frac{d\chi_1}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{c_2 \varphi + \theta}{c_1 + c_2} \right) = \frac{1}{c_1 + c_2} \left( \frac{d\theta}{dx} + c_2 \frac{d\varphi}{dx} \right) = \left( \frac{d\theta}{dx} + c_2 \frac{d\varphi}{dx} \right).$$

Для густини вільної енергії (2)-(4), при  $\vec{A} = 0$ , отримаємо

$$\begin{aligned} F = & \alpha_1 |\psi_1|^2 + \frac{1}{2} \beta_1 |\psi_1|^4 + \frac{1}{2m_1} \left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1 \right|^2 + \alpha_2 |\psi_2|^2 + \frac{1}{2} \beta_2 |\psi_2|^4 + \\ & + \frac{1}{2m_2} \left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_2 \right|^2 - \gamma (\psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^*) + \\ + \eta & \left\{ \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1 \left( i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_2^* + \right. \\ & \left. + \left( i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_1^* \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi_2 \right\} = \alpha_1 |\psi_1|^2 + \frac{1}{2} \beta_1 |\psi_1|^4 + \alpha_2 |\psi_2|^2 + \\ & + \frac{1}{2} \beta_2 |\psi_2|^4 + \frac{1}{2m_1} (-i\hbar\nabla) |\psi_1| \exp(i\chi_1) (i\hbar\nabla) |\psi_1| \exp(-i\chi_1) + \\ + \frac{1}{2m_2} & (-i\hbar\nabla) |\psi_2| \exp(i\chi_2) (i\hbar\nabla) |\psi_2| \exp(-i\chi_2) - \gamma (|\psi_1| \exp(i\chi_1) |\psi_2| \exp(-i\chi_2) + \\ & + |\psi_1| \exp(-i\chi_1) |\psi_2| \exp(i\chi_2)) + \eta \left( (-i\hbar\nabla) |\psi_1| \exp(i\chi_1) (i\hbar\nabla) |\psi_2| \exp(-i\chi_2) + \right. \\ & + (i\hbar\nabla) |\psi_1| \exp(-i\chi_1) (-i\hbar\nabla) |\psi_2| \exp(i\chi_2) \left. \right) = \alpha_1 |\psi_1|^2 + \frac{1}{2} \beta_1 |\psi_1|^4 + \alpha_2 |\psi_2|^2 + \\ & + \frac{1}{2} \beta_2 |\psi_2|^4 + \frac{\hbar^2}{2m_1} |\psi_1|^2 \frac{d}{dx} \exp(i\chi_1) \frac{d}{dx} \exp(-i\chi_1) + \\ + \frac{\hbar^2}{2m_2} & |\psi_2|^2 \frac{d}{dx} \exp(i\chi_2) \frac{d}{dx} \exp(-i\chi_2) + \eta \hbar^2 \left( \frac{d}{dx} \exp(i\chi_1) \frac{d}{dx} \exp(-i\chi_2) + \right. \\ & + \left. \frac{d}{dx} \exp(-i\chi_1) \frac{d}{dx} \exp(i\chi_2) \right) |\psi_1| |\psi_2| - \gamma |\psi_1| |\psi_2| (\exp(i(\chi_2 - \chi_1)) + \\ & + \exp(i(\chi_1 - \chi_2))) = \alpha_1 |\psi_1|^2 + \frac{1}{2} \beta_1 |\psi_1|^4 + \alpha_2 |\psi_2|^2 + \frac{1}{2} \beta_2 |\psi_2|^4 + \\ + \frac{\hbar^2}{2m_1} & |\psi_1|^2 \left( \frac{d\chi_1}{dx} \right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m_2} |\psi_2|^2 \left( \frac{d\chi_2}{dx} \right)^2 + \eta \hbar^2 |\psi_1| |\psi_2| (\exp(i(\chi_1 - \chi_2)) + \\ + \exp(i(\chi_2 - \chi_1))) & \frac{d\chi_1}{dx} \frac{d\chi_2}{dx} - 2\gamma |\psi_1| |\psi_2| \cos \varphi = \alpha_1 |\psi_1|^2 + \frac{1}{2} \beta_1 |\psi_1|^4 + \\ + \alpha_2 |\psi_2|^2 + \frac{1}{2} \beta_2 |\psi_2|^4 & + \frac{\hbar^2}{2m_1} |\psi_1|^2 \left( \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 + 2c_2 \frac{d\theta}{dx} \frac{d\varphi}{dx} + c_2^2 \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\hbar^2}{2m_2} |\psi_2|^2 \left( \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 - 2c_1 \frac{d\theta}{dx} \frac{d\varphi}{dx} + c_1^2 \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \right) + 2\eta \hbar^2 |\psi_1| |\psi_2| \cos \varphi \left( \frac{d\theta}{dx} + \right. \\
& + c_2 \frac{d\varphi}{dx} \left. \right) \left( \frac{d\theta}{dx} - c_1 \frac{d\varphi}{dx} \right) - 2\gamma |\psi_1| |\psi_2| \cos \varphi = \alpha_1 |\psi_1|^2 + \frac{1}{2} \beta_1 |\psi_1|^4 + \alpha_2 |\psi_2|^2 + \\
& + \frac{1}{2} \beta_2 |\psi_2|^4 + \hbar^2 \left( \frac{|\psi_1|^2}{2m_1} + \frac{|\psi_2|^2}{2m_2} + 2\eta |\psi_1| |\psi_2| \right) \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 + c_2^2 \frac{\hbar^2}{2m_1} |\psi_1|^2 \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \\
& + c_2 \left( 2\eta \hbar^2 |\psi_1| |\psi_2| \cos \varphi + \frac{\hbar^2}{m_1} |\psi_1|^2 \right) \frac{d\theta}{dx} \frac{d\varphi}{dx} + c_1^2 \frac{\hbar^2}{2m_2} |\psi_2|^2 \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - \\
& - c_1 \left( 2\eta \hbar^2 |\psi_1| |\psi_2| \cos \varphi + \frac{\hbar^2}{m_2} |\psi_2|^2 \right) \frac{d\theta}{dx} \frac{d\varphi}{dx} - 2\gamma |\psi_1| |\psi_2| \cos \varphi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F = & \alpha_1 |\psi_1|^2 + \frac{1}{2} \beta_1 |\psi_1|^4 + \alpha_2 |\psi_2|^2 + \frac{1}{2} \beta_2 |\psi_2|^4 + \hbar^2 \left( \frac{|\psi_1|^2}{2m_1} + \frac{|\psi_2|^2}{2m_2} \right. \\
& + 2\eta |\psi_1| |\psi_2| \left. \right) \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 + c_2^2 \frac{\hbar^2}{2m_1} |\psi_1|^2 \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + c_2 (2\eta \hbar^2 |\psi_1| |\psi_2| \cos \varphi + \\
& + \frac{\hbar^2}{m_1} |\psi_1|^2) \frac{d\theta}{dx} \frac{d\varphi}{dx} + c_1^2 \frac{\hbar^2}{2m_2} |\psi_2|^2 \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - c_1 (2\eta \hbar^2 |\psi_1| |\psi_2| \cos \varphi + \\
& \left. \frac{\hbar^2}{m_2} |\psi_2|^2) \frac{d\theta}{dx} \frac{d\varphi}{dx} - 2\gamma |\psi_1| |\psi_2| \cos \varphi. \tag{18}
\end{aligned}$$

