МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Кафедра математичного аналізу та статистики

На правах рукопису

МАКАРУСЬ ОКСАНА ОЛЕКСАНДРІВНА

ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Спеціальність: 111 Математика

Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник :

СОЛІЧ КАТЕРИНА ВАСИЛІВНА

Кандидат фізико-математичних наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол №____________

Засідання кафедри математичного аналізу та статистики

від ___________ 20___ р.

Завідувач кафедри

доц. Федуник-Яремчук О.В. ________

Луцьк – 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальнісь теми. Розділ «Похідна та її застосування» займає важливе місце у курсі математичного аналізу та алгебри тому, що має велике практичне значення.

Математичний інструмент цієї теми допомагає при знаходженні границь функцій, доведенні нерівностей, розв'язанні рівнянь та дослідженні функцій. Даною темою займалися такі відомі математики як Г. Лейбніц, Ж. Лагранж, І. Ньютон.

Значення слова «похідна» є перекладом французького слова «derive», яке запровадив у 1797 р. Ж. Лагранж (1736-1813 рр.). Саме Ж. Лагранж ввів сучасні позначення y', f'. Функція $f'(x)$ походить з $f(x)$, похідною від $f(x)$. Ньютон назвав похідну функції – *флюксією* , а саму функцію – *флюентою*. Г. Лейбніц говорив про диференціальне ставлення і позначав похідну $\frac{df}{dx}$. Символ df для позначення *диференціалу* функції f обрав Лейбніц.

Диференціальне та інтегральне числення було створено відносно недавно Ньютоном і Лейбніцем наприкінці XVII століття. Задовго до цього Архімед не тільки розв'язав задачу на побудову дотичних до складних кривих, таких як спіраль, але й досяг успіху в знаходженні максимуму функції $f(x) = x^2(a - x)$. У XVII ст. активно розвивалося поняття похідної руху, засноване на вченні Галілея про рух.

Мета роботи – огляд основних тверджень диференціального числення; приклади застосування похідної для розв'язування рівнянь, розв'язуванні приктичних задач для доведення нерівностей та дослідження функції.

Основне завдання – дослідження застосування диференціювання для дослідження функцій, розв'язання прикладних алгебраїчних і геометричних задач. Завдяки демонстрації алгоритмів застосування похідних, розв'язування багатьох типів задач значно спрощується.

Об'єктом дослідження – термін похідної та її основні властивості; використання диференціювання для дослідження монотонності та екстремуму функції, для побудови графіка функції після повного дослідження функції, а також для знаходження максимального та мінімального значень функції на проміжку.

Предметом дослідження є обчислювальні методи диференціювання та особливості застосування диференціювання для дослідження функції, доведення нерівностей та наближеного обчислення розв'язків рівняння.

Методи дослідження – аналізування наукових джерел на дану тему, розв'язування задач, які дозволяють систематизувати процес дослідження, підсумовування отриманих результатів.

Структура і об'єм дослідження. Дана наукова робота складається зі вступу, трьох розділів, які містять підрозділи, висновок та списку використаної літератури. Зміст роботи викладений на 49 сторінках друкованого тексту.

Основний зміст роботи. Наукова робота присвячена поглибленому вивченню похідної — одного з центральних понять математичного аналізу, її властивостей і методів застосування для розв'язування різних математичних задач. Саму тему роботи розкрито в трьох розділах, які охоплюють як теоретичний, так і практичний аспекти теми.

У першому розділі описані базові аспекти похідної, включаючи її означення та геометричний зміст. Пояснюється, як похідна відображає зміну поведінки функції, поняття диференціалу, а також правила аналізу функцій: зростання, спадання та екстремуми. Ці теоретичні поняття формують основу для більш глибокого розуміння поведінки функцій та їх змін. У другому розділі розглядається практичне використання похідної в задачах, таких як розв'язування рівнянь, доведення математичних нерівностей та знаходження границь. Використання похідної в цих випадках дозволяє спрощувати обчислення та наближено розв'язувати складні рівняння, що є важливим для багатьох технічних та наукових застосувань. У третьому розділі описуються методи наближених обчислень, що використовують похідні. Зокрема метод хорд, метод дотичних та комбінований метод.

Апробація дослідження – результати магістерської роботи були публіковані у вигляді тез на наукових конференціях, а саме*:*

- на VI Міжнародній науково-практичній конференції молодих учених, аспірантів та студентів «Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень» (11 листопада 2022 року) на тему: «Застосовування похідної до розв'язування рівнянь» Луцьк: ВНУ ім. Лесі Українки, 2022. – С. 130-132;
- на VIII Міжнародній науково-практичній конференції молодих учених, аспірантів та студентів «Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень» (14 листопада 2024 року) на тему: «Розв'язування звичайних диференціальних рівнянь методом Ейлера» Луцьк: ВНУ ім. Лесі Українки, 2024. – С. 142-144.

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ

1.1. Поняття похідної

Нехай задано функцію $y = f(x)$, визначену на деякому сегменті. Для кожного значення аргументу x з цього сегменту функція $y = f(x)$ набуває певного значення.

Припустимо, що аргумент x має певний приріст Δx, а функція y отримає у відповідність деякий приріст Δy. Отже, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ при значенні аргументу x будемо мати $y = f(x)$, за значення аргументу $x + \Delta x$ матимемо $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Знайдемо збільшення функції Δy:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Складемо відношення збільшення функції до збільшення аргументу:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Знайдемо межу цього відношення цієї функції при $\Delta \to 0$. Якщо ця межа існує, її називають *похідною* даної функції $f(x)$ і позначають $f'(x)$. Таким чином:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ або } f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Означення. *Похідної* функції $y = f(x)$ за аргументом x називається межа відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx, при $\Delta x \to 0$.

Зауважимо, що для кожного значення x похідна $f'(x)$ має відповідне значення, тобто, похідна є також *функцією* від x. Разом з позначенням $f'(x)$ для похідної використовуються позначення: $y', y'_x, \frac{dy}{dx}$. Певне значення похідної при $x = a$ позначається $f'(a)$. Процес знаходження для функції $f(x)$ похідної називається *диференціюванням* цієї функції.

Приклад. Дано функцію $y = x^2$, знайти похідну y':

1) у будь-якій точці x,

2) при $x = 3$.

Розв'язання:

1) При значенні аргументу, маємо $y = x^2$. При значенні аргументу, що дорівнює $(x + \Delta x)$, маємо $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$. Знаходимо Δy:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Перейдемо до границі, знайдемо диференціал цієї функції:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Отже, похідна функції $y = x^2$ у будь-якій точці дорівнює $y' = 2x$.

2) При $x = 3$ отримаємо:

$$y'(3) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Приклад. Дано функцію $y = \sin x$, знайти похідну y'.

Розв'язання:

Користуючись відомою тригонометричною формулою

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Потрібно знайти Δx у точці x та обчислити границю функції:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x - 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}).$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Отже, $y' = (\sin x)' = \cos x$.

Аналогічно можна обчислити похідну функції $(\cos x)' = -\sin x$.

1.2. Геометричний зміст похідної

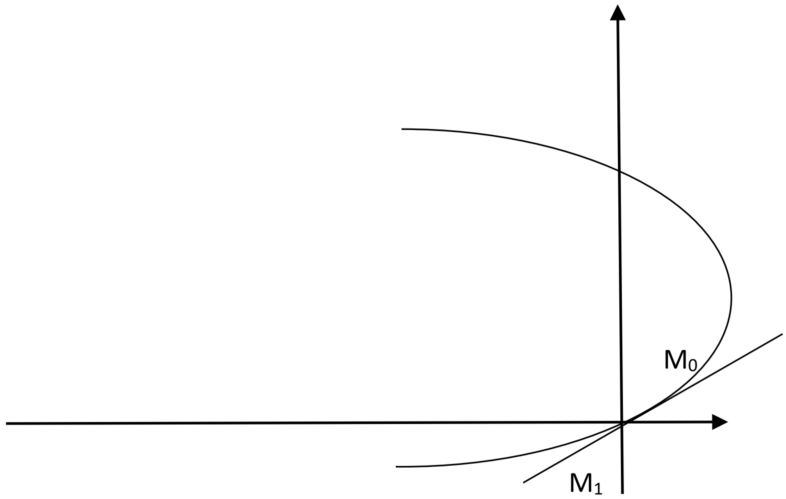


Рис.1. Геометричний зміст похідної

Нехай дано криву і фіксовану точку M_0 на цій кривій. Візьмемо точку M_1 на кривій і проведемо січну M_0M_1 *(рис.1)*. Якщо точка M_1 нескінченно наближається по кривій до точки M_0, то січна M_0M_1 приймає різні положення M_0M_1', M_0M_1'' і тд.

Якщо при нескінченному наближенні точки M_1, до точки M_0 по кривій з будь-якої сторони, січна займає місце певної прямої M_0T, то ця пряма називається *дотичною* до кривої в точці M_0.

Означення. Пряма задана рівнянням

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

називається дотичною до функції $y = f(x)$ в точці x_0.

Розглянемо функцію $f(x)$ та відповідну цій функції криву $y = f(x)$.

У прямокутній системі координат *(рис. 2)* при деякому значенні x функція має значення $y = f(x)$. Значенням x та y відповідає точка $M_0(x; y)$. Новому значенню аргументу $x + \Delta x$ відповідає відповідне значення функції $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Проведемо січну M_0M_1 і кут, утворений січною з додатний напрямом осі абсцис, позначимо через φ. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. На *рис.2* бачимо, що $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi$.

