МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ
Кафедра математичного аналізу та статистики

На правах рукопису

КИРИЧУК МАРИНА ВІКТОРІВНА

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ ЗАКЛАДУ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)
Освітньо-професійна програма «Середня освіта. Математика»
Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:
ФЕДУНИК-ЯРЕМЧУК
ОКСАНА ВОЛОДИМИРІВНА,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ
Протокол №_________
засідання кафедри математичного
аналізу та статистики від _______________20__ р.
Завідувач кафедри
Федуник-Яремчук О.В.____________

Луцьк – 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми полягає в тому, що розв'язування раціональних нерівностей викликає у значної кількості учнів певні труднощі. Такі задачі вимагають знання різних теоретичних відомостей, застосування певних теорем та формул. Лише розв'язавши достатньо велику кількість раціональних нерівностей і ознайомившись із різноманітними методами та прийомами їх розв'язання, можна отримати навички, що дадуть змогу розв'язувати такі нерівності.

Ця тема є важливою складовою курсу алгебри і служить базою для вивчення більш складних розділів, таких як функції, похідні, інтеграли тощо у старших класах. Крім того, раціональні нерівності мають прикладний характер, адже вони використовуються в різних галузях, зокрема в економіці, фізиці, інженерії та аналізі даних. Розуміння та вміння розв'язувати такі нерівності допомагає учням моделювати та аналізувати реальні ситуації, що робить цю тему особливо актуальною в умовах сучасного профільного навчання.

Мета роботи – розглянути різні методичні особливості розв'язування раціональних нерівностей різних видів.

Одна з основних функцій розв'язування раціональних нерівностей – це сформувати уявлення про ідею і використання раціональних методів і прийомів.

Майстерність розв'язування раціональних нерівностей базується на володінні високим рівнем знань теоретичної частини курсу та певним багажем методів і прийомів розв'язування раціональних нерівностей.

Тому доцільно дослідити та ознайомитись з різноманітними методами та прийомами розв'язування раціональних нерівностей. Саме це дозволить учням розв'язувати, здається, складні нерівності просто, швидко і зрозуміло, а сформовані уміння і навички знадобляться учням при вивченні наступних тем: ірраціональні, логарифмічні, показникові та тригонометричні нерівності.

Для досягнення мети дослідження було поставлено наступні *завдання:*

- проаналізувати методичну літературу з вибраної теми;
- ознайомитись з теоретичними відомостями, розглянути основні теореми, що стосуються даної теми;
- розглянути деякі методи розв'язування раціональних нерівностей;
- навести приклади розв'язування раціональних нерівностей за допомогою різних методів.

Предметом дослідження є методи та алгоритми розв'язання раціональних нерівностей у шкільному курсі математики, їх роль у навчальному процесі та вплив на розвиток пізнавальних здібностей учнів.

Об'єктом дослідження виступає процес вивчення раціональних нерівностей у межах навчального курсу алгебри середньої школи.

Основні **методи дослідження** включають теоретичний аналіз навчальних програм і підручників, систематизацію відомих методів розв'язання раціональних нерівностей, а також емпіричні методи, такі як спостереження за навчальною діяльністю учнів і аналіз їхніх типових помилок. Педагогічний експеримент дозволяє оцінити ефективність різних методичних підходів до викладання цієї теми. Використання методів моделювання, зокрема створення графічних моделей для пояснення задач, і цифрових технологій сприяє підвищенню інтересу учнів та полегшенню засвоєння матеріалу.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох основних розділів, висновків, додатка та списку використаних джерел.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Загальні відомості з теми «Раціональні нерівності»

Дві функції, що поєднані між собою знаками $>, \geq, <, \leq$ утворюють нерівність:

$$f(x) > g(x) \text{ або } \big(f(x) \geq g(x)\big);$$
$$f(x) < g(x) \text{ або } \big(f(x) \leq g(x)\big).$$

Розв'язок нерівностей– значення x, що задовольняє їх.

Розв'язати нерівність – означає знайти деяку множину всіх її розв'язків або встановити, що розв'язки відсутні.

Область визначення D (областю допустимих значень) нерівності називають множину всіх значень невідомої, на якій існують функції $f(x)$, $g(x)$. При визначенні ОДЗ часто вводяться додаткові умови, що пов'язані з характером нерівності.

Множиною розв'язків системи нерівностей вважається перетин множин розв'язків всіх нерівностей, що входять в цю систему.

Кажуть, що нерівність еквівалентна системі нерівностей, якщо множина її розв'язків співпала з множиною розв'язків цієї системи.

Раціональні нерівності – це нерівності, виду $f(x) < g(x)$, або $f(x) \leq g(x)$, де $f(x)$ і $g(x)$ – раціональні вирази. Раціональний вираз – вираз, у якому міститься лише дії додавання, віднімання, множення, ділення, а також піднесення до степеня. У шкільній програмі розгляд таких нерівностей спрямований на розвиток умінь працювати з дробами, знаходити їх області визначення, аналізувати знаки чисельника і знаменника та розв'язувати задачі з використанням властивостей нерівностей.

Нерівності виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0\,, \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \ \ -$$

це базові типи раціональних нерівностей, де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени. Їх розв'язання передбачає дослідження виразу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на знак залежно від значень x.

Етапи розв'язання раціональних нерівностей:

1. Знаходження області визначення (ОДЗ). Область визначення раціонального виразу визначається виключенням таких значень змінної x, при яких знаменник $Q(x)$ дорівнює нулю, оскільки ділення на нуль є невизначеним.

2. Зведення нерівності до стандартного вигляду. Для зручності аналізу вираз записують у вигляді $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ або подібному. За потреби виконують перетворення, такі як множення чи ділення на вираз, що не змінює знак нерівності.

3. Знаходження нулів чисельника і знаменника. Розв'язують рівняння $P(x) = 0$ (чисельник дорівнює нулю) і $Q(x) = 0$ (знаменник дорівнює нулю). Це дозволяє визначити критичні точки, які ділять область визначення на інтервали.

4. Аналіз знаків на інтервалах. Використовують метод тестових точок або аналіз змін знаків на кожному інтервалі між критичними точками. Важливо враховувати, що при зміні знака чисельника або знаменника дробу змінюється знак усього виразу.

5. Побудова розв'язку. Після аналізу знаків обирають ті інтервали, де виконуються умови нерівності, наприклад $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$. Результати записують у вигляді об'єднання проміжків з урахуванням ОДЗ.

Розв'язання раціональних нерівностей є важливим етапом вивчення алгебри та початків аналізу, оскільки формує навички роботи з функціями, аналізу їх поведінки та логічного мислення. Цей матеріал також є основою для розуміння складніших математичних понять, таких як похідні чи інтеграли.

1.2. Теореми про рівносильність нерівностей

Дві нерівності з однією змінною x є рівносильними, якщо їх розв'язки співпадають (навіть, якщо обидві нерівності не мають розвязків). Якщо кожен частковий розв'язок нерівності $f_1(x) > g_1(x)$ являється частковим розв'язком нерівності $f_2(x) > g_2(x)$, отриманої після перетворення нерівності $f_1(x) > g_1(x)$, то нерівність $f_2(x) > g_2(x)$ називається наслідком нерівності $f_1(x) > g_1(x)$. Сформулюємо теореми про перетворення, що ведуть до рівносильних нерівностей.

Теорема 1. Якщо з однієї частини нерівності перенести доданок до іншої із протилежним знаком, то дістанемо нерівність, що є рівносильною початковій.

Теорема 2. Якщо до лівої та правої частин нерівності $f(x) > g(x)$ додати (або відняти) будь-яку функцію $\varphi(x)$ то дістанемо нерівність, що буде рівносильною початковій за умови, що області визначення початкової і нової нерівностей збігаються.

Теорема 3. Якщо обидві частини нерівності $f(x) > g(x)$ помножити (чи поділити) на будь-яку функцію $\varphi(x)$, що зберігає сталий знак та відмінну від нуля, то при $\varphi(x) > 0$ дістаємо нерівність, рівносильну до початкової, а при $\varphi(x) < 0$ рівносильною до початкової буде нерівність протилежного змісту (передбачається, що області визначення початкової і нової нерівностей збігаються).

Отже, можемо записати:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot \varphi(x) > g(x) \cdot \varphi(x), \quad \text{якщо } \varphi(x) > 0;$$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\varphi(x)} > \frac{g(x)}{\varphi(x)}, \qquad \text{якщо } \varphi(x) > 0;$$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot \varphi(x) < g(x) \cdot \varphi(x), \qquad \text{якщо } \varphi(x) < 0;$$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\varphi(x)} < \frac{g(x)}{\varphi(x)}, \qquad \text{якщо } \varphi(x) < 0.$$

Зауваження. На практиці під час застосування теорем 2 і 3 найчастіше замість функції $\varphi(x)$ береться відмінна від нуля константа.

1.3. Аналіз підручників в шкільному курсі математики

Вивчення раціональних нерівностей є важливою складовою шкільного курсу математики, особливо в 9-11 класах. Ця тема охоплює розв’язання нерівностей, де одна або обидві частини є раціональними виразами, тобто дробами, чисельник і знаменник яких є многочленами.

Згідно з навчальною програмою математики для 5 – 9 класів, затвердженою Міністерством освіти і науки України, вивчення нерівностей розпочинається з основних понять та властивостей деяких числових нерівностей. У 9 класі учні ознайомлюються з лінійними нерівностями з однією змінною, числовими проміжками, об’єднанням та перерізом числових проміжків, а також розв’язанням систем лінійних нерівностей з однією змінною.

У 10-11 класах, особливо на профільному рівні, програма передбачає поглиблене вивчення раціональних нерівностей, включаючи методи їх розв’язання та застосування в різних математичних задачах.

Сучасний шкільний курс математики має декілька авторів навчальних програм. За основу розглянемо підручники:

«Алгебра» 9-го класу (А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір) 2017р.,

«Алгебра і початки аналізу», 10 клас, профільний рівень, (А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір) 2011р.;

«Алгебра» для 11 класу, академічний і профільний рівень (А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір) 2011р.;

«Алгебра», 9 клас, (Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова) 2017р.;

«Алгебра і початки аналізу» 10-го класу, профільний рівень (Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова) 2017р.;

«Алгебра», 9 клас (О.С. Істер) 2017р.,

«Алгебра і початки аналізу» 10-го класу, профільний рівень (О.С. Істер, О.В. Єргіна) 2018р.

Результати аналізу даних підручників з теми «Нерівності» подані в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Аналіз підручників з теми «Нерівності»

Автори підручника	Рік видання	Розглянуті теми з нерівностей
А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір (Алгебра 9 клас)	2017	Лінійні нерівності, системи лінійних нерівностей
А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір (Алгебра і початки аналізу 10 клас, про фільний рівень)	2011	Метод інтервалів, раціональні нерівності, задачі з параметрами
А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір (Алгебра 11 клас, академічний і профільний рівень)	2011	Раціональні нерівності, методи їх розв'язання, графічний метод
Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова (Алгебра 9 клас)	2017	Лінійні нерівності, квадратичні нерівності
Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова (Алгебра і початки аналізу 10 клас, профільний рівень)	2017	Раціональні нерівності, задачі прикладного характеру
О.С. Істер (Алгебра 9 клас)	2017	Лінійні та квадратичні нерівності, графічний метод

Автори підручника	**Рік видання**	**Розглянуті теми з нерівностей**
О.С. Істер, О.В. Єргіна (Алгебра і початки аналізу 10 клас, профільний рівень)	2018	Метод інтервалів, аналіз нерівностей, прикладні задачі

Джерело: сформовано автором

Огляд основних підручників

– **«Алгебра. 9 клас» авторів А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір**: У цьому підручнику розділ «Нерівності» містить теми, присвячені числовим нерівностям, основним властивостям числових нерівностей, додаванню і множенню числових нерівностей, а також нерівностям з однією змінною. Особлива увага приділяється розв’язанню лінійних нерівностей та систем лінійних нерівностей з однією змінною.

