Кравчук О.М. Прикладне спрямування геометричних задач на екстремум. Прикладні проблеми комп'ютерних наук, безпеки та математики. Луцьк: ВНУ ім. Лесі Українки. 2024. № 2. С. 27-35.

УДК 514:517.272

Прикладне спрямування геометричних задач на екстремум

Кравчук Ольга Мусіївна (ORCID: 0000-0003-3828-7783)
доцент, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математичного аналізу та статистики
Волинський національний університет імені Лесі Українки, м. Луцьк
olikr57@ukr.net

Applied trend of geometric problems to the extremum

Olga Kravchuk
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical analysis and statistics
Lesya Ukrainka Volyn National University, Lutsk, Ukraine
e-mail: olikr57@ukr.net

Анотація. *Здійснено аналіз історико-філософських аспектів становлення та розвитку математики у тісному зв'язку із задачами на максимум та мінімум, які мають свій початок із далеких античних часів і виникають із практичних потреб людської діяльності. Охарактеризовано внесок вчених математиків, які цікавилися, досліджували і знаходили нові методи розв'язання задач на максимум і мінімум. Звертається увага на особливість таких задач у геометрії та їх важливість як для самої математики, так і її застосування.*
Ключові слова: геометрія, задачі на максимум і мінімум, задачі на екстремум.
Abstract. *An analysis of the historical and philosophical aspects of the formation and development of mathematics was carried out in close connection with the maximum and minimum problems, which have their origins in ancient times and arise from the practical needs of human activity. The contribution of mathematician scientists who were interested, researched and found new methods of solving problems for the maximum and minimum is characterized. Attention is drawn to the peculiarity of such problems in geometry and their importance both for mathematics itself and its application.*
Keywords: geometry, maximum and minimum problems, extremum problems.

Вступ. Один з найвидатніших математиків Леонард Ейлер (1707-1783), зауважив, що у світі не відбувається нічого, в чому б не вбачалося сенсу якого-небудь максимуму або мінімуму. Задачі на максимум і мінімум у геометрії або, як їх інакше називають, задачі на екстремум у геометрії можна вважати особливо важливими як для самої математики, так і для її застосування. Саме у процесі їх розв'язання математики вирізнялися різноманітністю і влучністю застосованих ними методів розв'язання.

Актуальність обраної теми обґрунтовується тим, що практична діяльність людини досить різноманітна і в кожному окремому випадку вирішення проблем потребує розуміння їх суті та способів розв'язання. Очевидно, що для задоволення усіх вимог успішної практичної діяльності, має розвиватися наука, яка розробляє різноманітні оптимальні методи. Серед них особливо важливими є ті, які необхідні для розв'язання різновидів однієї і тієї ж задачі, характерної для всієї практичної діяльності людини: як найефективніше використовувати свої засоби для досягнення, по можливості, найбільшої вигоди.

Розв’язання такого типу задач є предметом вивчення так званої теорії найбільших і найменших величин. Задачі, які мають чисто практичний зміст, особливо важливі і для теорії: всі закони, що визначають рух матерії, ґрунтуються на розв’язанні задач такого типу. Особливо варто відмітити їх значний вплив на розвиток математичної науки. У результаті спроб розв’язати ту чи іншу екстремальну задачу виникали і розвивалися нові теорії, а іноді й цілі напрямки математики. Ми будемо розглядати екстремальні задачі у геометрії.

Метою нашого дослідження є екскурс до витоків зародження теорії екстремальних задач, геометричних зокрема; аналіз прийомів та способів їх розв’язання.

Ми поставили перед собою **завдання**: дослідити окремий аспект становлення геометрії як науки, що відбувався у процесі розв’язання практичних задач екстремального змісту.

Екстремальними задачами займалися багато вчених античних часів (Евклід, Архімед, Аристотель та ін.). Нам відома така задача Евкліда (IV століття до н.е.): у даний трикутник ABC вписати паралелограм AKMP найбільшої площі**.** Зовсім нескладно довести, що найбільшу плошу, серед паралелограмів уписаних у даний трикутник ABC має той, вершини K, M, P якого ділять відповідні сторони трикутника навпіл.

