

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ**

**Кафедра теоретичної та комп'ютерної фізики імені А. В. Свідзинського**

На правах рукопису

**Ярошук Роман Ярославович**

**КІНЕТИЧНІ ЯВИЩА В УЛЬТРАХОЛОДНИХ БОЗЕ-ГАЗАХ**

Спеціальність: 104 «Фізика та астрономія»  
Освітньо-професійна програма «Фізика та астрономія»  
Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:  
**Шигорін Петро Павлович,**  
Кандидат фізико-математичних наук, доцент

**РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ**

Протокол № \_\_\_\_\_

засідання кафедри теоретичної та комп'ютерної  
фізики імені А. В. Свідзинського

від \_\_\_\_\_ 2024 р.

Завідувач кафедри  
\_\_\_\_\_ Сахнюк В.Є.

ЛУЦЬК 2024

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	3
РОЗДІЛ 1 Явище Бозе-Айнштайнівської Конденсації .....	5
1.1. БАК в ідеальному газі.....	5
1.2. Слабко-неідеальний бозе-газ.....	9
1.3. Надплинність .....	15
РОЗДІЛ 2 Конденсація в атомарних Бозе-газах .....	21
2.1. Експериментальне отримання і властивості атомних конденсатів.....	21
2.2. Когерентність і розпад конденсату .....	26
2.3. Атомний лазер .....	27
РОЗДІЛ 3 Кінетика конденсованого Бозе-газу .....	31
3.1. Рівняння Гросс-Пітаєвського .....	36
3.2. Узагальнення рівняння Гросс-Пітаєвського на випадок температур відмінних від нуля.....	38
3.3. Квантове кінетичне рівняння Больцмана .....	42
3.4. Рівняння дворідинної гідродинаміки надконденсату.....	47
3.5. Обчислення кінетичних коефіцієнтів.....	51
ВИСНОВКИ .....	54
СПИСКИ ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	55

## ВСТУП

Після першої експериментальної реалізації Бозе-Айнштайнівської конденсації в розріджених атомних газах [1] область ультрахолодних газів активно досліджується [2-7]. В останні роки значний обсяг експериментальних і теоретичних робіт було зосереджено на фермі-газах. По відношенню до бозе-газів фермі системи мають важливі відмінності, пов'язані з квантовою статистикою і впливом взаємодії. Перша важлива різниця полягає в тому, що атоми фермі-газу не можуть перебувати в одному квантовому стані.

Друга відмінність полягає в тому, що при низькій температурі атоми розрідженого фермі-газу заповнюють одночастинкові спінові стани практично не взаємодіючи, оскільки s-хвиля розсіювання підпорядковується принципу Паулі. Це приводить до реалізації такого модельного поняття, як ідеальний фермі-газ, що має дуже важливе застосування для точних вимірювань, а також процесів передачі квантової інформації.

Третя відмінність полягає в тому, що надплинність в фермі-газі є результатом, де механізм взаємодії відіграє важливу роль, яка приводить до виникнення спарювання. У результаті виникає великий набір хвильових функцій, в залежності від знаку та значення довжини розсіювання, що характеризують взаємодію між атомами.

Особливо цікава конфігурація так званої унітарної межі, коли довжина розсіювання приймає нескінченне значення. Ця система виявилася особливо стабільною і демонструє чисті прояви надплинності. Можливість регулювання значенням довжини розсіювання дає існування резонансів Фешбаха і багато різноманітних конфігурацій захоплення магнітної і оптичної природи, а також створює можливість дослідження ультрахолодних фермі-газів.

**Актуальність дослідження:** відкриття явища Бозе-Айнштайнівської конденсації в розріджених хмарах лужних металів надало нові можливості для спостереження квантових ефектів на макроскопічному рівні.

Вивчення хмарин конденсованих атомів при ультранизьких температурах дозволяє краще зрозуміти поведінку таких складних ферміонних систем, як атомні ядра, електронний газ в металах і нейтронні зірки, а також механізм надплинності і надпровідності.

**Мета і завдання дослідження:** метою даної роботи є побудова рівнянь дворідинної гідродинаміки конденсованих атомарних бозе-газів та обчислення відповідних кінетичних коефіцієнтів.

**Об'єкт дослідження:** вироджені атомарні бозе-гази.

**Предмет дослідження:** кінетичні коефіцієнти в вироджених бозе-газах.

**Наукова новизна:** отримано аналітичні вирази для кінетичних коефіцієнтів атомарного конденсованого бозе-газу.

**Особистий внесок автора:** зроблено систематичний огляд теоретичних моделей опису квантової динаміки ультрахолодних бозе-газів; одержано рівняння дворідинної гідродинаміки конденсованого бозе-газу, досліджено кінетичні коефіцієнти.

## РОЗДІЛ 1

### Явище Бозе-Айнштайнівської конденсації

#### § 1.1. БАК в ідеальному газі

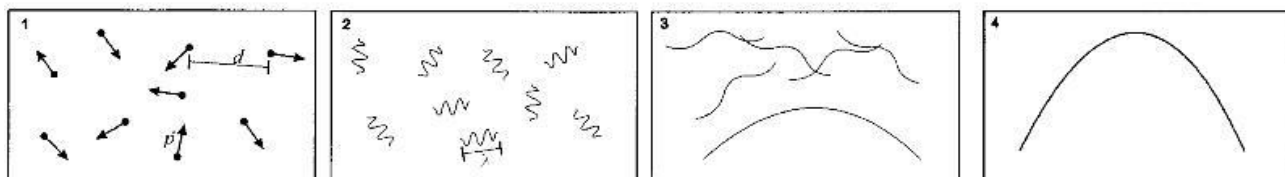
Розглянемо газ однакових атомів, між якими існує лише пружна взаємодія. Якщо газ атомів-бозонів охолодити нижче деякої температури  $T_c$ , то значна частина атомів сконденсується в квантовій системі з найнижчою енергією. При температурі  $T$  атоми з масою  $m$  можна розглядати як квантовомеханічні хвильові пакети, що мають розміри порядку довжини теплової хвилі де-Бройля:

$$\lambda = (2\pi\hbar^2/mkT)^{1/2}.$$

Величина  $\lambda$  визначає невизначеність координати, що пов'язана з тепловим розкидом імпульсів. Як видно з визначення  $\lambda$ , зі зниженням температури вона зростає.

Отже, при поступовому охолодженні атомів, ми дійдемо до стану коли довжина теплової хвилі де-Бройля стає одного порядку з міжатомною відстанню. Як наслідок, хвильові пакети сусідніх атомів починають перекриватися і бозе-газ проявляє колективну поведінку (навіть у відсутності взаємодії між атомами!). При цьому в системі відбувається фазовий перехід і утворюється бозе-айнштайнівський конденсат-хмара атомів, кожен з яких знаходиться в тому самому квантовому стані з найменшою енергією (мал.1.1).

На мал.1.1 схематично зображено критерій утворення бозе-айнштайнівського конденсату.



**Мал.1.1.** Утворення бозе-айнштайнівського конденсату. 1) При високих температурах газ можна розглядати як сукупність більярдних кульок. 2) При низьких температурах атоми можна розглядати як квантово-механічні хвильові пакети. 3) Коли температура наближається до критичної температури фазового переходу, хвильові пакети починають перекриватися, і утворюється бозе-конденсат. 4) При температурі, рівній нулю, усі атоми переходять у конденсат (для ідеального газу) і утворюється “гігантська хвиля речовини”.

Математично умову появи в бозе-газі конденсату можна записати у вигляді

$$\lambda \sim d, \quad d \sim n^{-1/3} \Rightarrow \lambda^3 n \sim 1,$$

де  $d$ - відстань між атомами,  $n$ -концентрація атомів.

Розгляньмо модель ідеального бозе-газу, яка описується гамільтоніаном і комутаційним співвідношенням такого виду

$$H = \sum_{\vec{p}} \xi_p c_{\vec{p}}^+ c_{\vec{p}},$$

$$\left[ c_{\vec{p}}, c_{\vec{p}'}^+ \right] = \delta_{\vec{p}, \vec{p}'}, \quad \left[ c_{\vec{p}}, c_{\vec{p}'} \right] = 0. \quad (1.1.1)$$

Для розрахунку статистичних властивостей найзручніше застосовувати великий канонічний розподіл, тому  $\xi_p = p^2 / 2m - \mu$ , де  $\mu$  - хімічний потенціал системи, що визначається через середнє число частинок

$$\bar{N} = Z^{-1} Sp \left( \hat{N} \exp(-\beta \xi_p) \right),$$

$\hat{N} = \sum_{\vec{p}} c_{\vec{p}}^+ c_{\vec{p}}$  - оператор повного числа частинок,  $Z = Sp(\exp(-\beta \xi_p))$  - велика статистична сума,  $\beta = T^{-1}$  - зворотна температура,  $k_B$ -стала Больцмана – покладена рівною одиниці.

З огляду на комутативність операторів з різними  $\vec{p}$  статистична сума обчислюється без будь-яких труднощів

$$\begin{aligned}
Z &= Sp \exp\left(-\beta \sum_{\vec{p}} \xi_p \hat{n}_p\right) = Sp \prod_{\vec{p}} \exp\left(-\beta \xi_p \hat{n}_p\right) = \\
&= \prod_{\vec{p}} \sum_{n_p=0}^{\infty} \exp(-\beta \xi_p n_p) = \prod_{\vec{p}} (1 - \exp(-\beta \xi_p))^{-1}.
\end{aligned}$$

Звідси для термодинамічного потенціалу маємо

$$\Omega = T \sum_{\vec{p}} \ln(1 - \exp(-\beta \xi_p)), \quad (1.1.2)$$

а для середнього числа частинок

$$\bar{N} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \sum_{\vec{p}} (\exp(\xi_p/T) - 1)^{-1}. \quad (1.1.3)$$

При обчисленні статистичної суми була використана умова  $\mu < 0$ , яка гарантує збіжність прогресії і разом з тим забезпечує позитивність середніх чисел заповнення у будь-якій комірці простору імпульсів. Зокрема, для середнього числа частинок з рівним нулю імпульсом маємо

$$\bar{N}_0 = (\exp(-\mu/T) - 1)^{-1}. \quad (1.1.4)$$

Тепер слід виконати термодинамічний граничний перехід  $\bar{N} \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty, \bar{N}/V \rightarrow n$ , де  $n$  – скінченна середня густина числа частинок. В процесі такого граничного переходу суми по імпульсах переходять у інтеграли

$$\sum_{\vec{p}} F(\vec{p}) \xrightarrow{as} \frac{V}{(2\pi)^3} \int F(\vec{p}) d\vec{p}. \quad (1.1.5)$$

Очевидно, правилом (1.1.5) можна скористатися, якщо в процесі граничного переходу  $\bar{N}_0$  не прямує до нескінченності або інакше – хімічний потенціал  $\mu$  не прямує до нуля. В цьому випадку

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{N}}{V} \rightarrow n &= \int \left( \exp\left[\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)/T\right] - 1 \right)^{-1} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{p^2 dp}{\exp\left[\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)/T\right] - 1} = \\
&= \frac{(2mT)^{3/2}}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^{-\mu/T} e^{x^2} - 1}.
\end{aligned}$$

Неважно перекопатися, що знайти із зазначеної рівності скінчене  $\mu < 0$  можна не для будь-яких  $T$ . Справді, має місце нерівність

$$\frac{2\pi^2 n}{(2mT)^{3/2}} = \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{-\mu/T} e^{x^2} - 1} < \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{x^2} - 1} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} 2,612\dots \equiv \frac{2\pi^2 n}{(2mT_c)^{3/2}}, \quad (1.1.6)$$

звідки  $T > T_c$ . Отже,  $\mu < 0$  реалізується лише в області температур вище критичної температури  $T_c$ , яка визначається останньою рівністю в (1.1.6):

$$T_c = \frac{2\pi}{m} (n/2,612)^{2/3}.$$

У зв'язку із зазначеним слід звернутися до випадку  $\mu = 0$  і, маючи на увазі, що  $\bar{N} \rightarrow \infty$ , слід виділити в сумі (1.1.3) доданок з  $p = 0$ . Виконуючи граничний перехід  $V \rightarrow \infty$ , маємо

$$n = n_0 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \sum_{\substack{\vec{p} \\ |\vec{p}| > \varepsilon}} (\exp(p^2 / 2mT) - 1)^{-1},$$

при цьому послідовність граничних переходів  $V \rightarrow \infty$  і  $\varepsilon \rightarrow 0$  аж ніяк не може бути змінена. Отже, отримуємо

$$n = n_0 + \int (\exp(p^2 / 2mT) - 1)^{-1} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3},$$

а умова конденсації, тобто умова наявності  $\bar{N}_0/V = n_0 \neq 0$  при  $V \rightarrow \infty$  має вигляд

$$\int (\exp(p^2 / 2mT) - 1)^{-1} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} < n. \quad (1.1.7)$$

Різниця

$$\begin{aligned} n - \int (\exp(p^2 / 2mT) - 1)^{-1} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} &= \\ &= n - \frac{(2mT)^{3/2}}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{x^2} - 1} = n \left( 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right) \end{aligned} \quad (1.1.8)$$



дає густину числа конденсатних частинок  $n_0$ . Отримуючи (1.1.8), ми скористалися визначенням критичної температури на підставі (1.1.6). Отже,

$$n_0 = n \left( 1 - (T/T_c)^{3/2} \right), \quad (1.1.9)$$

звідки випливає, що при  $T = 0$  всі частинки знаходяться у конденсаті, а при температурі  $T = T_c$  конденсат зникає. Зрозуміло, що нижче  $T_c$  середні числа заповнення станів з різними імпульсами мають вигляд

$$\bar{n}_{\vec{p}} = n \left( 1 - (T/T_c)^{3/2} \right) (2\pi)^3 \delta(\vec{p}) + \frac{1}{\exp(p^2/2mT) - 1}, \quad (1.1.10)$$

тобто містять поряд з неперервним розподілом  $\delta$ -функційний член.

Виникнення макроскопічного заповнення одного із станів у просторі імпульсів (в даному разі з  $\vec{p} = 0$ ) називають бозе-айнштайнівською конденсацією [55].

## § 1.2. Слабко-неідеальний бозе-газ

Задача про слабко-неідеальний бозе-газ була розв'язана Боголюбовим (1947). Ця робота започаткувала мікроскопічну теорію квантових неідеальних систем і зокрема теорії надплинності та надпровідності.

Система бозе-частинок за наявності парної взаємодії між ними описується гамільтоніаном

$$H = \sum_{\vec{p}} \xi_p c_{\vec{p}}^+ c_{\vec{p}} + \frac{1}{2V} \sum_{\substack{(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}'_1, \vec{p}'_2) \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2}} \Phi(\vec{p}_1 + \vec{p}'_1) c_{\vec{p}_1}^+ c_{\vec{p}_2}^+ c_{\vec{p}'_2} c_{\vec{p}'_1} \quad (1.2.1)$$

та звичайними бозевськими комутаційними співвідношеннями для операторів породження і знищення,  $\Phi(p)$  - фур'є-образ потенціалу.

Припущення про слабкість взаємодії дає можливість вважати, що всистемі зберігається конденсат і що число надконденсатних частинок  $N - N_0$  значно менше числа частинок в конденсаті:  $N - N_0 \ll N_0$ . Ці факти можна математично описати таким чином. Враховуючи, що оператор числа конденсатних частинок  $c_0^+ c_0$  на тих станах, що нас цікавлять, має

макроскопічно великі власні значення, а оператор  $c_0^+c_0$  внаслідок комутаційних співвідношень відрізняється від нього на одиницю, можемо вважати обидва ці оператори порядку  $N_0$ , а тому знехтувати некомутативністю  $c_0$  і  $c_0^+$ . Отже, в цій задачі зазначені оператори можна вважати звичайними  $c$ -числами, рівними  $\sqrt{N_0}$ . Далі, через мализну чисел заповнення надконденсатних частинок можна розглядати оператори  $c_{\vec{p}}$  і  $c_{\vec{p}}^+$  при  $\vec{p} \neq 0$  як малі і з цієї причини зберігати в гамільтоніані лише добутки таких операторів у кількості не більше двох, а оператори  $c_0$  і  $c_0^+$  замінити на  $\sqrt{N_0}$ .