– **«Алгебра. 10 клас» авторів Є.П. Нелін**: Підручник для рівня стандарту містить розділи, присвячені раціональним нерівностям, методам їх розв’язання, зокрема методу інтервалів, та застосуванню цих методів у різних математичних задачах.

– **«Алгебра. 11 клас» авторів О.С. Істер, О.В. Єргіна**: У розділі «Рівняння, нерівності та їх системи» підручника пропонується узагальнення та систематизація навчального матеріалу, включаючи раціональні нерівності. Розглядаються методи розв’язання, аналізуються типові помилки та надаються приклади застосування раціональних нерівностей у практичних задачах.

Основні теми та методи:

– Метод інтервалів. Цей метод є основним при розв’язанні раціональних нерівностей. Він передбачає визначення нулів чисельника та знаменника раціонального виразу, розбиття числової прямої на інтервали та аналіз знаків виразу на кожному з них.

– Графічний метод. Передбачає побудову графіка функції, що відповідає лівій частині нерівності, та визначення проміжків, на яких функція приймає додатні або від'ємні значення.

– Алгебраїчні перетворення. Включають спрощення раціональних виразів, знаходження спільного знаменника, розкладання на множники та інші прийоми, що полегшують розв'язання нерівностей.

Опанування раціональних нерівностей сприяє розвитку логічного мислення, вміння аналізувати та розв'язувати складні математичні задачі. Ці знання є фундаментом для подальшого вивчення вищої математики та застосовуються в різних галузях науки і техніки.

У магістерській роботі використовується навчальна програма Істера О. С. Тему «Нерівності» доступно викладено саме у підручниках «Алгебра», 9 клас та «Алгебра і початки аналізу» для 10-го класу, профільний рівень (авт. О.С. Істер, О.В. Єргіна), адже вони найбільш наочні для учнів.

Теоретичний матеріал доповнюється конкретними прикладами. Включено завдання легкого рівня, середнього і підвищеної складності, що дуже зручно у роботі з різними учнями. Зокрема, можна виділити диференціацію навчального матеріалу, диференціацію дидактичних завдань за рівнями складності, а також підбір історичних відомостей.

Тема «Нерівності», що входить до курсу алгебри 9-го класу, включає числові та лінійні нерівності, для вивчення яких виділено 16 годин. Вона має важливе значення, оскільки формує базові знання, необхідні для подальшого освоєння алгебри у старших класах. Ця тема тісно пов'язана з уже засвоєним матеріалом, що спрощує її опанування учнями. Мета вивчення теми — розвиток нових умінь та навичок: учні повинні навчитися додавати та множити нерівності почленно, використовувати властивості числових нерівностей для оцінки значень виразів, а також розв'язувати лінійні нерівності з однією змінною, виконувати рівносильні перетворення нерівностей, формулювати основні теореми та властивості: транзитивність числових нерівностей; додавання одного й того самого числа до обох частин нерівності; множення обох частин нерівності на додатне чи від'ємне число; додавання та множення числових нерівностей.

Вивчення матеріалу починається із загального означення понять «більше», «менше» або «дорівнює», яке узагальнює правила порівняння дійсних чисел, засвоєних у попередні роки. Особливу увагу слід приділити тому, що це означення є універсальним і застосовується як для порівняння чисел, так і виразів. Оскільки тема нова, доцільно використовувати абстрактно-дедуктивний метод введення понять. Цей підхід дозволяє швидше пояснити теоретичну частину, залишивши більше часу для розгляду прикладів, хоча й потребує від учнів певного рівня математичної підготовки.

Після подання означення необхідно систематизувати знання учнів щодо видів нерівностей, які класифікуються за знаком та змістом. Для кращого розуміння варто проводити аналогії між нерівностями та рівностями, наголошуючи, що вони є особливими видами записів, але за змістом поділяються на правильні та неправильні. Такі паралелі слід робити і під час вивчення властивостей числових нерівностей.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

2.1. Розв'язування лінійних нерівностей

Лінійні раціональні нерівності – це ті нерівності, у яких використано лінійні функції.

$ax + b < 0$ або $ax + b > 0$ – лінійні нерівності, в яких $a, b \in R$ – коефіцієнти.

Розв'язок нерівності – це множина значень змінної x, за яких нерівність стає правильною числовою нерівністю. Лінійні раціональні нерівності доцільно розв'язувати, використовуючи метод рівносильних перетворень, що наведені нижче.

Розв'язання лінійних нерівностей

$a < 0$	
Знак нерівності	Розв'язок нерівності
$<$	$x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$
$\leq$	$x \in \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right)$
$>$	$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$
$\geq$	$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right]$

$a > 0$	
Знак нерівності	Розв'язок нерівності
$<$	$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$
$\leq$	$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right]$

$>$			$x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$		
$\geq$			$x \in \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right)$		
$a = 0$					
$b < 0$		$b = 0$		$b > 0$	
Знак нерівності	Розв'язок нерівності	Знак нерівності	Розв'язок нерівності	Знак нерівності	Розв'язок нерівності
$<$	$x \in R$	$<$	$x \in \emptyset$	$<$	$x \in \emptyset$
$\leq$	$x \in R$	$\leq$	$x \in R$	$\leq$	$x \in \emptyset$
$>$	$x \in \emptyset$	$>$	$x \in \emptyset$	$>$	$x \in R$
$\geq$	$x \in \emptyset$	$\geq$	$x \in R$	$\geq$	$x \in R$

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність: $4(x+6) - 4x(x-2) < 2 - 4x^2$.

Розв'язання.

$$4x + 24 - 4x^2 + 8x < 2 - 4x^2,$$

$$4x - 4x^2 + 8x + 4x^2 < 2 - 24,$$

$$12x < -22, \qquad x < -\frac{22}{12}, \quad x < -1\frac{5}{6}.$$

Відповідь. $x \in \left(-\infty; -1\frac{5}{6}\right)$**.**

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність:

$$3 - \frac{1-x}{2} \geq \frac{2x-7}{6} + \frac{7x-2}{3}$$

Розв'язання.

$$3 - \frac{1-x}{2} \geq \frac{2x-7}{6} + \frac{7x-2}{3},$$

$$\frac{18}{6} - \frac{3-3x}{6} \geq \frac{2x-7}{6} + \frac{14x-4}{6},$$

$$18 - 3 + 3x \geq 2x - 7 + 14x - 4,$$

$$3x - 2x - 14x \geq -7 - 4 - 18 + 3,$$

$$-13x \geq -26,$$

$$x \leq -26 : (-13),$$

$$x \leq 2.$$

Відповідь. $x \in (-\infty; 2]$.

Для закріплення умінь та навичок з даної теми, учням можна запропонувати для розв'язання такі вправи:

1. Укажіть множину розв'язків нерівності $5 \leq x \leq 12$.

А	Б	В	Г	Д
$[5; 12)$	$(5; 12)$	$\emptyset$	$[5; 12]$	$(5; 12]$

2. Розв'яжіть нерівність $-3(x+6) < 3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 7)$	$(-\infty; -7)$	$(-\infty; +\infty)$	$(7; +\infty)$	$(-7; +\infty)$

3. Скільки натуральних розв'язків має нерівність $x + 2 \geq 2{,}5x - 1$.

А	Б	В	Г	Д
Один	Два	Три	Чотири	П'ять

4. Вкажіть найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\frac{x}{6} - \frac{x}{7} < 1.$$

А	Б	В	Г	Д
41	$\emptyset$	42	43	44

5. Обчисли суму натуральних розв'язків нерівності

$$\frac{3x+2}{4} - \frac{x-3}{2} \leq 3.$$

А	Б	В	Г	Д
3	6	16	10	15

6. Розв'яжіть нерівність $2(x-3) - 1 > 3(x-2) - 4(x+1)$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1)$	$(-\infty; -3)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-1; +\infty)$	$(-3; +\infty)$

7. Знайди кількість натуральних розв’язків нерівності

$$(x+8)(x-1)-x(x+5) \le 7.$$

А	Б	В	Г	Д
5	6	7	8	9

8. Розв’яжіть нерівність $x^2 + x < x(x+5) + 5$.

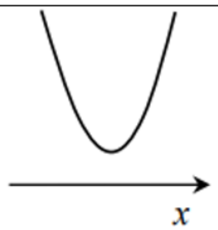
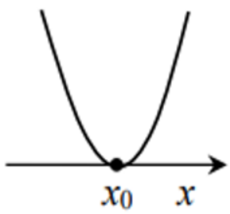
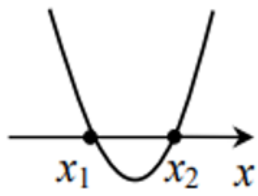
А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -0{,}8)$	$(-0{,}8; +\infty)$	$(-\infty; -1{,}25)$	$(-1{,}25; +\infty)$	$\emptyset$

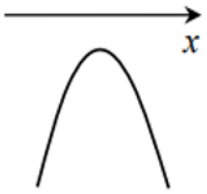
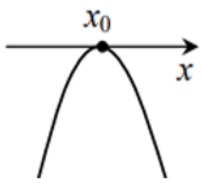
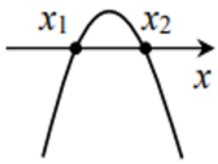
2.2. Квадратні нерівності

Нерівність виду $ax^2 + bx + c > 0; (< 0; \ge 0; \le 0)$, де $a \ne 0, b, c \in R$ – коефіцієнти, називається **квадратною**.

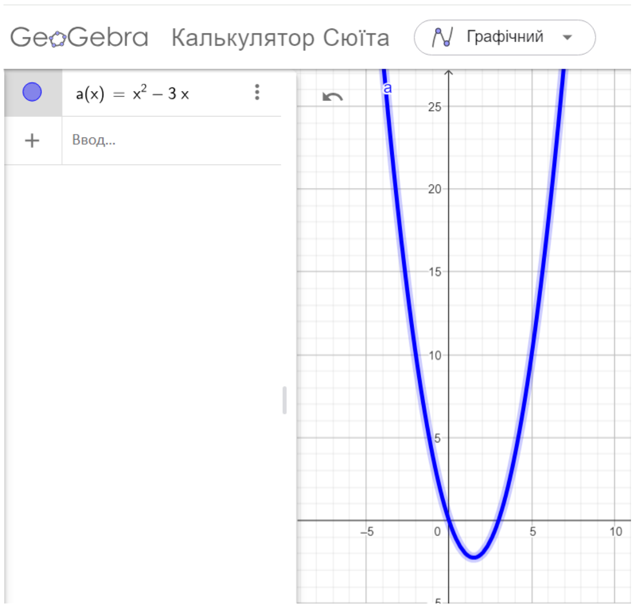
Розв’язки квадратної нерівності залежать від знака коефіцієнта a, що вказує на напрям віток квадратичної функції $f(x) = ax^2 + bx + c$, та кількості її нулів. Отже, найпростіше такі нерівності можна розв’язувати за допомогою графіка лівої частини (параболи).

Розв’язання квадратних нерівностей $a \ne 0$

$a > 0$			
Знак нерівності	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
			
$<$	$x \in \emptyset$	$x \in \emptyset$	$x \in (x_1; x_2)$
$\le$	$x \in \emptyset$	$x \in \{x_0\}$	$x \in [x_1; x_2]$
$>$	$x \in R$	$x \in R/\{x_0\}$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
$\ge$	$x \in R$	$x \in R$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$

$a < 0$			
Знак нерівності	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
			
$<$	$x \in R$	$x \in R/\{x_0\}$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
$\leq$	$x \in R$	$x \in R$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
$>$	$x \in \emptyset$	$x \in \emptyset$	$x \in (x_1; x_2)$
$\geq$	$x \in \emptyset$	$x \in \{x_0\}$	$x \in [x_1; x_2]$

Приклад 1. Розв’яжіть нерівність: $x^2 - 3x \geq 0$.



Розв’язання.