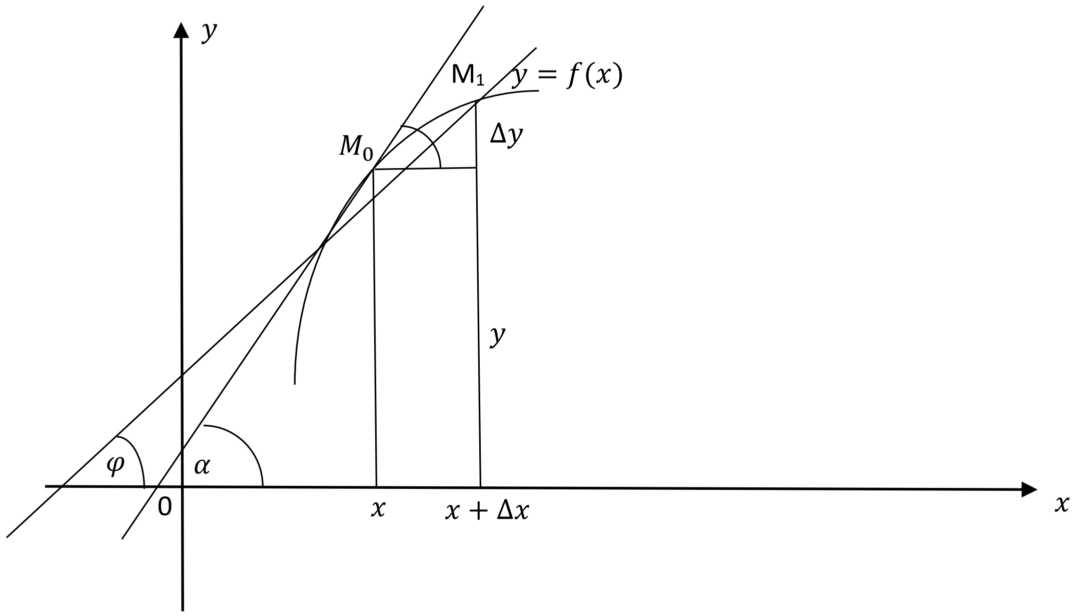


Рис. 2.

Якщо $\Delta x \to 0$, то точка M_1 переміщатиметься вздовж кривої, наближаючись до M_0. Січна M_0M_1 повертається навколо точки M_0 і кут φ буде змінюватися з Δx. Кутовий коефіцієнт дотичної обчислюється за наступною формулою:

$$\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f`(x)$$

Отже, $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi$, тобто, *значення похідної* $f`(x)$ *при даному значенні аргументу* x *утвореного з позитивним напрямом осі* O_x*, що стосується графіка функції* $f(x)$ *у певній точці* $M_0(x; y)$.

1.3. Поняття диференціалу функції

Нехай функція f диференційована в точці x, маємо:

$$\Delta f = (f'(x) + \alpha)\Delta x = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x, \text{ де } \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Доданок $f'(x)\Delta x$ називають диференціалом функції f і позначають df,

$$df = f'(x)\Delta x.$$

Похідна функції дорівнює добутку її похідної на приріст аргументу.

Теорема. Якщо функція f диференційована в точці x, причому похідна f не звертається в нуль у цій точці, то диференціал функції f і її приріст є при $\Delta x \to 0$ еквівалентними нескінченно малими, тобто:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{df} = 1.$$

Доведення: маємо

$$df = f'(x)\Delta x \ i \ \Delta f = (f'(x) + \alpha)\Delta x.$$

Оскільки $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{df} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f'(x) + \alpha)\Delta x}{f'(x)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\alpha}{f'(x)}\right) = 1$$

Оскільки диференціал еквівалентний приросту функції при $\Delta x \to 0$, то диференціал є головною лінійною частиною приросту.

Якщо $f'(x) = 0$, то диференціал функції f у точці x_0 дорівнює нулю. В цьому випадку $df = \alpha\Delta x$ і тому приріс є нескінченно малим вищого порядку, ніж Δx:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$$

Зауважимо, що диференціал можу бути і більше, ніж приріст функції, якщо $\alpha < 0$.

1.4. Зростання та спадання функції

Диференціальне та інтегральне числення широко використовується по відношенню до функцій. Похідна може бути використана для знаходження інтервалів монотонності, екстремальних точок, максимальних і мінімальних значень функції.

Нехай функція, задана на множині X називається зростаючою на цій множині, якщо $\forall x_1; x_2 \in X$ таких, що $x_1 < x_2$ маємо $f(x_1) < f(x_2)$

$$(\forall x_1; x_2 \in X) : (x_1 < x_2) \rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Теорема: Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, а її похідна додатня на відрізку $[a; b]$, то функція $f(x)$ є зростаючою на відрізку $[a; b]$.

Доведення: Розглянемо будь-які дві точки $x_1, x_2 \in [a; b]$ такі, що

$x_1 < x_2$. Оскільки функція $f(x)$ задана на проміжку $[x_1, x_2]$, то використаємо умову за теоремою Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

де точка c належить проміжку $[x_1; x_2]$.

Оскільки права частина рівності додатня $f'(c) > 0$ за умовою,

$$x_2 - x_1 > 0, \text{ то}$$

$$f'(c)(x_2 - x_1) > 0, \text{ отже, і } f(x_2) - f(x_1) > 0.$$

Отже, $f(x_1) < f(x_2)$ і, отже функція $f(x)$ є зростаючою на відрізку$[a; b]$.

Теорема: Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, а її похідна має від'ємне значення на відрізку $[a; b]$, то функція $f(x)$ є спадною на відрізку $[a; b]$.

Доведення: Розглянемо будь-які дві точки $x_1, x_2 \in [a; b]$ такі, що $x_1 > x_2$. Оскільки функція $f(x)$ задана на проміжку $[x_1, x_2]$, то використаємо умову за теоремою Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

де точка c належить проміжку $[x_1; x_2]$.

Оскільки один з множників правої частини рівності від'ємний $f'(c) > 0$ за умовою, $x_2 - x_1 < 0$, то

$$f'(c)(x_2 - x_1) < 0, \text{ отже, і } f(x_2) - f(x_1) < 0.$$

Отже, $f(x_1) > f(x_2)$ і, отже функція $f(x)$ спадає на сегменті $[a; b]$.

Теорема (необхідна умова зростання функції): Якщо функція зростає на проміжку і є диференційовна, то похідна цієї функції невід'ємна на цьому проміжку.

Теорема (необхідна умова спадання функції): Якщо функція спадає на проміжку і є диференційовна, то похідна цієї функції невід'ємна на цьому проміжку.

Теорема (достатня умова зростання функції): Функція зростає на деякому проміжку, якщо похідна диференційовної функції додатна всередині деякого проміжку.

Теорема (достатня умова спадання функції): Функція спадає на деякому проміжку, якщо похідна диференційовної функції від'ємна всередині деякого проміжку.

Приклад. Доведемо, що функція $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$ спадає на всій числовій прямій.

Розв'язання:

Маємо,

$$f'(x) = (\operatorname{arctg} x - x)' = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2}{1+x^2} = \frac{1-1-x^2}{1+x^2} = -\frac{x^2}{1+x^2}$$

Так як при будь-якому x виконується нерівність $-\frac{x^2}{1+x^2} \le 0$ і, крім того, рівність $f'(x) = 0$ виконується тільки в точці $x = 0$, то на всій числовій прямій $f'(x) \le 0$.

Отже, функція $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$ є спадною при всіх $x \in R$.

Приклад. Дослідити функцію на зростання та спадання.

$$f(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1.$$

Розв'язання:

На всій області визначення функція $f(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$ диференційована.

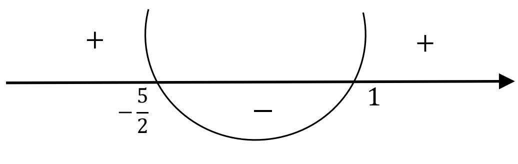
Знайдемо похідну функції:

$$f'(x) = \left(\frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1\right)^{`} = 5x^2 - 3x - 2.$$

Прирівняємо похідну до нуля:

$$5x^2 - 3x - 2 = 0$$

Отримаємо нулі функції $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{2}{5}$.



Функція неперервна, тому вона зберігає знак на проміжках $\left(-\infty; -\frac{2}{5}\right)$; $\left(-\frac{2}{5}; 1\right)$; $(1; +\infty)$. Похідна є квадратним тричленом і коефіцієнт біля x^2 додатній, то на проміжку $\left(-\infty; -\frac{2}{5}\right) \cup (1; +\infty)$ $f`(x) > 0$, а на проміжку $\left(-\frac{2}{5}; 1\right)$ $f' < 0$.

Відповідь: функція є зростаючою при $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{5}\right) \cup (1; +\infty)$ і спадною при $x \in \left(-\frac{2}{5}; 1\right)$.

Приклад. Довести, що функція спадає на R.

$$f(x) = \operatorname{arcctg} x - \operatorname{arctg} 3x - 4e^{\frac{1}{2}x}$$

Розв'язання:

Функція $f(x) = \operatorname{arcctg} x - \operatorname{arctg} 3x - 4e^{\frac{1}{2}x}$ диференційована та визначена на R.