Таким чином отримуємо

$$\begin{aligned} H = & \frac{\Phi(0)N_0^2}{2V} - \mu N_0 + \frac{\Phi(0)N_0}{V} \sum_{\vec{p} \neq 0} c_{\vec{p}}^+ c_{\vec{p}} - \mu \sum_{\vec{p} \neq 0} c_{\vec{p}}^+ c_{\vec{p}} + \\ & + \sum_{\vec{p}} \frac{p^2}{2m} c_{\vec{p}}^+ c_{\vec{p}} + \frac{N_0}{2V} \sum_{\vec{p} \neq 0} \Phi(p) (2c_{\vec{p}}^+ c_{\vec{p}} + c_{-\vec{p}}^+ c_{\vec{p}}^+ + c_{\vec{p}} c_{-\vec{p}}) \end{aligned}$$

В найнижчому наближенні, коли числом надконденсатних частинок нехтують, отримуємо

$$E_1 = \Phi(0)N_0^2 / 2VB - \mu N_0.$$

Хімічний потенціал знайдемо з умови звідки

$$\mu = \Phi(0)N_0 / V, \quad E_1 = -\frac{\Phi(0)N_0^2}{2V},$$

отже,

$$H = -\frac{\Phi(0)N_0^2}{2V} + \sum_{\vec{p} \neq 0} \left\{ \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{N_0 \Phi(p)}{V} \right) c_{\vec{p}}^+ c_{\vec{p}} + \frac{N_0}{2V} \Phi(p) (c_{-\vec{p}}^+ c_{\vec{p}}^+ + c_{\vec{p}} c_{-\vec{p}}) \right\} \quad (1.2.2)$$

Ми прийшли до гамільтоніана, який є квадратичною апроксимацією вихідного. Ця апроксимація справедлива за умов, щойно описаних. Для його діагоналізації Боголюбов застосував лінійне канонічне перетворення до нових операторів  $a_{\vec{p}}$  та  $a_{\vec{p}}^+$  за формулами

$$c_{\vec{p}} = u_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + v_{\vec{p}} a_{-\vec{p}}^+$$

$$c_{\bar{p}}^+ = u_{\bar{p}} a_{\bar{p}}^+ + v_{\bar{p}} a_{-\bar{p}} \quad (1.2.3)$$

Лінійне перетворення (1.2.3) є канонічним, якщо нові оператори підкоряються таким самим комутаційним співвідношенням, що й старі. Отже, ми повинні вимагати

$$\left[ a_{\bar{p}}, a_{\bar{p}'}^+ \right] = \delta_{\bar{p}, \bar{p}'}, \quad \left[ a_{\bar{p}}, a_{\bar{p}'} \right] = \left[ a_{\bar{p}}^+, a_{\bar{p}'}^+ \right] = 0,$$

а це призводить до правильних комутаційних співвідношень для операторів  $c_{\bar{p}}$  та  $c_{\bar{p}}^+$ , якщо виконуються умови канонічності:

$$u_{\bar{p}}^2 - v_{\bar{p}}^2 = 1, \quad u_{-\bar{p}} = u_{\bar{p}}, \quad v_{-\bar{p}} = v_{\bar{p}}. \quad (1.2.4)$$

За цих умов розв'язок співвідношень відносно операторів  $a_{\bar{p}}$  та  $a_{\bar{p}}^+$  дає:

$$a_{\bar{p}} = u_{\bar{p}} c_{\bar{p}} - v_{\bar{p}} c_{-\bar{p}}^+, \quad a_{\bar{p}}^+ = u_{\bar{p}} c_{\bar{p}}^+ - v_{\bar{p}} c_{-\bar{p}}. \quad (1.2.5)$$

Звичайно, можна було починати з перетворень, записаних у формі (1.2.5), і отримати ті ж самі співвідношення канонічності (1.2.4).

Якщо підставити у вираз для гамільтоніана замість старих операторів нові, скориставшись (1.2.3), то умова діагональності, тобто умова зникнення коефіцієнта перед виразом  $a_{\bar{p}}^+ a_{-\bar{p}}^+ + a_{-\bar{p}} a_{\bar{p}}$ , набуде форму рівняння

$$\frac{p^2}{m} u_{\bar{p}} v_{\bar{p}} + n_0 \Phi(p) (u_{\bar{p}} + v_{\bar{p}})^2 = 0, \quad (1.2.6)$$

яке треба розв'язувати разом з умовою канонічності. У висліді

$$u_p = \frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{2m\varepsilon(p)} \right)^{1/2} + \left( \frac{p^2}{8m\varepsilon(p)} + \frac{n_0 \Phi(p)}{2\varepsilon(p)} \right)^{1/2}, \quad (1.2.7)$$

$$v_p = \frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{2m\varepsilon(p)} \right)^{1/2} - \left( \frac{p^2}{8m\varepsilon(p)} + \frac{n_0 \Phi(p)}{2\varepsilon(p)} \right)^{1/2}, \quad (1.2.8)$$

де

$$\varepsilon(p) = \sqrt{\frac{p^2 n_0 \Phi(p)}{m} + \left( \frac{p^2}{2m} \right)^2}, \quad (1.2.9)$$

а гамільтоніан приводиться до вигляду

$$H = U_0 + \sum_{\vec{p}} \varepsilon(p) a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}, \quad (1.2.10)$$

$$U_0 = -V \frac{\Phi(0) n_0^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \left( \frac{p^2}{2m} - n_0 \Phi(p) - \varepsilon(p) \right). \quad (1.2.11)$$

Фізична інтерпретація гамільтоніана, записаного в нових операторах, очевидна. Він описує ідеальний газ квазічастинок із законом дисперсії  $\varepsilon(p)$ . Величина  $U_0$  являє собою енергію основного стану системи. Квазічастинки мають той же тип статистики бозевський, що й вихідні частинки. Очевидно, врахування вищих членів за параметром  $(N - N_0)/N_0$  призвело б до взаємодії квазічастинок.

Найбільш прикметний результат наведеного розгляду полягає у виявленні генези закону дисперсії квазічастинкових збуджень. Цей закон є лінійним для малих імпульсів

$$\varepsilon(p) \cong (n_0 \Phi(0)/m)^{1/2} p,$$

причому для стійкості спектра необхідно вимагати, щоб

$$\Phi(0) = \int \Phi(r) d\vec{r} > 0,$$

що означає перевагу сил відштовхування над силами притягання. Коефіцієнт  $(n_0 \Phi(0)/m)^{1/2}$  являє собою швидкість звуку при абсолютному нулі температури. В області великих імпульсів  $\varepsilon(p)$  прямує до кінетичної енергії вихідної частинки. Відношення  $\varepsilon(p)/p$  має, очевидно, суттєво позитивне значення. Тим самим спектр квазічастинкових збуджень задовольняє критерій надплинності Ландау. Таким чином, слабо-неідеальний бозе-газ має властивість надплинності.

Якщо конденсат приходить до руху з певною швидкістю  $\mathcal{G}_s$  (ми розглядатимемо випадок просторово-однорідної течії), то його імпульс стає відмінним від нуля. Боголюбівське перетворення у цьому випадку безпосередньо застосувати неможливо. Однак можна перейти до системи відліку, що рухається разом із конденсатом, в ній зробити канонічне

перетворення до квазічастинок, а потім, використовуючи звичайні формули галілеївського перетворення для енергії та імпульсу, повернутися до лабораторної системи (пов'язаної із стінками капіляра).

Хай оператор імпульсу в системі конденсату є  $\vec{P}$ :

$$\vec{P} = \sum_{\vec{p}} \vec{p} c_{\vec{p}}^+ c_{\vec{p}}.$$

Виконуючи канонічне перетворення (1.2.3), неважко впевнитися у реалізації такої знаменної властивості

$$\vec{P} = \sum_{\vec{p}} \vec{p} c_{\vec{p}}^+ c_{\vec{p}} = \sum_{\vec{p}} \vec{p} a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}, \quad (1.2.12)$$

яка має місце внаслідок умови канонічності (1.2.4). Справді, зайві доданки  $\sum_{\vec{p}} \vec{p} v_p^2$  та  $\sum_{\vec{p}} \vec{p} u_p v_p (a_{-\vec{p}} a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}}^+ a_{-\vec{p}}^+)$  щезають, як це видно після заміни  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ .

Враховуючи (1.2.11) в лабораторній системі маємо

$$H_{g_s} = U_{g_s} + \vec{P} \vec{g}_s + \sum_{\vec{p}} \varepsilon(p) a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} = U_{g_s} + \sum_{\vec{p}} (\varepsilon(p) + \vec{p} \vec{g}_s) a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}, \quad (1.2.13)$$

де

$$U_{g_s} = U_0 + N \frac{m g_s^2}{2}.$$

Зрозуміло, що середні числа заповнення квазічастинок тепер мають вигляд

$$\langle a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} \rangle_{g_s} = \left\{ \exp \left[ (\varepsilon(p) + \vec{p} \vec{g}_s) / T \right] - 1 \right\}^{-1}, \quad (1.2.14)$$

а для середнього імпульсу  $\langle \vec{G} \rangle$  в лабораторній системі отримуємо

$$\langle \vec{G} \rangle = N m \vec{g}_s + \langle \vec{P} \rangle = M \vec{g}_s + \sum_{\vec{p}} \vec{p} \left\{ \exp \left[ (\varepsilon(p) + \vec{p} \vec{g}_s) / T \right] - 1 \right\}^{-1}. \quad (1.2.15)$$

Щоб  $\langle a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} \rangle_{g_s}$  було позитивним, треба вимагати виконання нерівності

$\varepsilon(p) + \vec{p} \vec{g}_s > 0$  для будь-яких  $\vec{p}$ . Очевидно, вона буде забезпечена, якщо

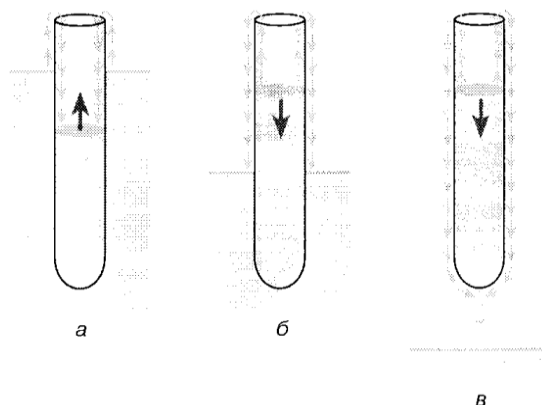
$\varepsilon(p) - \bar{p} \bar{\mathcal{Q}}_s > 0$ . Але остання нерівність означає, що  $\mathcal{Q}_s < \varepsilon(p)/p$  при будь-яких  $p$  тобто  $\mathcal{Q}_s < \mathcal{Q}_s^c$ .

Як бачимо, зараз ми на новій основі прийшли до результатів в 1.1 щодо можливості бездисипативного руху в області швидкостей, які не перевищують критичної. Підкреслимо, однак, що викладені щойно міркування, сперті на явний мікроскопічний розгляд, мають більш фундаментальний характер, аніж наведені при обґрунтуванні критерію Ландау. Перш за все, тепер зрозуміло, що швидкість, про яку йдеться, є швидкістю руху конденсату  $\bar{\mathcal{Q}}_s$ . Далі, умова невід'ємності середніх (1.2.14) безпосередньо пов'язана з бозе-статистикою, отже, і вимога  $\varepsilon(p) + \bar{p} \bar{\mathcal{Q}}_s > 0$  обґрунтована для квазічастинкових збуджень бозевського типу. У випадку фермі-систем через знак плюс у формулі, аналогічній (1.2.14) підстав для такої вимоги нема.

Говорячи про бозе-системи, зазначимо, що наведена нерівність безумовно необхідна для стійкості течії, однак вона не є достатньою для цього. Справді, її реалізація зовсім не забороняє втрати стійкості через виникнення збуджень, які дають малий внесок у термодинаміку, або якимось іншим механізмом. Вже показано (Фейнман, 1955), що в гелії можливо утворення квантових вихорів, завдяки чому критична швидкість, яка за теорією Ландау повинна була становити приблизно  $60$  м/сек, знижується до сотні сантиметрів на секунду. Однак і теорія Фейнмана не знаходиться у кількісній згоді з експериментом, отож проблему критичних швидкостей не можна вважати розв'язаною [55].

### § 1.3. Надплинність

Явище надплинності було відкрите Петром Капицею [9] і незалежно Джеком Аленом та Доном Майзене [10] в 1938 р. П. Л. Капиця виявив цікаву особливість рідкого гелію протікати через вузькі капіляри, що було б неможливо для звичайної рідини. Це пов'язано з тим, що в рідині існує в'язкість і відбувається тертя об стінки капіляра. Відсутність в'язкості в гелії можна спостерігати не тільки при його протіканні з пробірки в пробірку неоднозначно по стінкам пробірки. На мал.1.2 схематично зображений цей ефект, відкритий Х. Камерлинг-Оннісом, який носить його ім'я [57]. Суть цього ефекту полягає в тому, що рідкий гелій тече по стінках посудини, проходячи край пробірки (мал.1.2, а, б), доти, поки рівень гелію в пробірці і у ванні не зрівняється. Якщо пробірку вийняти із ванни (мал.1.2, в), то гелій протікає через край пробірки і попадає у ванну.



Мал. 1.2. Протікання рідкого гелію по стінкам пробірки (ефект Камерлинг - Онніса)

Явище, яке спостерігається в цих експериментах, протікання рідкого гелію без тертя, отримало назву надплинності. Надплинність являє собою специфічні квантові явища, які не можна пояснити на основі класичної фізики (згідно якої будь-яка рідина повинна мати в'язкість), в зв'язку з цим рідкий гелій часто називають квантовою рідиною. При аналізі властивостей рідкого гелію необхідно врахувати, що існує два стійких ізотопа гелію: ізотоп з масовим числом 3, ядро якого містить два протона і один нейтрон ( $^3\text{He}$ ), та

ізоп з масовим числом 4, ядро якого містить два протона і два нейтрона ( ${}^4\text{He}$ ). В природноу гелії число атомів  ${}^3\text{He}$  в мільйон разів менше за число атомів  ${}^4\text{He}$ , і, враховуючи невелику кількість  ${}^3\text{He}$ , можна вважати, що гелій складається із атомів  ${}^4\text{He}$ .

Для пояснення явища надплинності рідкого гелію ключовим являється той факт, що атоми  ${}^4\text{He}$  складають парне число ферміонів і тому мають цілий спін, який являється бозонами. Яким же чином цей факт дає можливість рідкому гелію протікати без тертя? Для відповіді на це питання пригадаємо, що виникнення тертя при протіканні звичайної рідини супроводжується процесами зіткнення молекул рідини з нерівностями поверхні, по якій тече рідина. В результаті цих зіткнень, протікання рідини поступово сповільнюється. Очевидно, що процес сповільнення всього потоку рідини відбувається за рахунок великій кількості актів сповільнення окремих молекул, оскільки кожна мікроскопічна неоднорідність поверхні може зупинити тільки ту молекулу, яка знаходиться поблизу даної неоднорідності. Неважко переконатися в тому, що у випадку рідини із бозонів такий механізм зупинення не буде працювати. Так воно і є, стан окремих молекул-бозонів характеризується вектором швидкості руху і завдяки ефекту бозе-айнштайнівської конденсації всі молекули будуть прагнути рухатися в одному напрямку з однаковою швидкістю.

Як було сказано, явище бозе-айнштайнівської конденсації являє собою виявлення, образно кажучи, колективного характера поведінки бозонів. І тому так важко зупинити окрему взятую молекулу-бозон в потоці рідини. Єдиний спосіб зупинити потік бозонів і не попасти в протиріччя з їх квазічастинковими властивостями заключається в одночасній зупинці великого числа бозонів. Як прийнято вважати, зупинка являється можливою тільки завдяки виникненню в рідині квазічастинкових збуджень, в яких приймає участь макроскопічно велика кількість молекул. Але для виникнення таких збуджень необхідна достатньо велика енергія. При низьких температурах отримати цю енергію в навколишньому середовищі неможливо. Тому єдиним джерелом для отримання енергії, являє собою кінетична енергія поступального руху молекул рідини. Як



тільки кінетична енергія (швидкість поступального руху) молекул буде вище за деяку критичну величину, то виникає можливість виникнення вище згаданих квазічастинкових збуджень і рідкий гелій втрачає властивість надплинності. Для якісного аналізу зупинення рідкого гелію необхідно розглянути виникнення цих квазічастинкових збуджень.

В 1947р. М . Боголюбов теоретично отримав спектр квазічастинкових збуджень. Виявилось, що при температурі  $T=0$  енергія квазічастинкових збуджень  $E$  залежить від його імпульсу  $P$  згідно формули:

$$E(p) = \sqrt{\frac{\rho v(p) p^2}{M^2} + \left(\frac{p^2}{2M}\right)^2}, \quad (1.3.1)$$

де  $M$  – маса атома  ${}^4\text{He}$ ,  $\rho$  – густина гелію, функція  $v(p)$  залежить від характеру взаємодії між атомами в рідкому гелію.