Знайдемо нулі функції:

$$x^2 - 3x = 0,$$

$$x(x - 3) = 0,$$

$$x_1 = 0; x_2 = 3.$$

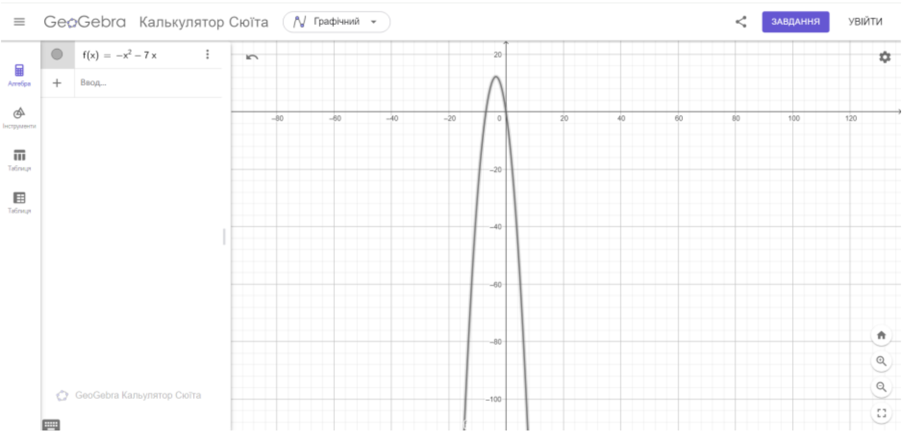
Побудувавши параболу $y = x^2 - 3x$, бачимо, що $y \geq 0$, якщо $x \in (-\infty; 0] \cup [-3; +\infty)$.

Відповідь. $x \in (-\infty; 0] \cup [-3; +\infty)$.

Приклад 2. Розв’яжіть нерівність:

$$-x^2 - 7x > 0.$$

Розв’язання.



$-x^2 - 7x = 0,$

$x(x + 7) = 0,$

$x_1 = 0; x_2 = -7.$

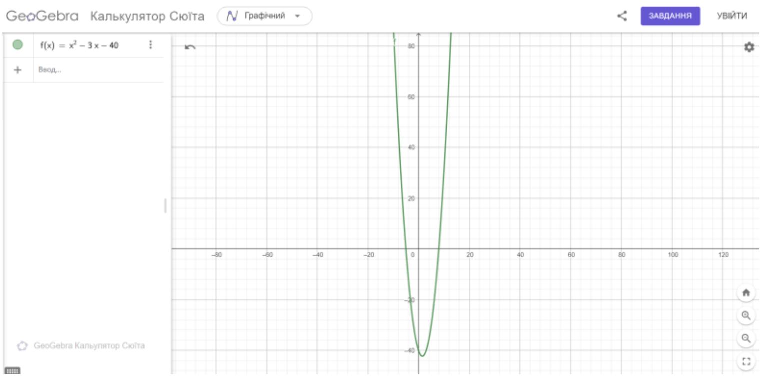
На графіку функції

$y = -x^2 - 7x,$

бачимо, що $y > 0,$ якщо $x \in (-7; 0).$

Відповідь. $x \in (-7; 0).$

Приклад 3.



Розв’яжіть нерівність:

$x^2 - 3x - 40 \geq 0.$

Розв’язання.

$x^2 - 3x - 40 = 0.$

Обчислимо дискримінант

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40) = 9 + 160 = 169,$

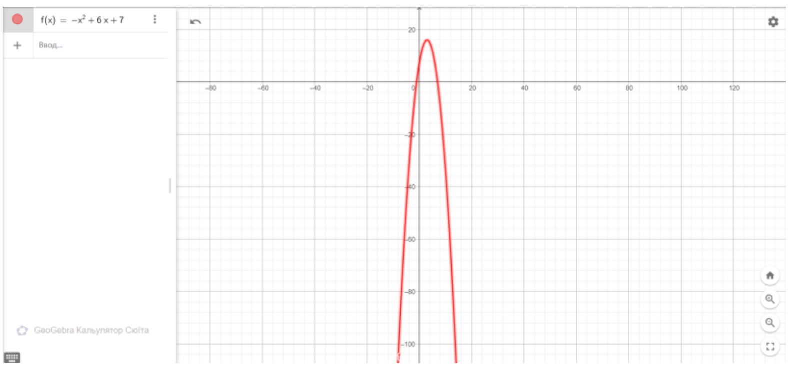
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 1}.$$

$$x_1 = -5; x_2 = 8.$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -5] \cup [8; +\infty).$

Приклад 4. Розв’яжіть нерівність: $-x^2 + 6x + 7 \leq 0$

Розв’язання.



$x^2 - 6x - 7 = 0,$

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) =$

$= 36 + 28 = 64,$

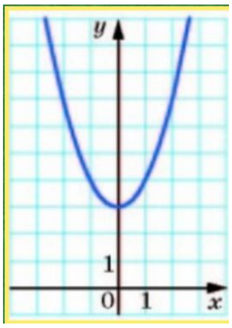
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1},$$

$$x_1 = -1;\ x_2 = 7.$$

Відповідь. $x \in (-7; 0)$.

Для самостійного опрацювання можна запропонувати наступні вправи:

1. Виберіть формулу, якою задано дану функцію:



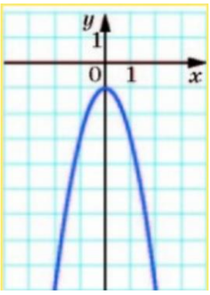
А) $y = -x^2 + 3$

Б) $y = x^2 + 3$

В) $y = -(x + 3)^2$

Г) $y = (x + 3)^2$

2. Виберіть формулу, якою задано дану функцію:



А) $y = -2x^2 - 1$

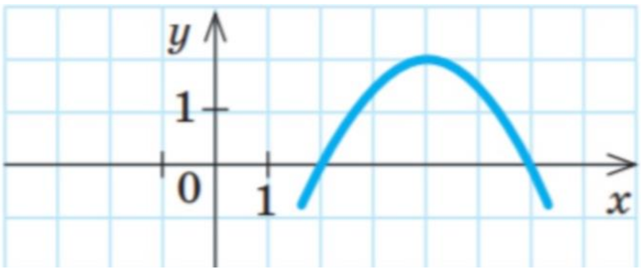
Б) $y = 2x^2 - 1$

В) $y = -2x^2 + 1$

Г) $y = 2x^2 + 1$

3. Розв’яжіть нерівність $-0{,}5x^2 + 4x - 6 \geq 0$ спираючись на фрагмент графіка функції $y = -0{,}5x^2 + 4x - 6$, наведений на рисунку,

.



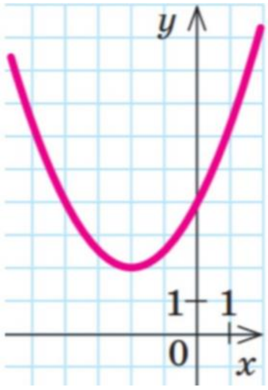
А) $(-\infty; 4]$

Б) $[2; 6]$

В) $(-\infty; 2] \cup [6; +\infty)$

Г) $(2; 6)$

4. Розв’яжіть нерівність $0{,}5x^2 + 2x + 4 < 0$, використовуючи фрагмент графіка функції $y = 0{,}5x^2 + 2x + 4$, наведений на рисунку.



А) ∅

Б) $(-\infty; +\infty)$

В) $(-\infty; 2)$

Г) $(-\infty; 2]$

5. Знайдіть усі значення, при яких функція дорівнює нулю:

$$f(x) = x^2 - x - 6.$$

6. Розв’яжіть нерівності:

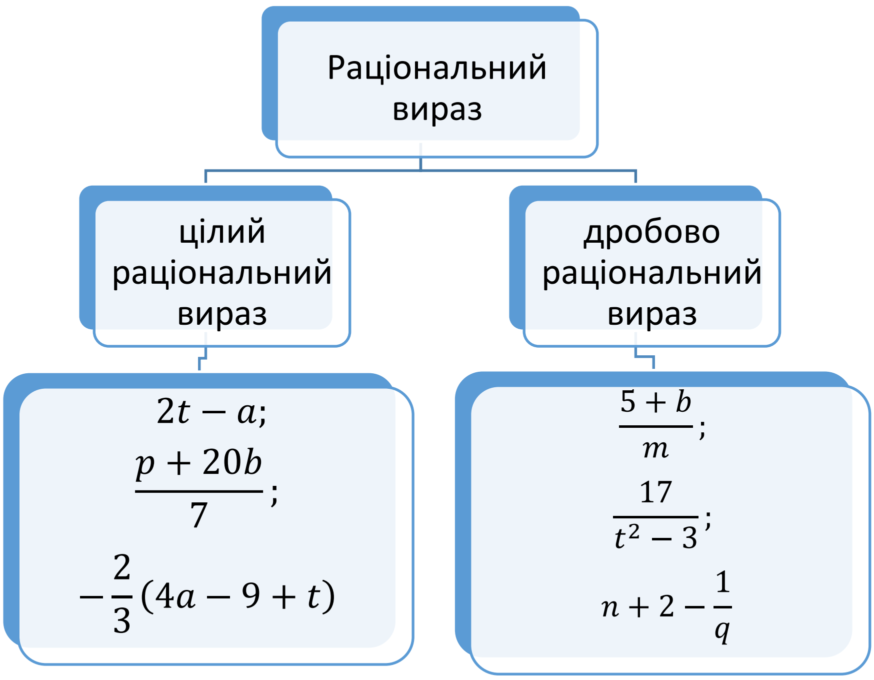
   1) $x(x-2) < 0$

   2) $3x^2 + 2x - 5 \geq 0$

   3) $x(5+x) > 0$

2.3. Розв’язування цілих раціональних нерівностей

Вираз, який містить додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степення, називають – **раціональним виразом.** Наприклад:



Нехай потрібно розв’язати нерівність

$$(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_{n-1})^{k_{n-1}}(x-a_n)^{k_n}>0,$$

де $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n$ цілі додатні числа; $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ — дійсні числа, серед яких немає рівних і такі, що задовольняють умову $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$.

Нерівності подібного типу розв'язують із застосуванням **метода інтервалів**. Метод інтервалів ґрунтується на такій властивості двочлена $(x-a)^n$: точка $x=a$ ділить числову вісь на дві частини, причому якщо $n = 2k$ (n - парне), то вираз $(x-a)^n$ по обидві сторони від точки $x=a$ зберігає додатний знак; якщо $n = 2k+1$ (n - непарне число), то вираз $(x-a)^n$ праворуч від точки $x=a$ додатний, а ліворуч від точки $x=a$ від'ємний.

Для розв'язання нерівності

$$(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_{n-1})^{k_{n-1}}(x-a_n)^{k_n}>0$$

методом інтервалів на числову вісь наносимо числа $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$. В проміжку праворуч від найбільшого з них ставимо знак «плюс», а потім, рухаючись справа наліво, при переході через кожне число a змінюємо знак, якщо k_i — непарне число, і зберігаємо знак, якщо k_i — парне число.

Зауваження 1. Якщо зустрічаються вирази вигляду $(a_i - x)^{\mathrm{n}}$, то праворуч від найбільшого з a_i не обов'язково буде знак « + «. У цьому випадку найкраще визначати знак лівої частини нерівності в якомусь з інтервалів, а потім поставити знаки в кожному з інтервалів, враховуючи наведені вище міркування.

Зауваження 2. Наведені вище міркування справедливі для нерівностей виду

$$\varphi(x)<0,\ \ \varphi(x)\geq 0,\ \ \varphi(x)\leq 0, \text{де}$$

$$\varphi(x)=\frac{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots\ (x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\dots\ (x-b_p)^{m_p}}.$$

Приклад 1. Розв'язати нерівність $x^3-6x^2+11x-6<0$.

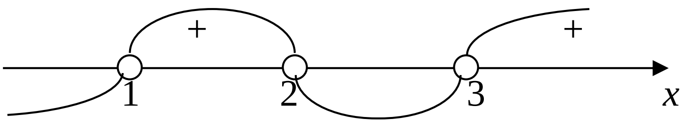
Розв'язання.