Для знаходження вагових констант запровадимо позначення

$$2\eta \hbar^2 |\psi_1| |\psi_2| \cos \varphi + \frac{\hbar^2}{m_2} |\psi_2|^2 \equiv a, \quad 2\eta \hbar^2 |\psi_1| |\psi_2| \cos \varphi + \frac{\hbar^2}{m_1} |\psi_1|^2 \equiv b$$

$$c_1 = \delta * (a), \quad c_2 = \delta * (b), \quad c_1 + c_2 = 1, \quad \delta * (a + b) = 1 \Rightarrow \delta = \frac{1}{a + b}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}
c_1 = & \frac{\frac{|\psi_1|^2}{m_1} + 2\eta |\psi_1| |\psi_2| \cos \varphi}{\frac{|\psi_1|^2}{m_1} + \frac{|\psi_2|^2}{m_2} + 4\eta |\psi_1| |\psi_2| \cos \varphi}, \\
c_2 = & \frac{\frac{|\psi_2|^2}{m_2} + 2\eta |\psi_1| |\psi_2| \cos \varphi}{\frac{|\psi_1|^2}{m_1} + \frac{|\psi_2|^2}{m_2} + 4\eta |\psi_1| |\psi_2| \cos \varphi}. \tag{19}
\end{aligned}$$

Впишемо рівняння для струму (9)

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar e}{m_1}(\psi_1^*\nabla\psi_1 - \psi_1\nabla\psi_1^*) - \frac{i\hbar e}{m_2}(\psi_2^*\nabla\psi_2 - \psi_2\nabla\psi_2^*) - 2i\hbar e\eta(\psi_1^*\nabla\psi_2 - \psi_2\nabla\psi_1^* - \psi_1\nabla\psi_2^* + \psi_2^*\nabla\psi_1) - \left(\frac{4e^2}{m_1c}|\psi_1|^2 + \frac{4e^2}{m_2c}|\psi_2|^2 + \frac{8e^2\eta}{c}(\psi_1^*\psi_2 + \psi_1\psi_2^*)\right)\vec{A},$$

та запровадимо заміни для  $\psi_1$  і  $\psi_2$  у вигляді

$$\psi_1 = |\psi_1|\exp(i\chi_1(x)), \psi_2 = |\psi_2|\exp(i\chi_2(x)). \quad (20)$$

Враховуючи, що  $\vec{A} = 0$  перепишемо вираз для струму так

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar e}{m_1}2i\text{Im}(\psi_1^*\nabla\psi_1) - \frac{i\hbar e}{m_2}2i\text{Im}(\psi_2^*\nabla\psi_2) - 2i\hbar e\eta(2i\text{Im}(\psi_1^*\nabla\psi_2) + 2i\text{Im}(\psi_2^*\nabla\psi_1)). \quad (9^*)$$

Випишемо у явному вигляді вирази для  $\psi_1^*\nabla\psi_1$ ,  $\psi_2^*\nabla\psi_2$ ,  $\psi_1^*\nabla\psi_2$ ,  $\psi_2^*\nabla\psi_1$ :

$$\begin{aligned} \psi_1^*\nabla\psi_1 &= |\psi_1|e^{-i\chi_1(x)}\frac{d}{dx}|\psi_1|e^{i\chi_1(x)} = i|\psi_1||\psi_1|e^{-i\chi_1(x)}e^{i\chi_1(x)}\frac{d\chi_1(x)}{dx} = \\ &= i|\psi_1||\psi_1|\frac{d\chi_1(x)}{dx}, \end{aligned}$$

$$\psi_2^*\nabla\psi_2 = |\psi_2|e^{-i\chi_2(x)}\frac{d}{dx}|\psi_2|e^{i\chi_2(x)} = i|\psi_2||\psi_2|\frac{d\chi_2(x)}{dx},$$

$$\begin{aligned} \psi_1^*\nabla\psi_2 &= |\psi_1|e^{-i\chi_1(x)}\frac{d}{dx}|\psi_2|e^{i\chi_2(x)} = i|\psi_1||\psi_2|e^{-i\chi_1(x)}e^{i\chi_2(x)}\frac{d\chi_2(x)}{dx} = \\ &= i|\psi_1||\psi_2|e^{i(\chi_2(x)-\chi_1(x))}\frac{d\chi_2(x)}{dx} = i|\psi_1||\psi_2|e^{-i\varphi}\frac{d\chi_2(x)}{dx}, \end{aligned}$$

$$\psi_2^*\nabla\psi_1 = |\psi_2|e^{-i\chi_2(x)}\frac{d}{dx}|\psi_1|e^{i\chi_1(x)} = i|\psi_1||\psi_2|e^{i\varphi}\frac{d\chi_1(x)}{dx}.$$