Розглянемо вираз для енергії (1.3.1) у випадку малих і великих імпульсів  $p$ . Із (1.3.1) слідує, по-перше, що при  $p \rightarrow 0$  функція  $v(p)$  повинна прямувати до скінченної величини  $v(0) > 0$ , тому що в іншому випадку підкореневий вираз в (1.3.1) буде від'ємним при  $p \rightarrow 0$  і енергія  $E(p)$  перестане бути суттєвою величиною при малих значеннях  $p$ . По-друге,  $p \rightarrow 0$  в (1.3.1) можна знехтувати другим доданком під знаком корення (який пропорційний  $p^4$ ) в порівнянні з першим доданком (який пропорційний  $p^2$ ). Таким чином, при  $p \rightarrow 0$  енергія квазічастинкових збуджень (1.3.1) набуде вигляду:

$$E(p) = \frac{\sqrt{\rho v(0)}}{M} p = up, \quad (1.3.2)$$

де  $U = \sqrt{\rho v(0)/M}$  - швидкість звуку рідкому гелію.

Із (1.3.2) випливає, що при малих імпульсах для енергії квазічастинкових збуджень в рідкому гелію отримуємо таке ж відношення, як і для фононів в твердому тілі. При  $p \rightarrow \infty$  кінетична енергія атомів гелію значно перевищує потенціальну енергію їх взаємодії. Тому в підкореновому виразі (1.3.1) буде переважати другий доданок (який пропорційний  $p^4$ ) не залежно від того, який явний вигляд функції  $v(p)$ , так що

$$E = \frac{p^2}{2M} \quad (1.3.3)$$

і енергія збуджень стає приблизно рівною кінетичній енергії окремо взятого атома гелію.

Робимо висновок, що функція  $E(p)$  переходить від лінійної залежності (1.3.2) при малих  $p$  до квадратичної залежності (1.3.3) при великих значеннях  $p$ . Шляхом елементарного математичного аналізу легко переконатися в тому, що така функція непоправно буде мати ще один мінімум при  $p \neq 0$ . Необхідно відмітити, що явний вигляд залежності  $E(p)$  може бути безпосередньо виявлений із експериментів в рідкому гелію по розсіянні нейтронів. При проходженні через рідкий гелій пучок нейтронів буде взаємодіяти з атомами гелію і розсіюватися, змінюючи при цьому свою енергію та імпульс. Тому, знаючи початкову енергію нейтронів і вимірюючи їх енергію після проходження через гелій, можна безпосередньо визначити енергію та імпульс квазічастинкових збуджень в рідкому гелії, які виникають внаслідок взаємодії з нейтронами, і знайти таким чином залежність  $E(p)$ .

Покажемо тепер, що система з енергетичним спектром квазічастинкових збуджень, яка зображена на мал.1.2, має властивість надплинності. Нехай в потоці рідкого гелію під дією сили тертя  $F$  за час  $t$  виникає квазічастинкове збудження з імпульсом  $p$  та енергією  $E(p)$ . Згідно другому закону Ньютона,  $p = Ft$ . Оскільки сила тертя  $F$  напрямлена протилежно до швидкості потоку гелію  $V$ , то за час  $t$  ця сила буде мати роботу  $A = FVt = -pv$ . Зміна енергії рідкого гелію при цьому буде  $E(p) - pv$ , що являє собою суму енергії квазічастинкових збуджень  $E(p)$  і абсолютної роботи  $A$ . Оскільки процес тертя приводить до зменшення енергії тіл, що рухаються, то для появи квазічастинкових збуджень за рахунок тертя (що відповідає процесу зупинення рідини) повинна виконуватися рівність

$$E(p) - pv < 0. \quad (1.3.4)$$

Очевидно, коли невиконується умова (1.3.4), то виникає явище надплинності при  $v < E(p)/p$ . Якщо ця нерівність виконується для мінімального значення відношення  $E(p)/p$ , то вона буде виконуватися і при будь-яких інших його значеннях. Тому умова надплинного руху має вигляд

$$v < \min\left(\frac{E(p)}{p}\right). \quad (1.3.5)$$

Але мінімум функції  $E(p)/p$  є лише тангенс кута нахилу прямої, яка дотикається до функції  $E(p)$  в точці  $p = p_0$ . Величина цього тангенса визначає критичну швидкість потоку рідкого гелію

$$v_0 = \min \frac{E}{p}, \quad (1.3.6)$$

при якій рідкий гелій втрачає властивість надплинності.

Розглянемо яким чином температура рідкого гелію буде впливати на його надплинність. Добре відомо, що в стані термодинамічної рівноваги будь-яка система прагне зайняти стан з мінімальною енергією. Тому при низьких температурах в рідкому гелії існують лише квазічастинкові збудження фононного типу, який відповідає лінійному відрізку залежності  $E(p)$  поблизу точки  $p = 0$ , оскільки саме таким збудженням відповідає мінімальна енергія  $E(p)$ .

При збільшенні температури буде збільшуватися число ротонів в квазічастинкових збудженнях. Необхідно відмітити, що між фононного та ротонного типу збуджень не існує суттєвої відмінності і ці терміни означають лише те, що дані збудження відповідають різким відрізням єдиної функції  $E(p)$ . Якби збудження (фонони або ротони) не виникали в гелії при збільшенні температури, сам факт їх появи говорить про те, що середня енергія атомів гелію при збільшенні температури буде зростати. Це зростання енергії приведе до того, число атомів в основному стані буде зменшуватися із збільшенням температури [59]. При деякій температурі  $T_\lambda$  число атомів гелію в основному стані стає настільки малим, що їх вже не можна розглядати як великі квазічастинкові збудження, в зв'язку з чим бозе-айнштайнівський конденсат

зникає і гелій втрачає властивість надплинності. Внаслідок цього явища надплинності спостерігається лише при достатньо низьких температурах  $T < T_\lambda$ .

## РОЗДІЛ II

### Конденсація в атомарних Бозе-газах

На перший погляд отримати БАК, в принципі, не складно – потрібно охолодити атоми до температури, при якій хвильові пакети починають перекриватися! Проте такому квантовому виродженню передують більш звичні для нас фазові переходи в рідкий та твердий стан. Цю звичайну конденсацію газу в рідину або тверде тіло можна якимось чином “оминути” тільки при дуже низькій густині атмосферного повітря.

Як відомо, хімічна рівновага в системі (утворення молекул чи кластерів) встановлюється внаслідок тричастинкових зіткнень між атомами, тоді як термодинамічна рівновага встановлюється через двочастинкові зіткнення. Оскільки ймовірність тричастинкових зіткнень пропорційна квадрату концентрації атомів, а ймовірність двочастинкових – першому ступеню, то при дуже низьких концентраціях газу (порядку  $10^{14}$  см<sup>-3</sup>) термодинамічна рівновага встановиться раніше, аніж хімічна, і в газі може відбутися квантове виродження. Такий стан газу буде метастабільним (від кількох секунд до хвилини), після чого газ перейде в стабільну рідку чи тверду фазу [56].

Отже, для виявлення БАК в “чистому вигляді” слід експериментувати з надзвичайно розрідженими атомними системами. Однак при таких наднизьких концентраціях критична температура знижується до мікро- та нанокельвінів!

#### § 2.1. Експериментальне отримання і властивості атомних конденсатів

Перші атомні конденсати були одержані|отримані| в 1995 р. декількома групами американських фізиків спочатку для пари дуже розріджених лужних металів (рубідія, натрію і літію), а потім (1997 р.) і для атомарного водню. Якщо в найперших експериментах число атомів в конденсаті було близько 1500, то пізніше в експериментах з|із| атомами натрію число атомів в конденсаті

досягав  $5 \cdot 10^6$ . Конденсат  $^3\text{He}$  простих атомів - атомів водню, одержаний|отриманий| в МІТ| (МІТ - Массачусетський Технологічний Інститут), містив|утримував|  $10^8$  мільйонів частинок|часток, часточок| при температурі близько  $40 \text{ мК}$ . Найбільш цікавою є|з'являється, являється| реалізація конденсату  $^3\text{He}$  літієм, оскільки тут потенціал міжатомної взаємодії Ван-дер-Ваальса виявляється в тяжінні сусідніх атомів, а не в їх відштовхуванні, як, наприклад, для рубідія. Тяжіння між атомами веде до того, що такий конденсат не може бути стійким, якщо число атомів велике, тому розрахунки показують, що тут число атомів не перевершує 1300, що і спостерігалось.

Групою фізиків з Росії (Курчатовській Інститут) і Університету м. Турку (Фінляндія) вперше (1999 р.) одержаний т.з. двовимірний БАК (H- атоми на підкладці з гелію в сильному магнітному полі,  $T \approx 120/200 \cdot 10^{-6} \text{ К}$ ).

У 1996 р. фізиками з МІТ повідомлено про побудову атомного лазера, “випромінюючого” когерентний згусток бозе - конденсуючих атомів.

Початі перші експерименти по вивченню когерентних і оптичних (у тому числі і нелінійних) властивостей одержаних бозе - конденсатів. Наприклад, в експерименті, виконаному в Гарварді (лютий 1999 р.), виявилось, що конденсат атомів натрію при температурі близько  $10^{-9} \text{ К}$  має аномально високий коефіцієнт заломлення, такий, що світло рухається через конденсат із швидкістю  $17 \text{ м/с}$ . Помічена також надзвичайно сильна залежність коефіцієнта пропускання світла від інтенсивності.

Корисно тепер розглянути фізичні основи утримання частинок в магнітному полі і їх охолодження до субмікрокельвінівських температур [59].

### 2.1.1. Магнітні пастки для конденсату

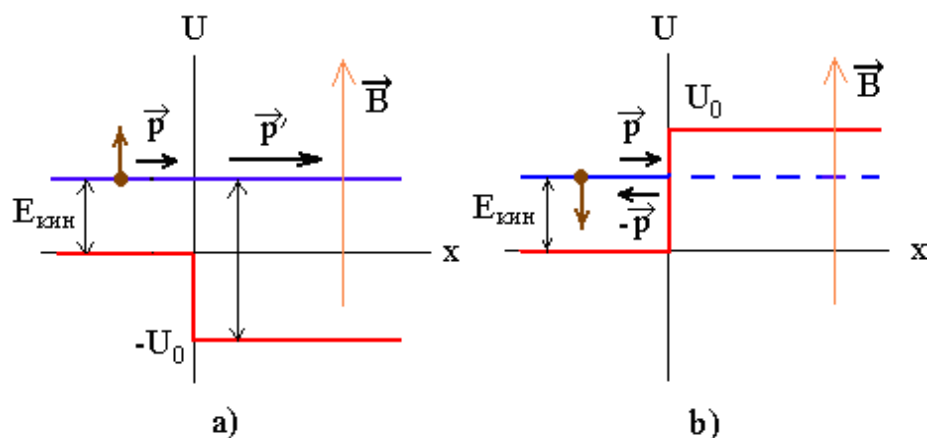
Ідея використання магнітних пасток для утримання заряджених частинок виникла спочатку у зв'язку з проблемою керованого термоядерного синтезу. Пізніше Прітчард запропонував використовувати подібні пастки для утримання

нейтральних атомів в спеціально приготованому стані з магнітними моментами, направленими проти поля.

Розглянемо спочатку простіше завдання про рух нейтральної частинки, володіючої власним магнітним моментом в магнітному полі індукції  $B$  (мал.2.1). Магнітний момент квантової частинки може мати лише кінцеве число проєкцій на полі (див., напр. [4]). Порівняємо два випадки, коли частинка падає з вакууму на область з відмінним від нуля однорідним магнітним полем, що має плоску і різку межу (площина  $x = 0$ ), з магнітним моментом, направленим по полю (проєкція  $+m$ ), і проти поля (проєкція  $-m$ ). У області зайнятої полем, повна енергія частинки складається з кінетичної енергії  $E'_{кин}$  і орієнтаційної енергії  $U_0 = \pm m$ . Згідно закону збереження енергії ( $E_{кин} = E'_{кин} + U_0$ ,  $E_{кин}$  - кінетична енергія атома у вакуумі) у випадку а) (момент направлений по полю) частинка проникає в магнітне поле і її кінетична енергія збільшується. У разі б) (якщо  $E_{кин} < U_0 = + m B > 0$ ) частинці, щоб знаходитися в області, зайнятій магнітним полем, потрібно рухатися в ній з “негативною кінетичною енергією”, що неможливо, тому, частинка відображається магнітним полем.

Якщо для віддзеркалення атомів можна використовувати описані вище “магнітні дзеркала”, то для стійкого утримання атомів потрібна пастка з гладкою залежністю від координат і абсолютним мінімумом магнітного поля.

Іншими словами потрібне, щоб поблизу центру пастки, де і повинні утримуватися атоми, розташовувався локальний мінімум поля  $B$ .



Мал.2.1. Частинка з власним магнітним моментом в магнітному полі, що займає напівпростір  $x > 0$ .

- a) магнітний момент направлений по полю - частинка проникає в область, зайняту полем;
- b) магнітний момент направлений проти поля, при величині магнітної індукції  $B > E_{\text{кин}}/m$  частинка відображається від межі поля - "магнітне дзеркало".

Добре відомо, що стаціонарне магнітне поле на відміну від електричного, є вихровим, і його силові лінії охоплюють "трубки із струмом". Проте в тій області простору, де струмів немає, магнітне поле по аналогії з електричним можна представити у вигляді  $\mathbf{B} = \nabla\psi$ , де  $\psi$  - магнітний псевдопотенціал. Наприклад, для однорідного поля, направлено уздовж осі  $z$ ,  $\psi = B_0 z$ . Через відсутність магнітних зарядів  $\text{div}\mathbf{B} = 0$ , тому псевдопотенціал повинен задовольняти рівнянню Лапласа  $\Delta\psi = 0$ . Можна показати, що магнітне поле з мінімумом при  $r = 0, z = 0$  (тут і далі  $r, z, \varphi$  - циліндричні координати) описується псевдопотенціалом вигляду:

$$\Psi(r, z, \varphi) = \beta_0 z + az^3/3 - ar^2/3 + \beta^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)/2,$$

за умови, що  $\beta^2 > 2aB_0/3$ . Щоб побачити це, досить обчислити квадрат величини магнітного поля, який рівний  $B^2 = [B_0 + az^2 - ar^2/3]^2 + b^2 r^2$ .

В результаті виходить пастка з абсолютним мінімумом магнітного поля. Саме такі пастки використовувалися в експериментах з БАК з лужних елементів.

Утримуватися в пастці будуть лише ті атоми, магнітні моменти яких направлені проти поля.

Лужні атоми, а також водень мають цілочисельний сумарний спін, що складається із спинів всіх електронів (яких у водню - 1, у літію - 3, у натрію - 11, а у рубідія - 37) і спинів всіх нуклонів ядра, для ізотопів з непарним числом нуклонів в ядрі ( ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^{23}\text{Na}$ ,  ${}^{87}\text{Rb}$ ). Отже, всі ці атоми є бозонами.

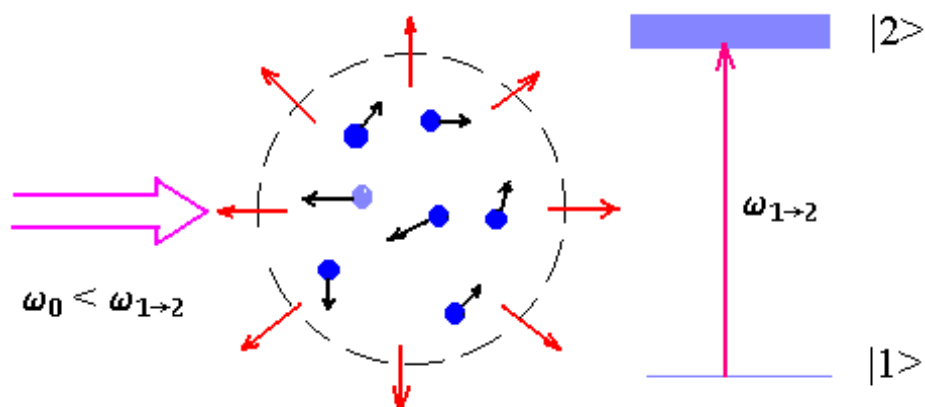
Як електрон, так і нуклони (протон і нейтрон) мають власні магнітні моменти, проте магнітний момент електрона майже в 2000 разів більше по абсолютній величині, чим магнітний момент протона. (Так зване гіромагнітне відношення, що визначає магнітний момент частинки, обернено пропорційно до її маси). Тому можна вважати (якщо не торкатися деяких "тонких" ефектів), що магнітний момент атома визначається магнітним моментом його



електронної оболонки. Оскільки ж заряд електрона негативний, то напрями електронного спіну і відповідного йому магнітного моменту протилежні. Тому магнітною пасткою утримуються ті атоми (електронний) спін, яких направлений по полю.