Для знаходження коренів рівняння $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 < 0$ необхідно розкласти ліву частину на множники. Маємо:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0,$$
$$x(x^2 - 6x + 5) + 6(x - 1) = 0,$$
$$x(x - 5)(x - 1) + 6(x - 1) = 0,$$
$$(x - 1)(x(x - 5) + 6) = 0,$$
$$(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0,$$
$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0.$$

Отже, числа $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ є коренями даного рівняння. Наносимо ці числа на числову вісь і визначаємо знак функції .$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, на кожному з інтервалів

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 < 0$ на одному з інтервалів. Зокрема, взявши точку $x = 0$ з інтервалу $(-\infty; 1)$, дістаємо $f(x) = -6 < 0$. Провівши «криву знаків», визначаємо знак $f(x)$ в кожному з інтервалів.



Відповідь. $x \in (-\infty; 1) \cup (2; 3)$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$(x + 7)(2x - 5)^3(6 - x)^5(3x + 10)^4 < 0.$$

Розв'язання.

Перетворимо нерівність у рівносильну форму

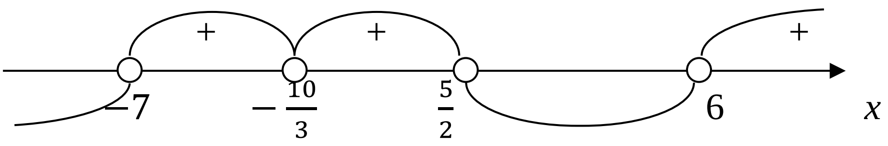
$$(x + 7)\left(x + \frac{10}{3}\right)^4\left(x - \frac{5}{2}\right)^3(6 - x)^5 > 0$$

Числа $x = -7, x = -\frac{10}{3}, x = 6, x = \frac{5}{2}$ є коренями рівняння.

Наносимо ці числа на числову вісь і визначаємо знак лівої частини функції

$$f(x) = (x + 7)\left(x + \frac{10}{3}\right)^4\left(x - \frac{5}{2}\right)^3(6 - x)^5 > 0$$

на одному з інтервалів. Зокрема, взявши точку $x = 0$ з інтервалу $\left(-\frac{10}{3}; \frac{5}{2}\right)$, дістаємо $f(x) > 0$. Проводимо через задані точки «криву знаків» з урахуванням того, що ліворуч і праворуч точки $x = -\frac{10}{3}$ буде той самий знак «+», тому що у виразі $\left(x + \frac{10}{3}\right)^4$ показник степеня (число 4) є числом парним.



Відповідь. $x \in \left(-7; -\frac{10}{3}\right) \cup \left(-\frac{10}{3}; \frac{5}{2}\right) \cup (6; +\infty)$

Приклад 3. Розв'язати нерівність

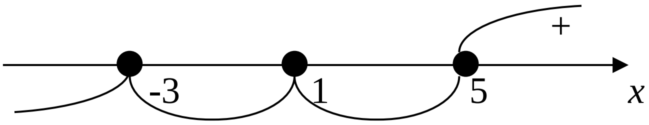
$$(x-1)^2(x+3)^6(x-5)^9 \geq 0.$$

Розв'язання.

Числа $x = 1, x = -3, x = 5$ є розв'язками рівняння. Наносимо ці значення на числовій осі та визначаємо знак лівої частини функції

$$f(x) = (x-1)^2(x+3)^6(x-5)^9$$

на одному з інтервалів. Наприклад, взявши точку $x = 0$ з інтервалу $(-3; 1)$, отримуємо $f(x) < 0$. Будуємо«криву знаків» через задані точки, враховуючи, що ліворуч і праворуч точки $x = 1$ і $x = -3$ знак залишиться «-», оскільки у виразах $(x-1)^2$ і $(x+3)^6$ показник степеня (число 4 і 6 відповідно) є парними числами, визначаємо знак $f(x)$ в кожному з інтервалів.



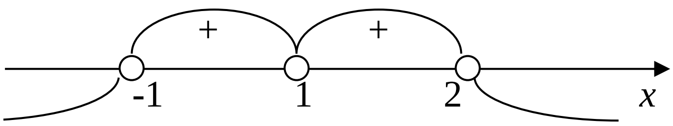
Відповідь. $x \in [5; +\infty)$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність

$$(2-x)^5(x+1)^3(x-1)^2(x^2+2x+7) < 0.$$

Розв’язання.

Числа $x = 2, x = -1, x = 1$ є коренями рівняння. Наносимо дані точки на числову вісь. Оскільки дискримінант квадратного тричлена $x^2 + 2x + 7$ $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -24 < 0,$ то $x^2 + 2x + 7 > 0$ для всіх x і, значить, парабола $x^2 + 2x + 7$ не перетинає вісь O_x. За допомогою «кривої знаків» дістаємо розв’язання.



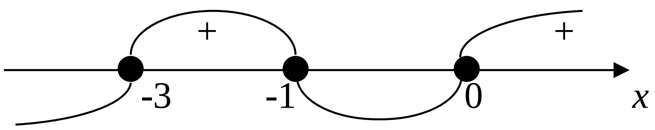
Відповідь: $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Приклад 4. Розв’язати нерівність

$$x(x+1)^7(x+3)^3 \leq 0.$$

Розв’язання.

Числа $x = 0, x = -1, x = -3$ є розв’язками рівняння. Позначимо ці точки на числовій осі та визначимо знак лівої частини функції $f(x) = x(x+1)^7(x+3)^3$ на одному з інтервалів. Наприклад, обравши точку $x = 1$ з інтервалу $(0; +\infty)$, отримуємо $f(1) > 0$. Побудуємо «криву знаків» через зазначені точки й отримаємо розв’язок.



Відповідь: $x \in (-\infty; -3] \cup [-1; 0]$.

Приклад 5. Розв’язати нерівність

$$(2x-1)^3(3x+4)(x-6)^2 > 0.$$

Розв’язання.

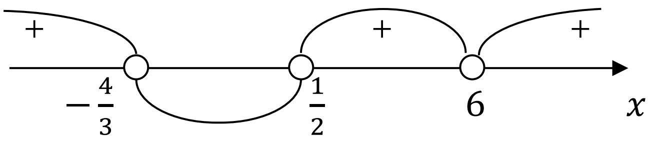
Перепишемо нерівність

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 (x + \frac{4}{3})(x-6)^2 > 0.$$

Числа $x = \frac{1}{2}, x = -\frac{4}{3}, x = 6$ є коренями рівняння. Позначимо їх на числовій осі та визначимо знак лівої частини функції

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 (x + \frac{4}{3})(x-6)^2$$

на одному з інтервалів. Зокрема, обравши точку $x = 0$ з інтервалу $\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{2}\right)$, дістаємо $f(x) < 0$. Побудуємо «криву знаків» через зазначені точки й отримаємо розв'язок.



Відповідь. $x \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 6\right) \cup (6; +\infty)$.

2.4. Узагальнений метод інтервалів

Узагальнений метод інтервалів - це стандартний підхід до розв'язання раціональних нерівностей. Він передбачає визначення критичних точок і перевірку знаків на отриманих інтервалах.

Існують різні способи застосування цього методу. Розглянемо один із них, припускаючи, що розв'язується нерівність $f(x) > g(x)$. Для нерівності $f(x) < g(x)$ цей алгоритм буде аналогічним.

1. Перенести всі члени нерівності вліво:

$$f(x) - g(x) > 0.$$

2. Зводимо ліву частину отриманої нерівності до спільного знаменника:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0.$$

3. Розкладаємо многочлени $P(x)$ і $Q(x)$ на множники. Якщо серед них є однакові множники, об'єднуємо їх, використовуючи відповідний степінь. Наприклад,

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-a)}{x-c} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-a)^2(x-b)}{x-c} > 0.$$

Під час скорочення слід враховувати, що:

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-a)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-a \neq 0, \\ \dfrac{x-b}{x-c} > 0. \end{cases}$$

4. Виключити з розкладу нелінійні множники. Це робиться наступним чином:

Якщо в розкладі зустрічається множник, ax^2+bx+c, де $b^2-4ac<0$, то його виключення залежить від знака старшого коефіцієнта і здійснюється за наступним правилом:

$$\frac{(ax^2+bx+c)P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \quad a>0, \\ \dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0, \\ \quad a<0, \\ \dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0. \end{array}\right.$$

Якщо в розкладі присутній множник $(x-a)^{2k}$, то його виключення здійснюється відповідно до правил

$$\frac{(x-a)^{2k}\,P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-a=0, \\ \dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \end{array}\right.$$

$$\frac{(x-a)^{2k}\,P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-a\neq 0, \\ \dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0, \end{array}\right.$$

$$\frac{P(x)}{(x-a)^{2k}Q(x)} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-a\neq 0, \\ \dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0, \end{array}\right.$$

$$\frac{P(x)}{(x-a)^{2k}Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-a\neq 0, \\ \dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \end{array}\right.$$

Нелінійний множник $(x-a)^{2k}$ виключається за правилом:

$$\frac{(x-a)^{2k}\,P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-a)P(x)}{Q(x)} > 0.$$

5. На числовій осі позначимо точки, в яких множники чисельника та знаменника лівої частини нерівності, отриманої після виконання пунктів 1-4, дорівнюють нулю. Якщо нерівність нестрога, то точки, що відповідають множникам чисельника, позначаємо зафарбованими кружками, а точки, що відповідають множникам знаменника, — світлими. Якщо нерівність строга, всі точки позначаємо світлими кружками.

6. Поставимо знаки в кожному проміжку, на який числова вісь розбивається відміченими точками.Спочатку визначаємо знак у правому крайньому проміжку на числовій осі за правилом: знак «+» ставиться, якщо кількість множників виду $(a-x)$ парна, і знак «-», якщо ця кількість непарна. Знаки в інших проміжках розставляються з урахуванням того, що вони чергуються в сусідніх інтервалах.

7. Вибираємо проміжки, де стоїть знак «+», якщо нерівність, отримана в пункті 4, має вигляд: $f(x) > 0$, або знак «–», якщо нерівність має вигляд $f(x) < 0$. Ці проміжки містять крайні точки, позначені зафарбованими кружками, і не містять точок, позначених світлими кружками. Об'єднання цих проміжків і є множиною розв'язків даної нерівності.

2.5. Дробово-раціональні нерівності

Для розв’язання дробово-раціональних нерівностей використовують алгебраїчні перетворення. У деяких випадках виконують спрощення раціонального виразу, наприклад, розкладання чисельника і знаменника на множники для полегшення аналізу.

Приклад 1. Розв’язати нерівність

$$\frac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1} < 0.$$

Розв'язання.

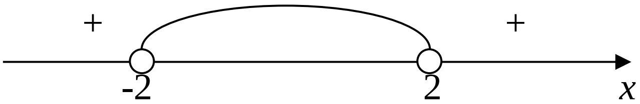
Розкладемо чисельник і знаменник дробу, який знаходиться в лівій частині нерівності, на множники:

$$\frac{(x-2)(x+2)(x^2+2)}{(x+1)^2} < 0.$$

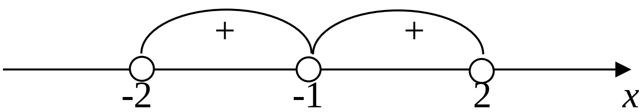
Отриманий дріб містить два нелінійні множники: $(x+2)$ і $(x+1)^2$. Перший з них є додатнім, тому його можна опустити. Другий множник виключимо у відповідно до пункту 4:

$$\frac{(x-2)(x+2)(x^2+2)}{(x+1)^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ (x-2)(x+2) < 0. \end{cases}$$

Далі, на числовій осі позначимо точки $x=-2, x=2$ та інтервали, що утворюються між ними, за допомогою знаків:



Обираємо інтервал $(-2; 2)$ позначенийзнаком «–» (оскільки $(x-2)(x+2) < 0$), і нанесемо на числову вісь точку $x=-1$. Ця точка потрапляє до вибраного інтервалу. «Виколюючи» точку $x=-1$, отримуємо два інтервали $(-2;-1)$ та $(-1;2)$, об'єднання яких і є множиною розв'язків даної нерівності:



Відповідь: $x \in (-2;-1) \cup (-1;2)$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$\frac{x^4+3x^3+4x^2-8}{x^2} < 0.$$

Розв'язання.