Знайдемо похідну цієї функції:

$$f'(x) = \left(\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arctg} 3x - 4e^{\frac{1}{2}x}\right)' = (\operatorname{arcctg} x)' - (\operatorname{arctg} 3x)' - \left(4e^{\frac{1}{2}x}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{1+x^2} - \frac{3}{1+9x^2} - 2e^{\frac{1}{2}x}.$$

Оскільки $\forall x \in R \; f'(x) < 0$.

Отже, $f(x) = \operatorname{arcctg} x - \operatorname{arctg} 3x - 4e^{\frac{1}{2}x}$ спадає на R.

1.5. Екстремуми функції

Означення. Нехай $f(x)$ – неперервна функція та задана на множині X, визначена в околі точки $x_0 \in X$. Припустимо, що існує такий окіл точки x_0, і нерівність виконується для всіх точок x цього околу,:

$$f(x) < f(x_0)\big(f(x) > f(x_0)\big),$$

то x_0 називається *точкою локального максимуму (локального мінімуму) функції* $f(x)$.

Максимум або мінімум функції називається екстремальним значенням функції, а точка в якій функція досягає свого екстремального значення називаються точкою екстремуму.

Означення. Точка, у яких похідна дорівнює нулю чи взагалі відсутня, називається *критичною точкою* (точка, де похідна дорівнює нулю, називається *стаціонарною*).

Теорема: Функція f визначена у точці x_0 та нехай існує $\delta > 0$ таке, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$, диференційована на інтервалах $[x_0 - \delta; x_0]$ $і$ $[x_0;\ x_0 + \delta]$, причому існує $\delta > 0$ таке, що похідна цієї функції зберігає знак на кожному із цих проміжків.

Якщо знаки похідних на $[x_0 - \delta; x_0]$ $і$ $[x_0;\ x_0 + \delta]$ - різні, то x_0 є точкою екстремуму, а якщо збігаються, то x_0 не є екстримальною точкою. Точка x_0 називається точкою максимуму, якщо при переході через точку x_0 похідна змінює знак з «+» на «-». Точка x_0 називається точкою мінімуму, якщо похідна змінює знак з "-" на "+",

Доведення: Нехай похідна $f'(x)$ додатня на інтервалі $[x_0 - \delta; x_0]$ і від’ємна на інтервалі $[x_0;\ x_0 + \delta]$. Доведемо, що точка x_0 точка максимуму функції.

За умовою функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[x_0 - \delta; x_0]$, яка диференціюється в інтервалі $[x_0 - \delta; x_0]$ і на цьому проміжку маємо $f'(x) > 0$. Згідно з теоремою функція $f(x)$ зростає інтервалі $[x_0 - \delta; x_0]$. Отже, з нерівності $x < x_0$, де $[x_0 - \delta; x_0]$, маємо $f(x) < f(x_0)$.

Аналогічно встановлюємо, що функція $f(x)$ зменшується на відрізку $[x_0;\ x_0 + \delta]$, тому з нерівності $x_0 < x$, де $[x_0;\ x_0 + \delta]$, випливає $f(x_0) > f(x)$.

Оскільки, в δ – околі точки x_0 для точок x, які не дорівнюють x_0, виконується нерівність

$$f(x) < f(x_0)$$

Отже, x_0 є для функції $f(x)$ точкою максимуму.

Нехай функція $f(x)$ від'ємна ліворуч і праворуч відносно точки x_0. Тоді функція зменшується як на проміжку $[x_0 - \delta; x_0]$, і на проміжку $[x_0;\ x_0 + \delta]$. В цьому випадку, точка x_0 не є екстремальною точкою.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 18.$$

Розв'язання:

$$f'(x) = (x^3 - 9x^2 + 24x - 18)' = 3x^2 - 18x + 24 =$$

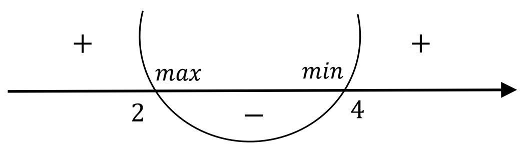
$$= 3(x^2 - 6x + 8).$$

Прирівняємо похідну до нуля:

$$3(x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$(x^2 - 6x + 8) = 0$$

За теоремою Вієта отримаємо $x_1 = 2, x_2 = 4$.



Оскільки похідна є квадратичним тричленом на проміжку $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$ $f'(x) > 0$, а на проміжку $(2; 4)$ $f'(x) < 0$. Похідна неперервна при всіх $x \in R$ і змінює знак на протилежний при переході через критичну точку.

Отже, $f_{max}(2) = 2, f_{min}(4) = -2$.

Приклад. Дослідити функцію на екстремум

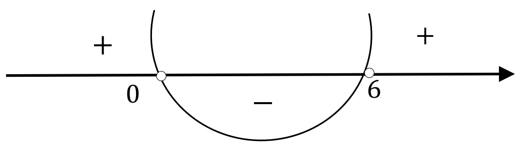
$$f(x) = 4 + \sqrt{\frac{4x^3}{4x - 24}}$$

Розв'язання:

Обчислимо область визначення функції

$$\sqrt{\frac{4x^3}{4x-24}} \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{x^3}{x-6}} \geq 0$$



Отже, $D(f) = (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$

Обчислимо похідну функції:

$$f'(x) = \left(4 + \sqrt{\frac{4x^3}{4x-24}}\right)' = \left(4 + \sqrt{\frac{4x^3}{4(x-6)}}\right)' = \left(4 + \sqrt{\frac{x^3}{x-6}}\right)' =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-6}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-6}}} \cdot \frac{3x^2(x-6) - x^3}{(x-6)^2} = \frac{3x^3 - 18x^2 - x^3}{2\,(x-6)^2\sqrt{\frac{x^3}{x-6}}} =$$

$$= \frac{2x^3 - 18x^2}{2\,(x-6)^2\sqrt{\frac{x^3}{x-6}}} = \frac{2x^2(x-9)}{2\,(x-6)^2\sqrt{\frac{x^3}{x-6}}} = \frac{2x^2(x-9)}{2(x-6)^2\sqrt{\frac{x^3}{x-6}}}.$$

Прирівняємо результат диференціювання до нуля.

$$\frac{2x^2(x-9)}{2(x-6)^2\sqrt{\frac{x^3}{x-6}}} = 0.$$

Маємо критичні точки $x = 0, x = 9$. Точка $x = 9$ буде точкою локального мінімуму.

$$f_{min}(x) = f_{min}(9) = 4 + \sqrt{\frac{4 \times 9^3}{4 \times 9 - 24}} = 4 + \sqrt{\frac{2916}{12}} = 4 + \sqrt{243}$$

Зауважимо, що при $0 \leq x \leq 6$ функція невизначена. У точці $x = 0$ функція набуває мінімального значення

$f(0) = 4 + \sqrt{\frac{4 \times 0^3}{4 \times 0 - 24} =}\ 4.$

Приклад. Дослідити функцію на екстремум

$$f(x) = (4x - 1)e^{2x}$$

Розв'язання:

$$D(f) = R$$

На всій області визначення функція $f(x) = (4x - 1)e^{2x}$ є диференційованою.

$$f'(x) = \left((4x - 1)e^{2x}\right)' = 4e^{2x} + 2(4x - 1)e^{2x} = (4 + 8x - 2)e^{2x} =$$

$$= (8x + 2)e^{2x}.$$

Прирівняємо похідну до нуля:

$$(8x + 2)e^{2x} = 0.$$

Отримаємо $x = -\frac{1}{4}$ – критична точка.

Критична точка ділить числову пряму на дві частими, а саме: $\left(-\infty;\ -\frac{1}{4}\right)$ і $(-\frac{1}{4};\ +\infty)$. На інтервалі $(-\frac{1}{4};\ +\infty)$ $f'(x) > 0$. Отже $x = -\frac{1}{4}$ точка мінімуму.

$f_{min}\left(-\frac{1}{4}\right) = 0.$

РОЗДІЛ ІІ. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

2.1. Застосування похідної для розв'язування рівнянь.

Нехай, маємо рівняння $f(x) = a$, де $f(x)$ – функція, яка зростає або спадає. Якщо a є належить множині значень цієї функції f, то це рівняння має один корінь або не має його зовсім. Для дослідження функції на монотонність використовують похідну.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$3x^2 + \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x+2} = 17$$

Розв'язання:

$f(x) = 3x^2 + \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x+2}$

$D(f)$: $x - 1 \geq 0$

$x + 2 \geq 0$

$x \in [1; +\infty)$

З'ясуємо чи є функція $f(x)$ монотонною.

$$f'(x) = 6x + \frac{1}{\sqrt{x-2}} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \cdot 1 = 6x + \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} > 0,$$

Ця функція є зростаючою на всій області визначення, як сума трьох функцій, які є зростаючі.

$\forall x > 1$

Функція зростає $\forall x \in [1; +\infty)$

$x = 2$

Якщо дано рівняння $f(x) = C,$де $C - const$, то функція $f(x)$ є монотонною і неперервною на всій області визначення $M \subset D(f)$. Отже, розв'язком цього рівняння може бути не більше ніж одне значення.