### 2.1.2. Лазерне охолодження і випаровування

Заповнення магнітних пасток газом супроводжується застосуванням лазерного охолодження. Стисло нагадаємо основну ідею цього методу. Розглянемо судину з хаотично рухомими атомами (мал.2.2). Хай судина опромінюється (з різних сторін) лазерами, частота  $\omega_0$  яких трохи нижче за частоту резонансного поглинання атомів  $\omega_{1 \rightarrow 2}$ , отже атом, що покоїться, не може поглинути лазерний фотон. Але, якщо атом рухається із швидкістю  $v$  назустріч лазерному пучку, то із-за ефекту Доплера, частота  $\omega$  сприйманого атомом світлового кванта, збільшується згідно формулі  $\omega = \omega_0(1 - (v/c)\cos\theta)$ , записаної для малих швидкостей ( $v/c \ll 1$ ,  $c$  - швидкість світла,  $\theta$  - кут між напрямом руху атома і світловим пучком, при русі атома назустріч пучка  $\theta = 180^\circ$ ). Тому атом може поглинути лазерний квант, але при цьому він одержує від фотона імпульс убік, протилежну своєму напрям руху. Збуджений атом через деякий час випромінює фотони в середньому ізотропно по всіх напрямках. Якщо атоми опромінювати з усіх боків одночасно, то їх можна поступово загальмувати і в результаті охолодити, добившись дуже низьких температур.



Мал. 2.2. Лазерне охолодження атомів, рухомих в пастці.

Для подальшого охолодження газу частинок в пастці застосовують метод випарного охолодження, що індукується опромінюванням атомів високочастотним магнітним полем (ВЧ). Якщо на атом з магнітним моментом,

направленим проти стаціонарного поля, подіяти імпульсом ВЧ поля (наприклад, полем, що обертається з деякою частотою  $\Omega$  в площині  $XY$ ), то магнітний момент атома можна повернути так, щоб він більше не утримувався в пастці. Підбираючи частоту  $\Omega$  можна добитися того, щоб момент перевертався тільки у “тепліших” атомів, що знаходяться на периферії пастки. По аналогії з тим, що при випаровуванні рідини, її об'єм покидають енергійніші молекули, цей процес і називають випарним охолодженням. Комбінуючи лазерне і випарне охолодження, досягають температур порядку  $10^{-6}$  K і нижче [6, 7].

## § 2.2. Когерентність і розпад конденсату

Одним з особливо улюблених експериментів було просто спостереження за зникненням конденсату. Цей експеримент привабливий сполученням притаманним йому простоти з дуже важливими висновками, які з нього випливають. Хоча було вже добре встановлене, що залежно від умов, конденсати живуть протягом деякого кінцевого часу, від часток секунди до декількох секунд, ніхто не знав, що являє собою процес, відповідальний за втрати атомів з конденсату. Щоб з'ясувати це, К.Майягт, Р. Гріст і Е. Бьорт, одержавши звичайним образом конденсат, уважно спостерігали, як із часом змінюється число атомів у конденсаті і його формі. Із цих даних випливало, що інтенсивність втрат змінюється як щільність у кубі й, отже, механізм втрат повинен бути пов'язаний із трьохчастинковими зіткненнями. Це було саме те, що очікували, але завжди приємно одержати підтвердження очікуваного. У процесі цих вимірів також визначили константу швидкості трьохчастинної рекомбінації, і це було більш цікаво. Хоча ці константи дотепер не вдається точно обчислити, уже давно було передвіщено, що вони повинні залежати від когерентних властивостей хвильової функції. У звичайному неохолодженому газі є флуктуації щільності, і трьохчастинна рекомбінація переважно відбувається в місцях високої щільності. Якщо ж є когерентність більше високого порядку, що існує, наприклад, у такому макроскопічному заселеному квантовому стані, як одномодовий лазер, або, як було передвіщено, повинна

існувати в бозе-айнштайнівському конденсаті розрідженого газу, такі флуктуації щільності бути не повинне [7]. На цій підставі було зроблено пропозицію, що константа швидкості трьохчастинної рекомбінації в БАК повинна бути в  $3!$  (тобто в 6 разів) менше, ніж для таких же атомів у неохолодженому газі. Цікаво, що цей таки пересічний процес зіткнення може бути використаний для дослідження квантових кореляцій і когерентності таким простим способом. Після визначення констант швидкостей трьохчастинної рекомбінації в конденсаті, повторили виміри на дуже холодному, але несконденсованому зразку. У цих експериментах був отриманий передвіщений множник 6 (фактично,  $7,4 \pm 2,6$ ), що підтвердило високий ступінь когерентності конденсату [58].

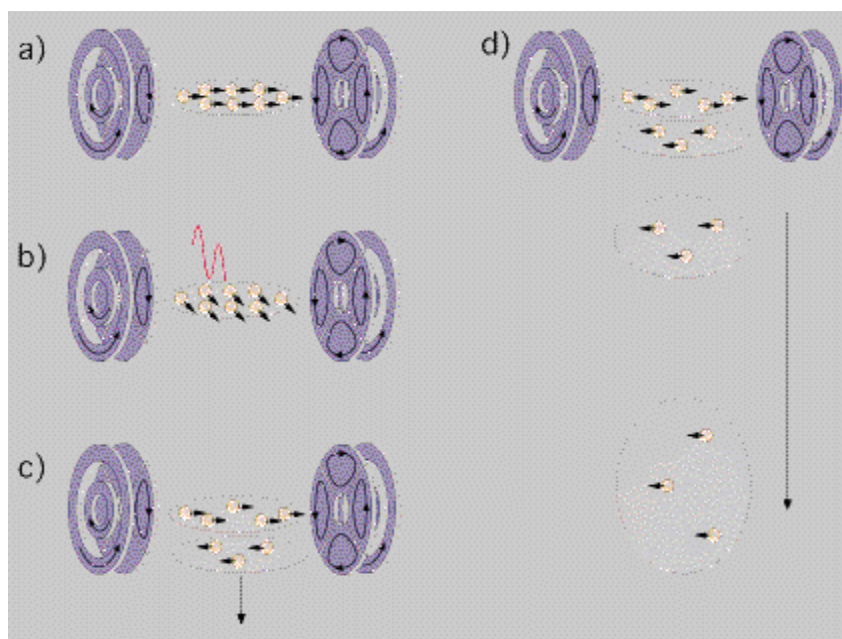
### § 2.3. Атомний лазер

Недавня робота, виконана в МІТ, по виведенню атомного конденсату з магнітних пасток, дозволила її авторам стверджувати, що тим самим вдалося побудувати атомний лазер.

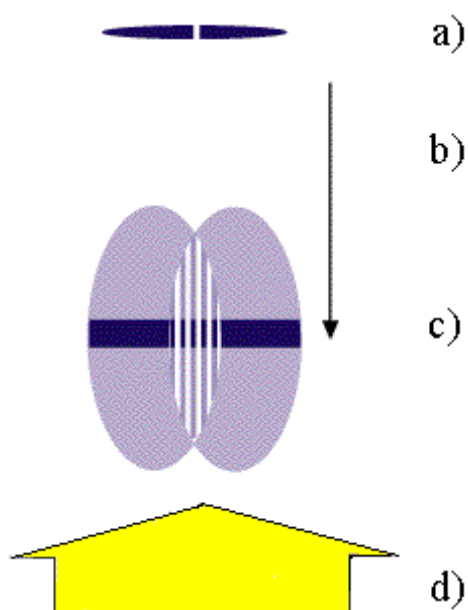
На мал.2.3. [56] показана принципова схема цього пристрою. Спочатку (мал.2.3a), бозе - конденсат утримується магнітною пасткою. У всіх атомів (електронні) спіни направлені паралельно магнітному полю (умовний напрям “вгору”). Потім, короткий імпульс ВЧ - випромінювання “нахиляє” спіни атомів – (мал.2.3b). Згідно принципам квантової механіки “нахилений” спін є суперпозицією станів - “спін-вгору” і “спін-вниз”. Оскільки атоми із спіном “вниз” виштовхуються магнітним полем, атомна “крапля” розщеплюється на утримувану пасткою і що виводиться з магнітної пастки (мал.2.3c). “Крапля” бозе - конденсату на виході падає в полі тяжіння і неоднорідно розширюється (мал.2.3d).

Істотним аргументом на користь цього твердження є те, що атомний пучок має ту ж найважливішу властивість, якою лазерне світло відрізняється від світла, що випромінюється електричною лампочкою-когерентність.

Когерентність атомного пучка була переконливо продемонстрована в інтерференційному експерименті, ідея якого показана на мал.2.4.



Мал.2.3. Атомний лазер.



Мал.2.4. Спостереження когерентності бозе – конденсату.

У спеціальній магнітній пастці створена БАК “сигароподібної” форми (мал.2.4а). За допомогою лазерного променя конденсат розрізає на дві частини (мал.2.4б). Після відключення пастки конденсати падають вниз і розширюються, поволі наїжджаючи один на одного. У області перекривання

утворюється висококонтрастна інтерференційна картина з відстанню між пучностями рівним половині довжини хвилі де-Бройля атомів в конденсаті (мал.2.4с). Інтерференційна картина спостерігається на екрані за допомогою оптичного лазера (мал.2.4d).

У області перекриття конденсатів з атомів натрію спостерігалася чітка інтерференційна картина з відстанню між пучностями, рівною  $\lambda/2$ , де довжина хвилі де Бройля рівна  $\lambda=ht/md$ , тут  $t$  - час спостереження,  $m$  - маса атома,  $d$  - відстань між конденсатами в початковий момент. Картині інтерференції, що спостерігалася, з періодом  $15 \mu$  відповідає кінетична енергія атомів  $0,5 \text{ нК}$ , тоді як перед розльотом частинки атомного конденсату мали енергію  $100 \text{ нК}$ . Спостереження інтерференції свідчить про єдину хвилеву функцію всіх частинок.

Розберемо тепер деякі аналогії і відмінності між оптичним (ОЛ) і атомним лазером (АЛ). У АЛ аналогом активного середовища виступають ультрахолодні атоми; оптичному резонатору відповідає магнітна пастка, а імпульс ВЧ радіовипромінювання (що нахиляє спини атомів (мал.2.3)) контролює “прозорість магнітних дзеркал”. Аналогом спонтанного випромінювання атомів активного середовища в АЛ, виступають процеси пружного розсіяння атома на атомі, що приводить до можливого розростання конденсату. У АЛ “збудження активного середовища” здійснюється процесом випарного охолодження. У ОЛ, як правило, генерується багато лазерних мод (типів коливань електромагнітного поля в резонаторі з близькими частотами). В АЛ, навпаки, виникає тільки одна мода - при формуванні БАК здійснюється свого роду “конкурс мод”: перший збуджений стан атомів в пастці не може бути макроскопічно населеним, оскільки основний стан по образному зауваженню професора МІТ В. Кеттерлея “з’їдає весь пиріг” [56].

Є й істотніші відмінності. Якщо фотони народжуються активним середовищем і в ОЛ йде процес їх “посилення” і генерації, то атоми не можна ні створити, ні знищити. (Ми не беремо тут в розрахунок можливі у принципі процеси при високих енергіях з народженням пар “атом - антиатом”). Число

атомів в АЛ не може бути збільшено, збільшується лише число атомів в основному стані. Хоча атоми в умовах розрідженого бозе - конденсату підкоряються тій же статистиці, що і фотони, між ними є наступна принципова відмінність, яку слід брати до уваги при побудові теорії АЛ. Фотони є квантами електромагнітного поля - переносника взаємодії між зарядженими частинками. Проте фундаментальні сили, переносниками яких би виступали атоми відсутні, отже, немає і фундаментального “атомного поля”, квантами якого б були атоми.

Атоми на відміну від фотонів взаємодіють між собою, що приводить до додаткового розгону пучка АЛ. На відміну від світла хвилі матерії не можуть розповсюджуватися в середовищі, наприклад, в повітрі. Атоми - масивні частинки, тому атомний когерентний пучок падатиме в полі тяжкості, як і пучок звичайних атомів.

Бозе - конденсат в АЛ перебуває в стані термодинамічної рівноваги при екстремально низькій температурі. У протилежність цьому ОЛ працює в істотно не рівноважному стані, який характеризується негативною температурою (яка означає, що система “гарячіша”, ніж навіть при нескінченно високій температурі). Останнє означає, що для АЛ не має місце ключове для ОЛ поняття “інверсії населенностей”.

Роботи із створення АЛ знаходяться на самому початку шляху. Зовсім нещодавно (квітень 1999 р.) дослідники з Інституту Макса Планка (ФРН) продемонстрували АЛ з “безперервним” пучком атомів рубідію тривалістю близько 0,1 секунди. Повідомляється, що радіус атомного пучка може, у принципі, бути зменшений до нанометра, що приблизно в тисячу разів менше, ніж у фокусі пучка ОЛ [10, 12].

## РОЗДІЛ 3

### Кінетика конденсованого Бозе-газу

В цьому розділі побудуємо рівняння, що описують квантову динаміку захопленого в магнітну пастку атомарного бозе-конденсату.

Основи теоретичного опису розрідженого конденсованого бозе-газу були сформульовані Миколою Боголюбовим в 1947р. На основі припущення про слабкість взаємодії, із вторинно-квантованого  $\psi$  – оператора анігіляції атомів виділялася частина, що описує конденсат  $\psi_0$ . Оскільки для слабо-взаємодіючого конденсованого бозе-газу майже усі атоми знаходяться в одному квантовому стані, то можна знехтувати некомутативністю оператора числа конденсатних частинок  $\psi_0^\dagger \psi_0$ , і тому, оператор  $\psi_0$  можна наближено вважати с-числом.

Таким чином можемо записати:

$$\psi(\vec{r}, t) = \sqrt{n_0} + \tilde{\psi}(\vec{r}, t), \quad (3.1)$$

де  $n_0$  – густина конденсату,  $\tilde{\psi}(\vec{r}, t)$  – оператор, що описує надконденсатні атоми.

Розглядаючи квантову частину  $\psi$  – оператора як збурення, Боголюбов побудував теорію «першого порядку» (відносно квантових ефектів) просторово-однорідного конденсованого бозе-газу.

Ту ж саму ідею будемо використовувати для побудови теорії атомарного бозе-конденсату, що захоплений в магнітну пастку, який, очевидно, є просторово-неоднорідним. Відмінність з теорією Боголюбова полягає в тому, що в цьому випадку нетривіальною є теорія «нульового порядку», в якій взаємодія не є малою поправкою, а відіграє вирішальну роль в поведінці конденсованих атомів.

При дуже низьких температурах динаміка (колективні коливання) захопленого Бозе-газу описується часово-залежним рівнянням Гросс-Пітаєського (ГП) [20] для макроскопічної хвильової функції  $\Phi(\vec{r}, t)$  пов'язаної з Бозе конденсатом.

При вищих температурах, коли значна доля атомів знаходиться поза конденсатом, динаміка захопленого Бозе-газу буде визначатися більш складніше, оскільки вона тепер ускладнюється об'єднаним рухом конденсатних та надконденсатних ступенів вільності. В недавніх роботах [21] скінченно-температурні збудження були обчислені в рамках наближення Хартрі-Фока-Попова (ХФП). Таке трактування збуджень еквівалентне опису заснованому на узагальненому рівнянні ГП в якому густина конденсату  $n_c(\vec{r}, t)$  трактується динамічно але надконденсатна густина – статично. Це не що інше, як ігнорування ефектом надконденсатних флуктуацій в динаміці конденсату. Автори робіт [22, 23] розширили цей клас ЧФП теорії трактування надконденсатних флуктуацій  $\delta\tilde{n}(\vec{r}, t)$  використовуючи часово-залежне рівняння руху Хартрі-Фока (часто згадуваного, як RPA).

В низькочастотному режимі очікується опис на основі гідродинамічних рівнянь. В роботі [24], обговорено метод одержання дворідинних рівнянь виходячи з квазікласичного кінетичного рівняння для функції розподілу  $f(\vec{p}, \vec{r}, t)$  збуджених атомів. Виходячи з кінетичного рівняння та узагальненого рівняння Гросс-пітаєвського одержується замкнена система дворідинних гідродинамічних рівнянь на основі локальних густин та швидкостей конденсатної та надконденсатної компонент.

В дипломній роботі розглядається узагальнена модель і подається більш повне обговорення наближень котрі розглядаються.

Як ми бачимо, ця нова мікроскопічна модель, хоча й наближена, вловлює усю істотну фізику гідродинамічної поведінки включаючи конденсатну та надкондесатну компоненти.