Розкладемо многочлен, що знаходиться в чисельнику лівої частини нерівності, на множники. Розглянемо рівняння $x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 8 = 0$. Серед дільників 8 підберемо корінь рівняння $x_1 = 1$. Тепер розділимо ліву частину рівняння на двочлен $x - 1$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 8 & \underline{4x - 1} \\
\underline{x^4 - x^3} & x^3 + 4x^2 + 8x + 8 \\
\quad 4x^3 + 4x^2 - 8 & \\
\quad \underline{4x^3 - 4x^2} & \\
\qquad 8x^2 - 8 & \\
\qquad \underline{8x^2 - 8x} & \\
\qquad\quad 8x - 8 & \\
\qquad\quad \underline{8x - 8} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Тепер розглянемо рівняння $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 8 = 0$. Серед дільників 8 підберемо рівняння $x_2 = -2$ і розділимо ліву частину на двочлен $x + 2$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 4x^2 + 8x + 8 & \underline{x + 2} \\
\underline{x^3 + 2x^2} & x^2 + 2x + 4 \\
\quad 2x^2 + 8x + 8 & \\
\quad \underline{2x^2 + 4x} & \\
\qquad 4x + 8 & \\
\qquad \underline{4x + 8} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Так як квадратний тричлен $x^2 + 2x + 4$ не має дійсних коренів, отримаємо розклад

$$x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 8 = (x - 1)(x + 2)(x^2 + 2x + 4).$$

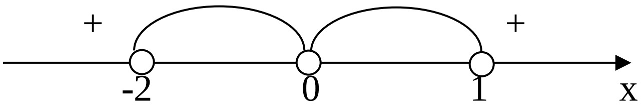
Таким чином, дана нерівність перетворюється у вигляд:

$$\frac{(x - 1)(x + 2)(x^2 + 2x + 4)}{x^2} < 0.$$

Дріб в лівій частині цієї нерівності містить два нелінійних множники: квадратний тричлен $x^2 + 2x + 4$, що більший нуля, і x^2. Виключимо ці множники:

$$\frac{(x-1)(x+2)(x^2+2x+4)}{x^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} (x-1)(x+2) < 0, \\ x \neq 0. \end{matrix}$$

На числовій осі відмітимо точки $x = 1, x = -2$ і інтервали, що утворюються знаками. Виберемо інтервал $(-2; 1)$ зі знаком «–» і потім відмітимо на осі точку $x = 0$.



Ця точка належить вибраному інтервалу, і тому, виключаючи цю точку, отримуємо, що $(-2; 0) \cup (0; 1)$ - множина розв'язків даної нерівності.

Відповідь. $x \in (-2; 0) \cup (0; 1)$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність

$$\frac{(2-x^2)(x-3)^3}{(x+1)(x^2-3x-4)} \geq 0.$$

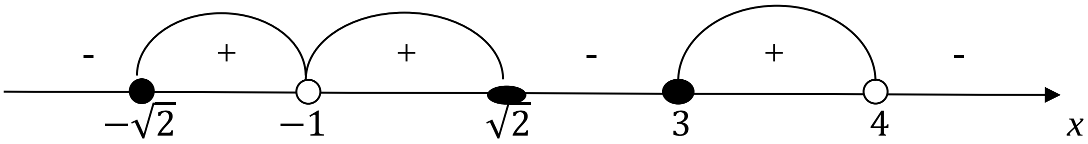
Розв'язання.

Відповідно до наведеної схеми методу інтервалів

$$\frac{(2-x^2)(x-3)^3}{(x+1)(x^2-3x-4)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{2}-x\right)\left(\sqrt{2}+x\right)(x-3)^3}{(x+1)(x-4)(x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)(x-3)^3}{(x+1)^2(x-4)} \geq 0 \begin{cases} x \neq -1 \\ \dfrac{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)(x-3)}{(x-4)} \geq 0. \end{cases}$$

На числовій осі позначимо точки $x = -\sqrt{2},\ x = \sqrt{2},\ x = 3$ зафарбованими кружками (оскільки нерівність нестрога), а точку $x = 4$ - світлим кружком:



Розв’язок цієї нерівності утворюється як об’єднання проміжків $\left[-\sqrt{2};-1\right) \cup \left(-1;\sqrt{2}\right] \cup [3;4)$.

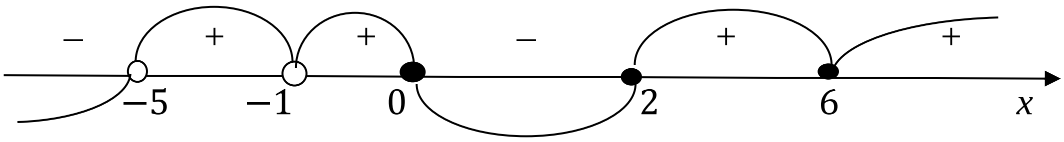
Відповідь. $x \in \left[-\sqrt{2};-1\right) \cup \left(-1;\sqrt{2}\right] \cup [3;4)$.

Приклад 4. Розв’язати нерівність

$$\frac{(x-6)^2(x-2)x}{(x+1)^4(x+5)} \geq 0.$$

Розв’язання.

Позначимо на числовій прямій точки $x = 6, x = -1, x = 2, x = 0, x = -5$. Точки $x = 6, x = 2, x = 0$ відзначаємо темними кружками, а точки $x = -1, x = -5$ світлими.



Провівши «криву знаків» з урахуванням того, що поблизу точок $x = -1$ і $x = 6$ ліва частина нерівності зберігає знак (оскільки у виразах $(x+1)^4$ та $(x-6)^2$ показники степенів є парними числами), отримуємо розв’язання

$$x \in (-5;1) \cup (-1;0] \cup [2;6] \cup [6;+\infty) \Rightarrow$$

$$x \in (-5;1) \cup (-1;0] \cup [2;+\infty).$$

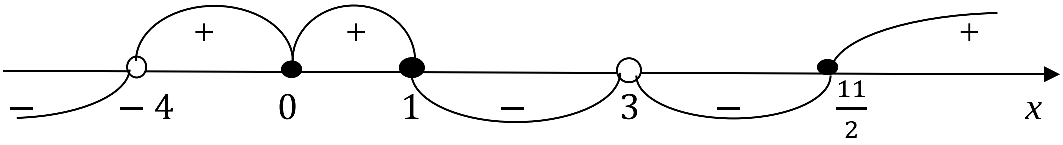
Відповідь. $x \in (-5;1) \cup (-1;0] \cup [2;+\infty)$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність

$$\frac{x^6(2x-11)(x-1)}{(x+4)^7(3x-9)^8} \leq 0.$$

Розв'язання.

Наносимо точки $x=-4, x=0, x=1, x=3, x=\frac{11}{2}$ на числову вісь. Використовуючи «криву знаків», отримуємо розв'язки, які заштриховано на рисунку.



Зазначимо, що точка $x=0$ належить множині розв'язків, оскільки при $x=0$ маємо $0 \leq 0$.

Відповідь. $x \in (-\infty;-4) \cup \{0\} \cup \left[1;3\right) \cup \left(3;\frac{11}{2}\right]$.

2.6. Графічний спосіб розв'язування раціональних нерівностей

Розглянемо функцію $y=\frac{1}{x}$, графіком якої є гіпербола (рис. 1.1), і функцію $y=\frac{1}{x-a}+b$, графік якої утворюється шляхом переміщення графіка першої функції на a одиниць уздовж осі O_x та на b одиниць вздовж осі O_y (рис. 1.2).

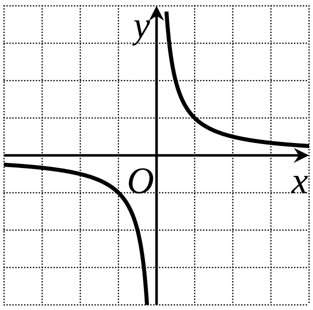


Рис. 1.1. Графік функції $y=\frac{1}{x}$.

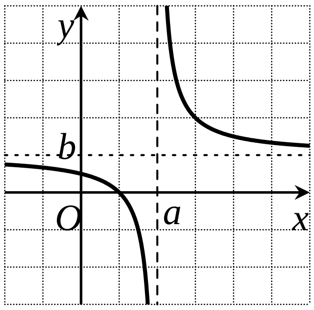


Рис. 1.2. Графік функції $y=\frac{1}{x-a}+b$.

Оскільки

$$\frac{x-c}{x-a}=\frac{x-a+a-c}{x-a}=1+\frac{k}{x-a}, \text{де } k=a-c,$$

то нерівності такого виду, як

$$\frac{x-c}{x-a}>d, \qquad \frac{x-c}{x-a}<d$$

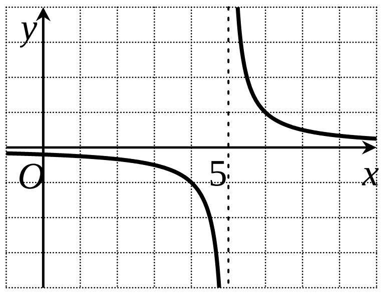
можна розв'язувати графічно, використовуючи графіку гіперболи.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $\frac{1}{x-5}<0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-5)$	$(-5;+\infty)$	$(5;+\infty)$	$(-\infty;5)\cup(5;+\infty)$	$(-\infty;5)$

Розв'язання.

Графік функції $y=\frac{1}{x-5}$ має вертикальну асимптоту $x=5$ та горизонтальну $y=0$. Таким чином, розв'язком нерівності є проміжок $x\in(-\infty;5)$, на якому гіпербола розташована нижче осі O_x.



Відповідь. Д.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $\frac{3x}{x+1}<\frac{7}{x+1}$.

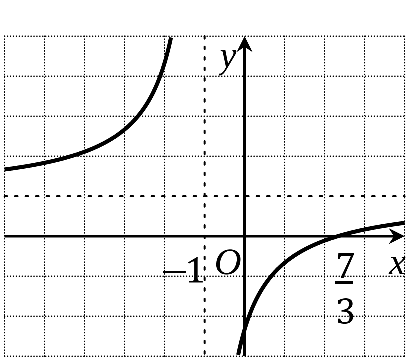
А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\left(-\infty;\frac{7}{3}\right)$	$(-\infty;-1)\cup\left(-1;\frac{7}{3}\right)$	$\left(-1;\frac{7}{3}\right)$	$(-\infty;-1)\cup\left(\frac{7}{3};+\infty\right)$	$(-\infty;-1)$

Розв'язання.

$$\frac{3x}{x+1}<\frac{7}{x+1};$$

$$\frac{3x-7}{x+1}<0;$$

$$\frac{x-\frac{7}{3}}{x+1}<0.$$



Отже, розв'язком нерівності є інтервал $\left(-1;\frac{7}{3}\right)$, на якому гіпербола знаходиться нижче осі абсцис.

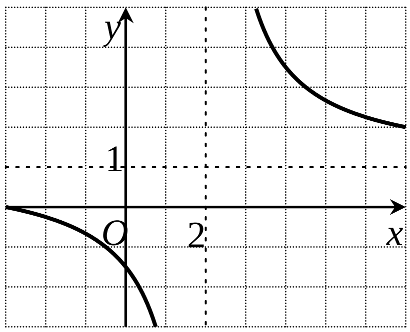
Відповідь. В.

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність $\frac{x+3}{x-2} > 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-3;2)$	$(-2;3)$	$(-\infty;-3) \cup (2;+\infty)$	$(-\infty;-2) \cup (3;+\infty)$	$(2;+\infty)$

Розв'язання.

Функція $y = \frac{x+3}{x-2}$ має вертикальну асимптоту $x = 2$ та горизонтальну – $y = 1$. Отже, розв'язками нерівності буде інтервал $(2;+\infty)$, де гіпербола розташована вище прямої $y = 1$.



Відповідь. Д.

Завдання для самостійної роботи.