Задачі на екстремум у всі часи привертали увагу вчених Так, у стародавній Греції ще до VI століття до н.е. знали про екстремальні властивості кола і кулі: серед плоских фігур з однаковим периметром найбільшу площу має коло, серед просторових фігур з однаковою площею поверхні куля має максимальний об’єм (розв’язання ізопериметричної екстремальної задачі). Часто пов’язують з цим відоме висловлювання Піфагора про те, що найдосконалішим із тіл є куля, а найдосконалішою із плоских фігур є круг.

З часом ці питання досліджувалися і вже на початку другого століття до нашої ери грецький геометр Зенодор написав спеціальний трактат «Про фігури, які мають однакову периферію». Цієї праці не збереглося, але у Паппа і Теона є посилання на її 14 положень.

У період занепаду античної цивілізації не було особливих наукових відкриттів. І лише у XV столітті у Європі почали відроджуватися наукові дослідження. Одним із питань, яке зацікавило вчених, було розв’язання задач на екстремум. Ці задачі у античні часи досліджувалися тільки геометричними методами і для розв’язання кожної з них потрібно було знаходити свій специфічний прийом. Першою із таких задач є задача Кеплера. Постановці даної задачі передувала ціла історія, яку Кеплер виклав у своїх працях під назвою «Стереометрія винних бочок». Ним була сформульована одна із найважливіших теорем: «з усіх циліндрів, що мають одну і ту ж діагональ осьового перерізу, найбільш містким буде той, у якому відношення діаметра основи до висоти дорівнює $\sqrt{2}$» .

А вже у XVII столітті з'явилися загальні методи вивчення задач на екстремуми, які призвели до створення диференціального й інтегрального числень. Перші елементи математичного аналізу були введені І. Кеплером у 1615 році. Він відкрив основну властивість екстремумів, яку пізніше було сформульовано у вигляді теореми: спочатку П. Ферма (для многочленів), потім І. Ньютоном і Г.В. Лейбніцем для довільних функцій і тепер має назву теореми Ферма, згідно з якою в точці екстремуму неперервної функції похідна функції дорівнює нулю.

Трохи пізніше для розв’язання складніших задач, пов’язаних з кривими чи поверхнями, що мають екстремальні властивості, було знайдено нові методи. На основі цього у другій половині XVII століття сформувалася спеціальна дисципліна – варіаційне числення (Ейлер і Лагранж).

Нові методи були настільки привабливі, старий евклідів або синтетичний метод розв’язування екстремальних задач, зокрема ізопериметричних, були майже відкинуті. Проте час від часу в історії математики з’являються геометри, які звертаються до старих методів, як до таких, що розвивають творче мислення. Серед них швейцарський математик Сімон Антуан Жан Люїльє, який у 1782 році видав у Варшаві латинською мовою книгу «Геометричні дослідження взаємозв’язків між площею і контуром фігур, або про найбільші чи найменші: частина I елементарна», а у 1789 році вийшла французькою мовою його «Полігонометрія» (теорія розв’язування многокутників, за аналогією до тригонометрії – теорія розв’язування трикутників), яка містила додаток «Короткий виклад елементарної ізопериметрії» .

Через півстоліття німецький математик Якоб Штейнер продовжив дослідження Люїльє, зокрема, присвячені максимальним і мінімальним властивостям фігур на площині, на сфері і у просторі, а у 1841 році подав отримані ним результати до Паризької академії у двох мемуарах німецькою мовою. У проведених дослідженнях він користувався лише синтетичними методами, надаючи можливість аналізу сприяти подальшому розвитку закладених таким чином основ. З тих пір вчені в цій галузі зробили крок далеко вперед і на сьогоднішній день ми маємо потужний математичний метод у вигляді сучасного математичного аналізу.

Оскільки відшукання максимумів і мінімумів постійно виникають в інженерних розрахунках, в архітектурі, економіці і т.д., то це спонукає до відшукання нових методів розв’язання таких задач. Крім того, екстремальні задачі все частіше знаходять застосування у природничих науках: фізиці, хімії, біології.