Виведення дворідинних рівнянь в рамках контексту особливої мікроскопічної моделі має кілька переваг:

1. Воно дозволяє нам побачити в дуже чистому вигляді як конденсатні так надконденсатні ступені вільності. Як вони виникають, і як вони об'єднуються.



2. Воно дає замкнену систему рівнянь з усіма локальними термодинамічними властивостями та часами релаксації визначеними самоузгоджено.

3. Одержані рівняння можуть бути використані для звичайних рівнянь Ландау в певній границі, та дозволяє ототожнити надплинну (нормальну) густину з густиною конденсату (надконденсату).

4. Опис динаміки може бути поширений за межі режиму в якому чинні феноменологічні рівняння Ландау, тобто коли конденсат та надконденсатна компонента не перебувають в локальній дифузійній рівновазі.

5. Точне мікроскопічне формування забезпечує вихідну точку для вдосконаленого опису, наприклад, врахування ефекту недіагональної (чи аномальної) власної енергії, котра є важлива при дуже низьких температурах [23].

В даній роботі включимо зіткнення між збудженими (надконденсатними) атомами. Більше того, ми обговоримо розв'язки кінетичного рівняння для  $f(r,p,t)$ , котрі відповідають динамічній локальній рівновазі в межах надконденсату. Цей локально рівноважний стан визначається умовою, що інтеграл зіткнень для збуджених атомів (позначений через  $C_{22}[f]$ ) тотожно зникає. Як результат, не точна залежність інтегральних зіткнень  $C_{22}$  виявляється на ZGN гідродинамічних рівняннях. В даній роботі створюємо головне вдосконалення розглядаючи тільки ефекти зіткнень між атомами конденсату та надконденсатними атомами. Цей член зіткнень (позначений  $C_{12}[f]$ ) дозволяє нам обговорити як конденсат об'єднаний з надконденсатом поза межами ефектів середнього поля, та як конденсат входить в локальну рівновагу з надконденсатом. В зв'язку з цим ми зауважимо, що різниця ефектів  $C_{12}$  та  $C_{22}$  зіткнень була вперше обговорена якісним шляхом Екерном [25]. Узагальнена система гідродинамічних рівнянь котра виникає, коли включені ефекти  $C_{12}[f]$  буде позначатись як ZGN' рівняння, таким чином відрізняючи їх від системи виведеної раніше [24].

Подібного до того, коли зіткнення між надконденсатними атомами достатньо швидкі для забезпечення умови, що функція розподілу  $f$  набуває форми локально-рівноважного Бозе розподілу з хімічним потенціалом  $\tilde{\mu}$ , є можливим, що надконденсат не є в певній локальній рівновазі з конденсатом. В цій ситуації, хімічний потенціал  $\tilde{\mu}$  надконденсату може відрізнитися від хімічного потенціалу конденсату  $\mu_c$ . Таким чином різниця  $\mu_{diff} \equiv \tilde{\mu} - \mu_c$  постає як ключова нова локальна змінна, котра є необхідною для представлення рівноваги конденсатної та надконденсатної компоненти. У вихідному ZGN аналізі, де ефектами  $C_{12}$  було знехтувано, різниця між  $\tilde{\mu}$  і  $\mu_c$  була цілковито вбудована в ZGN гідродинамічні рівняння, але, в намаганнях редукувати ці рівняння до дворідинної гідродинаміки Ландау, цей факт був недооцінений (пропущений). При цьому описі, було припущено додатково локальне термодинамічне співвідношення котре є цілковито примусове  $\mu_{diff} = 0$  (тобто  $\tilde{\mu} = \mu_c$ ). Таким чином ZGN рівняння є фактично відмінними від дворідинних рівнянь Ландау, і взагалі, приводять до різних динамічних прогнозів.

В цій роботі, показується як більш загальні рівняння ZGN' редукується і до ZGN і до Ландау описів, у відповідних границях.

Цей більш повний опис містить додатково рівняння руху для  $\mu_{diff} = 0$ , котре пов'язане з конденсатним та надконденсатним полем швидкостей. Нова релаксаційна мода, котра виникає, містить передачу атомів між двома компонентами, та дозволяє нам зрозуміти умови при яких є чинним дворідинні рівняння Ландау.

Можливість конденсату не перебувати в рівновазі з надконденсатом була досліджена багато років тому, в головному з поведінки надплинного гелію поблизу  $\lambda$  точки. В добре відомій роботі Ландау та Халатнікова [26] обчислено поглинання звуку поблизу фазового переходу другого роду через об'єднання релаксуючого параметра впорядкування. Пітаєвський [20] відповідно узагальнив феноменологічні дворідинні рівняння надплинного, гелію взявши до уваги релаксацію надплинної густини поблизу  $\lambda$  точки. Подібна проблема була

помічена в рамках формалізму Морі Міяком та Ямадою [27]. Усі з цих наближень є феноменологічними. У них запроваджуються нові дисипативні параметри для опису процесів обміну атомами між конденсатом та надконденсатом.

На відмінну від попередніх теорій, наша теорія заснована на добре визначеній мікроскопічній моделі Бозе-конденсованого газу, і як результат, часи релаксації відповідальні за дисипацію можуть бути точно обчислені.

Ця робота може розглядатися як поширення на випадок захопленого Бозе конденсованого газу піонерської роботи Кіркпатріка та Дорфма [28]. Однак, ці автори зосередилися на виведенні дворідинних рівнянь Ландау з врахуванням дисипації, і не розглянули цікавої можливості конденсату та надконденсатної компоненти перебувати поза межами дифузійної локальної рівноваги ( $\mu_c \neq \tilde{\mu}$ ).

В цьому контексті, ми також пригадаємо строге Боголюбівське теоретико-польове виведення дворідинних рівнянь Ландау [29], котре також беззастережно припускає, що надплинна та нормальна компонента завжди перебувають в локальній термодинамічній рівновазі.

За останні кілька років зустрічалось кілька робіт узгоджених з нерівноважними властивостями захопленого Бозе газу. Ми пригадуємо роботи Гардінера (Gardiner)[30], Прокакіса (Prokakis) [31], Стуфа (Sloof) [32], Васлера (Walser) [33].

Кожна з цих робіт представляла формальне виведення квантового кінетичного рівняння використовуючи різні теоретичні підходи. Ми виводимо рівняння руху для конденсату та над конденсату у близькій формі до робіт [32], та [33], хоча й тут є також багато формальних опрощень з роботи [31].

Проте, на відміну від цих робіт, ми зосереджуємося на виведенні гідродинамічних рівнянь, та на встановленні критерію при якому такі рівняння є чинними. Зокрема, ми встановлюємо, що зіткнення між конденсатом та надконденсатними атомами відповідають за встановлення стану локальної рівноваги. Стаття [32] є також вживаною через її повноту та прозорість обговорення динаміки утворення та розвитку конденсату, тема котру [30]

досліджує докладно. В зв'язку з цим, ми зауважимо, що наше кінетичне рівняння може також бути використане для дослідження розвитку конденсату і застосування до цієї проблеми буде представлено в даній роботі.

### § 3.1. Рівняння Гросс-Пітаєвського

Перейдемо до виведення рівняння для просторово-неоднорідного атомарного бозе-конденсату при температурі близькій до нуля, коли надконденсатними частинками можна знехтувати.

Узагальнення розщеплення (3.1) на просторово-неоднорідний випадок має вигляд:

$$\psi(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}, t) + \tilde{\psi}(\vec{r}, t). \quad (3.1.1)$$

Тут  $\Phi(\vec{r}, t) = \langle \psi(\vec{r}, t) \rangle$  – класичне комплексне скалярне поле, яке описує конденсат. Цю функцію іноді називають хвильовою функцією конденсату.  $\tilde{\psi}(\vec{r}, t)$  – квантова поправка.

Розглянемо систему тотожних бозе-атомів масою  $m$  з парною взаємодією, що поміщені в магнітну пастку.

В представленні вторинного квантування гамільтоніан цієї системи має вигляд:

$$\hat{H} = \int d\vec{r} \psi^\dagger(\vec{r}) \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + U_{ex}(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int d\vec{r} \int d\vec{r}' U(\vec{r} - \vec{r}') \psi^\dagger(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}') \psi(\vec{r}) \psi(\vec{r}'), \quad (3.1.2)$$

де  $\psi^\dagger(\vec{r})$  та  $\psi(\vec{r})$  – відповідно оператори породження та знищення атома в точці з координатою  $\vec{r}$ , які підпорядковуються бозевським комутаційним співвідношенням;  $U(\vec{r} - \vec{r}')$  – потенціал парної міжатомної взаємодії;  $U_{ex}(\vec{r})$  – зовнішній потенціал, який моделює магнітну пастку.

Для побудови динаміки атомарного бозе-конденсату нам знадобиться рівняння руху для польового оператора  $\psi(\vec{r})$ .

Використовуючи рівняння руху Гайзенберга для оператора знищення  $\psi(\vec{r})$  частинки з гамільтоніаном (3.1.2)

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = [\psi(\vec{r}, t), \hat{H}],$$

одержимо:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + U_{ex}(\vec{r}) + \int d\vec{r}' U(\vec{r} - \vec{r}') \psi^+(\vec{r}', t) \psi(\vec{r}', t) \right) \psi(\vec{r}, t). \quad (3.1.3)$$

Оскільки властивості розрідженого газу при низьких температурах повністю характеризуються амплітудою s-хвилі розсіяння незалежно від властивостей потенціалу  $U(\vec{r} - \vec{r}')$ , то можемо замінити його ефективним потенціалом:

$$U(\vec{r} - \vec{r}') = g \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (3.1.4)$$

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m},$$

де  $a$  – амплітуда s-хвилі розсіяння.

Усереднюючи рівняння руху (3.1.3) та враховуючи вираз для ефективного потенціалу, одержуємо рівняння:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + U_{ex}(\vec{r}) + g |\Phi(\vec{r}, t)|^2 \right) \Phi(\vec{r}, t). \quad (3.1.5)$$

Рівняння (3.1.5) було незалежно знайдене Е. Гроссом [34] та Л. Пітаєвським [20] в 1961р.

Воно описує динаміку неоднорідного розрідженого бозе-газу при температурі рівній нулю. Це рівняння є класичним в тому сенсі, що функція  $\Phi(\vec{r}, t)$  не є оператором і визначає не густину ймовірності, а реальний розподіл атомів конденсату в просторі. Модуль функції  $\Phi(\vec{r}, t)$  та її градієнт мають чіткий класичний сенс:

$$|\Phi(\vec{r}, t)|^2 = n_c(\vec{r}, t), \quad \frac{\hbar}{m} \nabla \Phi(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t).$$

Тут  $n_0(\vec{r}, t)$  - число атомів конденсату в одиниці об'ємі,  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  - швидкість конденсату.

Можна сказати, що хвильова функція конденсату являє собою класичну границю хвилі де-Бройля атомів. Опис конденсату з допомогою хвильової

функції  $\Phi(\vec{r}, t)$  аналогічний опису класичного електромагнітного поля напруженостями електричного та магнітного полів, що задовольняють рівнянням Максвелла. Проте, на відміну від рівнянь Максвелла, рівняння Гросс-Пітаєвського містить явно постійну Планка.

Це рівняння описує такі явища, як колювання конденсату, інтерференцію атомів, джозефсонівський струм та вихрові нитки.

### § 3.2. Узагальнення рівняння Гросс-Пітаєвського на випадок температур відмінних від нуля

В цьому параграфі виведемо узагальнене рівняння руху для конденсату при температурі відмінній від нуля, коли надконденсатними частинками знехтувати не можна.

Будемо виходити з звичайного рівняння руху Гайзенберга для квантового польового оператора (3.1.3):

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + U_{ext}(\vec{r}) + \int d\vec{r}' U(\vec{r} - \vec{r}') \psi^+(\vec{r}', t) \psi(\vec{r}', t) \right) \psi(\vec{r}, t). \quad (3.2.1)$$

Запишемо узагальнення розщеплення (3.1) на просторово-неоднорідний випадок:

$$\psi(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}, t) + \tilde{\psi}(\vec{r}, t). \quad (3.2.2)$$

Підставляючи (3.2.2) в (3.2.1) і враховуючи, що  $\langle \tilde{\psi} \rangle = 0$  одержуємо:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{ext} \right) \Phi + g \langle \psi^+ \psi \psi \rangle = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{ext} + g |\Phi|^2 \right) \Phi + \\ &+ g \langle \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle \Phi^* + 2g \langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \rangle \Phi + 2g \langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle = \\ &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{ext} + g n_c(\vec{r}, t) + 2g \tilde{n}_c(\vec{r}, t) \right) \Phi(\vec{r}, t) + \\ &+ g \tilde{m}(\vec{r}, t) \Phi^* + \langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Де  $n_c = |\Phi|^2$  - нерівноважна густина атомів конденсату,  $\tilde{n}_c = \langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \rangle$  - нерівноважна густина надконденсату. Рівняння (3.2.3) також містить недіагональну густину надконденсату  $\tilde{m}_c = \langle \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle$  та трипольову кореляційну

функцію  $\langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle$ , обидва з цих доданків, в принципі, мають ненульові значення, оскільки маємо стан із спонтанно порушеною симетрією.

Зауважимо, що (3.2.3) формально є точне рівняння в рамках наближення псевдопотенціалу. Більш докладне обговорення вихідної форми голої парної взаємодії дається в [31].

При обговоренні рівняння (3.2.3) широко вживаються деякі наближення. Воно редукується до отриманого в попередньому параграфі рівняння Гросс-Пітаєвського (3.1.3), якщо всі атоми перебувають в конденсаті (тобто  $\tilde{n} = 0$ ) та ігнорується нормальними кореляціями ( $\langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle$  та  $\tilde{m}_c$ ).

Це дуже гарне наближення для  $T \ll T_{BEC}$ , при  $T=0$  частка надконденсатних атомів в захопленому атомному газі оцінюється меншою ніж 1% [21]. Як перший крок в узгодженні із скінченними температурами, Hutchinson обчислив збудження в наближенні Хатрі-Фока-Попова [21]. Теплове заповнення цих квазічастинкових збуджень забезпечує вираз для рівноважної надконденсатної густини  $n_0(\vec{r})$ .

При цьому густина конденсату  $n_{c_0}(\vec{r}) \equiv |\Phi_0(\vec{r})|^2$  знаходиться в розв'язку узагальненого рівняння ГП. Самоузгоджене обчислення цих двох густин визначає рівноважні властивості захопленого газу в рамках наближення Попова, і енергії збуджень самі ототожнюються з колективними збудженнями конденсату. В контексті рівняння (3.2.3) наближення [21] (HZG) вимагає нехтування  $\langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle$  та  $\tilde{m}_c$ , і тоді розв'язується лінеаризована версія результуючого рівняння при додатковому наближенні  $\tilde{n} \cong \tilde{n}_0(\vec{r})$ .

На мові фізики, це наближення відповідає за рух атомів конденсату в статичному полі Хатрі-Фока надконденсатних атомів. Це означає, що динаміка середнього поля Хатрі конденсатних атомів трактується самоузгоджено, тоді як колективною динамікою надконденсатних атомів повністю нехтують.