Перевірка:

$3 \times 2^2 + \sqrt{2-1} + 2\sqrt{2+2} = 17$

$12 + 1 + 4 = 17$

$17 = 17$

Відповідь: $x = 2$

Приклад. Яким умовам повинні задовольняти параметри p та q, щоб рівняння $2x^3 + px + q = 0$ мало три різних дійсних корені?

Розв'язання:

$$f(x) = 2x^3 + px + q$$

Щоб функція $f(x) = 2x^3 + px + q$ мало три різні корені, потрібно щоб похідна цієї функції дорівнювала 0 в двох точках тобто функція досягла свого локального максимуму та локального мінімуму.

$f'(x) = (2x^3 + px + q)' = 6x^2 + p$

$6x^2 + p = 0$

$x = \pm\sqrt{-\frac{p}{6}}, p < 0$

Отже, обов'язковою умовою для того, щоб $f(x)$**,** мала один від'ємний корінь, потрібно щоб виконувалась умова $q > 0$.

Відповідь: щоб рівняння рівняння $2x^3 + px + q = 0$ мало три різних дійсних корені, потрібно щоб $p < 0, q > 0$.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$7x^7 + 5x^5 + 3x^3 + 2x - 17 = 0.$$

Розв'язання:

$$7x^7 + 5x^5 + 3x^3 + 2x - 17 = 0.$$

Розглянемо функцію $f(x) = 7x^7 + 5x^5 + 3x^3 + 2x - 17$

По всій області визначення функція $f(x)$ є диференційованою. Знайдемо похідну функції $f(x)$:

$$f'(x) = (7x^7 + 5x^5 + 3x^3 + 2x - 2)' = 49x^6 + 25x^4 + 10x^2 + 2$$

Очевидно $f'(x) > 0, \forall x \in R$. Рівняння має один тривіальний корінь $x = 1$.

Оскільки, $f'(x) > 0,$ то функція $f(x)$ завжди зростає на всій області визначення. Тому можливий лише 1 перетин з віссю абсцис. Відповідно рівняння має лише один корінь, який можна підібрати.

Відповідь: $x = 1$.

Приклад. Розв'язати рівняння:

$$\sin x + 6x = 0.$$

Розв'язання:

Очевидно, що коренем рівняння є $x = 0$. Потрібно перевірити, чи немає інших коренів. Розглянемо функцію $f(x) = \sin x + 6x$.

Знайдемо похідну функції $f(x)$:

$$f'(x) = (\sin x + 6x)' = \cos x + 6\,.$$

Область визначення функції:

$$D(f) = R$$

Аналізуючи похідну функції $f(x)$ робимо висновок, що вона додатня при всіх x з усієї області визначення, тобто функція завжди зростає.

Тобто,

$$f(x) > 0 \ \ \forall x \in D(f)$$

Отже, рівняння має лише один корінь.

Відповідь: $x = 0$

2.2 Доведення нерівностей

При доведенні нерівностей за допомогою методів диференціального числення використовується теорема про монотонність функції.

Теорема: Якщо функція $f(x)$, яка має похідну на проміжку $[a; b]$, зростає на цьому проміжку, то її перша похідна невід'ємна на цьому проміжку.

Теорема: Якщо функція $f(x)$, яка має похідну на проміжку $[a; b]$, спадає на цьому проміжку, то її перша похідна недодатня на цьому проміжку.

Приклад. Довести, що для всіх $x \geq 0$ виконується нерівність

$$e^x \geq 1 + x.$$

Розв'язання:

Складемо функцію $f(x)$, де $f(x) = e^x - (1 + x)$. Знайдемо похідну функції $f(x)$:

$$f'(x) = (e^x - x - 1)' = e^x - 1.$$

Функція $f(x)$ зростає на проміжку $[0; +\infty]$, якщо виконується нерівність $e^x - 1 \geq 0$ при $x \geq 0$. Рівність можлива лише у випадку, якщо $x = 0$. Також виконується умова $f(x) \geq f(0)$, причому

$$f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$$

Отже, $f(x) \geq 0$, тобто $e^x - (1 + x) \geq 0$

Таким чином, $e^x \geq 1 + x$.

Приклад. Довести, що при всіх $x \geq 0$ виконується нерівність

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!}.$$

Розв'язання:

Складемо функцію $f(x)$, де $f(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)$. Знайдемо її диференціал:

$$f'(x) = \left(e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)\right)' = \left(e^x - \frac{x^2}{2!} - x - 1\right)' = e^x - x - 1.$$

Використовуючи попердній приклад маємо, що $f'(x) \geq 0$, отже функція $f(x)$ є зростаючою на сегменті $[0; +\infty]$. Отже, з умови, що $x \geq 0$ випливає: $f(x) \geq f(0)$. Оскільки, $f(0) = 0$, то $f(x) \geq 0$.

$$e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) \geq 0$$

Отже, і $e^x \geq \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)$.

Приклад. Довести, що якщо $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} > \frac{\beta}{\alpha}$.

Розв'язання.

Дослідимо монотонність функції $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$. Знайдемо похідну функції:

$$f'(x) = \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot x - tg\, x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}.$$

Якщо $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x < x$ відповідно $\sin x \cos x < x$. Отже на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ виконується умова $f'(x) > 0$, тому функція $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ є зростаючою на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Тоді з $\alpha < \beta$ маємо, що $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} < \frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}$, і відповідно $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} > \frac{\beta}{\alpha}$, що і потрібно було довести.

Приклад. Довести нерівність

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 0.$$

Розв'язання:

Розглянемо функцію $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$. Ця функція має область визначення:

$$D(f) = \left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right], n \in Z.$$

Функція $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ є визначеною та диференційованою при $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Знайдемо похідну функції $f(x)$:

$$f'(x) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$= \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

Прирівняємо похідну до нуля:

$$f'(x) = \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\sin^2 x \cos^2 x} = 0.$$

$f'(x) = 0$ на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ у точці $x = \frac{\pi}{4}$.

$f'(x) < 0$ на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, бо при цих значеннях x

$\cos x > \sin x$. Отже, функція на цьому проміжку спадає.

$f'(x) > 0$ на проміжку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, бо при цих значеннях x $\cos x < \sin x$. Отже, функція на цьому проміжку зростає.

Точка $x = \frac{\pi}{4}$ є точкою локального мінімуму функції $f(x)$.

$$f_{min}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{tg}\frac{\pi}{4} + \text{ctg}\frac{\pi}{4} = 0.$$

Якщо на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то функція $f(x) = \text{tg}\, x + \text{ctg}\, x \geq 0$

2.3 Знаходження границь

Розглянемо обчислення границі $\frac{f(x)}{g(x)}$, коли $x \to a$ або $x \to \infty$, причому $f(x)\ i\ g(x)$ одночасно прямують до нуля або одночасно прямують до нескінченності.

Теорема: Припустимо, що функції $f\ i\ g$ диференційовані в деякому околі U точки a (тобто диференційовані у всіх точках цього околу, крім самої точки a) $g'(x) \neq 0$ в U, і що $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Тоді, якщо існує $\lim\limits_{x\to a}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$, то існує і $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}.$$

У випадку коли $f'(x) \neq 0\ i\ g'(x) \neq 0$, геометричний зміст цієї теореми полягає в тому, що графіки функцій $f(x)\ i\ g(x)$ перетинають вісь абсцис у точці $M(a; 0)$, і тому рівняння їх дотичних до цих графіків у точці M мають вигляд:

$$y = f'(a)\cdot(x-a)\ i\ y = g'(a)\cdot(x-a).$$

Але границя відношення функцій $f(x)\ i\ g(x)$ при $x \to a$ дорівнює межі відношення ординат дотичних при $x \to a$, а ця границя дорівнює $\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$.

Доведення: Довизначимо функції $f\ i\ g$ поклавши їх значення в точці a рівним 0.

$$f(0) = g(0) = 0, \text{ то}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f\prime(c)}{g\prime(c)},$$

де точка c лежить між a i x. При $x \to a$ маємо $c \to a$ і тому

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f\prime(c)}{g\prime(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}.$$

Отже, теорему доведено.

Теорема. Припустимо, що функції f i g диференційовані на проміжку $[a; +\infty]$, причому $g'(x) \neq 0$, і $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$. Якщо існує $\lim_{x \to a} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$, то існує $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доведення: покладемо, що $x = \frac{1}{t}$. Тоді

$$f(x) = g(x) = g\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)' = f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right), \ \left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)' = g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right).$$

Маємо $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to a} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}$.

Для обчислення границі $\lim_{t \to a} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}$ скористаємось першою теоремою.

$$\lim_{t \to a} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t \to a} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Теорему доведено.

У цих теоремах ми розглянули випадки невизначеності виду $\frac{0}{0}$ коли $x \to a$ і коли $x \to +\infty$. Аналогічно коли $x \to -\infty$ або $x \to \infty$.

Роглянемо випадки невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема. Нехай функції f і g диференційовані на проміжку $[a;+\infty]$, причому $g'(x) \neq 0$, і $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty$. Якщо існує $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$, то існує $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доведення: Візьмемо довільне додатнє число $\varepsilon > 0$. За умовою існує $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$; покладемо $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. Тоді за означенням границі знайдеться таке число N, що $x \geq N$

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оскільки, $x > N$, застосувавши до проміжку теорему Коші:

$$\frac{f(x) - f(N)}{g(x) - g(N)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

де $N < c < x$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to a} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}.$$

Оскільки $c > N$, отримаємо

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(\mathrm{c})}{g'(\mathrm{c})} < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

звідки

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x) - f(N)}{g(x) - f(N)} < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Позначимо, $\varphi(x) = \frac{1 - \frac{f(N)}{f(x)}}{1 - \frac{g(N)}{g(x)}}$, тоді запишемо рівність так:

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\varphi(x)<A+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} g(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(N)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(N)}{g(x)}=0, \text{ тому } \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=1$$

Поділимо кожну частину нерівності на $\varphi(x)$.