Сучасні науковці продовжують дослідження екстремальних задач, застосовуючи новітні методи їх розв’язання. Так, у навчальному посібнику «Основи теорії і методів оптимізації» автори Жалдак М.І., Триус Ю.В. [2] викладають основи теорії і методів оптимізації. Зокрема розглядаються класичні методи знаходження екстремумів функції однієї і багатьох змінних, метод множників Лагранжа; основні поняття опуклого аналізу: опуклі множини і функції та їх властивості, поняття субградієнта і субдиференціала опуклої функції; необхідні і достатні умови екстремуму; елементи теорії двоїстості в опуклому програмуванні; наближені методи одновимірної оптимізації для унімодальних функцій; чисельні методи безумовної та умовної оптимізації; непрямі і прямі методи стохастичного програмування; загальні принципи побудови керованих систем оптимізації; основні можливості використання деяких систем комп’ютерної математики та обробки даних для розв’язування екстремальних задач.

Поданий тут матеріал з теорії і методів оптимізації, дослідження операцій допоможе всім тим хто займається проблемами розв’язування оптимізаційних задач, що виникають в економіці, техніці, управлінні, на виробництві, у соціальній сфері.

Розробці та обґрунтуванню математичних моделей і обчислювальних методів розв’язання екстремальних задач дискретної оптимізації на комбінаторних конфігураціях присвячені дослідження, викладені у монографії «Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях» [1]. Тут автори Донець Г. П., Колечкіна Л. М.. розглядають нові підходи й ефективні методи розв’язання екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях при умові додаткових обмежень, здійснюючи аналіз обчислювального експерименту.

У методичному посібнику «Задачі на екстремум в геометрії» [3] наведено різні типи і методи розв’язування задач на екстремум, подано необхідний теоретичний матеріал, виділено і розглянуто типи задач, проаналізовано особливості цих типів, наведено приклади розв’язування задач кожного типу і запропонована методика розв’язування дещо складніших задач. Посібник буде корисним найперше учням середніх загальноосвітніх шкіл математичного спрямування, ліцеїв та вчителям математики.

Результати дослідження та їхнє обговорення. В епоху раннього середньовіччя наукові знання розвивалися дуже повільно. Це був час феодального ладу, в основі якого лежало натуральне господарство. Населення займалося землеробством і ремеслами. Із часом розвиток ремесел призвів до того, що кількість виробів ремісників перевищувала потреби людей тих місць, де вони проживали, і їм доводилося шукати можливості збуту продукції, отримувати прибуток від своєї праці. Ремісники переселялися у ті райони, де проходили шляхи сполучення й де їхні вироби могли знаходити собі збут. Купці, зацікавлені у зростанні своєї торгівлі, подорожують у пошуках різноманітних товарів і ринків для їхнього збуту, одночасно вишукуючи кращі й найбільш дешеві шляхи для їхнього перевезення.

Відкриття морського шляху в Індію (Васко де Гама в 1498 р.) і відкриття Америки (Колумбом в 1492 р.) сприяють появі нових товарів і нових ринків їхнього збуту. Далекі подорожі відкривають перед людиною не тільки нові країни, але й розширюють їхню уяву.

Вже починають швидко розвиватися природничі науки, розв'язуючи наукові проблеми, які виникають на той час перед людством. Найвідоміші вчені того часу з різних країн відчувають потребу у співробітництві для спільної розробки різних наукових питань. У всіх великих державах з'являються академії наук, а пізніше починають видаватися й наукові журнали.

Для розв'язання найрізноманітніших завдань, які виникли з потребами практики, необхідні були математичні знання. Але їх рівень, досягнутий грецькою математикою, виявився недостатнім для розв'язання нових задач, що потребувало відшукання нових методів. І такі методи, які докорінно відрізнялися від методів древніх математиків, були знайдені, здійснивши крок у розвитку самої математичної науки.

Назріла суспільна потреба у розв'язанні екстремальних задач: знайти найкоротший шлях перевезення того чи іншого товару, або: з найменшими затратами на виробництво отримати найбільші прибутки; або: серед фігур з однаковим периметром вибрати з найбільшою площею тощо.