Підставимо одержані результати в (9\*) будемо мати

$$\begin{aligned}
\vec{j} &= \frac{2\hbar e}{m_1} |\psi_1|^2 \frac{d\chi_1(x)}{dx} + \frac{2\hbar e}{m_2} |\psi_2|^2 \frac{d\chi_2(x)}{dx} + \\
&+ 4\hbar e \eta \left( |\psi_1| |\psi_2| e^{-i\varphi} \frac{d\chi_2(x)}{dx} + |\psi_1| |\psi_2| e^{i\varphi} \frac{d\chi_1(x)}{dx} \right) = \\
&= 2eh \left\{ \frac{|\psi_1|^2}{m_1} \frac{d\chi_1(x)}{dx} + \frac{|\psi_2|^2}{m_2} \frac{d\chi_2(x)}{dx} + 2\eta |\psi_1| |\psi_2| \cos \varphi \left( \frac{d\chi_1(x)}{dx} + \frac{d\chi_2(x)}{dx} \right) \right\} = \\
&= 2eh \left\{ \left( \frac{|\psi_1|^2}{m_1} + 2\eta |\psi_1| |\psi_2| \cos \varphi \right) \frac{d\chi_1(x)}{dx} + \left( \frac{|\psi_2|^2}{m_2} + 2\eta |\psi_1| |\psi_2| \cos \varphi \right) \frac{d\chi_2(x)}{dx} \right\}.
\end{aligned}$$

Густина струму  $J$  в термінах фаз  $\theta$  і  $\varphi$  має такий вигляд

$$\vec{j} = 2e\hbar \left( \frac{|\psi_1|^2}{m_1} + \frac{|\psi_2|^2}{m_2} + 4\eta |\psi_1| |\psi_2| \cos \varphi \right) \frac{d\theta}{dx}, \quad (21)$$

де  $\theta = c_1\chi_1 + c_2\chi_2$ .

Сумарний струм  $J$  включає внески  $j_{1,2}$  і пропорційно до  $\eta$  градієнт струму  $j_{12}$ . На відміну від випадку одного параметра порядку, умова  $div j = 0$  не фіксує сталість надпровідної швидкості. Рівняння Ейлера - Лагранжа для  $\theta(x)$  і  $\varphi(x)$  є складними зв'язаними нелінійними рівняннями, які зазвичай допускають солітоноподібні розв'язки (в разі  $\eta = 0$  вони були розглянуті). Можливість станів з неоднорідною фазою  $\varphi(x)$  потребує окремого дослідження. Тут ми обмежимо наш розгляд однорідною різницею фаз між параметрами порядку ( $\varphi(x) = const$ ). Для  $\varphi(x) = const$  з рівнянь слідує, що  $\theta(x) = qx$  ( $q$  повний надплинний імпульс) і  $\cos \varphi = 0$ , тобто  $\varphi$  дорівнює  $0$  або  $\pi$ . Частину виразу (18) запишемо у вигляді

$$2\hbar^2\eta|\psi_1||\psi_2|q^2 \cos \varphi + (-1)2\gamma|\psi_1||\psi_2| \cos \varphi = 2|\psi_1||\psi_2|(\hbar^2q^2\eta - \gamma) \cos \varphi$$

для мінімуму останнього виразу необхідно вимагати, щоб

$$\left. \begin{aligned}
&1) \text{ при } \hbar^2q^2\eta - \gamma > 0, \cos \varphi = -1 \\
&2) \text{ при } \hbar^2q^2\eta - \gamma < 0, \cos \varphi = 1
\end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\cos \varphi = \text{sign}(\hbar^2q^2\eta - \gamma). \quad (22)$$

Потрібно звернути увагу, що значення  $\varphi$ , в принципі, залежить від  $q$ , таким чином від густини струму. І, нарешті, вирази (18), (21) набувають вигляду:

$$F = \alpha_1 |\psi_1|^2 + \frac{1}{2} \beta_1 |\psi_1|^4 + \alpha_2 |\psi_2|^2 + \frac{1}{2} \beta_2 |\psi_2|^4 + \hbar^2 \frac{|\psi_1|^2}{2m_1} q^2 + \hbar^2 \frac{|\psi_2|^2}{2m_2} q^2 - 2(\gamma - \hbar^2 q^2 \eta) |\psi_1| |\psi_2| \text{sign}(\gamma - \hbar^2 q^2 \eta).$$

$$\vec{j} = 2e\hbar \left( \frac{|\psi_1|^2}{m_1} + \frac{|\psi_2|^2}{m_2} + 4\eta |\psi_1| |\psi_2| \text{sign}(\gamma - \hbar^2 q^2 \eta) \right) q. \quad (23)$$

$$\varphi = \chi_1 - \chi_2, \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\chi_1(x)}{dx} - \frac{d\chi_2(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d\chi_1(x)}{dx} = \frac{d\chi_2(x)}{dx}$$

$$\theta = c_1 \chi_1 + c_2 \chi_2, \quad \frac{d\theta}{dx} = c_1 \frac{d\chi_1(x)}{dx} + c_2 \frac{d\chi_2(x)}{dx} = (c_1 + c_2) \frac{d\chi_1(x)}{dx} = \frac{d\chi_1(x)}{dx}$$

$$\theta = qx, \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\chi_1(x)}{dx} = \frac{d\chi_2(x)}{dx} = q,$$

$$\frac{d^2 \chi_1(x)}{dx^2} = \frac{d^2 \chi_2(x)}{dx^2} = 0.$$

Рівняння (5) при  $\vec{A} = 0$  матимуть вигляд:

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{d^2}{dx^2} |\psi_1| e^{i\chi_1} + \alpha_1 |\psi_1| e^{i\chi_1} + \beta_1 |\psi_1|^3 e^{i\chi_1} - \gamma |\psi_2| e^{i\chi_2} - \eta \hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} |\psi_2| e^{i\chi_2} = 0, \\ -\frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{d^2}{dx^2} |\psi_2| e^{i\chi_2} + \alpha_2 |\psi_2| e^{i\chi_2} + \beta_2 |\psi_2|^3 e^{i\chi_2} - \gamma |\psi_1| e^{i\chi_1} - \eta \hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} |\psi_1| e^{i\chi_1} = 0. \end{cases}$$

Запровадимо позначення

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{d^2}{dx^2} |\psi_1| e^{i\chi_1} = A, \quad -\eta \hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} |\psi_2| e^{i\chi_2} = B,$$

та розпишемо їхні похідні

$$A = -\frac{\hbar^2}{2m_1} |\psi_1| \left( \frac{d}{dx} \left( i e^{i\chi_1} \frac{d\chi_1}{dx} \right) \right) = -\frac{\hbar^2}{2m_1} |\psi_1| \left( \frac{d}{dx} (i e^{i\chi_1} q) \right) = \frac{\hbar^2}{2m_1} |\psi_1| q^2 e^{i\chi_1},$$

$$B = -\eta \hbar^2 |\psi_2| \left( \frac{d}{dx} \left( i e^{i\chi_2} \frac{d\chi_2}{dx} \right) \right) = -\eta \hbar^2 |\psi_2| \left( \frac{d}{dx} (i e^{i\chi_2} q) \right) = \eta \hbar^2 |\psi_2| q^2 e^{i\chi_2}.$$

Повернемося до нашої системи рівнянь і помножимо перше рівняння на  $e^{-i\chi_1}$

$$\alpha_1|\psi_1| + \beta_1|\psi_1|^3 + \frac{\hbar^2}{2m_1}|\psi_1| - \gamma|\psi_2|e^{i(\chi_2-\chi_1)} + \eta\hbar^2|\psi_2|e^{i(\chi_2-\chi_1)} = 0$$

дійсна частина

$$\alpha_1|\psi_1| + \beta_1|\psi_1|^3 + \frac{\hbar^2}{2m_1}|\psi_1| - (\gamma - \hbar^2q^2\eta)|\psi_2|\cos\varphi = 0, \quad (24)$$

уявна частина

$$-(\gamma - \hbar^2q^2\eta)\sin\varphi = 0 \Rightarrow \sin\varphi.$$

Враховуючи (22) для (23), маємо:

$$\begin{aligned} & \alpha_1|\psi_1| + \beta_1|\psi_1|^3 + \frac{\hbar^2}{2m_1}|\psi_1|q^2 - (\gamma - \hbar^2q^2\eta)|\psi_2|\operatorname{sign}(\gamma - \hbar^2q^2\eta) \\ & = 0, \quad (25) \end{aligned}$$

аналогічно

$$\alpha_2|\psi_2| + \beta_2|\psi_2|^3 + \frac{\hbar^2}{2m_2}|\psi_2|q^2 - (\gamma - \hbar^2q^2\eta)|\psi_1|\operatorname{sign}(\gamma - \hbar^2q^2\eta) = 0. \quad (26)$$

Система рівнянь (23, 25, 26) описує криву розпаровування  $j(q, T)$  і залежність  $|\psi_1|$  та  $|\psi_2|$  при сталому струмові і температурі. Вона може бути розв'язана чисельно для даного надпровідника з конкретними значеннями феноменологічного параметра.

Для того, щоб дослідити специфічні ефекти, які пов'язані з міжзонною взаємодією розглянемо модельний випадок, коли параметри порядку збігаються при  $j = 0$  (рівняння (15), (16)), але градієнтні складові в рівняннях (5) різні.

Запровадимо позначення:

$$\psi_1 = \psi_{10}f_1; \quad \psi_2 = \psi_{20}f_2; \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha; \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta;$$

$$\psi_{10} = \sqrt{\frac{|\gamma| - \alpha}{\beta}}; \quad \psi_{20} = \frac{|\gamma| - \alpha}{\beta}.$$

Підставивши запровадженні позначення в рівняння (25), будемо мати

$$\alpha_1 f_1 + \beta_1 \frac{|\gamma| - \alpha}{\beta} f_1^3 + \frac{\hbar^2}{2m_1} f_1 - (\gamma - \hbar^2 q^2 \eta) f_1 \text{sign}(\gamma - \hbar^2 q^2 \eta) = 0,$$

домножимо попереднє рівняння на  $1/\alpha_1$

$$f_1 + \left( -\frac{|\gamma|}{|\alpha|} - 1 \right) f_1^3 - \frac{\hbar^2}{2m_1 |\alpha|} q^2 f_1 + \left( \frac{\gamma}{|\alpha|} - \frac{\hbar^2 q^2 \eta}{|\alpha|} \right) f_1 \text{sign}(\gamma - \hbar^2 q^2 \eta) = 0,$$

перепозначимо змінні наступним чином:

$$\frac{|\gamma|}{|\alpha|} \equiv |\tilde{\gamma}|; \quad \frac{\hbar^2}{2m_1 |\alpha|} q^2 \equiv q^2; \quad \frac{\gamma}{|\alpha|} \equiv \tilde{\gamma}; \quad \frac{\hbar^2 q^2 \eta}{|\alpha|} \equiv \tilde{\eta} q^2.$$

Підставимо такі змінні в рівняння (23, 25, 26)

$$(1 - (1 + |\tilde{\gamma}|) f_1^2) f_1 - q^2 f_1 + (\tilde{\gamma} - \tilde{\eta} q^2) f_2 \text{sign}(\tilde{\gamma} - \tilde{\eta} q^2) = 0, \quad (27)$$

$$(1 - (1 + |\tilde{\gamma}|) f_2^2) f_2 - k q^2 f_2 + (\tilde{\gamma} - \tilde{\eta} q^2) f_1 \text{sign}(\tilde{\gamma} - \tilde{\eta} q^2) = 0. \quad (28)$$