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\varphi(x)<A+\frac{\varepsilon}{2}$$

Так як, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=1$, то за значеннями x маємо:

$$\frac{A-\frac{\varepsilon}{2}}{\varphi(x)}>A-\varepsilon \ \ і \ \ \frac{A+\frac{\varepsilon}{2}}{\varphi(x)}<A+\varepsilon, \text{ а тому}$$

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<A+\varepsilon.$$

Отже, для $\forall\varepsilon>0\ \ \exists M: x\geq M$ використаємо умову

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<A+\varepsilon.$$

Отже,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\mathrm{A}$$

Зауваження. Якщо $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}=0$, отже і $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$. Отримаємо, що $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

Отже,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Зауваження. Теорема виконується при $x \to a$, де a – число. Для доведення достатньо покласти, що $t = \frac{1}{x-a}$. Якщо $x \to a$ та $t \to \infty$, то теорема є доведена.

Наведені вище теореми, відомі як *правила Лопіталя.*

Розглянемо приклад використання правила Лопіталя для обчислення границі функцій.

Приклад. Обчислити

$$\lim_{x \to 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}.$$

Розв'язання: тут маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Використавши правило Лопіталя, отримаємо:

$$\lim_{x \to 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(e^x - e^2)'}{(x - 2)'} = \lim_{x \to 2} \frac{e^x}{1} = e^2.$$

Використовуючи подібне стисле формулювання, можна припустити, що умови теореми виконуються і в цьому, зокрема існування диференціальної границі.

РОЗДІЛ ІІІ. НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНИХ

3.1. Метод хорд

Нехай рівняння $f(x) = 0$ має корінь $x = \alpha$, а функція неперервна в околі $x = \alpha$, то рівняння

$$x = \varphi(x),$$

де $\varphi(x) = x - \psi(x)f(x)$, також має корінь $x = \alpha$. Функцію $\psi(x)$ можна підібрати таком чином, що ітераційний процес для рівняння $x = \varphi(x)$ буде збіжним.

Метод хорд. Нехай $f(x)$ - дійсна функція дійсної змінної x, а $x = \alpha$ – дійсний корінь рівняння $f(x) = 0$. Припустимо, що в деякому околі S точки $x = \alpha$ функція $f(x)$ є неперервна і в цьому околі має неперервні похідні $f'(x)$ і $f''(x)$.

Крім цього, $f'(x)$ і $f''(x)$ в околі S не змінюють знак і не дорівнюють нулю. Це означає, що при переході через точку $x = \alpha$ функція $f(x)$ змінює знак і має точку $x = \alpha$ простим коренем.

Нехай – точка околу S, у якій $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Оберемо за $\psi(x)$ таку функцію:

$$\psi(x) = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

Тоді рівняння $x = \varphi(x)$ набуде вигляду

$$x = x - \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}f(x),$$

або

$$x = \frac{x_0 f(x) - x f(x_0)}{f(x) - f(x_0)}.$$

Отримане рівняння також має корінь $x = \alpha$. За початкове наближення кореня візьмемо точку x_1, яка є достатньо близька до α і належить до заданого околу, в якому $f(x_1)$ має знак протилежний до знака $f(x_0) (f(x_1) f(x_0) < 0)$. Тоді ітераційний процес будуємо так:

$$x_{n+1} = \frac{x_0 f(x_n) - x_n f(x_0)}{f(x_n) - f(x_0)} \qquad (n = 1,2,\dots). \qquad (3.1)$$

Покажемо, що для цього ітераційного процесу виконується достатня умова збіжності, тобто існує такий окіл точки $x = \alpha$, в якому виконується нерівність

$$|\varphi'(x)| \le L < 1,$$

де

$$\varphi(x) \equiv \frac{x_0 f(x) - x f(x_0)}{f(x) - f(x_0)}.$$

Знайдемо $\varphi'(\alpha)$. Оскільки

$$\varphi'(x) = \frac{\big(x f'(x) - f(x_0)\big)\big(f(x) - f(x_0)\big) - (x_0 f(x) - x f(x_0)) f'(x)}{\big(f(x) - f(x_0)\big)^2} =$$

$$= \frac{f(x_0)\big((x - x_0) f'(x) - f(x) + f(x_0)\big)}{\big(f(x) - f(x_0)\big)^2},$$

то

$$\varphi'(\alpha) = \frac{f(x_0) + (\alpha - x_0) f'(\alpha)}{f(x_0)}.$$

Водночас за формулою Тейлора:

$$f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha) f'(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^2}{2!} f''(\xi),$$

де точка ξ лежить між точками α і x. Взявши $x = x_0$, одержимо

$$f(x_0) = f(\alpha) + (x_0 - \alpha) f'(\alpha) + \frac{(x_0 - \alpha)^2}{2!} f''(\xi),$$

оскільки $f(\alpha) = 0$. Тому

$$\varphi'(\alpha) = \frac{(x_0 - \alpha)^2}{2!} \cdot \frac{f''(\xi)}{f(x_0)}.$$

З одержаної рівності випливає, що при x_0 достатньо близькому до $x = \alpha$, $|\varphi'(\alpha)|$ – мале число, і тому існує такий окіл S точки $x = \alpha$, в якому виконуватиметься нерівність $|\varphi'(x)| \leq L < 1$. І якщо x_1 взяти із цього околу, то послідовність (3.1) збігатиметься до $x = \alpha$.

Відшукаємо оцінку для швидкості збіжності ітераційного процесу (3.1). Оскільки (за формулою Лагранжа)

$$f(x_n) = f(x_n) - f(\alpha) = f'(\eta)(x_n - \alpha),$$

де η – лежить між точками x_n і α, то

$$x_n - \alpha = \frac{f(x_n)}{f'(\eta)}.$$

Якщо прийняти $m = \inf_{x \in S} |f'(x)|$,

то

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}.$$

Оскільки $\varphi'(\alpha) \neq 0$, то метод хорд є ітераційним процесом першого порядку.

Геометрично цей метод полягає у тому, що значення x_{n+1} є абсцисою точки перетину хорди, що сполучає точки $(x_0, f(x_0))$ і $(x_n, f(x_n))$ з віссю Ox. Тому цей метод називається методом хорд, або лінійної інтерполяції, оскільки на кожному кроці за наближене значення кореня x_{n+1} приймається корінь інтерполяційного многочлена першого степеня, побудованого на основі значень $f(x)$ у точках x_0 і x_n.

Отже, рівняння хорди, яка сполучає точки $(x_0, f(x_0))$ і $(x_n, f(x_n))$ має вигляд:

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

або

$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Поклавши $y = 0$, отримаємо x_2 – абсцису точки перетину хорди з віссю Ox, де

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Аналогічно відшукуємо x_3 – абсцису точки перетину з віссю Ox хорди, яка сполучає точки $(x_0, f(x_0))$ і $(x_2, f(x_2))$

$$x_3 = \frac{x_0 f(x_2) - x_1 f(x_0)}{f(x_2) - f(x_0)},$$

і т.д. Абсцисою точки перетину з віссю Ox хорди, яка сполучає точки $(x_0, f(x_0))$ і $(x_n, f(x_n))$, є

$$x_n = \frac{x_0 f(x_n) - x_n f(x_0)}{f(x_n) - f(x_0)}.$$

Геометрична інтерпретація методу має вигляд, як показано на рис. 3 (*а-г)*

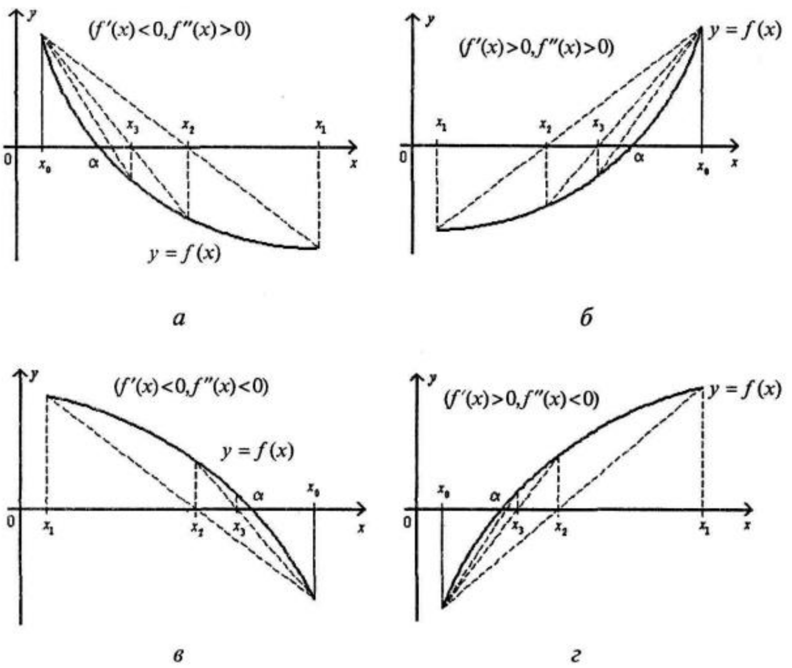


Рис.3. Геометрична інтерпретація методу хорд

Приклад: Розв'язати рівняння

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

на проміжку [1,5; 3,5].