Такі екстремальні питання людину зацікавили ще з античних часів. У Древній Греції ще до VI століття до н.е. знали про екстремальні властивості кола і кулі: серед плоских фігур з однаковим периметром найбільшу площу має коло, серед просторових фігур з однаковою площею поверхні максимальний об'єм має куля (розв'язання ізопериметричної екстремальної задачі).

Уже давно було помічено, що у навколишньому світі багато що відбувається за екстремальними законами. Сьогодні вже у середній школі учні починають знайомитися з екстремальними задачами на відшукання найбільшого чи найменшого значення якоїсь величини. Мабуть, однією із найчастіше розглядуваних геометричних задач, є найвідоміша з них: на площині дана пряма l і точки A і B по один бік від неї. Знайти на прямій точку М, для якої сума $AM + BM$ найменша.

Для розв'язання задачі, знаходимо точку симетричну точці В відносно прямої l, отримаємо точку С. Відрізок ВМ переходить при симетрії у відрізок СМ, отже, АМ + ВМ = АМ + СМ. За нерівністю трикутника, сума АМ + СМ набуває найменшого значення, коли точка М є точкою відрізка АС, тобто точка М – це точка перетину прямої l з відрізком АС. Для цієї точки сума АМ + ВМ рівна довжині відрізка АС. При будь-якому іншому виборі точки М ця сума буде більшою за АС.

Або, ще така задача:

Поблизу річки з прямолінійними берегами потрібно побудувати водонапірну башту, яка буде подавати воду трубами у населені пункти А та В, розташовані по один бік від річки. У якому місці потрібно побудувати башту, щоб загальна довжина відстаней від башти до населених пунктів була найменшою?

За допомогою таких міркувань можемо пояснити закон відображення світла: «кут падіння рівний куту відображення», оскільки в однорідному середовищі світло розповсюджується по найкоротшому шляху. Крім того, ця проста задача лежить в основі фокальних властивостей конічних перерізів - еліпса, гіперболи і параболи.

Вважається, що уперше задача про найкоротший шлях між двома точками відносно прямої, або задача про відображення світла, була розв'язана древньогрецьким математиком Героном Александрійським у трактаті «Про дзеркала». Тому її іноді називають задачею Герона. Її часто інтерпретують як суто практичну, для прикладу: де на прямій дорозі розмістити автобусну зупинку, щоб сумарний шлях до неї від населених пунктів А і В був найкоротшим?

Екстремальних геометричних задач насправді існує величезна кількість, серед них є й іменні задачі, або, як їх прийнято ще називати, класичні. Саме вони закладали фундамент для подальшого розвитку екстремальних задач в цілому.

Однією із таких задач є задача Кеплера, про яку ми згадували вище. Його теорема передбачає постановку наступної задачі: вписати у задану кулю циліндр найбільшого об'єму. Можлива двовимірна інтерпретація - вписати у задане коло прямокутник найбільшої площі.

Щоб порівняти складність розв’язання даного завдання потрібно розглянути обидва методи. Першим можна розглянути метод із застосуванням похідної, тобто алгебраїчний. Зазвичай, таке розв’язання передбачає введення нових позначень.

Також Кеплер міг би скористатися тільки поняттям похідної, тобто реалізувати свою ідею про те, що близько свого максимуму, функція є сталою. Але, незрозуміло чому, він, все таки, розв’язав цю задачу геометрично. Вихідну поставлену задачу Кеплер, за допомогою логічних умовиводів звів до наступної: з усіх прямокутних паралелепіпедів з квадратними основами, вписаних в кулю, куб має найбільший об’єм.

Саме таким чином, він зміг зрозуміти, як за допомогою одного лише вимірювання можна було визначити місткість бочки. Геометричне розв’язання даної задачі є більш складним, ніж при застосуванні похідної, чим і породжується інтерес до розв’язання таких задач. При знаходженні екстремумів геометричним способом потрібно одночасно задіяти чимало геометричних фактів, просторове мислення і ще багато інших навичок. Кеплер зміг показати прикладне застосування геометричних задач, розв’язавши реальну задачу і давши відповідь на досить складне і цікаве питання.