Тут ми нормуємо  $\psi_{1,2}$  на величину параметрів порядку при  $j = 0$  (16),  $j$  вимірюється в одиницях  $2\sqrt{2e}((|\gamma| + |\alpha|)/\beta)\sqrt{|\alpha|/m_1}$ ,  $q$  вимірюється в одиницях  $\sqrt{\hbar^2/2m_1|\alpha|}$ ,  $\tilde{\eta} = 2m_1\eta$ ,  $k=m_1/m_2$ . Якщо параметер  $k=1$ , то параметри порядку збігаються також і за наявності струму  $f_1 = f_2 = f$ . Тоді рівняння (27) виглядатиме так

$$1 - (1 + |\tilde{\gamma}|) f_1^2 - q^2 + |\tilde{\gamma} - \tilde{\eta} q^2| = 0 \Rightarrow$$

$$f_1^2 = \frac{1 - q^2 + |\tilde{\gamma} - \tilde{\eta} q^2|}{1 + |\tilde{\gamma}|}. \quad (29)$$

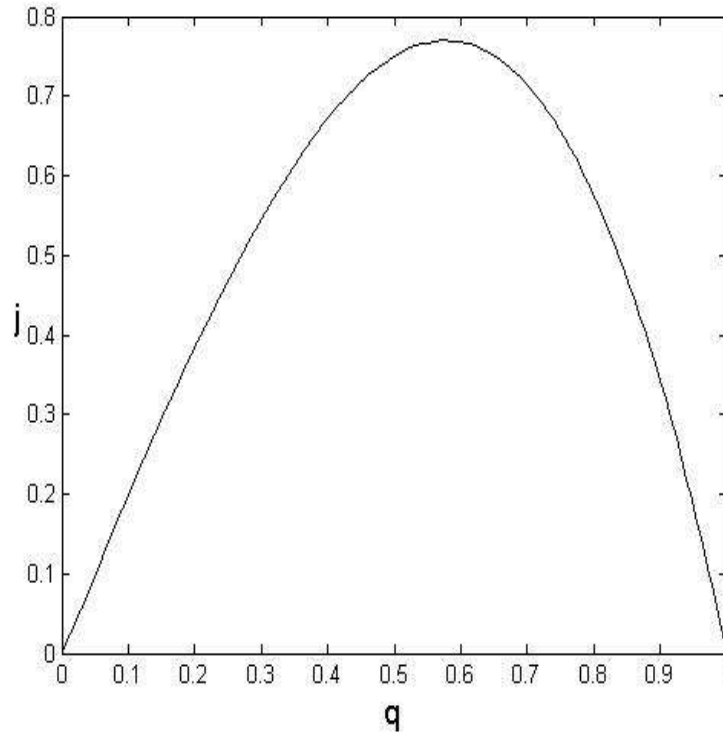
Випишемо вираз для струму

$$\begin{aligned}
j &= 2e\hbar|\psi_{10}|^2 \left( \frac{f_1^2}{m_1} + \frac{f_2^2}{m_2} \right. \\
&\quad \left. + 4\eta f_1 f_2 \operatorname{sign} \left( \gamma - \eta \hbar^2 q^2 \frac{\hbar^2}{2m_1|\alpha|} \frac{2m_1|\alpha|}{\hbar^2} \right) \right) q \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m_1|\alpha|}} * \\
&* \sqrt{\frac{2m_1|\alpha|}{\hbar^2}} = 2e\hbar \frac{|\gamma| + |\alpha|}{\beta} \frac{1}{m_1} \sqrt{\frac{2m_1|\alpha|}{\hbar^2}} (f_1^2 + kf_2^2 + 2\tilde{\eta}f_1f_2 * \\
&* \operatorname{sign}(\gamma - 2m_1|\alpha|q^2\eta))q = 2\sqrt{2}e \frac{|\gamma| + |\alpha|}{\beta} \sqrt{\frac{|\alpha|}{m_1}} (f_1^2 + kf_2^2 + \\
&\quad + 2\tilde{\eta}f_1f_2 \operatorname{sign}(\tilde{\gamma} - \tilde{\eta}q^2))q,
\end{aligned}$$

$$\operatorname{sign}(\tilde{\gamma} - \tilde{\eta}|\alpha|q^2) = \operatorname{sign}|\alpha|(\tilde{\gamma} - \tilde{\eta}q^2) = \operatorname{sign}(\tilde{\gamma} - \tilde{\eta}q^2).$$

Якщо вважати  $m_1 = m_2, f_1 = f_2$ , то вираз для струму буде мати вигляд

$$j = 2f^2(1 + \tilde{\eta} \operatorname{sign}(\tilde{\gamma} - \tilde{\eta}q^2))q. \quad (30)$$