1. Розв'яжіть нерівність за допомогою графічного методу: $\frac{1}{x-5} > 0$.
2. Розв'яжіть нерівність за допомогою графічного методу: $\frac{x+1}{3-x} \leq 0$.
3. Розв'яжіть нерівність за допомогою графічного методу: $\frac{2-x}{x+3} \leq 0$.

2.7. Аналітичний метод розв'язування раціональних нерівностей

Розглянемо нерівності виду:

$$f_1(x) \cdot g_1(x) > 0\,, \qquad f_1(x) \cdot g_1\,(x) < 0, \tag{1}$$

та

$$\frac{f_2(x)}{g_2(x)} > 0, \qquad \frac{f_2(x)}{g_2(x)} < 0, \tag{2}$$

де $f_i(x),\ g_i(x),\ i = 1,2$ − раціональні функції.

Тоді нерівності (1, 2) можна перетворити на рівносильні системи, як показано в таблицях 2.6.1 та 2.6.2.

Таблиця 2.6.1.

Розв'язання нерівності (1).

Строга нерівність	Рівносильна сукупність	Нестрога нерівність	Рівносильна сукупність
$f_1(x) \cdot g_1(x) > 0$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f_1(x) > 0, \\ g_1(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x) < 0, \\ g_1(x) < 0; \end{cases}\end{array}\right.$	$f_1(x) \cdot g_1(x) \geq 0$	$\left[\begin{array}{l} f_1(x) \cdot g_1(x) = 0 \\ \begin{cases} f_1(x) > 0, \\ g_1(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x) < 0, \\ g_1(x) < 0; \end{cases}\end{array}\right.$
$f_1(x) \cdot g_1(x) < 0$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f_1(x) > 0, \\ g_1(x) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x) < 0, \\ g_1(x) > 0; \end{cases}\end{array}\right.$	$f_1(x) \cdot g_1(x) \leq 0$	$\left[\begin{array}{l} f_1(x) \cdot g_1(x) = 0 \\ \begin{cases} f_1(x) > 0, \\ g_1(x) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x) < 0, \\ g_1(x) > 0. \end{cases}\end{array}\right.$

Таблиця 2.6.2.

Розв'язання нерівності (2).

Строга нерівність	Рівносильна сукупність	Нестрога нерівність	Рівносильна сукупність
$\frac{f_2(x)}{g_2(x)} > 0$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f_2(x) > 0, \\ g_2(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f_2(x) < 0, \\ g_2(x) < 0; \end{cases}\end{array}\right.$	$\frac{f_2(x)}{g_2(x)} \geq 0$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ g_1(x) \neq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f_2(x) > 0, \\ g_2(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f_2(x) < 0, \\ g_2(x) < 0; \end{cases}\end{array}\right.$

$\frac{f_2(x)}{g_2(x)} < 0$	$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}f_2(x) > 0,\\ g_2(x) < 0;\end{cases}\\ &\begin{cases}f_2(x) < 0,\\ g_2(x) > 0;\end{cases}\end{aligned}\right.$	$\frac{f_2(x)}{g_2(x)} \le 0$	$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}f_1(x) = 0,\\ g_1(x) \neq 0;\end{cases}\\ &\begin{cases}f_2(x) > 0,\\ g_2(x) < 0;\end{cases}\\ &\begin{cases}f_2(x) < 0,\\ g_2(x) > 0.\end{cases}\end{aligned}\right.$

Приклад 1. Розв’яжіть нерівність $\frac{2x-4}{x+1} < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1) \cup (-1; 2)$	$(-\infty; -1)$	$(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$	$(-1; 2)$	$(-\infty; 2)$

Розв’язання.

Розглянемо сукупність нерівностей, яка є рівносильною початковій і дозволяє знайти її розв’язки шляхом перетворення на кілька простіших нерівностей.

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}2x - 4 > 0,\\ x + 1 < 0;\end{cases}\\ &\begin{cases}2x - 4 < 0,\\ x + 1 > 0;\end{cases}\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x > 2,\\ x < -1;\end{cases}\\ &\begin{cases}x < 2,\\ x > -1;\end{cases}\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&\emptyset\\ &x \in (-1; 2).\end{aligned}\right.$$

Відповідь. Г

Приклад 2. Розв’яжіть нерівність $|x + 4| \cdot (x - 1) < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -4) \cup (-4; 1)$	$(-\infty; 1)$	$(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$	$(-4; 1)$	$(-1; 4)$

Розв’язання.

Розглянемо сукупність нерівностей, яка є рівносильною початковій

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}|x+4|>0,\\ x-1<0;\end{cases}\\&\begin{cases}|x+4|<0,\\ x-1>0;\end{cases}\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x\neq -4,\\ x<1;\end{cases}\\&\begin{cases}\emptyset,\\ x>1;\end{cases}\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c}x\in(-\infty;-4)\cup(-4;1);\\ \emptyset.\end{array}\right.$$

$$x\in(-\infty;-4)\cup(-4;1).$$

Відповідь. А.

Приклад 3. Розв’яжіть нерівність $\left|\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}\right|>1$.

Розв’язання.

$$\left[\begin{aligned}&\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}>1,\\&\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}<-1;\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}-1>0,\\&\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}+1<0;\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&\frac{x^2-5x+6-x^2-5x-6}{x^2+5x+6}>0,\\&\frac{x^2-5x+6+x^2+5x+6}{x^2+5x+6}<0;\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&\frac{-10x}{x^2+5x+6}>0,\\&\frac{2x^2+12}{x^2+5x+6}<0;\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{(x+2)(x+3)} < 0,\\ \dfrac{x^2+6}{(x+2)(x+3)} < 0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x(x+2)(x+3) < 0,\\ (x+2)(x+3) < 0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 0),\\ x \in (-3; -2).\end{array}\right.$$

Відповідь. $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (-2; 0)$.

Завдання для самостійної роботи.

1. Розв'яжіть нерівність за допомогою аналітичного методу

$$\left|\frac{2}{5+x}\right| > 2.$$

2. Розв'яжіть нерівність за допомогою аналітичного методу

$$\frac{x^2+2x-3}{|x+2|} < 0.$$

3. Розв'яжіть нерівність за допомогою аналітичного методу

$$\frac{x^2+5x+6}{|x+2|} < 4.$$

4. Розв'яжіть нерівність за допомогою аналітичного методу

$$\frac{x^2+x-6}{x-1} \geq 0.$$

2.8. Розв’язування раціональних нерівностей методом заміни змінної

Метод заміни змінних при розв’язуванні раціональних нерівностей дозволяє спростити складну нерівність шляхом введення нової змінної, яка допомагає усунути складні вирази (дроби, корені чи степені). Це ефективний і зручний метод, коли безпосередній розв’язок є громіздким.

Заміна змінної – це перехід від початкової змінної x до іншої змінної t, яка є функцією від x. Наприклад:

$$t = g(x),$$

де $g(x)$ – вираз, що найбільше ускладнює початкову нерівність.

Основні етапи методу:

1. Запис початкової нерівності

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \text{де } P(x) \text{ і } Q(x) - \text{ це поліноми.}$$

2. Визначення заміни змінної. Нехай

$$t = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

3. Переписування нерівності через нову змінну. Обов'язково слід врахувати область допустимих значень (ОДЗ) для нової заміни.

4. Розв'язання нерівності для нової змінної. Знайти нулі функції, визначити знаки на числовій прямій і обов'язково перевірити області допустимих значень для t. Після цього отримуємо множину розв'язків для t.

5. Зворотна заміна. Розв'язки для t повертаються до початкової змінної x, підставляючи вираз $t = g(x)$ у знайдені точки або інтервали. Це допомагає знайти розв'язки нерівності у вихідній змінній x.

6. Перевірка розв'язку. На даному етапі важливо врахувати початкові обмеження (ОДЗ) та перевірити, чи усі отримані розв'язки задовольняють початкову нерівність.

Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$(x-2)^4 - 13(x-2)^2 + 36 \leq 0.$$

Розв'язання.

Зробивши заміну змінної $t = (x-2)^2$, дістаємо

$$t^2 - 13t + 36 < 0.$$

Коренями рівняння $t^2 - 13t + 36 = 0$ є $t_1 = 4$, $t_2 = 9$.

Звідси

$$t^2 - 13t + 36 = 0$$

$$t^2 - 13t + 36 = (t-4)(t-9) \leq 0 \Leftrightarrow 4 \leq t \leq 9.$$

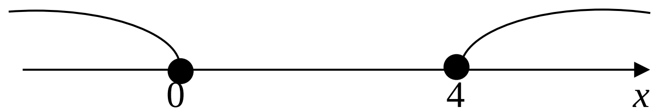
Оскільки $t = (x-2)^2$, то дістаємо

$$4 \leq (x-2)^2 \leq 9 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \geq 4 \\ (x-2)^2 \leq 9 \end{cases}$$

Розв'яжемо нерівність $(x-2)^2 \geq 4$

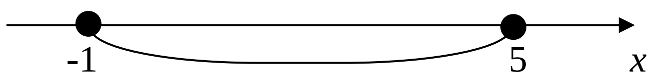
$$x^2 - 4x + 4 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x(x-4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ x \geq 4 \end{array}\right.$$



Розв'яжемо нерівність $(x-2)^2 \leq 9$.

$$x^2 - 4x + 4 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5$$



З малюнків можна побачити, що розв'язком початкової нерівності є об'єднання множин $[-1; 0]$ і $[4; 5]$.

Відповідь. $x \in [-1; 0]$ і $[4; 5]$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$x^6 - 9x^3 + 8 < 0$$

Зробивши заміну змінної $t = x^3$, дістаємо

$$t^2 - 9t + 8 < 0.$$

Коренями рівняння $t^2 - 9t + 8 = 0$ є $t_1 = 8, t_2 = 1$.

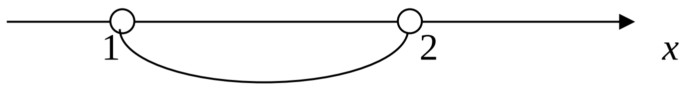
Звідси

$$t^2 - 9t + 8 = (t - 8)(t - 1) < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 8.$$

Оскільки $t = x^3$, то дістаємо

$$1 < x^3 < 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 > 1 \\ x^3 < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \end{cases}$$

Представимо отриману множину на координатній прямій.



Відповідь. $x \in (1; 2)$.

РОЗДІЛ 3. ВИКОРИСТАННЯ ІКТ ПРИ ВИВЧЕННІ РАЦІОНАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

3.1. Застосування ІКТ при вивченні теми «Нерівності»

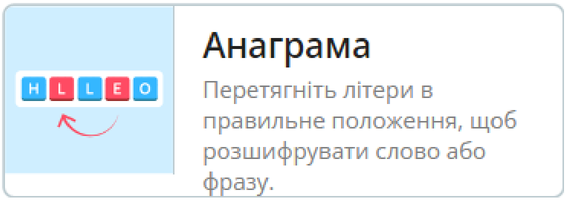
Використання інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) при вивченні математики дає змогу зробити навчальний процес сучаснішим, інтерактивнішим і більш адаптивним до потреб учнів. Інтерактивні вправи дозволяють організувати заняття, обмінюватися матеріалами та автоматизувати оцінювання завдань, що сприяє закріпленню знань.

Програмне забезпечення, як-от **GeoGebra**, допомагає учням краще зрозуміти абстрактні математичні ідеї через графіки, 3D-моделі та динамічні ілюстрації, зокрема під час вивчення теми «Нерівності».

Завдяки ІКТ можна використовувати програми, які підлаштовуються під рівень знань учнів, наприклад, **Wordwall**. Це дозволяє кожному учневі рухатися у своєму темпі. Онлайн-тестування з автоматичним аналізом допомагає вчителю швидко визначити прогалини у знаннях і надати індивідуальні рекомендації. ІКТ при вивченні математики не лише спрощують викладання складних тем, а й розвивають у школярів навички 21-го століття, як-от критичне мислення, вирішення проблем і цифрову грамотність.