На початку XVIII століття італійський інженер і математик Фаньяно Дей Тоски (1682-1766) поставив наступне завдання: вписати у даний гострокутний трикутник ABC трикутник найменшого периметра так, щоб на кожній стороні трикутника ABC лежала одна вершина трикутника.

Для розв’язання цього завдання була використана так звана теорія рухів, яка є одним з дієвих інструментів при розв’язанні геометричних задач. Здійснивши кілька рухів площини, Фаньяно зміг розмістити сторони трикутника у ламану лінію, в результаті, периметр даного трикутника став меншим, ніж сам відрізок, який з'єднує кінці ламаної. Отже, периметр найменшого значення набуває тоді, коли всі три сторони трикутника будуть розміщені на одній прямій.

Ця задача покладена в основу теореми Фаньяно, яка формулюється так: серед усіх трикутників, вписаних у даний гострокутний трикутник, найменший периметр має ортотрикутник (тобто трикутник з вершинами в основах висот).

Історія математики зберегла легенду про одну із найстародавніших екстремальних задач, відому як задача Дідони. Фінікійська царівна Дідона (IX століття до н.е.) виявила бажання поселитися на березі середземного моря – затоки в Північній Африці, від якої вона була у захопленні. Дідона вмовила вождя місцевого племені віддати їй клаптик землі, який можна охопити воловою шкурою. Правитель тих місць не зрозумів каверзи і погодився віддати ділянку землі, яка в його розумінні, мала бути за площею рівною площі розпрямленої шкури бика. Воїни Дідони розрізали шкуру на тоненькі смужки, і Дідона охопила ременем, складеним з цих смужок, досить значну територію на березі затоки. Так виникло місто Карфаген. Задача Дідони полягає у виборі форми межі ділянки, заданої довжини, яка охоплює максимальну площу.

Якщо знати екстремальну властивість кола, то розв’язання отримуємо миттєво: межею ділянки є коло, що має задану довжину.

Основні шляхи розв’язання задачі Дідони або, як її називають по– іншому, класичної ізопериметричної задачі, були намічені ще за часів античності. Строге оформлення цих ідей з доведенням було подано математиками набагато пізніше.

Ще однією із таких задач є задача Ферма – Торрічеллі – Штейнера. Перша згадка про цю задачу зустрічається в середині XVII століття в книзі Вівіані «Про максимальні та мінімальні значення». Вінченто Вівіані став відомий завдяки дослідженню задач на екстремум.

У своїй книзі він зібрав задачі на максимум і мінімум, серед яких є така: на площині дані три точки A, B, C, що не лежать на одній прямій. Для якої точки Т площини сума відстаней $AT + BT + CT$ найменша?

Цю задачу розв’язували такі математики як Кавальєрі, Торрічеллі, Ферма і Штейнер, використовуючи різні методи, але саме геометричний метод розв’язання належить Штейнеру.

Розглянемо геометричне розв'язання. Відрізки *AT, BT, CT* розміщують на ламану лінію. Потім застосовується поворот. Площина повертається на 60 градусів навколо точки A, в результаті чого отримуємо, що точка C виявиться у деякій точці D, а точка T перейде у деяку точку N. Трикутники AND і ATC будуть рівні, оскільки рівними будуть сторони TC і ND. У свою чергу, трикутник ANT є рівностороннім (із рівності сторін AT і AN). Звідси отримуємо, що TA=TN. У результаті проведених міркувань отримуємо, що AT + BT + CT дорівнює довжині ламаної BTND, а отже, вона не менша від довжини відрізка BD.

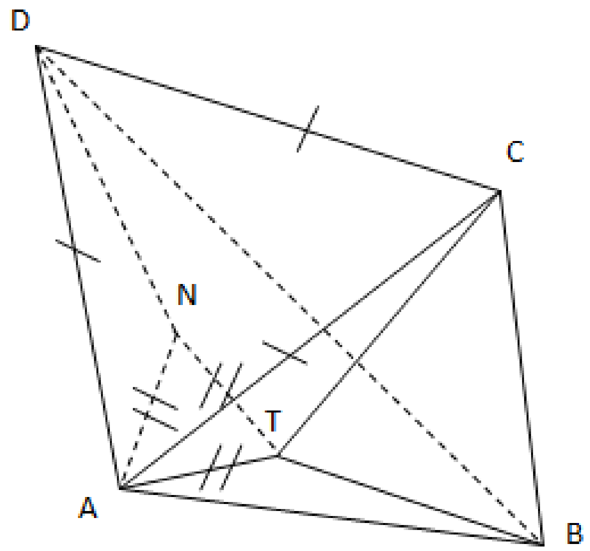

Рис.1

Рівність буде, коли точки B, T, N і D лежать на одній прямій (у вказаній послідовності). Це означає, що ∠BTA = 120°; а також