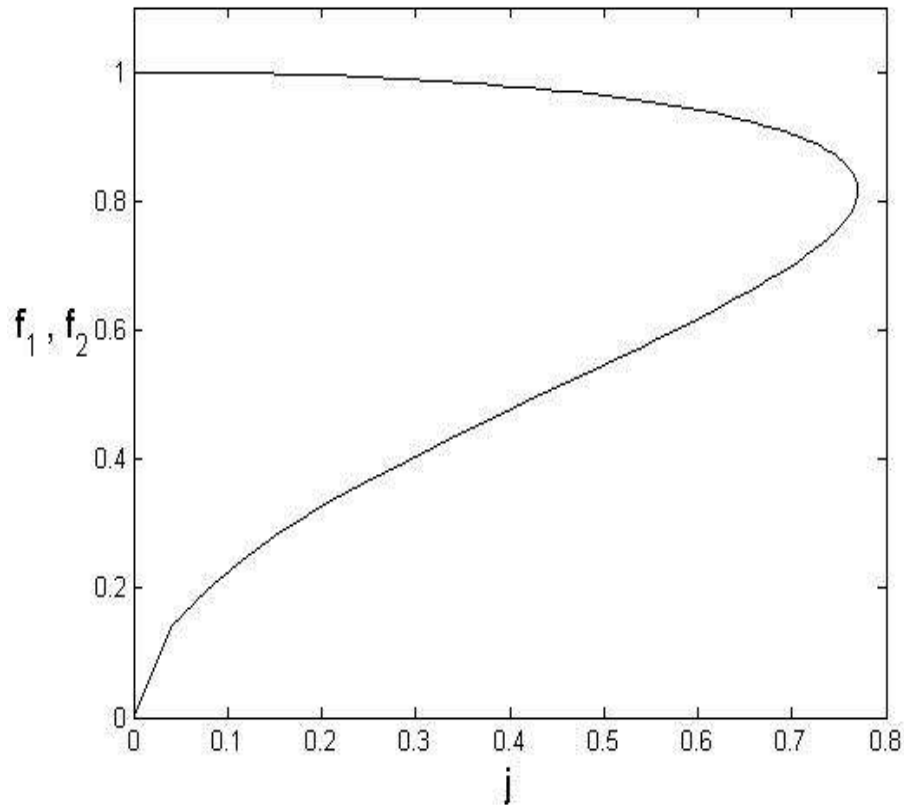


Рис.3.2. Крива залежності струму та модулів параметрів порядку.

### 3.3. Ефект Джозефсона в контактах на основі двоцілинного надпровідника

В попередньому пункті двоцілинна теорія надпровідності Гінзбурга – Ландау розглядалася для провідника довжиною  $L \rightarrow \infty$ . Протилежний випадок дуже неоднорідного струму – мікроміст Джозефсона, який ми змодельємо як вузький канал, що з'єднує два масивних надпровідники. Довжина  $L$  та діаметр  $d$  каналу (див. рис.3.3), як припускається, є малими в порівнянні з поздовжніми розмірами зразка  $\xi_1, \xi_2$ .

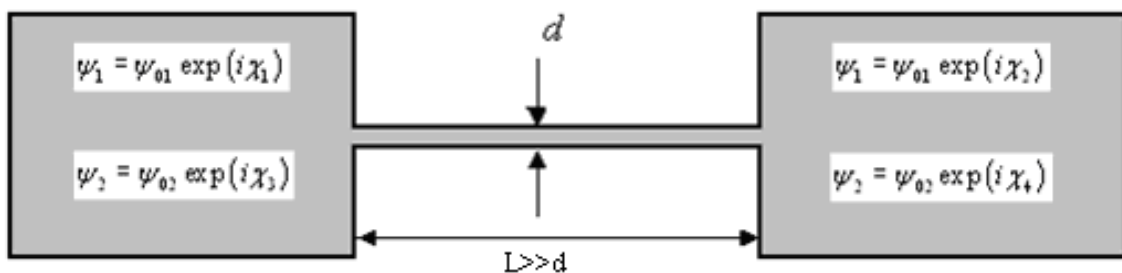


Рис.3.3. Геометрія SCS-контакту, як вузького надпровідного каналу з'єднаного з масивними надпровідниками. На масивних зразках позначено значення параметрів порядку.

Для  $d \ll L$  можна роз'язати одновимірні рівняння Гінзбурга – Ландау всередині каналу з жорсткими граничними умовами для параметрів порядку на кінцях каналу.

У випадку  $L \ll \xi_1, \xi_2$  ми можемо знехтувати в рівняннях (5) всіма умовами окрім однієї, що стосується градієнтів, і роз'язати рівняння:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} = 0, \\ \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} = 0 \end{cases}$$

з граничними умовами:

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi_{01} \exp(i\chi_1), & \psi_2(0) &= \psi_{02} \exp(i\chi_3), \\ \psi_1(L) &= \psi_{01} \exp(i\chi_2), & \psi_2(L) &= \psi_{02} \exp(i\chi_4). \end{aligned}$$

Обчислюючи густину струму  $j$  в каналі, отримуємо:

$$\begin{aligned} j &= j_1 + j_2 + j_{12}, \\ j_1 &= \frac{2e\hbar}{Lm_1} \psi_{01}^2 \sin(\chi_2 - \chi_1), \end{aligned}$$

$$j_2 = \frac{2e\hbar}{Lm_2} \psi_{02}^2 \sin(\chi_4 - \chi_3),$$

$$j_{12} = \frac{4e\hbar}{L} \eta \psi_{01} \psi_{02} (\sin(\chi_2 - \chi_3) + \sin(\chi_4 - \chi_1)).$$

Нехай  $\chi_2 - \chi_1 = \chi$ . Різниця між фазами двох параметрів порядку в масивних зразках рівна 0 або  $\pi$ , залежно від знаку сталої міжщільної взаємодії  $\gamma$ . Тому, якщо  $\gamma > 0$ ,  $\chi_3 = \chi_1$  і  $\chi_4 = \chi_2$  і якщо  $\gamma < 0$ , то  $\chi_3 - \chi_1 = \pi$ ,  $\chi_4 - \chi_2 = \pi$ . Таким чином струму  $j(\chi)$  від різниці фаз в загальному випадку довільних значень феноменологічних констант  $\gamma$  та  $\eta$  для двошлінного надпровідного мікромістка матиме вигляд:

$$j = j_0 \sin \chi = \frac{2e\hbar}{L} \left( \frac{\psi_{01}^2}{m_1} + \frac{\psi_{02}^2}{m_2} + 4\eta \psi_{01} \psi_{02} \text{sign}(\gamma) \right) \sin \chi.$$

Значення  $j_0$  може бути як позитивним, так і негативним:

$$j_0 > 0, \text{ якщо } \eta \text{sign}(\gamma) > -\left( \frac{\psi_{01}}{4m_1} + \frac{\psi_{02}}{4m_2} \right),$$

$$j_0 < 0, \text{ якщо } \eta \text{sign}(\gamma) < -\left( \frac{\psi_{01}}{4m_1} + \frac{\psi_{02}}{4m_2} \right). \quad (31)$$

Коли умова (31) для набору параметрів двошлінного надпровідника задовольняється, то мікроміст веде себе як так званий  $\pi$ -перехід.