Розв'язання:

Перевіримо, чи має рівняння корені на даному проміжку

1) $f(1{,}5) = (1{,}5)^3 - 6 \cdot (1{,}5)^2 + 11 \cdot 1{,}5 - 6 = 0{,}375;$

2) $f(3{,}5) = (3{,}5)^3 - 6 \cdot (3{,}5)^2 + 11 \cdot 3{,}5 - 6 = -1{,}875.$

Оскільки $f(1{,}5) \cdot f(3{,}5) < 0$, то на проміжку [1,5; 3,5] є розв'язок.

Виконаємо початкові наближення, якщо $x_0 = 1{,}5$; $x_1 = 3{,}5$. Підставимо значення у формулу

$$x_{n+1} = \frac{x_0 f(x_n) - x_n f(x_0)}{f(x_n) - f(x_0)} \qquad (n = 1,2, \dots)$$

та обчислимо

$$x_2 = 3{,}5 - \frac{-1{,}875 \cdot (3{,}5 - 1{,}5)}{-1{,}875 - 0{,}375} = 3{,}5 - \frac{-1{,}875 \cdot 2}{-2{,}25} = 3{,}5 - 1{,}667 = 1{,}833.$$

Отже, $f(x_2) = (1{,}833)^3 - 6 \cdot (1{,}833)^2 + 11 \cdot 1{,}833 - 6 = 0{,}296.$

Знайдемо значення x_3:

$$x_3 = 1{,}833 - \frac{0{,}296 \cdot (1{,}833 - 1{,}5)}{0{,}296 - 0{,}375} = 1{,}833 - \frac{-0{,}296 \cdot 0{,}333}{-0{,}079} =$$

$$= 1{,}833 - \frac{0{,}0987}{-0{,}079} = 1{,}833 + 1{,}299 = 3{,}082.$$

$$f(x_3) = (3{,}082)^3 - 6 \cdot (3{,}082)^2 + 11 \cdot 3{,}082 - 6 = -0{,}232.$$

Знайдемо значення x_4:

$$x_4 = 0{,}382 - \frac{-0{,}232 \cdot (3{,}082 - 1{,}833)}{-0{,}232 - 0{,}296} = 0{,}3082 - \frac{-0{,}232 \cdot 1{,}249}{-0{,}528} =$$

$$= 0{,}3082 - \frac{-0{,}29}{0{,}528} = 3{,}082 - 0{,}549 = 2{,}533.$$

$$f(x_4) = (2{,}533)^3 - 6 \cdot (2{,}533)^2 + 11 \cdot 2{,}533 - 6 = 0{,}084$$

Знайдемо значення x_5:

$$x_5 = 2{,}533 - \frac{0{,}084 \cdot (2{,}533 - 3{,}082)}{0{,}084 - (-0{,}232)} = 2{,}533 - \frac{0{,}084 \cdot (-0{,}549)}{0{,}316} =$$

$$= 2{,}533 - \frac{-0{,}046}{0{,}316} = 2{,}533 + 0{,}146 = 2{,}679.$$

$$f(x_5) = (2{,}679)^3 - 6 \cdot (2{,}679)^2 + 11 \cdot 2{,}679 - 6 = -0{,}03$$

Знайдемо значення x_6:

$$x_6 = 2{,}679 - \frac{-0{,}03 \cdot (2{,}679 - 2{,}533)}{-0{,}03 - 0{,}084} = 2{,}679 - \frac{-0{,}03 \cdot 0{,}146}{-0{,}144}$$

$$= 2{,}679 - \frac{-0{,}00438}{-0{,}114} = 2{,}679 - 0{,}038 = 2{,}641.$$

$$f(x_6) = (2{,}641)^3 - 6 \cdot (2{,}641)^2 + 11 \cdot 2{,}641 - 6 = 0{,}012.$$

Знайдемо значення x_7:

$$x_7 = 2{,}641 - \frac{0{,}012 \cdot (2{,}641 - 2{,}679)}{0{,}012 - (-0{,}03)} = 2{,}641 - \frac{0{,}012 \cdot (-0{,}038)}{0{,}042} =$$

$$= 2{,}641 - \frac{-0{,}000456}{0{,}042} = 2{,}641 + 0{,}011 = 2{,}652.$$

$$f(x_7) = (2{,}652)^3 - 6 \cdot (2{,}652)^2 + 11 \cdot 2{,}652 - 6 = -0{,}005.$$

Знайдемо значення x_8:

$$x_8 = 2{,}652 - \frac{-0{,}005 \cdot (2{,}652 - 2{,}641)}{-0{,}005 - 0{,}012} = 2{,}652 - \frac{-0{,}005 \cdot 0{,}011}{-0{,}017} =$$

$$= 2{,}652 - \frac{-0{,}000055}{-0{,}017} = 2{,}652 - 0{,}003 = 2{,}649.$$

$$f(x_8) = (2{,}649)^3 - 6 \cdot (2{,}649)^2 + 11 \cdot 2{,}649 - 6 = 0{,}001.$$

Знайдемо значення x_9:

$$x_9 = 2{,}649 - \frac{0{,}001 \cdot (2{,}649 - 2{,}652)}{0{,}001 - (-0{,}005)} = 2{,}649 - \frac{0{,}001 \cdot (-0{,}003)}{0{,}006} =$$

$$= 2{,}649 - \frac{-0{,}000003}{0{,}006} = 2{,}649 + 0{,}0005 = 2{,}65.$$

$$f(x_9) = (2{,}65)^3 - 6 \cdot (2{,}65)^2 + 11 \cdot 2{,}65 - 6 = -0{,}0002.$$

Перевірка точності: $|f(x_9)| = |-0{,}0002| = 0{,}002$, що задовольняє умови.

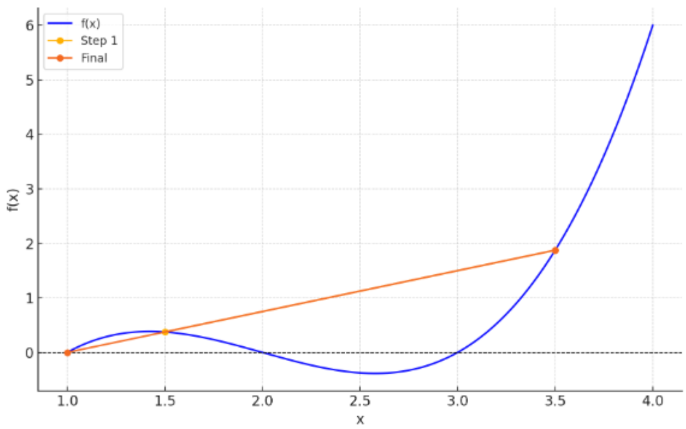


Рис. 4. Графічний метод розв'язування рівняння

3.2. Метод дотичних

Метод дотичних (метод Ньютона) був названий на честь Ісаака Ньютона (1643–1727), видатного англійського математика, фізика, астронома і філософа. Цей метод має цікаву історію, яка пов’язана з розвитком математики у XVII столітті. Хоча метод зазвичай асоціюється з ім'ям Ісаака Ньютона, дослідження показують, що його основи були незалежно розроблені також Готфрідом Вільгельмом Лейбніцем

Нехай $f(x)$ - дійсна функція дійсної змінної x, а $x = \alpha$ – дійсний корінь рівняння $f(x) = 0$ на проміжку $[a; b]$. Припустимо, що на проміжку $[a; b]$ функція $f(x)$ неперервна і на $[a; b]$ існують неперервні похідні $f'(x)$ і $f''(x)$, які не змінюють знак і не дорівнюють нулю на $[a, b]$. За функцію $\psi(x)$ візьмемо

$$\psi(x) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Тоді матимемо рівняння:

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Для відшукання кореня використаємо ітераційний процес

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 0, 1, \dots),$$

де $x_0 \in [a, b]$. Покажемо, що для цього ітераційного процесу виконується достатня умова збіжності, тобто існує такий окіл точки $x = \alpha$, в якому виконуватиметься нерівність

$$|\varphi'(x)| \leq L < 1,$$

де

$$\varphi(x) \equiv x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Оскільки

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{\left(f'(x)\right)^2 - f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

то $\varphi'(\alpha) = 0$. Це означає, що існує такий окіл точки $x = \alpha$, що якщо початкове наближення $x = x_0$ із цього околу взяти послідовність $\{x_n\}$ збігається до кореня $x = \alpha$. Початкове наближення x_0 потрібно вибрати так, щоб виконувалась умова

$$f(x_0)f''(x_0) > 0.$$

Зауваження. Метод дотичних можна використати для відшукання дійсних коренів рівняння $f(x) = 0$, але й комплексних.