∠AND + ∠ANT = 180, значить, ∠AND = 120°, тому ∠ATC = 120°.

Таким чином, промені TA, TB і TC утворюють два кути по 120°, тому і третій кут між ними також дорівнює 120° (рис. 1).

Точка T, яка особлива тим, що з неї кожну сторону трикутника можна побачити під одним і тим же кутом, рівним 120 градусів, у в різній літературі називається по різному: і точка Ферма, і точка Торрічеллі, і точка Штейнера. Варто зауважити, що дана точка існує не у всіх трикутників. У випадку, коли існування цієї точки підтверджено, то вона є єдиною точкою мінімуму суми відстаней до вершин трикутника.

Відповідь на питання про умови існування даної точки дає теорема Торрічеллі-Ферма-Штейнера, яка стверджує: якщо всі кути трикутника менші за 120°, то точкою мінімуму суми відстаней до його вершин є точка Торрічеллі. Якщо ж один з кутів більший або дорівнює 120°, то такою точкою є вершина цього кута.

Зауважимо, що, як і у випадку із задачею Фаньяно, ця задача визначає ще одну особливу точку трикутника. І так само при її розв'язанні була застосована теорія рухів,

Ми розглянули основні типи екстремальних задач, звичайно, це далеко не повний перелік, так як існує величезна кількість їх варіацій, тим більше можна придумувати свої завдання, які зможемо розв'язати, так і не розв'язувані.

При розв'язуванні задач на екстремуми можна використовувати різні прийоми і методи, як аналітичні, так і геометричні. Кожний метод по - своєму унікальний і неповторний. Ті прийоми, які не передбачають застосування математичного аналізу, а обмежуються алгебраїчним або геометричним підходом до розв'язання задачі на екстремум, можна віднести до елементарних. За допомогою кожного з них можливе розв'язання певного класу задач на екстремум,.

Розглянемо для прикладу задачу.

Нехай два підприємства, розміщені на відстані l км одне від одного. Підприємства виробляють однакову продукцію, і до того ж, ціна одиниці продукції однакова і дорівнює p. Відомо, що транспортні витрати на перевезення продукції від підприємства A до споживача *становлять m грн/км, а від підприємства В — n грн/км. Виникає питання: як розподілити ринок збуту, щоб: а) витрати споживачів були однаковими; б) витрати на придбання продукції підприємства А є меншими; в) витрати на придбання продукції підприємства В є меншими?*

Для розв'язання цієї задачі застосуємо метод координат. Виберемо прямокутну декартову систему координат так, щоб початок координат знаходився у точці А, а додатний напрямок осі абсцис визначався δ напрямком вектора АВ (рис.2). Тоді точка В має координати (l;0), а точка А — координати (0;0)

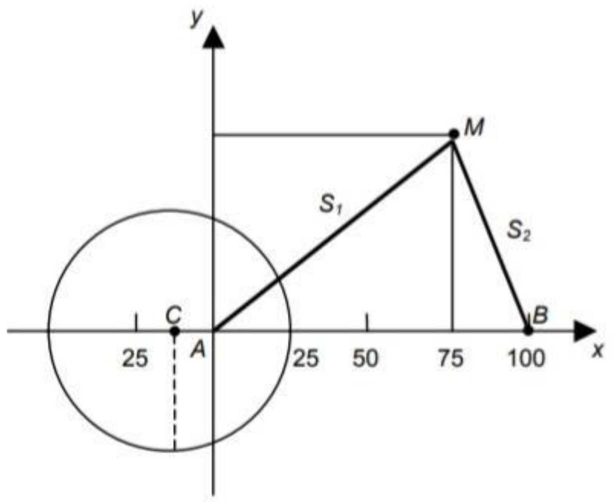

Рис.2

Припустимо, що споживач знаходиться у точці М(х; у).