## Висновок

В магістерській роботі досліджені струмові стани в двохзонних надпровідниках в рамках феноменологічної теорії Гінзбурга-Ландау. Якісно нові властивості в порівнянні зі звичайними надпровідниками, виникають внаслідок існування двох різних комплексних параметрів порядку  $\psi_1$  і  $\psi_2$ . Це означає виникнення додаткового внутрішнього ступеня вільності: фазового зсуву між параметрами порядку. Ми вивчали наслідки  $\delta\varphi$  - зміщення в безструмовому стані у протяжних плівках або каналах.

Відшукали явний вигляд першого і другого рівняння Гільзбурга-Ландау для двохщільного надпровідника, а також вписали вираз для струму.

У третьому розділі розглянуті однорідні струмові стани в тонкому провідникові або плівці, поперечні розміри яких  $d \ll \xi_{1,2}(T), \lambda_{1,2}(T)$ , де  $\xi_{1,2}(T)$  і  $\lambda_{1,2}(T)$  довжини когерентності і глибини проникнення Лондонів для кожного параметра порядку, відповідно. За відсутності зовнішнього магнітного поля використано калібрування  $\vec{A} = 0$ . Одержано вираз для вільної енергії при  $\vec{A} = 0$  та густину струму  $J$  в термінах фаз  $\theta$  і  $\varphi$ .

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Nagamatsu J., Nakagawa N., Muranaka T., Zenitani Y., Akimitsu J. Superconductivity at 39 K in magnesium diboride. *Nature*. 2001. Vol.410. P.63- 64.
2. Kotegawa H., Adachi H., Kawata H., Hashimoto H., Sato Y., Matsumoto I., Tanaka Y. Zero-Magnetization Ferromagnet Proven by Helicity-Switching Compton Scattering. *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 87. P.127001.
3. Kortus J. Mazin I. I., Belashchenko K. D., Antropov V. P., Boyer L. L. Superconductivity of Metallic Boron in MgB<sub>2</sub>. *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 86. P.4556.
4. Liu A.Y., Mazin I. I., Kortus J. Beyond Eliashberg Superconductivity in MgB<sub>2</sub>: Anharmonicity, Two-Phonon Scattering, and Multiple Gaps. *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 87. P.087005.
5. Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції аспірантів і студентів [«Волинь очима молодих науковців: минуле, сучасне, майбутнє»] (12-13 травня 2010 року), Т.2/ М-во освіти і науки, Вол. нац. ун-т ім. Лесі Українки. Луцьк: РВВ ВНУ ім. Лесі Українки, 2010, С.350.
6. Moskalenko V.A. *Fiz. Met. Metallov // Phys. Met. and Metallog.* 1959. Vol.8 P.503.
7. Suhl H., Matthias B. T., Walker L. R. Bardeen-Cooper-Schrieffer Theory of Superconductivity in the Case of Overlapping Bands. *Physical Review Letters*. 1959. Vol. 3 P.552.
8. Larbalestier D.C., Cooley L.D., Rikel M.O., Squiteri A.A., Naus M.T. Strongly linked current flow in polycrystalline forms of the superconductor MgB<sub>2</sub>. *Nature*. 2001. Vol.410. P.186.
9. Kambara M., Babu N.H., Sadki E.S., Cooper J.R., Minaminami H. High intergranular critical currents in metallic MgB<sub>2</sub> superconductor. *Supercond. sci. Technol.* 2001. Vol. 14. P.15.

10. <http://arxiv.org/ftp/cond.mat/papers/0105/0105545.pdf>.
11. Bud'ko S.L., Lapertot G., Petrovic C., Cunningham C. E., Anderson N., and Canfield P. C. Boron Isotope Effect in Superconducting MgB<sub>2</sub>. *Physical Review Letters*. 2001. Vol 86. P.1877.
12. Canfield P.C., Bud'ko S.L., Finnemore D.K. An overview of the basic physical properties of MgB<sub>2</sub>. *Physica*. 2003. Vol. 385, P.1.
13. Hinks D.G., Claus H., Jorgensen J. D. The complex nature of superconductivity in MgB<sub>2</sub> as revealed by the reduced total isotope effect. *Nature*. 2001. Vol.411. P.457.
14. Bouquet F., Wang Y., Fisher R.A., Phillips N.E., Hinks D.G., Jorgensen J.D., Junod A. Phenomenological two-gap model for the specific heat of MgB<sub>2</sub>. *Physical Review Letters*. 2001. Vol.87. P.047001.
15. Wang Y. Plackowski T., Junod A. Specific heat in the superconducting and normal state (2–300 K, 0–16 T), and magnetic susceptibility of the 38 K superconductor MgB<sub>2</sub>: evidence for a multicomponent gap. *Physica*. 2001. Vol.355, P.179-193.
16. Mun-Seog K., Skinta J. A., Lemberger T. R., Kang W.N., Hyeong-Jin K., Eun-Mi C., Sung-Ik L. Reflection of two-gap nature in penetration depth measurements of MgB<sub>2</sub> film. *Physical Review Letters*. 2002. Vol.66.
17. Giubilo F., Roditchev D., Sacks W., Lamy R., Klein J. Strong coupling and double gap Density of states in superconducting MgB<sub>2</sub>. *EuroPhys*. 2001. Vol.58. P.764.
18. Tsuda S., Yokoya T., Kiss T., Takano Y., Togano K., Kito H., Ihara H., and Shin S. Evidence for a Multiple Superconducting Gap in MgB<sub>2</sub> from High-Resolution Photoemission Spectroscopy. *Physical Review Letters*. 2001. Vol.87.
19. Buzea C. Yamashita T. Review of superconducting properties of MgB<sub>2</sub>. *Science and Technology*. 2001. Vol.14.
20. Canfield P.C., Crabtree G.W. Magnesium Diboride: Better Late than Never. *Physics today*. 2003. Vol.56, No.3. P.34.