Метод дотичних має доволі просту геометричну інтерпретацію. Точка x_{n+1} є абсцисою точки перетину з віссю Ox дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $\left(x_0, f(x_0)\right)$, тоді рівняння дотичної має вигляд:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Покладемо , що $y = 0$, отримаємо x_1 – абсциса точки перетину Ox та дотичної:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Аналогічно знайдемо x_2, яка є абсцисою точки перетину кривої $y = f(x)$ та дотичної в точці $\left(x_1, f(x_1)\right)$ з віссю Ox:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Продовжуємо так далі. Тоді вісь Ox перетинається з дотичною до кривої $y = f(x)$ у точці $\left(x_{\text{т}}, f(x_{\text{т}})\right)$, абсциса якої дорівнює

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Якщо $\varphi'(\alpha) = 0$, а $\varphi''(\alpha) \neq 0$, то метод Ньютона є ітераційним методом другого порядку.

Обчислимо швидкість збіжності методу дотичних відповідно до формул Тейлора:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_n)^2,$$

де точка ξ лежить між точками x і x_n. Припустимо, що $x = \alpha$. Одержимо

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2!}(\alpha - x_n)^2.$$

Звідси,

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \alpha - \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2.$$

то,

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \alpha + \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2,$$

або

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2.$$

Отже,

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2.$$

Якщо

$$m_1 = \min_{x\in[a,b]}|f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|,$$

де $[a, b]$ – проміжок, який містить точки x_0 і α, на якому не змінюють знаки на протилежні $f'(x)$ і $f''(x)$, отримаємо

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{M_2}{2m_1} |\alpha - x_n|^2.$$

Отже, це доводить про швидку збіжність методу дотичних.

Якщо в методі дотичних за початкове наближення взяти точку x_0, де $f(x_0)f''(x_0) < 0$, то ітераційний процес може бути незбіжним.

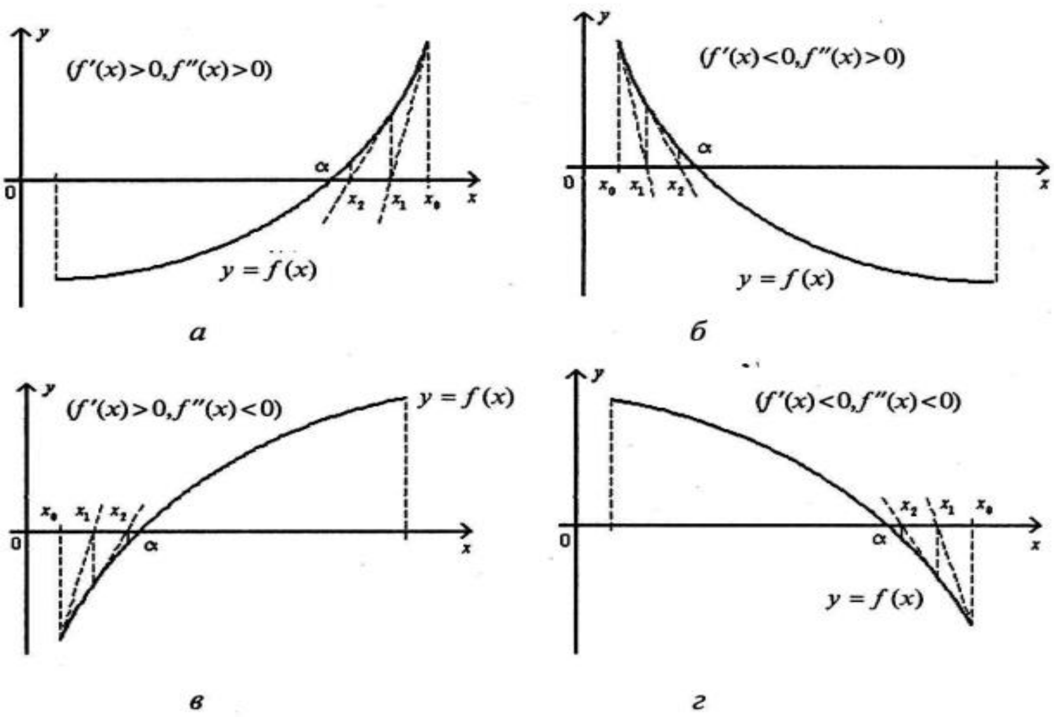


Рис. 5. Геометрична інтерпретація методу дотичних

Приклад: Розв’язати рівняння:

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

Розв’язання:

Оберемо початкове наближення: $x_0 = 1{,}5$.

Обчислюємо перше наближення за формулою

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 0, 1, \dots).$$

Обчислимо похідну функції:

$$f'(x) = 2x$$

Отже,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1{,}5 - \frac{1{,}5^2 - 2}{2 \cdot 1{,}5} = 1{,}5 - \frac{0{,}25}{3} = 1{,}5 - 0{,}0833 = 1{,}4167.$$

Обчислимо, друге початкове наближення:

$$x_2 = 1{,}4167 - \frac{f(1{,}4167)}{f'(1{,}4167)} = 1{,}4167 - \frac{1{,}4167^2 - 2}{2 \cdot 1{,}4167} = 1{,}4167 - \frac{0{,}0069}{2{,}8333}$$
$$= 1{,}4167 - 0{,}0024 = 1{,}4143.$$

Обчислимо, третє початкове наближення:

$$x_3 = 1{,}4143 - \frac{f(1{,}4143)}{f'(1{,}4143)} = 1{,}4143 - \frac{1{,}4143^2 - 2}{2 \cdot 1{,}4143} == 1{,}4143 - \frac{0{,}00000049}{2{,}8286}$$
$$= 1{,}4143 - 0{,}000000173 = 1{,}4142.$$

Перевіримо точність:

$$|x_3 - x_2| = |1{,}4142 - 1{,}4143| = 0{,}0001,$$

що є достатньо малою похибкою, щоб зупинити ітерації.

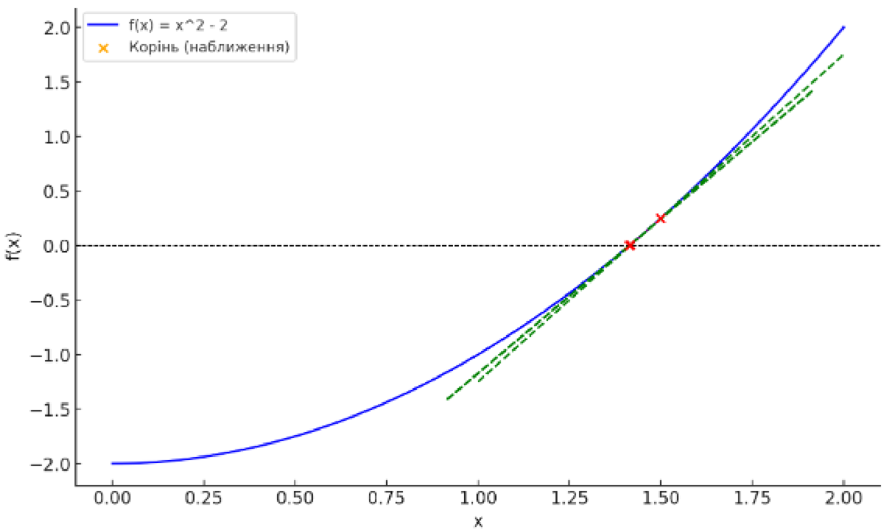


Рис. 6. Графічний метод розв’язування рівняння

3.3. Комбінований метод хорд та дотичних.

Комбінований метод хорд та дотичних – це чисельний метод, який використовується для розв'язування нелінійних рівнянь $f(x) = 0$. Цей підхід є комбінацією двох методів: метод січних (методу хорд) і метод Ньютона (методу дотичних). Цей метод обчислює наближене значення до кореня, тому для пришвидшення процесу відшукання розв'язку, їх використовують разом.

Нехай маємо рівняння $f(x) = 0$, розв'язок якого знаходиться на проміжку $[a; b]$.

Якщо $f'(x) \times f''(x) > 0$, то з лівого кінця проміжку $[a; b]$ шукають за методом хорд, а з правого кінця – за методом дотичних. Обрахувавши всі можливі результати, отримаємо наступні розрахункові формули:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f`(b_n)}$$

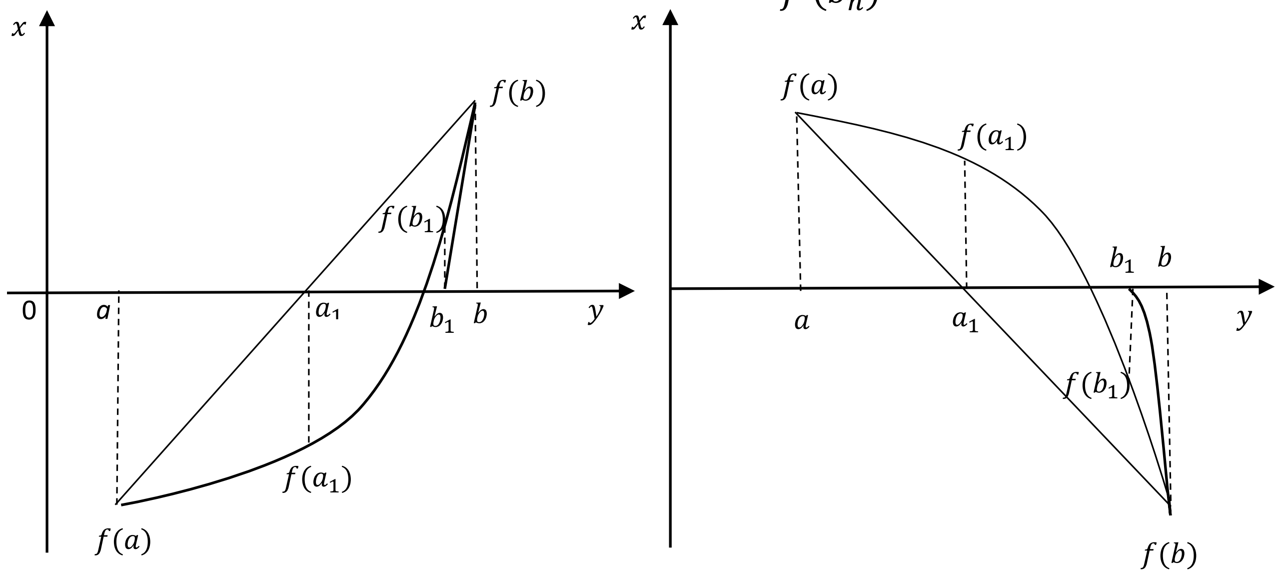


Рис.7. Графічна інтерпретація комбінованого методу

Процес обчислення за комбінованим методом припиняється якщо виконується умова:

$$(b_n - a_n) < \varepsilon$$

А за наближене значення кореня беруть:

$$x = \frac{b_n + a_n}{2}$$

Розглянемо комбінований метод хорд і дотичних розв'язання рівнянь.