Позначимо АМ = S1, ВМ = S2.

Витрати споживача на придбання одиниці продукції з підприємства А становлять $p + m \cdot S_1$,а з підприємства В- $p + n \cdot S_2$.

Витрати споживачів будуть однаковими, якщо $p + m \cdot S_1 = p + n \cdot S_2$,звідки $\lambda S_1 = S_2$, де $\lambda = \frac{m}{n}$.

Оскільки $S_1 = AM = \sqrt{x^2 + y^2}$, $S_2 = BM = \sqrt{(l-x)^2 + y^2}$, то $\lambda\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(l-x)^2 + y^2}$,

Звідки $\lambda^2(x^2 + y^2) = (l-x)^2 + y^2$,або $(1-\lambda)^2 x^2 + (1-\lambda)^2 y^2 - 2lx + l^2 = 0$

Якщо λ = 1, то рівняння має вигляд: $x = \frac{l}{2}$.

У цьому випадку для споживачів, які знаходяться на прямій, що проходить через середину АВ, витрати на придбання продукції підприємства А є меншими, ніж підприємства В, а для споживачів, які знаходяться праворуч від прямої (4.10), витрати на придбання продукції підприємства В є меншими, ніж підприємства А. Отже, ринок буде розподілено так:

1) споживачі, які розташовані ліворуч від прямої, купуватимуть продукцію на підприємстві А;

2) для споживачів, розташованих на прямій, неважливо, на якому підприємстві здійснювати закупівлю;

3) споживачі, які розташовані праворуч від прямої, купуватимуть продукцію на підприємстві В.

Якщо $\lambda \neq 1$, то отримане рівняння є загальним рівнянням кола, причому

A =1- λ2, B=- 2λ, C = 0 , D=l 2.

У цьому випадку ринок збуту буде розподілено таким чином:

1) споживачі, які розташовані всередині кола, купуватимуть продукцію на підприємстві A;

2) для споживачів, розташованих на колі, неважливо, на якому підприємстві здійснювати закупівлю;

3) споживачі, які знаходяться поза колом, купуватимуть продукцію на підприємстві B. Наприклад, якщо l = 100 км, m = 900 грн/км, n = 300 грн/км, то λ = 3.

Отже, A = 1-9=8 ,B=-2×100=-200 , C = 0 , D =1002 .

Тоді знайдемо $a = -\frac{200}{16} = -\frac{25}{2}$, $b = 0$, $R = \sqrt{\frac{25^2}{4} + \frac{100^2}{8}} = \sqrt{\frac{5625}{4}} = \frac{75}{2}$.

Таким чином, рівняння у цьому разі можна подати у вигляді:

$$\left(x + \frac{25}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{75}{2}\right)^2.$$

Отже, шукане рівняння є рівнянням кола з центром у точці $C\left(-\frac{25}{2};0\right)$ і радіусом $R = \frac{75}{2}$

.

Висновки. Очевидно, дослідження екстремальних задач різноаспектне, цікаве для подальших досліджень. Екстремум постійно виникає при багатьох розрахунках у різних галузях: галузі інженерії, в економічних і фінансових сферах діяльності. Аналітичний і геометричний методи розв'язання хороші тим, що не потребують застосування математичного аналізу і вважається елементарним. У деяких сферах діяльності людини такий метод буде більш підходящим інструментом вирішення тієї чи іншої проблеми з відшукання найбільшого чи найменшого значення певної величини, чи максимального прибутку при найменших затратах тощо.

Література

1. Донець Г. П. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях : монографія / Г. П. Донець, Л. М. Колєчкіна. Полтава : РВВ ПУЕТ, 2011.309 с.
2. Жалдак М.І., Триус Ю.В. Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник. Черкаси: Брама-Україна, 2005. 608 с.
3. Задачі на екстремум в геометрії. Методичний посібник. Інтернет-ресурс https://naurok.com.ua/metodichniy-posibnik-zadachi-na-ekstremum-v-geometri-231927.html