21. Prozorov R., Bud'ko S. L., and Canfield P. C. Energy gap and proximity effect in MgB<sub>2</sub> superconducting wires. *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 64.
22. Angst M., Puzniak R., Wisniewski A., Jun J., Kazakov S.M., Karpinski J., Roos J., Keller H. Temperature and Field Dependence of the Anisotropy of MgB<sub>2</sub>. *Physical Review Letters*. 2002. Vol.88.
23. Eltsev Yu., Lee S., Nakao K., Chikumoto N., Tajima S., Koshizuka N., Murakami M. Anisotropic resistivity and Hall effect in MgB<sub>2</sub> single crystals. *Physical Review Letters*. 2002. Vol.65.
24. Posazhennikova A.I. Anisotropic *s*-wave superconductivity: Comparison with experiments on MgB<sub>2</sub> single crystals. *Euro Physical Letters*. 2002. Vol.60, P.134.
25. Bud'ko S. L., Petrovic C., Lapertot G., Cunningham C. E., Canfield P. C., Jung M-H., Lacerda A. H. Magnetoresistivity and  $H_{c2}(T)$  in MgB<sub>2</sub>. *Physical Review Letters*. 2001. Vol.63.
26. Askerzada I.N. Nonlinear Temperature Dependence of Magnetization of Two-Band Superconductors Near Upper Critical Field. *Communications in Theoretical Physics*. 2007. Vol.48. P.949-952.
27. Askerzade I.N., Gencer A., Guclu N. On the Ginzburg-Landau analysis of the upper critical field  $H_{c2}$  in MgB<sub>2</sub>. *Supercond. sci. Technol*. 2002. Vol. 15, P.13-16.
28. Askerzade I. N. Ginzburg–Landau theory for two-band *s*-wave superconductors: application to non-magnetic borocarbides LuNi<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C, YNi<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C and magnesium diboride MgB<sub>2</sub>. *Physica C*. 2003. V. 397, Iss. 3-4. P. 99-111.
29. Specific heat of MgB<sub>2</sub> in a one- and a two-band model from first-principles calculations / A. A. Golubov [et al.] / *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2002. V. 14, Iss. 6. P. 1353-1361.
30. Koshelev A. E., Golubov A. A. Mixed state of a dirty two-band superconductor: application to MgB<sub>2</sub>. *Physical Review Letters*. 2003. V. 90, Iss. 17. P. 177002.
31. Gurevich A. Limits of the upper critical field in dirty two-gap superconductors *Physica C*. 2007. V. 456, Iss. 1-2, P. 160-169.

## АНОТАЦІЯ

**Кубінський А. М.**

### **Ефект Джозефсона в контактах на основі двощілинних надпровідників.**

В роботі представлено теорію Гінзбурга-Ландау для опису двощілинних надпровідників, як асимптотичну форму мікроскопічної теорії надпровідності для температур, близьких до критичної та проаналізовано ефективність використання цієї теорії для опису ефектів фазової когерентності в таких надпровідниках. Ця теорія зручна тим, що придатна для опису поведінки макроскопічних величин, безвідносно до причини виникнення надпровідності.

Спираючись на теорію Гінзбурга-Ландау для двощілинних надпровідників, досліджено струмові стани в таких надпровідниках. Якісно нові властивості в порівнянні зі звичайними надпровідниками, виникають внаслідок існування двох різних комплексних параметрів порядку  $\psi_1$  і  $\psi_2$ . Це означає виникнення додаткового внутрішнього ступеня вільності: фазового зсуву між параметрами порядку. Ми вивчали наслідки  $\delta\varphi$  - зміщення в безструмовому стані у протяжних плівках або каналах.

В роботі розглянуті однорідні струмові стани в тонкому надпровідникові, поперечні розміри якого  $d \ll \xi_{1,2}(T), \lambda_{1,2}(T)$ , де  $\xi_{1,2}(T)$  і  $\lambda_{1,2}(T)$  довжини когерентності і глибини проникнення Лондонів для кожного параметра порядку, відповідно. За відсутності зовнішнього магнітного поля використано калібрування  $\vec{A} = 0$ . Одержано вираз для вільної енергії при  $\vec{A} = 0$  та густину струму  $J$  в термінах фаз  $\theta$  і  $\varphi$ .

Математична схема дослідження фізичних властивостей двощілинного надпровідника  $MgB_2$ , представлена в кваліфікаційній роботі, може бути використана для опису інших надпровідних сполук з двома енергетичними щілинами. Послідовний і докладний виклад при одержанні основних рівнянь теорії Гінзбурга-Ландау для двощілинних надпровідників може використовуватись здобувачами освіти.

**Ключові слова:** двощілинний надпровідник; ефект Джозефсона; тунельний надпровідний контакт; струм-фазова залежність; критичний струм.



## SUMMARY

**Kubinskyi A. M.**

**The Josephson effect in contacts based on two-gap superconductors.**

The Ginzburg-Landau theory for describing two-gap superconductors is presented as an asymptotic form of the microscopic theory of superconductivity for temperatures close to the critical one. The efficiency of using this theory to describe phase coherence effects in such superconductors is analyzed. This theory is convenient because it is suitable for describing the behavior of macroscopic quantities, regardless of the cause of superconductivity.

Based on the Ginzburg-Landau theory for two-gap superconductors, current states in such superconductors are investigated. Qualitatively new properties compared to conventional superconductors arise due to the existence of two different complex order parameters. This means the emergence of an additional internal degree of freedom: the phase shift between the order parameters. We have studied the consequences of the phase shift in the zero-current state in extended films or channels.

The paper considers homogeneous current states in a thin superconductor, whose transverse dimensions are much smaller than the coherence lengths and London penetration depths for each order parameter, respectively. In the absence of an external magnetic field, the London gauge was used. An expression for the free energy at  $T = 0$  and the current density  $J$  in terms of phases  $\theta$  and  $\varphi$  is obtained.

The mathematical scheme for studying the physical properties of the two-gap superconductor MgB<sub>2</sub>, presented in this qualification work, can be used to describe other superconducting compounds with two energy gaps. A consistent and detailed presentation of the derivation of the main equations of the Ginzburg-Landau theory for two-gap superconductors can be used by students.

**Keywords:** two-gap superconductor; Josephson effect; tunnel superconducting junction; current-phase relation; critical current.