Повертаючись до точного рівняння для макроскопічної хвильової функції (3.2.3), корисно ввести фазу та амплітуду:

$$\Phi(\vec{r}, t) = |\Phi(\vec{r}, t)| e^{i\theta(\vec{r}, t)}. \quad (3.2.4)$$

Підставляючи в (3.2.3), одержимо:

$$i\hbar e^{i\theta(\vec{r},t)} \left( \frac{\partial|\Phi|}{\partial t} + i|\Phi| \frac{\partial\theta}{\partial t} \right) = e^{i\theta} \left( -\frac{\hbar^2}{2m} (-\nabla^2\theta) - \frac{\hbar^2}{2m} 2i(\nabla\theta)\nabla - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{ext} + gn_c + 2g\tilde{n} \right) |\Phi| + g\tilde{m}|\Phi|e^{-i\theta} + g \langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle,$$

$$i\hbar \frac{\partial\Phi}{\partial t} \Phi^* = \Phi^* \left( -\frac{\hbar^2}{2m} + U_{ext} + gn_c + 2g\tilde{n} \right) \Phi + g\tilde{m}\Phi^{*2} + g\Phi^* \langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle,$$

$$i\hbar|\Phi| \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} + i|\Phi| \frac{\partial\theta}{\partial t} \right) = |\Phi| \left( -\frac{\hbar^2}{2m} (i\nabla\theta - (\nabla\theta)^2) - \frac{i\hbar^2}{m} (\nabla\theta)\nabla - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{ext} + gn_c + 2g\tilde{n} \right) |\Phi| + g \left( \tilde{m} \mathbf{Re} \Phi^{*2} + i\tilde{m} \mathbf{Im} \Phi^{*2} + \mathbf{Re}(\Phi^* \langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle) + i \mathbf{Im} \Phi^* \langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle \right).$$

Дійсна частина дає

$$-\hbar n_c \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\hbar}{2m} n_c (\nabla\theta)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} |\Phi| \nabla^2 |\Phi| + U_{ext} n_c + gn_c^2 + 2g\tilde{n} n_c + g \mathbf{Re}[\tilde{m}\Phi^{*2} + [\Phi^* \langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle]]$$

або

$$\begin{aligned} \hbar \frac{\partial\theta}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla\theta)^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla|\Phi|}{|\Phi|} - U_{ext} - gn_c - 2g\tilde{n} - \frac{g}{n_c} \mathbf{Re}[\tilde{m}\Phi^{*2} + \Phi^* \langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle] = \\ &= -\mu_c - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla\theta)^2 = -\mu_c - \frac{m}{2} v_c^2 = -\left( \mu_c + \frac{mv_c^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

де

$$\mu_c \equiv \frac{\hbar^2 \nabla^2 \sqrt{n_c}}{2m\sqrt{n_c}} + U_{ext} + gn_c + 2g\tilde{n} + \frac{g}{n_c} \mathbf{Re}[\tilde{m}(\Phi^*)^2 + \Phi^* \langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle]. \quad (3.2.6)$$

Уявна частина дає:

$$\begin{aligned} \hbar|\Phi| \frac{\partial|\Phi|}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} |\Phi| (\nabla\theta) |\Phi| - \frac{\hbar^2}{m} |\Phi| (\nabla\theta) \nabla |\Phi| + g \mathbf{Im} \left[ \tilde{m}(\Phi^*)^2 + \Phi^* \langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle \right] = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla(n_c \theta) + g \mathbf{Im} \left[ \tilde{m}(\Phi^*)^2 + \Phi^* \langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle \right]. \end{aligned}$$

Таким чином

$$\frac{\partial n_c}{\partial t} = -\nabla(n_c \vec{v}_c) + \frac{2g}{\hbar} \mathbf{Im} \left[ \tilde{m}(\Phi^*)^2 + \Phi^* \langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle \right],$$

або

$$\frac{\partial n_c}{\partial t} + \nabla(n_c \vec{v}_c) = \frac{2g}{\hbar} \mathbf{Im} \left[ \tilde{m}(\Phi^*)^2 + \Phi^* \langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle \right]. \quad (3.2.7)$$



Швидкість конденсату в нашій теорії ототожнюється з надплинною швидкістю у звичайному розгляді надплинної гідродинаміки.

Надалі, при розгляді кінетичного рівняння для збуджених атомів, будемо бачити, що в нашій моделі, густина конденсату  $n_c$  може бути ототожнена з надплинною густиною, як визначено в теорії Ландау.

Можна дати фізичну інтерпретацію узагальненого рівняння для конденсату (3.2.5).

В статичній тепловій рівновазі ми маємо  $\bar{v}_c = 0$ , і всі змінні є часово-незалежні. В цьому випадку (3.2.5) має розв'язок

$$\theta(t) = -\mu_{c_0} \frac{t}{\hbar}.$$

Таким чином зрозуміло, що в тепловій рівновазі атоми конденсату мають енергію  $\varepsilon_{c_0}$  рівною  $\mu_{c_0}$  рівноважному хімічному потенціалі. Ми зараз вважаємо, що ми є в режимі коли змінні  $\mu_c$  та  $\bar{v}_c$  повільно змінюється в просторі та часі. В цьому випадку маємо

$$\begin{aligned} \theta(\bar{r}, t) &= \theta(\bar{r}_0, t_0) + \frac{\partial \theta}{\partial t} (t - t_0) + \nabla \theta (\bar{r} - \bar{r}_0) + \dots = \\ &\cong \theta(r_0, t_0) - \frac{1}{\hbar} \varepsilon_c(r_0, t_0) (t - t_0) + \frac{1}{\hbar} m \bar{v}_c (\bar{r} - \bar{r}_0) \end{aligned}, \quad (3.2.8)$$

$$\text{де } \varepsilon_c \equiv \mu_c + \frac{1}{2} m \bar{v}_c^2.$$

В цій фазовій варіації хвильової функції конденсату природно інтерпретувати  $\varepsilon_c$  як локальну енергію атомів конденсату, а  $\bar{v}_c$  - як локальну швидкість. Ця інтерпретація узгоджується з законами збереження енергії та імпульсу, які ми виведемо пізніше при розгляді зіткнень між атомами конденсату та надконденсатними атомами.

Рівняння для конденсату (3.2.5 – 3.2.7) формально є точними, але не є замкнутою системою, оскільки вони залежать від додаткових надконденсатних змінних  $\tilde{n}$ ,  $\tilde{m}$  та  $\langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle$ . В роботі [24] обмежилися наближенням Попова [35], котре відповідно нехтує аномальною парою кореляцією  $\tilde{m}$  в (3.2.5) та (3.2.7). Проте вирішальна різниця від ZGN є те, що ми зберігаємо трипольову

кореляційну функцію  $\langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle$  в (3.2.5) та (3.2.7) котру ми обчислимо в наближенні узгодженим з умовою  $\tilde{m} = 0$ .

### § 3.3. Квантове кінетичне рівняння Больцмана

В даному параграфі ми розглянемо динаміку надконденсату. Фізичні властивості в принципі визначаються наступними рівняннями руху, що одержується з (3.1.3) та (3.2.3)

$$\begin{aligned}
 i \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{ext} \right) \Psi + g \Psi^+ \Psi \Psi, \\
 i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{ext} + gn_c + 2g\tilde{n} \right) \Phi + g\tilde{m}\Phi^* + g\langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \rangle, \\
 i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} + i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{ext} \right) \Phi + \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{ext} \right) \tilde{\psi} + \\
 &+ g\left( \Phi^* \Phi \Phi + \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} + 2\Phi^* \Phi \tilde{\psi} + \tilde{\psi}^+ \Phi \Phi + 2\tilde{\psi}^+ \Phi \tilde{\psi} + \Phi^* \tilde{\psi} \tilde{\psi} \right) = \\
 &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{ext} \right) \Phi + \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{ext} \right) \tilde{\psi} + gn_e \Phi + g\tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} + 2n_c \tilde{\psi} + 2g\tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \Phi + g\Phi^* \tilde{\psi}.
 \end{aligned}$$

Звідки знаходимо

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{ext} \right) \tilde{\psi} + 2gn_c \tilde{\psi} + g\left( \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} - \langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle \right) + \\
 &+ g\Phi^2 \tilde{\psi}^+ + 2g\Phi\left( \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} - \tilde{n} \right) + g\Phi^* \left( \tilde{\psi} \tilde{\psi} - \tilde{m} \right).
 \end{aligned}$$

Остаточно

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{ext} + 2gn \right) \tilde{\psi} - 2g\tilde{n} \tilde{\psi} + g\Phi^2 \tilde{\psi} + g\Phi^* \left( \tilde{\psi} \tilde{\psi} - \tilde{m} \right) + \\
 &+ 2g\Phi\left( \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} - \tilde{n} \right) + g\left( \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} - \langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle \right). \tag{3.3.1}
 \end{aligned}$$

де  $n_c + \tilde{n} = n$  - повна густина атомів.

Це рівняння зберігає умову  $\langle \tilde{\psi} \rangle = 0$ , для довільного моменту часу. Воно дозволяє нам вивести кінетичне рівняння для збуджених атомів. Наслідуючи Кіркапатріка та Дорфмана [28], зручно визначити часову еволюцію  $\tilde{\psi}$ , як:

$$\tilde{\psi}(r, t) = S^+(t, t_0) \tilde{\psi}(r, t_0) S(t, t_0), \tag{3.3.2}$$

де унітарний оператор еволюціонує згідно з рівнянням руху

$$i\hbar \frac{dS}{dt} = H_{eff}(t)S, \quad (3.3.3)$$

з початковою умовою  $S(t_0, t_0) = 1$ . Тут  $t_0$  - час при якому початкова нерівноважна матриця густини  $\rho(t_0)$  є визначена. Ефективний гамільтоніан в (3.3.3) дається виразом

$$H_{eff} = H_0 + H' \quad (3.3.4)$$

$$H' = H_1 + H_2' + H_3' + H_4', \quad (3.3.5)$$

де різноманітні внески визначені як

$$\begin{aligned} H_0 &= \int d\vec{n} \tilde{\psi}^+ \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}, t) \right) \tilde{\psi}, \\ H_1' &= \int d\vec{r} (L_1(\vec{r}, t) \tilde{\psi}^+ + L_1^*(\vec{r}, t) \tilde{\psi}), \\ H_2' &= \frac{g}{2} \int d\vec{r} (\Phi^2(\vec{r}, t) \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi}^+ + \Phi^{*2} \tilde{\psi} \tilde{\psi}), \\ H_3' &= g \int d\vec{r} (\Phi^* \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} + \Phi \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi}), \\ H_4' &= \frac{g}{2} \int d\vec{r} \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} - 2g \int d\vec{r} \tilde{n} \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi}, \\ U(\vec{r}, t) &= U_{ext} + 2gn(\vec{r}, t), \\ L_1(\vec{r}, t) &= -g(2\tilde{n}\Phi + \tilde{m}\Phi^* + \langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle). \end{aligned}$$

В цих виразах аргументи польових операторів є  $(\vec{r}, t_0)$ ; залежність різних членів гамільтоніану від  $t$  виникає через можливі значення середнього поля. Можна показати, що рівняння (3.3.2) – (3.3.5), разом з одночасовим комутатором  $[\tilde{\psi}(\vec{r}, t_0), \tilde{\psi}^+(\vec{r}', t_0)] = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$  відтворює рівняння руху для  $\tilde{\psi}$  (3.3.1). У виразі для ефективного гамільтоніану (3.3.4) ми розглядаємо  $H'(t)$ , як збурення до гамільтоніана нульового порядку  $H_0(t)$ .

При цьому не важливо, що  $U(\vec{r}, t)$  є певним середнім полем Хартрі-Фока,  $H_0(t)$  визначає збудження системи на рівні часово-залежної апроксимації ХФ. Інший вибір нульового гамільтоніану є також можливий. Для прикладу,  $H_0(t)$  міг бути об'єднаний з  $H_2'(t)$  і визначав би динамічний гамільтоніан Боголюбова.

Ця можливість розглядається в роботі [28], вона чинна, коли розглядаються дуже низькі температури.

Розглянемо довільний оператор  $O(t)$ , котрий утворюється комбінацією надконденсатних польових операторів  $\tilde{\psi}$  та  $\tilde{\psi}^+$ , для прикладу оператор локальної густини  $\tilde{n} = \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi}$ .

Враховуючи (3.3.2), середні значення  $O(t)$  щодо початкової матриці густини  $\rho(t_0)$  можуть бути записані наступним чином:

$$\langle O(t) \rangle \equiv \langle O \rangle_t = Sp \rho(t_0) O(t) = Sp \tilde{\rho}(t, t_0) O(t_0), \quad (3.3.6)$$

де  $\tilde{\rho}(t, t_0) \equiv S(t, t_0) \rho(t_0) S^+(t, t_0)$  оператор, що задовольняє наступному рівнянню:

$$i\hbar \frac{d\tilde{\rho}(t, t_0)}{dt} = [H_{eff}(t), \tilde{\rho}(t, t_0)]. \quad (3.3.7)$$

Формальний розв'язок цього рівняння може бути записаний у вигляді:

$$\tilde{\rho}(t, t_0) = S_0(t, t_0) \rho(t_0) S_0^+(t, t_0) - i \int_{t_0}^t dt' S_0(t, t_0) [H'(t'), \tilde{\rho}(t', t_0)]_- S_0^+(t, t'). \quad (3.3.8)$$

Тут незбурений оператор еволюції задовольняє рівнянню:

$$i \frac{dS_0(t, t_0)}{dt} = H_0(t) S_0(t, t_0).$$

Звідки

$$S_0(t, t_0) = Texp \left[ -i \int_{t_0}^t dt' H_0(t') \right]. \quad (3.3.9)$$

Рівняння для матриці густини надконденсатних атомів (3.3.8) може бути розв'язане наближеними методами.

В першому порядку теорії збурень за  $H'(t)$  одержуємо:

$$\tilde{\rho}(t, t_0) \approx S_0(t, t_0) \rho(t_0) S_0^+(t, t_0) - i \int_{t_0}^t dt' S_0(t, t_0) [H'(t'), S_0(t', t_0) \rho(t_0) S_0^+(t', t_0)]_- S_0^+(t, t').$$

Використовуючи отримане співвідношення, можемо записати середнє значення оператора  $O(t)$  у вигляді:

$$\begin{aligned} \langle O(t) \rangle = Sp \tilde{\rho}(t, t_0) O(t_0) = Sp \rho(t_0) \{ & S_0^+(t, t_0) O(t_0) S_0(t, t_0) - \\ & - i \int_{t_0}^t dt' S_0(t, t_0) [H'(t'), S_0(t', t_0) O(t_0) S_0^+(t', t_0)]_- S_0^+(t, t') \}. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

На основі співвідношення (3.3.10) знаходимо, що

$$\langle \tilde{\psi}^+(\vec{r}, t) \tilde{\psi}(\vec{r}, t) \tilde{\psi}(\vec{r}, t) \rangle = -i S p \rho(t_0) \int_{t_0}^t dt' S_0^+(t', t_0) \left[ H_1' + H_3', S_0(t', t_0) \tilde{\psi}^+(\vec{r}, t) \tilde{\psi}(\vec{r}, t) \tilde{\psi}(\vec{r}, t) S_0^+(t', t_0) \right]$$

Перейдемо до імпульсного представлення, для цього виконаємо перетворення Фур'є:

$$\tilde{\psi}(\vec{r}, t_0) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{r}}, \quad \tilde{\psi}^+(\vec{r}, t_0) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^+ e^{-i\vec{p}\vec{r}}.$$

Одержимо

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\psi}^+(\vec{r}, t) \tilde{\psi}(\vec{r}, t) \tilde{\psi}(\vec{r}, t) \rangle &= -i 2\pi g \sqrt{n_c} e^{i\theta} \frac{1}{V^2} \sum_{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3} \left[ \delta(\varepsilon_c + \tilde{\varepsilon}_1 - \tilde{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_3) + \frac{i}{\pi} P \frac{1}{\varepsilon_c + \tilde{\varepsilon}_1 - \tilde{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_3} \right] \times \\ &\times \delta_{p_c + p_1, p_2 + p_3} [f_1(1 + f_2)(1 + f_3) - (1 + f_1)f_2f_3]. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Переходимо тепер до виведення квантового кінетичного рівняння для функції розподілу надконденсатних атомів. Для цього ми запровадимо матрицю густини у представленні Вінгера (Winger):

$$f(\vec{p}, \vec{r}, t_0) \equiv \int d\vec{r}' e^{i\vec{p}\vec{r}'/\hbar} \tilde{\psi}^+\left(\vec{r} + \frac{\vec{r}'}{2}, t_0\right) \tilde{\psi}\left(\vec{r} - \frac{\vec{r}'}{2}, t_0\right). \quad (3.3.12)$$

Його середнє значення дасть Вінгерівську функцію розподілу.

$$f(\vec{p}, \vec{r}, t) = S_p \tilde{\rho}(t, t_0) f(\vec{p}, \vec{r}, t_0). \quad (3.3.13)$$

Значення цієї функції дозволяє нам обчислити різноманітні нерівноважні середні значення, наприклад такі, як густина надконденсату

$$\tilde{n}(\vec{r}, t) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} f(\vec{p}, \vec{r}, t). \quad (3.3.14)$$

Використовуючи рівняння руху для  $f$  (3.3.7), одержуємо

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} S p \tilde{\rho}(t, t_0) [f(\vec{p}, \vec{r}, t_0), H_{eff}(t)] = \frac{1}{i\hbar} S p \tilde{\rho}(t, t_0) [f, H_0(t)] + \frac{1}{i\hbar} S p \tilde{\rho}(t, t_0) [f, H'(t)]. \quad (3.3.15)$$

Перший член в правій частині рівняння (3.3.15) визначає вільний рух в кінетичному рівнянні. Використовуючи припущення, що  $U(\vec{r}, t)$  змінюється повільно в просторі, одержимо

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \nabla f - \nabla U \nabla_{\vec{p}} f = \frac{1}{i\hbar} S p \tilde{\rho}(t, t_0) [f, H'(t)]. \quad (3.3.16)$$

Права частина цього рівняння повністю представляє ефект зіткнень між атомами. Перетворюючи цей член до форми інтеграла бінарних зіткнень, одержимо:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{coll} = C_{12}[f] + C_{22}[f], \quad (3.3.17)$$

де

$$C_{22}[f] = \frac{2g^2}{(2\pi)^5 \hbar^7} \int d\bar{p}_2 \int d\bar{p}_3 \int d\bar{p}_4 \delta(\bar{p} + \bar{p}_2 - \bar{p}_3 - \bar{p}_4) \delta(\tilde{\varepsilon}_p + \tilde{\varepsilon}_{p_2} - \tilde{\varepsilon}_{p_3} - \tilde{\varepsilon}_{p_4}) \times \\ \times [(1+f)(1+f_2)f_3f_4 - ff_2(1+f_3)(1+f_4)], \quad (3.3.18)$$

$$C_{12}[f] = \frac{2g^2 n_c}{(2\pi)^2 \hbar^4} \int d\bar{p}_1 \int d\bar{p}_2 \int d\bar{p}_3 \delta(m\bar{v}_c + \bar{p}_1 - \bar{p}_2 - \bar{p}_3) \delta(\varepsilon_c + \tilde{\varepsilon}_{p_1} - \tilde{\varepsilon}_{p_2} - \tilde{\varepsilon}_{p_3}) \times \\ \times [\delta(\bar{p} - \bar{p}_1) - \delta(\bar{p} - \bar{p}_2) - \delta(\bar{p} - \bar{p}_3)] [(1+f_1)f_2f_3 - f_1(1+f_2)(1+f_3)]. \quad (3.3.19)$$

Тут  $f \equiv f(\bar{p}, \bar{r}, t)$ ,  $f_i \equiv f(\bar{p}_i, \bar{r}, t)$ .