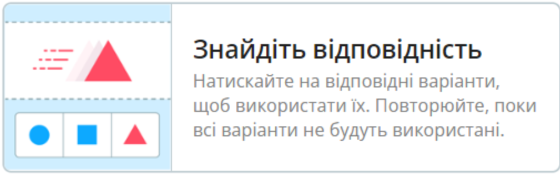
Використання Wordwall для вивчення тем з математики, таких як лінійні нерівності**,** цілі раціональні нерівності та дробово-раціональні нерівності**,** дозволяє зробити навчальний процес інтерактивним, цікавим і таким, що сприяє закріпленню знань через ігрову діяльність. Wordwall дозволяє перетворити рутинні математичні вправи на захоплюючі ігри. Наприклад:

- **Кросворди та анаграми.**



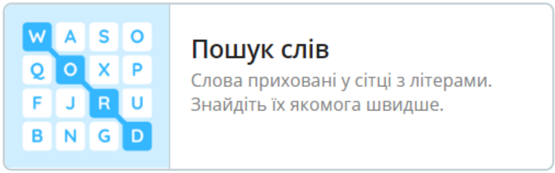
- **Гонки на швидкість.**

Розв’язання завдань на час. Наприклад: «Яке значення x відповідає нерівності $\frac{2}{x} > 1$»



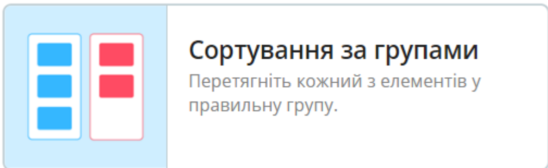
- **»Пошук слова».**

Учні знаходять ключова терміни, наприклад, «інтервал», «розв’язок», «квадратна нерівність».



- **Сортування.**

Розподіл нерівностей за типом розв’язання:

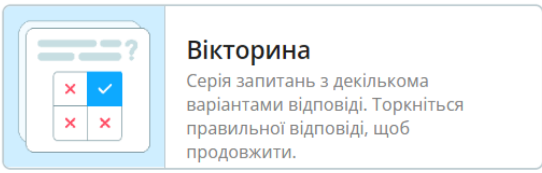


$$2x + 1 \geq 5 \text{ (лінійна нерівність).}$$

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \text{ (ціла раціональна нерівність).}$$

- **Оберіть правильну відповідь.**

Питання: «Яке значення відповідає нерівності $3x + 2 \leq 8$?»



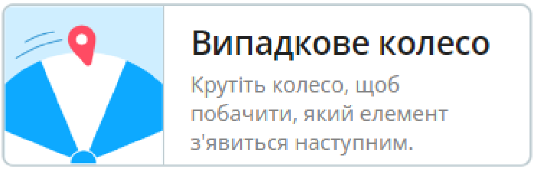
Варіанти: $x = 1; x = 3; x = 2$.

- **Перетягни на зображення.**

Додати графік або нерівність (наприклад, $\frac{1}{x} < 2$) і запропонувати учням позначити, в якій частині графіка знаходиться розв’язок.

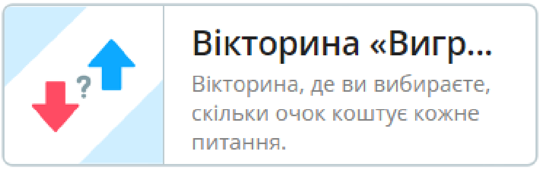
- **Колесо фортуни.** Учні обирають випадкову задачу:

«Знайдіть розв’язок нерівності $\frac{x+1}{x+2} > 0$» або знайдіть область визначення.



- **Вікторина «Виграй або програй».**

Вікторина, де можна обрати скільки очок коштує кожне питання» створює перевірочні завдання за допомогою графіків, нерівностей та тестових варіантів розв’язків.



Наприклад: «Який з наведених інтервалів є розв’язком цієї нерівності $x^2 - 9 \leq 0$?»

Варіанти: $(-3; 3), (-\infty; -3), (3; +\infty)$.

Після уроку вчитель може надіслати учням покликання на завдання у Wordwall, щоб вони могли потренуватися вдома. Це також дозволяє автоматичний зворотний зв’язок про прогрес кожного учня.

Перевагами використання Wordwall є:

– Інтерактивність. Завдяки ігровим елементам учні краще запам’ятовують матеріал.

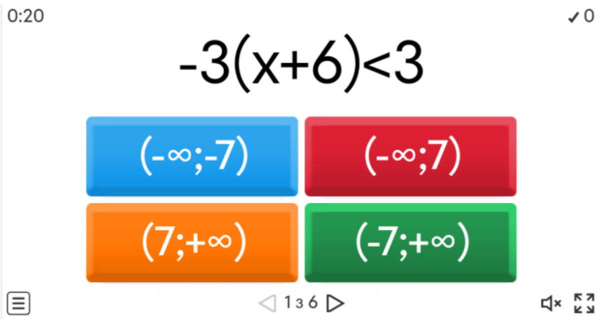
– Миттєвий зворотний зв’язок. Учні бачать свої результати одразу після виконання завдань, а також батьки можуть відслідкувати успіхи власних дітей.

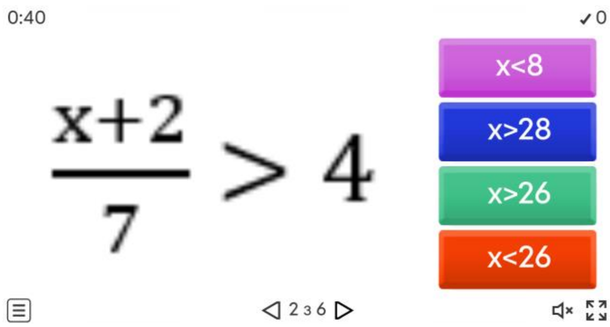
– Гнучкість. Вправи можна використовувати як для групової роботи, так і для індивідуального навчання.

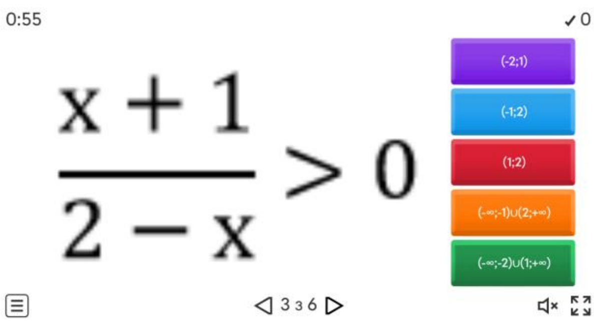
– Доступність. Wordwall доступний на будь-якому пристрої, що має доступ до інтернету.

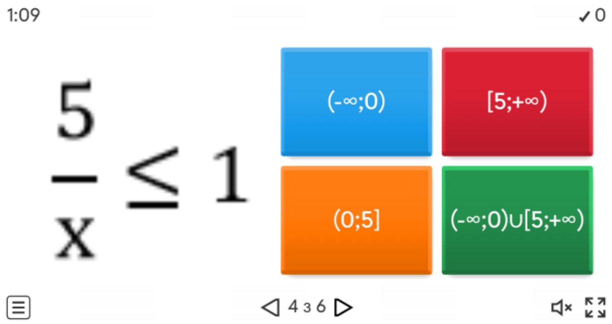
3.2. Розробка тестових завдань із теми «Раціональні нерівності»

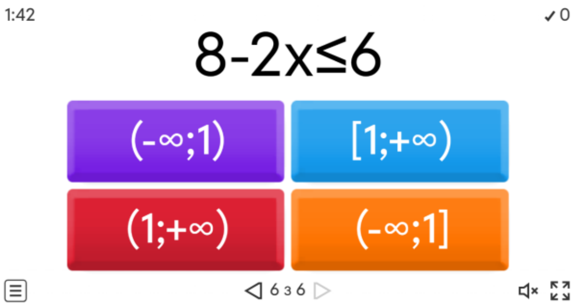
1. Знайди розв’язки нерівності.



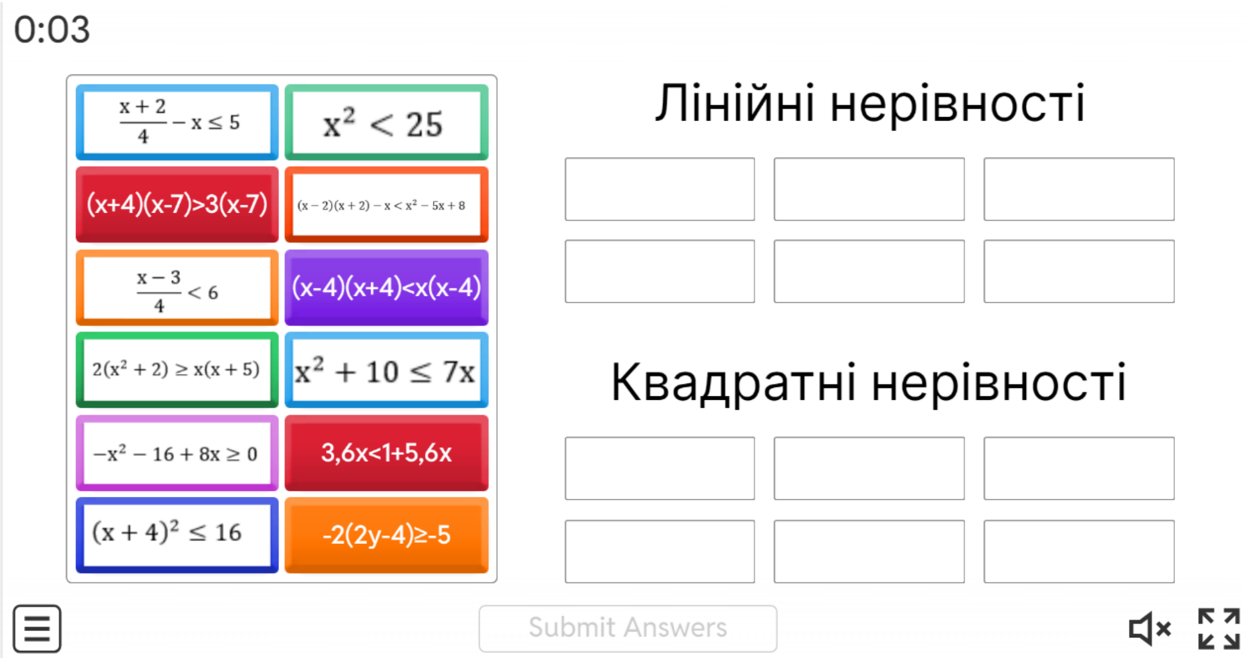




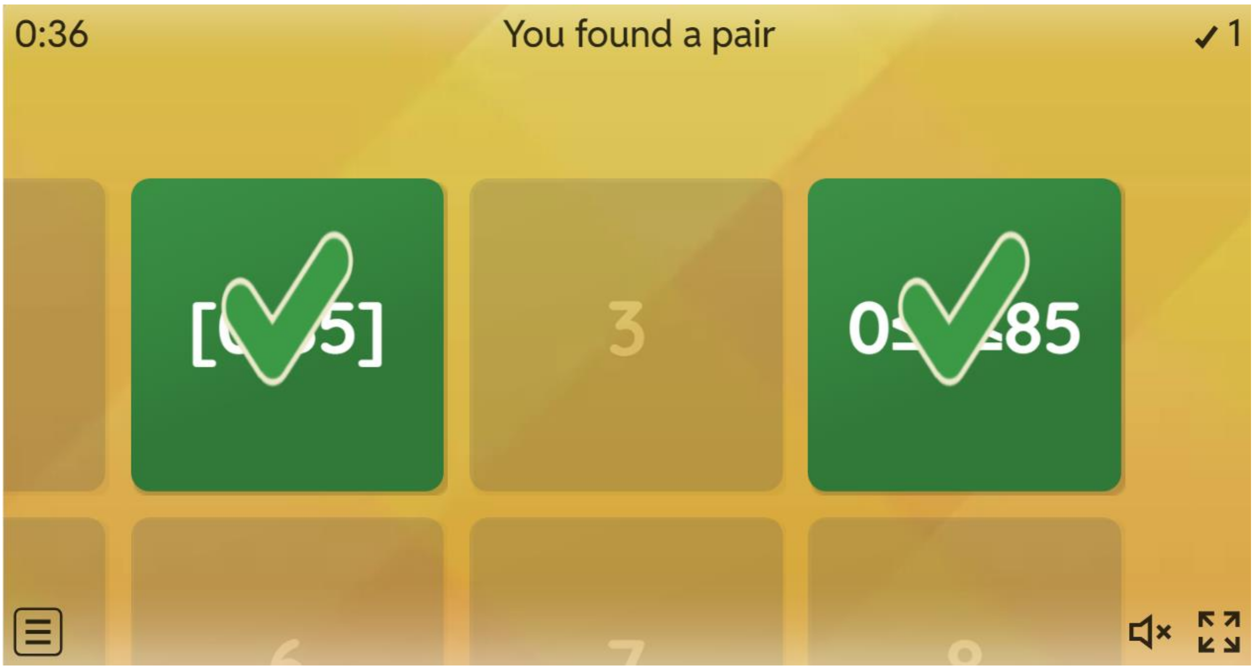




2. Види нерівностей.