Зауважимо, що змінні  $n_c, \bar{v}_c, \tilde{\varepsilon}_p$  є функціями  $\bar{r}$  та  $t$ . Як результат статистики Бозе, народження атома в стані  $i$  пов'язане з статистичним фактором  $(1+f_i)$ . В чистому вигляді  $C_{22}$  описує двочастинкові зіткнення між збудженими атомами (2 атоми  $\leftrightarrow$  2 атоми), тоді як  $C_{12}$  описує зіткнення, котрі включають один атом конденсату (1 атом  $\leftrightarrow$  2 атоми).

Імпульсна та енергетична  $\delta$ -функція в  $C_{12}$  враховує факт, що атоми конденсату мають енергію  $\varepsilon_c(\bar{r}, t)$  та імпульс  $m\bar{v}_c$ . Збуджені атоми мають локальну енергію Хартрі-Фока:

$$\tilde{\varepsilon}_p = \frac{p^2}{2m} + U(\bar{r}, t). \quad (3.3.20)$$

Зауважимо також, що середнє поле ХФ визначене в (3.3.5) містить густину конденсату  $n_c(\bar{r}, t) \equiv |\Phi(\bar{r}, t)|^2$  котра має бути визначена самоузгоджено. Для цього використовується рівняння руху конденсату (3.2.3).

Для завершення нашого виведення замкнутої системи рівнянь для конденсатної та неконденсатної компонент ми маємо обговорити питання щодо

недіагональної власної енергії ХФ  $\tilde{m}$  та члена  $\langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle$  котрий зустрічається в (3.3.4) та (3.2.7).

В роботі [24] показано, що членом  $\tilde{m}$  можна знехтувати.

Що стосується аномального середнього  $\langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle$ , то ми не демонструємо його дійсної частини, котра входить у вираз для локального хімічного потенціалу визначеного у (3.2.7). Цей внесок є порядку  $g^2$  і буде знехтуваний, оскільки ми розглядаємо перше наближення.

Проте уявна частина  $\langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle$  зображеного у (3.3.11) вносить важливий член у праву частину рівняння неперервності (3.2.7) – джерело, яке позначимо через  $\Gamma_{12}[f]$ . Порівнюючи (3.3.11) з виразом для  $C_{12}[f]$  у (3.3.19) помічаємо, що

$$-\Gamma_{12}[f] = \frac{2g}{\hbar} \text{Im}[\Phi^* \langle \tilde{\psi}^+ \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle] = -\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} C_{12}[f(\vec{p}, \vec{r}, t)] \quad (3.3.21)$$

Останній вираз підкреслює той факт, що  $C_{12}$  зіткнення можуть локально змінювати відносне число атомів конденсату та надконденсату.

З врахуванням (3.3.21), рівняння неперервності (3.2.7) набуде вигляду:

$$\frac{\partial n_c}{\partial t} + \nabla(n_c \vec{v}_c) = -\Gamma_{12}[f].$$

Кінетичне рівняння Больцмана для надконденсатних атомів:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \nabla f - \nabla U \nabla_{\vec{p}} f = C_{12}[f] + C_{22}[f]. \quad (3.3.22)$$

### § 3.4. Рівняння дворідинної гідродинаміки надконденсату

В попередньому підрозділі ми отримали узагальнене рівняння Гросс-Пітаєвського та квантове кінетичне рівняння Больцмана, які описують відповідно динаміку конденсату та надконденсату при температурах відмінних від нуля.

В цьому параграфі отримаємо рівняння, які описують динаміку атомарного бозе-конденсату на гідродинамічному етапі еволюції у в'язкому наближенні.

Розглянемо спочатку гідродинаміку надконденсату в наближенні, коли в системі збуджених атомів встановилась локальна рівновага.

Для цього будемо наслідувати стандартну процедуру кінетичної теорії, в якій рівняння гідродинаміки отримуються шляхом обчислення моментів від кінетичного рівняння.

Перш за все зауважимо, що як слідує з означень  $C_{22}$  та  $C_{12}$ :

$$\int d\vec{p} \vec{p} C_{22} = 0, \quad \int d\vec{p} \tilde{\varepsilon}_{\vec{p}} C_{22} = 0,$$

$$\int d\vec{p} (\vec{p} - m\vec{v}_c) C_{12} = 0, \quad \int d\vec{p} (\varepsilon_{\vec{p}} - \varepsilon_c) C_{12} = 0.$$

До того ж

$$\Gamma_{12}[f] = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} C_{12}[f(\vec{p}, \vec{r}, t)] \neq 0.$$

Інтегруючи кінетичне рівняння (2.34)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \nabla f - \nabla U \nabla_{\vec{p}} f = C_{12}[f] + C_{22}[f]$$

за імпульсами, одержуємо рівняння неперервності для надконденсату

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + \nabla(\tilde{n} \vec{v}_n) = \Gamma_{12}[f]. \quad (3.4.1)$$

Аналогічно, беручи вищі моменти від (3.34), одержуємо

$$m\tilde{n} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_n \nabla \right) v_{n\mu} = - \frac{\partial P_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \tilde{n} \frac{\partial U}{\partial x_\mu} - m(v_{n\mu} - v_{c\mu}) \Gamma_{12}[f], \quad (3.4.2)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \nabla(\tilde{\varepsilon} \vec{v}_n) = - \nabla \bar{Q} - D_{\mu\nu} P_{\mu\nu} + \left[ \frac{1}{2} m(\vec{v}_n - \vec{v}_c)^2 + \mu_c - U \right] \Gamma_{12}[f]. \quad (3.4.3)$$

Тут відповідні густини потоків гідродинамічних величин мають вигляд:

$$\tilde{n}(\vec{r}, t) \vec{v}_n(\vec{r}, t) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\vec{p}}{m} f(\vec{r}, \vec{p}, t),$$

$$P_{\mu\nu}(\vec{r}, t) = m \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \left( \frac{p_\mu}{m} - v_{n\mu} \right) \left( \frac{p_\nu}{m} - v_{n\nu} \right) f(\vec{r}, \vec{p}, t),$$

$$Q_\mu(\vec{r}, t) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2m} \left( \frac{p_\mu}{m} - v_{n\mu} \right) (\vec{p} - m\vec{v}_n)^2 f(\vec{r}, \vec{p}, t),$$

$$\tilde{\varepsilon}(\vec{r}, t) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2m} (\vec{p} - m\vec{v}_n)^2 f(\vec{r}, \vec{p}, t),$$

а також тензор деформацій

$$D_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{n\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial v_{n\nu}}{\partial x_\mu} \right).$$



Одержана система рівнянь (3.4.1) – (3.4.3) є точною, але незамкненою, оскільки число локальних змінних перевищує число рівнянь.

Крім того, потрібно виразити потоки через вже запровадженні гідродинамічні величини.

Аби отримати замкнену систему рівнянь, ми маємо по-перше: до них долучити рівняння, що описують конденсат; по-друге: обчислити потоки.

Для явного обчислення потоків розглянемо випадок, коли в надконденсаті встановилась локальна рівновага, яка описується локальним квантовим розподілом Бозе:

$$\tilde{f}(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{1}{e^{\beta\left(\frac{1}{2m}(\vec{p}-m\vec{v}_n)^2 + U - \tilde{\mu}\right)} - 1}. \quad (3.4.4)$$

Тут термодинамічні параметри залежать від просторово-часових координат.

Підставляючи функцію розподілу (3.4.4) у вирази для потоків, одержимо:

$$P_{\mu\nu}(\vec{r}, t) = \delta_{\mu\nu} P(\vec{r}, t),$$

$$\tilde{\varepsilon}(\vec{r}, t) = \frac{3}{2} P(\vec{r}, t),$$

$$\tilde{Q}(\vec{r}, t) = 0.$$

Тут

$$P(\vec{r}, t) = \frac{1}{\beta\Lambda^3} g_{5/2}(z), \quad z = e^{\beta[\tilde{\mu}-U]}.$$

Теплова хвиля де-Бройля

$$\Lambda = \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)^{1/2}.$$

Функція Бозе-Айнштейна визначається співвідношенням:

$$g_k = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^k}.$$

Отримані рівняння описують конденсований бозе-газ в наближенні ідеальної гідродинаміки. Перейдемо до одержання в'язкого наближення. Будемо наслідувати метод Чепмена-Енскога.

Розглянемо поправку до локально-рівноважної функції розподілу у вигляді

$$f^{(1)} = f^{(0)}(\vec{r}, \vec{p}, t)[1 + f^{(0)}(\vec{r}, \vec{p}, t)]\psi(\vec{r}, \vec{p}, t).$$

Лінеаризовані інтеграли зіткнень набудуть вигляд

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} C_{22}[f] \equiv C_{22}[f^{(1)}] &\equiv \frac{2g^2}{(2\pi)^5 \hbar^7} \int d\vec{p}_2 \int d\vec{p}_3 \int d\vec{p}_4 \delta(\vec{p} + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta(\tilde{\varepsilon}_{\vec{p}_1} + \tilde{\varepsilon}_{\vec{p}_2} - \tilde{\varepsilon}_{\vec{p}_3} - \tilde{\varepsilon}_{\vec{p}_4}) \times \\ &\times f^{(0)} f_2^{(0)} (1 + f_3^{(0)}) (1 + f_4^{(0)}) (\psi_3 + \psi_4 - \psi_2 - \psi) \equiv \hat{L}_{22}[\psi], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} C_{12}[f, \vec{\Phi}] &\equiv \frac{2g^2 n_c}{(2\pi)^2 \hbar^4} \int d\vec{p}_1 \int d\vec{p}_2 \int d\vec{p}_3 \delta(m\vec{v}_c + \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \delta(\tilde{\varepsilon}_c^{(0)} + \tilde{\varepsilon}_{\vec{p}_1} - \tilde{\varepsilon}_{\vec{p}_2} - \tilde{\varepsilon}_{\vec{p}_3}) \times \\ &\times [\delta(\vec{p} - \vec{p}_1) - \delta(\vec{p} - \vec{p}_2) - \delta(\vec{p} - \vec{p}_3)] (1 + f_1^{(0)}) f_2^{(0)} f_3^{(0)} (-\beta\mu_c^{(1)} + \psi_2 + \psi_3 - \psi_1) \\ &\equiv -\beta g \tilde{n}^{(1)} \hat{L}_{12}[1] + \hat{L}_{12}[\psi]. \end{aligned}$$

Підставляючи лінеаризовані інтеграли зіткнень у кінетичне рівняння (3.34) та враховуючи рівняння ідеальної гідродинаміки одержимо

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T}{T} \left[ \frac{mu^2}{2k_B T} - \frac{5g_{5/2}(z)}{2g_{3/2}(z)} \right] + \frac{m}{k_B T} D_{\mu\nu} \left( u_\mu u_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} u^2 \right) + \left( \sigma_2 + \frac{mu^2 3k_B T}{\sigma_1} \right) \frac{\Gamma_{12}^{(1)}}{\tilde{n}^{(0)}} \right\} \\ \times f^{(0)} (1 + f^{(0)}) + \beta g \tilde{n}^{(1)} \hat{L}_{12}[1] = \hat{L}_{12}[\psi] + \hat{L}_{22}[\psi] \equiv \hat{L}[\psi]. \end{aligned}$$

Будемо шукати поправку до функції розподілу  $\psi(r, p, t)$  у вигляді

$$\psi(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{\vec{\nabla} T \cdot \vec{u}}{T} A(u) + D_{\mu\nu} \left( u_\mu u_\nu - \frac{1}{3} u^2 \delta_{\mu\nu} \right) B(u) + \Gamma_{12}^{(1)} D(u).$$

Функції  $A(u)$ ,  $B(u)$  та  $D(u)$  визначаються з інтегральних рівнянь

$$\vec{u} \left[ \frac{mu^2}{2k_B T} - \frac{5g_{5/2}(z)}{2g_{3/2}(z)} \right] f^{(0)} (1 + \tilde{f}^{(0)}) = \hat{L}[\vec{u} A(u)], \quad (3.4.5)$$

$$\frac{m}{k_B T} \left( u_\mu u_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} u^2 \right) f^{(0)} (1 + f^{(0)}) = \hat{L} \left[ \left( u_\mu u_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} u^2 \right) B(u) \right],$$

$$\left( \sigma_2 + \frac{m u^2}{3 k_B T} \sigma_1 \right) \frac{1}{\tilde{n}^{(0)}} f^{(0)} (1 + f^{(0)}) + \frac{\beta g \tilde{n}^{(1)}}{\Gamma_{12}^{(1)}} \hat{L}_{12}[1] = \hat{L}[D(u)].$$

$$\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^2} f^{(0)} (1 + f^{(0)}) u^2 A(u) = 0,$$

$$\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^2} f^{(0)} (1 + f^{(0)}) \left( \frac{m u^2}{2} + U - \tilde{\mu}^{(0)} \right) D(u) = 0.$$

Поправки до виразів для потоків у в'язкому наближенні мають вигляд

$$\tilde{n}^{(1)} = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} f^{(0)} (1 + f^{(0)}) D(u) \Gamma_{12}^{(1)}(\vec{r}, t) \equiv -\mathcal{D} \Gamma_{12}^{(1)},$$

$$P_{\mu\nu}^{(1)} = \delta_{\mu\nu} \tilde{P}^{(1)} - 2\eta \left[ D_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \text{Tr} D \delta_{\mu\nu} \right],$$

$$Q^{(1)} = -k \vec{\nabla} T.$$

Відповідні кінетичні коефіцієнти мають вигляд

$$\eta = -\frac{m}{15} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} u^4 B(u) f^{(0)} (1 + f^{(0)}),$$

$$k = -\frac{m}{6T} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} u^4 A(u) f^{(0)} (1 + f^{(0)}).$$

Тут  $\eta$  – в'язкість, а  $k$  – теплопровідність.

Система рівнянь дворідинної гідродинаміки атомарного конденсованого бозе-газу у в'язкому наближенні має вигляд

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\tilde{n} \vec{v}_n) = \Gamma_{12},$$

$$m \tilde{n} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_n \cdot \vec{\nabla} \right) v_{n\mu} + \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x_\mu} + \tilde{n} \frac{\partial U}{\partial x_\mu} = -m (v_{n\mu} - v_{c\mu}) \Gamma_{12} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ 2\eta \left[ D_{\mu\nu} - \frac{1}{3} (\text{Tr} D) \delta_{\mu\nu} \right] \right\},$$

$$\frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\tilde{\epsilon} \vec{v}_n) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_n) \tilde{P} = \left[ \frac{1}{2} m (\vec{v}_n - \vec{v}_c)^2 + \mu_c - U \right] \Gamma_{12} + \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + 2\eta \left[ D_{\mu\nu} - \frac{1}{3} (\text{Tr} D) \delta_{\mu\nu} \right]^2.$$

### § 3.5. Обчислення кінетичних коефіцієнтів

У цьому параграфі проведемо обчислення кінетичних коефіцієнтів на основі локально-рівноважної функції розподілу атомарного бозе-газу за наявності конденсату.