3. Лінійні нерівності. Числові проміжки.



ВИСНОВКИ

Сучасна педагогічна наука підкреслює важливість встановлення зв’язків не лише між різними розділами курсу, а й між різними дисциплінами для ефективного засвоєння знань учнями та їхнього інтелектуального розвитку. Важливим аспектом є вміння розв’язувати раціональні нерівності, оскільки це дозволяє розв’язувати різноманітні задачі. Навички розв’язання раціональних нерівностей різних видів допоможуть учням спростити, здавалося б, складні нерівності, а також застосовувати ці вміння при розв’язуванні ірраціональних, логарифмічних, показникових та тригонометричних нерівностей.

Тому доцільним є вивчення різноманітних методів та прийомів розв’язування раціональних нерівностей. Для досягнення мети було поставлено та успішно виконано наступні **завдання**:

- проаналізовано методичну літературу з теми розв’язування раціональних нерівностей. Для аналізу означеної теми було здійснено огляд методичної літератури, яка висвітлює питання розв’язання раціональних нерівностей. У підручниках, посібниках і статтях науково-методичного спрямування особливу увагу приділено методам аналізу раціональних виразів, їхнього впливу на логіко-математичне мислення учнів, а також актуальності цієї теми для практичного використання. Огляд показав, що різні автори пропонують варіативні підходи до викладання матеріалу, що сприяє адаптації навчання до потреб різних категорій учнів;
- проведено ознайомлення з теоретичними відомостями, розглянуто основні теореми та методичні аспекти, що стосуються цієї теми. Теоретичні відомості про раціональні нерівності включають розгляд їх властивостей, основних теорем і методичних аспектів, які забезпечують ефективне викладання теми. Зокрема, важливими є такі положення: метод інтервалів як універсальний спосіб аналізу знаків раціональних виразів, правила визначення області визначення раціональних функцій та основи графічного підходу.

Огляд теоретичних матеріалів дозволив виділити ключові аспекти, необхідні для глибокого розуміння та подальшого практичного застосування цієї теми;

- розглянуто різноманітні методи розв'язування раціональних нерівностей. Ці методи є надзвичайно важливими для узагальнення та систематизації знань учнів, оскільки дозволяють працювати зі складними виразами і використовуються для спрощення задач і зведення нерівностей до вигляду, зручного для аналізу. Різні автори пропонують підходи до використання таких методів залежно від специфіки задачі;
- наведено низку прикладів розв'язування раціональних нерівностей різними методами. Ці приклади ілюструють, як вибір методу залежить від структури нерівності, і допомагають учням зрозуміти логіку послідовності дій. Використання конкретних задач дозволяє демонструвати не лише алгоритми розв'язання, але й типові помилки, що виникають у процесі аналізу, сприяючи кращому розумінню матеріалу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г.П, Бевз В.Г. Алгебра : підруч. для 9 кл. закл. заг. серед. освіти. – Київ : Освіта, 2017. 272 с. : іл.

2. Бевз Г.П, Бевз В.Г., Владімірова Н. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Освіта, 2018. 336 с.

3. Істер О. Алгебра : підруч. для 9 кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2017. 264 с.

4. Істер О. Математика (інтегрований курс) : підруч. для 7-го кл. закл. заг. серед. освіти. У 2 ч. Ч. 1. Київ : Генеза, 2024. 256 с. : іл.

5. Істер О. Математика: комплексна підгот. до зовніш. незалеж. оцінювання. – Київ : Генеза, 2021. 416 с. : іл.

6. Істер О. С., Єргіна О. В. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2018. 448 с. : іл.

7. Капеняк І., Гринчишин Я., Мартинюк О. Математика. Комплексна підготовка до ЗНО та НМТ – Тернопіль : Підручники і посібники, 2024. 560 с.

8. Клочко І. Математика : Тестові завдання. Ч. І. Алгебра (зовнішнє незалежне оцінювання). Тернопіль : Богдан. 304 с.

9. Козира В. Математика : державна підсумкова атестація. 9 кл. : навчально-методичний посібник. Тернопіль : Астон, 2021. 224 с.

10. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти. Харків : Гімназія, 2018. 400 с. : іл.

11. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти. Харків : Гімназія, 2010. 416 с. : іл.

12. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра. Академічний і профільний рівень : підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти. Харків : Гімназія, 2011. 431 с. : іл.

13. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу 10 кл. : збірник задач і контрольних робіт. – Харків : Гімназія, 2011. 144 с. : іл.

14. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 9 кл. закл. заг. серед. освіти. Харків : Гімназія, 2027. 272 с. : іл.

15. Повідайчик М. М., Мулеса П. П., Герич М. С., Шулла М. П., Попович А. О. Деякі методи розв'язування раціональних нерівностей : метод. рек. для студ. спец. «Дошкільна освіта», «Початкова освіта» та «Середня освіта». Ужгород : Говерла, 2022. 47 с.

16. Старова О. Алгебра. 7 клас. Харків: Основа, 2024. 191, с. : табл., іл., схеми. (Мій конспект. Матеріали до уроків).

17. Титаренко О. М. Форсований курс шкільної математики : навч. посіб. Харків : ТОРСІНГ ПЛЮС, 2005. 368 с.

18. Ципкін О. Г. Довідник з математики для середніх навчальних закладів. Київ : Вища школа, 1988. 416 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Розробка уроку з теми: «Дробово-раціональні нерівності»

Клас: 10-й (профільний рівень)

Тема уроку:

Дробово-раціональні нерівності. Метод інтервалів.

Мета уроку:

- **Навчальна:** ознайомити учнів із поняттям дробово-раціональних нерівностей, показати основні етапи їх розв’язання методом інтервалів.
- **Розвивальна:** розвивати вміння логічно аналізувати математичні вирази, розвивати навички самостійного розв’язання задач.
- **Виховна:** формувати уважність, терплячість та наполегливість під час розв’язання складних задач.

Тип уроку:

Урок засвоєння нових знань.

Обладнання:

- Мультимедійна презентація.
- Дошка, маркери або крейда.
- Роздруковані картки із практичними завданнями.

Структура уроку:

1. Організаційний момент (2 хвилини)

- Привітання учнів, перевірка присутніх.
- Постановка мети та плану уроку.

2. Мотивація навчальної діяльності (3 хвилини)

Учитель пропонує учням подумати над таким запитанням:

- Як знайти проміжки, де раціональний вираз додатний або від’ємний?

- Чому розв'язання дробово-раціональних нерівностей важливе для практичного використання (у економіці, фізиці, техніці)?

Учні висловлюють свої думки, вчитель підсумовує.

3. Актуалізація опорних знань (5 хвилин)

Питання для обговорення:

1. Що таке область визначення раціонального виразу?
2. Як визначити нулі чисельника та знаменника?
3. Що таке числовий проміжок і як його записувати?

Учитель коротко нагадує теоретичні основи.

4. Пояснення нового матеріалу (15 хвилин)

1. Означення дробово-раціональної нерівності:

Нерівність виду $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени, називається раціональною нерівністю.

2. Метод розв'язання (метод інтервалів):

Етапи:

1. Знайти область визначення нерівності.
2. Знайти нулі чисельника ($P(x) = 0$) і знаменника ($Q(x) = 0$).
3. Позначити ці точки на числовій прямій.
4. Розбити область визначення на інтервали.
5. Визначити знак виразу на кожному інтервалі, використовуючи тестові точки.
6. Вибрати інтервали, що задовольняють умову нерівності.

3. Розв'язування прикладів.

1. Розв'язати нерівність:

$$\frac{2x - 3}{3x - 2} < 0.$$

- Область визначення: $x \neq \frac{2}{3}$.
- Нулі чисельника: $2x - 3 = 0$, $x = 1{,}5$.

- Нулі знаменника: $3x - 2 = 0$, $x = \frac{2}{3}$.
- На числовій прямій позначити точки $x = 1{,}5$; $x = \frac{2}{3}$.
- Визначити знаки виразу на інтервалах:

$\left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right), \left(\dfrac{2}{3}; 1{,}5\right), (1{,}5; +\infty)$.

- Використовуємо тестові точки: $0,\ 1,\ 2$.
- Розв'язок: вибрати інтервали, де знак від'ємний.
- Відповідь: $x \in \left(\frac{2}{3}; 1{,}5\right)$.

2. Розв'язати нерівність:

$$\frac{x^2 - 4}{x + 3} > 0.$$

- Область визначення: $x \neq -3$.
- Нулі чисельника: $x^2 - 4 = 0$, $x = \pm 2$.
- Нулі знаменника: $x + 3 = 0, x = -3$.
- На числовій прямій: позначити точки $-3,\ -2,\ 2$.
- Визначити знаки виразу на інтервалах: $(-\infty; -3)$, $(-3; -2)$, $(-2; 2)$, $(2; \infty)$.
- Використовуємо тестові точки: $-4,\ -2.5,\ 0,\ 3$.
- Розв'язок: вибрати інтервали, де знак додатний.

5. Практичне закріплення (10 хвилин)

Учням пропонується розв'язати нерівності:

1. $\frac{x-1}{x+2} \leq 0$,
2. $\frac{x^2-9}{x^2-4} > 0$.

Учитель пояснює, аналізує типові помилки.

6. Підсумки уроку (5 хвилин)

- Що нового ви дізналися сьогодні?
- Як розв'язувати дробово-раціональні нерівності?

7. Домашнє завдання (2 хвилини)

1. Розв’язати нерівності:

$\frac{x^2-x-6}{x^2-4x+3} < 0$; $\frac{x^2+11x+30}{x^2+3x-10} < 0$.

2. Підготувати відповіді на запитання за темою.

Очікувані результати:

- Учні навчаться розв’язувати дробово-раціональні нерівності.
- Розвинуть навички аналізу математичних виразів.

АНОТАЦІЯ

Киричук М.В. Методика вивчення раціональних нерівностей в курсі математики закладу загальної середньої освіти. Магістерська робота. Луцьк, 2024. 55 с.

У магістерській роботі розглянуті та систематизовані основні методи розв’язання раціональних нерівностей, виділені методичні особливості вивчення даної теми учнями. До кожного методу розв’язання наведено низку прикладів. Використано електронний додаток Geogebra для створення графіків функцій. За допомогою інтерактивного навчального застосунку Wordwall розроблено тестові завдання із теми «Раціональні нерівності».

Ключові слова: нерівність, метод інтервалів, графічний метод, аналітичний метод.

ANNOTATION

Kirichuk M.V. Methods of studying rational inequalities in the course of mathematics in general secondary education. Master’s thesis. Lutsk, 2024. 55 p.

In the master’s thesis, the main methods of solving rational inequalities are considered and systematized, the methodical features of studying this topic by students are highlighted. A number of examples are given for each solution method. The Geogebra electronic application was used to create graphs of functions. Using the Wordwall interactive educational application, test tasks on the topic "Rational Inequalities" were developed.

Keywords: inequality, interval method, graphical method, analytical method.