Розпочнемо з коефіцієнта теплопровідності, вираз для якого має вигляд

$$\begin{aligned} k &= -\frac{1}{2}k_B \int \frac{d\bar{p}}{(2\pi\hbar)^3} \bar{u}A(u) \cdot \bar{u} \left[ \frac{mu^2}{2k_B T_0} - \frac{5g_{5/2}(z_0)}{2g_{3/2}(z_0)} \right] f_0(1+f_0) \\ &= -\frac{1}{3}k_B \int \frac{d\bar{p}}{(2\pi\hbar)^3} \bar{u}A(u) \cdot \hat{L}[\bar{u}A(u)]. \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

Покладемо

$$A(u) = A \left[ \frac{mu^2}{2k_B T_0} - \frac{5g_{5/2}(z_0)}{2g_{3/2}(z_0)} \right]. \quad (3.5.2)$$

Константу  $A$  визначимо шляхом домноження (3.4.5) на  $\bar{u} \left[ \frac{mu^2}{2k_B T_0} - \frac{5g_{5/2}(z_0)}{2g_{3/2}(z_0)} \right]$  із подальшим інтегруванням за імпульсами. Одержуємо

$$\begin{aligned} A &= \int \frac{d\bar{p}}{(2\pi\hbar)^3} \cdot u^2 \left[ \frac{mu^2}{2k_B T_0} - \frac{5g_{5/2}(z_0)}{2g_{3/2}(z_0)} \right]^2 f_0(1+f_0) \\ &\times \left\{ \int \frac{d\bar{p}}{(2\pi\hbar)^3} \left[ \frac{mu^2}{2k_B T_0} - \frac{5g_{5/2}(z_0)}{2g_{3/2}(z_0)} \right] \bar{u} \cdot \hat{L} \left[ \left\{ \frac{mu^2}{2k_B T_0} - \frac{5g_{5/2}(z_0)}{2g_{3/2}(z_0)} \right\} \bar{u} \right] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Звідси

$$\begin{aligned} k &= -\frac{k_B}{3} \left\{ \int \frac{d\bar{p}}{(2\pi\hbar)^3} \left[ \frac{mu^2}{2k_B T_0} - \frac{5g_{5/2}(z_0)}{2g_{3/2}(z_0)} \right]^2 f_0(1+f_0) \right\}^2 \\ &\times \left\{ \int \frac{d\bar{p}}{(2\pi\hbar)^3} \left[ \frac{mu^2}{2k_B T_0} - \frac{5g_{5/2}(z_0)}{2g_{3/2}(z_0)} \right] \bar{u} \cdot \hat{L} \left[ \left\{ \frac{mu^2}{2k_B T_0} - \frac{5g_{5/2}(z_0)}{2g_{3/2}(z_0)} \right\} \bar{u} \right] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Після обчислення інтегралів за імпульсами, одержуємо

$$k = \frac{75k_B}{64a^2 m} \left( \frac{mk_B T}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\pi^{1/2}}{I_{22}^k(z_0) + \Lambda_0^3 n_{c0} I_{12}^k(z_0)} \left[ \frac{7}{2} g_{7/2}(z_0) - \frac{5g_{5/2}^2(z_0)}{2g_{3/2}(z_0)} \right]^2, \quad (3.5.5)$$

або в іншій формі

$$k = \frac{5\sqrt{2}}{\pi^3} \left( \tau_k \frac{\tilde{n}_0 k_B^2 T_0}{m} \right) \left\{ \frac{7g_{7/2}(z_0)}{2g_{3/2}(z_0)} - \left[ \frac{5g_{5/2}(z_0)}{2g_{3/2}(z_0)} \right]^2 \right\}. \quad (3.5.6)$$

Перейдемо до обчислення коефіцієнта в'язкості, який визначається співвідношенням

$$\begin{aligned}\eta &= -\frac{m}{10} \int \frac{d\bar{p}}{(2\pi\hbar)^3} \left( u_\mu u_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} u^2 \right) B(u) \left( u_\mu u_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} u^2 \right) f_0 (1 + f_0) = \\ &= -\frac{k_B T_0}{10} \int \frac{d\bar{p}}{(2\pi\hbar)^3} B(u) \left( u_\mu u_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} u^2 \right) \hat{L} \left[ B(u) \left( u_\mu u_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} u^2 \right) \right] .\end{aligned}\quad (3.5.7)$$

Виконуючи аналогічні до попереднього випадку обчислення, для константи  $B$  одержуємо вираз

$$\begin{aligned}B &= -\frac{m}{k_B T_0} \left\{ \int \frac{d\bar{p}}{(2\pi\hbar)^3} \left( u_\mu u_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} u^2 \right)^2 f_0 (1 + f_0) \right\} \times \\ &\times \left\{ \int \frac{d\bar{p}}{(2\pi\hbar)^3} \left( u_\mu u_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} u^2 \right) \hat{L} \left[ u_\mu u_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} u^2 \right] \right\}^{-1} .\end{aligned}\quad (3.5.8)$$

Тоді на основі (3.5.7) та (3.5.8), одержуємо

$$\begin{aligned}\eta &= -\frac{m^2}{10k_B T_0} \left\{ \int \frac{d\bar{p}}{(2\pi\hbar)^3} \left( u_\mu u_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} u^2 \right)^2 f_0 (1 + f_0) \right\}^2 \\ &\times \left\{ \int \frac{d\bar{p}}{(2\pi\hbar)^3} \left( u_\mu u_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} u^2 \right) \hat{L} \left[ u_\mu u_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} u^2 \right] \right\}^{-1} .\end{aligned}\quad (3.5.9)$$

Після інтегрування за імпульсами, вираз для коефіцієнта в'язкості набуває вигляду

$$\eta = \frac{5\pi^3}{32\sqrt{2}a^2} (mk_B T_0)^{1/2} \frac{g_{5/2}^2(z_0)}{I_{22}^\eta(z_0) + \Lambda_0^3 n_{c0} I_{12}^\eta(z_0)},\quad (3.5.10)$$

де

$$\begin{aligned}I_{22}^\eta &\equiv -\int dx \left( x_\mu x_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} x^2 \right) \hat{L}'_{22} \left[ x_\mu x_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} x^2 \right] = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dx_r \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 dy' F_{12}(x_0, x_r, y, y'; z_0) \\ &\times x_0^2 x_r^7 (1 + y^2 + y' - 3y^2 y'^2)^{-1},\end{aligned}\quad (3.5.11)$$

$$\begin{aligned}I_{12}^\eta &\equiv -\pi^{3/2} \int dx \left( x_\mu x_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} x^2 \right) \hat{L}'_2 \left[ x_\mu x_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} x^2 \right] = 8\pi^{7/2} \int_0^\infty dx_r \int_{-1}^1 dy F_{12}(x_r, y; z_0) \\ &\times x_r^2 \sqrt{x_r^2 + \beta_0 g n_{c0}} \left[ x_r^2 (x_r^2 + \beta_0 g n_{c0}) (1 - y^2) + \frac{1}{3} (\beta_0 g n_{c0})^2 \right]\end{aligned}\quad (3.5.12)$$

Після спрощень, вираз для коефіцієнта в'язкості набуває вигляду

$$\eta = \tau_\eta \tilde{n}_0 k_B T_0 \left[ \frac{g_{5/2}(z_0)}{g_{3/2}(z_0)} \right].\quad (3.5.13)$$

## ВИСНОВКИ

Магістерська робота присвячена теоретичному опису кінетики атомарних конденсованих бозе-газів при відмінних від нуля температурах.

У даній роботі на основі рівнянь об'єднаної динаміки конденсату та надконденсату було одержано рівняння дворідинної гідродинаміки атомарних конденсованих бозе-газів у в'язкому наближенні. Відповідні рівняння були побудовані за допомогою метода Чепмена-Енскога.

Отримано вирази для кінетичних коефіцієнтів просторово-неоднорідного атомарного бозе-газу за наявності конденсату.

Проведено аналітичні обчислення виразів для коефіцієнта теплопровідності та в'язкості на основі локально-рівноважної функції розподілу.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. M. Inguscio, S. Stringari and C. Wieman eds. Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases, Enrico Fermi (1997).
2. M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Summer School, Course CXL, IOS Press, AmsterdamChin, J. Hecker Denschlag and R. Grimm, Phys. Rev. 1999; Lett. 92, 120401 (2004).
3. A. Perali, P. Pieri, G.C. Strinati, Phys.Rev.Lett. 93, Rev. Mod. Phys. 71, 463 (1999);100404 (2004).
- 4 A. Leggett, Rev. Mode. Phys. 73, 307 (2001).
5. E.A. Cornell and C.E. Wieman, Rev. Mod. Phys. 74, 875.
6. C. Pethick and H. Smith, Bose-Einstein Condensation. Phys. Rev. Lett. 91, 020402 (2003).
7. B. De Marco and D.S. Jin, Science 285, 1703 (1999);Phys. Rev. Lett. 89, 250402 (2002).
8. C.A. Regal, M. Greiner, S. Giorgini, M. Holland and D.S.(2002); W. Ketterle, Rev. Mod. Phys. 74, 1131 (2002);Jin, Phys.Rev.Lett. 9+5, 250404 (2005).
9. L. Viverit, S. Giorgini, L. Pitaevskii and S. Stringari, Dilute Bose Gases, Cambridge Univ. Press, CambridgePhys. Rev.A 69, 013607 (2004); 2002.
10. G. Roati et al., Phys. Rev. Lett. 92, 230402 (2004).
11. L. Pezze' et al., Phys. Rev. Lett. 93, 120401 (2004).
12. T.Jeltesetal., [cond-mat/0612278](#).
13. T. Rom et al., Nature, 444, 733 (2006).
14. K. Huang and C.N. Yang 1957, Phys. Rev. 105, 767 (1957); G.Bruun, Y.Castin, R.Dum and K.Burnett.
15. M. Holland, S.J.J.M.F. Kokkelmans, M.L. Chiofalo and R. Walser, Phys. Rev. Lett. 87 120406 (2001); Y. Ohashi.
16. T.D. Lee and C.N. Yang, Phys. Rev. 105, 1119 (1957); (1999); T.D. Lee, K. Huang and C.N. Yang, Phys. Rev. 106.

17. L.P. Gorkov and T.K. Melik-Barkhudarov, Sov. Phys.Stringari, Phys.Rev.Lett. 95, 030404 (2005).
18. D.S. Petrov, C. Salomon and G. Shlyapnikov, Phys. Rev.(2005); Lett. 93, 090404 (2004).
19. M. Greiner, C.A. Regal and D.S. Jin, Nature 426, 537.
20. R. Combescot, S. Giorgini and S. Stringari, Europhys. (2003); S. Jochim et al., Science 302, 2101 (2003); M.W.Lett. 75, 695 (2006); Zwierlein et al., Phys. Rev. Lett. 91, 250401 (2003), J., Cubizolles et al., Phys. Rev. Lett. 91, 240401 (2003):[cond-mat/0607493](#).
21. Tin-Lun Ho, Phys. Rev. Lett. 92, 090402 (2004).
22. D.M. Stamper-Kurn et al., Phys. Rev. Lett. 83, 2876 R.A. Bishop, Int.J.Mod.B15, iii (2001).
23. H. Heiselberg, Phys. Rev. Lett. 93, 040402 (2004).
24. C. Chin et al., Science 305, 1128 (2004).
25. M.W. Zwierlein et al., Nature 435, 1047 (2005).
26. P. Pieri, A. Perali and G.C. Strinati, Phys. Rev. B 70, 094508 (2004); it ibid. 72, 012506 (2005).
27. F. Zambelli and S. Stringari, Phys. Rev. Lett. 81, 1754 64, 301 (1996); H.T.C. Stoof et al., Phys. Rev. Lett. 76,10 (1996); M. Houbiers et al., Phys. Rev. A 56, 4864.
28. Y.Castin andR.Dum, Phys. Rev. Lett. 77, 5315 (1996).
29. O'Hara et al., Science 298, 2178 (2002). Oxford Univ. Press, Oxford 2003;
30. S. Stringari, Phys. Rev. Lett. 77, 2360 (1996).
31. Y.Castin, Comptes Rendus Physique5,407 (2004).
32. M. Cozzini and S. Stringari, Phys. Rev. Lett. 91, 070401(2003).
33. Yu. Kagan, E.L. Surkov and G. Shlyapnikov, Phys. Rev. A 55, 18 (1997).
34. A. Griffin, Wen-Chin Wu and S. Stringari, Phys. Rev. Euro. Phys. J.D7,433 (1999).
35. M. Amoruso et al., Eur. Phys. J. D 7, 441 (1999).  
E. Schmidt Phys. Rev. Lett. 91, 050401 (2003).



36. G.M. Bruun and C.W. Clark, Phys. Rev. Lett. 83, 5415(1999).
37. J. Kinast et al., Phys. Rev. Lett. 92, 150402 (2004); M. Holland and A. Griffin, Phys. Rev. Lett. 89, 130402 (2002).
38. G.M. Bruun and C.J. Pethick, Phys.Rev.Lett. 92, 140404.
39. A. Altmeyer et al., [cond-mat/0609390](#).
40. L.P. Pitaevskii and S. Stringari, Phys. Rev. Lett. 81, S. De Palo, M.L. Chiofalo, M.J. Holland, S.J.J.M.F. Kokkelmans.
41. E. Braaten and J. Pearson, Phys. Rev. Lett. 82, 255.
42. S. Stringari, Europhys. Lett. 65, 749 (2004); 1135 (1957).
43. G.E. Astrakharchick,R.Combescot,X.Leyronas and (2004); G.M. Bruun, Phys.Rev. A 70, 053602 (2004).
44. N.Manini andL.Salasnich, Phys. Rev.A71, 033625.
45. Hui Hu, A. Minguzzi, Xia-Ji Liu and M.P. Tosi, Phys. G.V. Shlyapnikov Phys. Rev. A 71 012708 (2005);Rev. Lett. 93, 190403 (2004).
46. R. Onofrio et al. Phys. Rev. Lett. 85, 2228 (2000).
47. S. Stringari, Phys. Rev. Lett. 76, 1405 (1996).
48. K.W. Madison, F. Chevy, V. Bretin and J. Dalibard,Modern Trends in the Theory of Condensed Matter, eds. A. Pekalski and R. Przystawa, SpringerVerlag, Berlin.
49. D. Guery-Odelin and S. Stringari, Phys. Rev. Lett. 83,1980; P. Nozieres and S. SchmittRink, J. Low Temp.Phys. 59, 195 (1985).
50. O. Marago' et al., Phys. Rev. Lett. 84, 806 (2000).
51. K.W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben and J. Dalibard, Press (1995),pp355392;
52. Bulgac A., Yu Y. The vortex state in a strongly coupled dilute atomic fermionic superfluid. Phys. Rev. Lett. 91, 2003.
53. Федорченко А.М.. Теоретична фізика. Квантова механіка, термодинаміка і статистична фізика. У 2 томах. Т.2. / А. М. Федорченко /, Київ: Вища школа, 1993, 415 с.

54. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.. Теоретическая физика. В 10 томах, т. V. Статистическая физика. Часть 1. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц / Москва: Наука, 1976,

55. Свідзинський А. В. Математичні методи теоретичної фізики (Т2). – Луцьк, Вежа, 2003.

## АНОТАЦІЯ

У магістерській роботі представлена теоретична модель для опису квантової динаміки розрідженого атомарного бозе-конденсату при температурах відмінних від нуля. Виведено узагальнене рівняння для хвильової функції конденсату Гросс-Пітаєвського. Побудовано квантове кінетичне рівняння Больцмана для надконденсатних атомів. На основі кінетичного рівняння отримано рівняння гідродинаміки надконденсату у в'язкому наближенні. Отримано вирази для кінетичних коефіцієнтів.

*Ключові слова:* Бозе-Айнштайнівська конденсація, рівняння Гросс-Пітаєвського, кінетичне рівняння Больцмана, гідродинаміка, кінетичні коефіцієнти.

## ABSTRACT

In this work the theoretical model for describe of the quantum dynamics of dilute atomic bose-gas at the nonzero temperature is represented. The generalized Gross-Pitaevskii equation for condensate wave function is derived. The Boltzmann quantum kinetic equation for noncondensed atomics is constructed too. In terms of kinetic equation the noncondensate hydrodynamic equations are derived. The expressions for kinetic coefficients was obtained.

*Keywords:* Bose-Einstein condensation, Gross-Pitaevskii equation, Boltzmann kinetic equation, hydrodynamics, kinetic coefficients.