У точці B проведемо дотичну до $y = f(x)$ та до перетину з віссю x. Абсцису точки перетину позначимо через d. Проведемо хорду AB і абсцису точки перетину позначимо c. Отриманий відрізок $[c; d]$ містить шуканий корінь рівняння і його довжина значно менше вихідного відрізка $[a; b]$. Отриманий відрізок $[c; d]$ також містить корінь рівняння, але розмір його набагато менше, ніж вихідний відрізок $[a; b]$. Продовжуючи проводити аналогічні побудови, можна звузити відрізок до необхідної точності ε.

Треба зазначити, що дотична повинна проводитися з тієї точки на границі інтервалу відділення, у якій знак функції збігається зі знаком другої похідної.

Алгоритм методу:

1. Знаходимо точки c і d, за наведеними формулами

$$c = a - f(a)\frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

$$d = b - \frac{f(b)}{f`(b)}$$

2. Порівнюємо довжину отриманого відрізка з точністю ε. Якщо

$$|d - c| \leq 2\varepsilon,$$

то кінець алгоритму, а як корінь береться значення

$$x = \frac{b + a}{2}$$

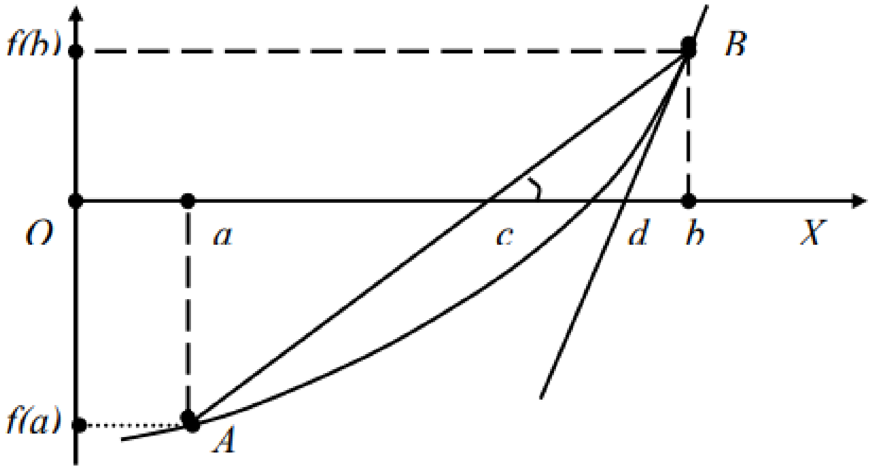


Рис. 8. Ілюстрація методу хорд та дотичних

Якщо ж ця умова не виконується, робимо присвоєння $a = c,\ b = d$. Питання вибору точки проведення дотичної зважується 1 раз. Якщо дотичну потрібно проводити не з точки b, а з точки a, то в алгоритмі ці точки у формулах треба поміняти місцями.

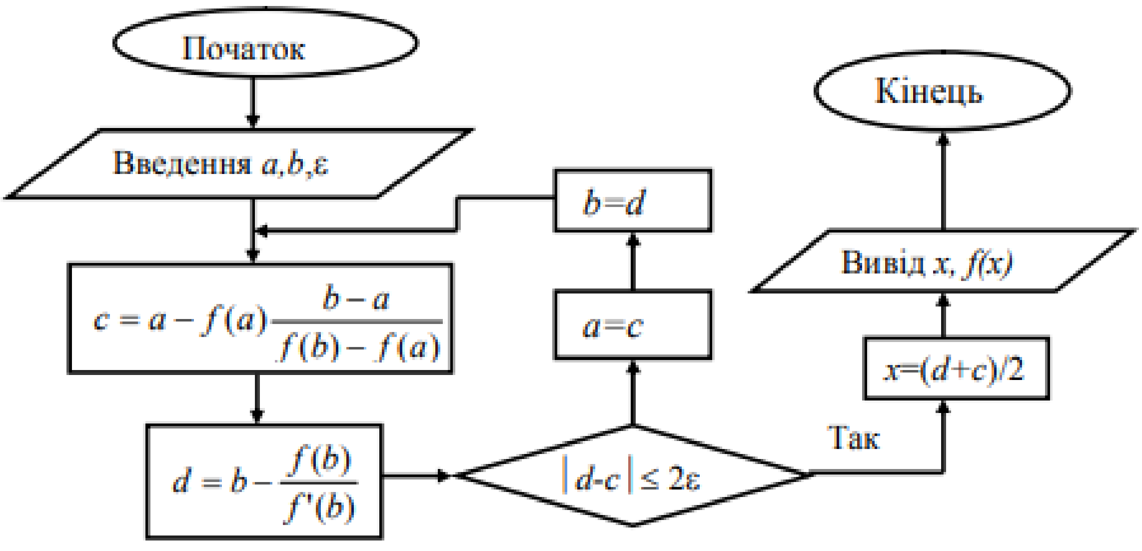


Рис. 9. Блок-схема комбінованого алгоритму методу хорд і дотичних

Приклад: Розв'язати рівняння $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ на відрізку $[0{,}5; 0.55]$ з точністю $\varepsilon = 0{,}0001$.

Розв'язання:

Знаходимо похідні

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f''(x) = 6x + 6.$$

Обчислюємо значення похідних в точках

$$f'(0{,}55) = 0{,}0738 > 0$$

$$f''(0{,}55) = 4{,}2075 > 0$$

Звідси випливає, що дотичну необхідно проводити з точки $b = 0{,}55$. Використаємо попередні формули:

$$c = 0{,}5 - (-0{,}125) \times \frac{0{,}5 - 0{,}55}{-0{,}125 - 0{,}07387} = 0{,}531427$$

$$d = 0{,}55 - \frac{0{,}07387}{3 \times 0{,}55^2 + 6 \times 0{,}55} = 0{,}53244$$

Отримано новий інтервал, що містить корінь $[0{,}531427; 0{,}53244]$. Наступна ітерація:

$$c = 0{,}53244 - (-0{,}0026742) \times \frac{-0{,}00997}{-0{,}001433 - 0{,}0026742} = 0{,}5320761$$

$$d = 0{,}53244 - \frac{0{,}001419}{4{,}045117} = 0{,}5320988$$

дає значення інтервалу $[0{,}5320761; 0{,}5320988]$, довжина якого

$$0{,}0000227 < 2\varepsilon = 0{,}0002,$$

звідси, як наближений корінь рівняння, приймаємо значення $0{,}5320 \pm 0{,}0001$.

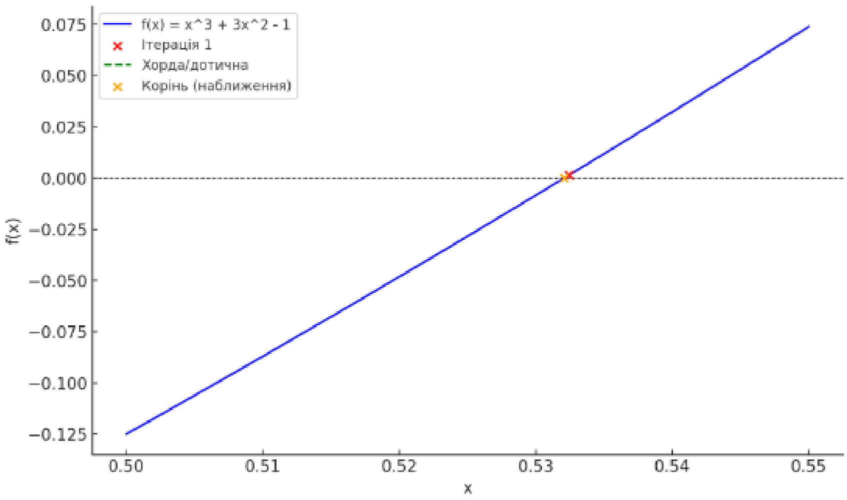


Рис. 10. Графічний метод розв'язування рівняння

Характерною особливістю методів дотичних та хорд є те, що послідовність наближень є монотонною. Для заданого рівняння послідовність наближень методом хорд є монотонно спадною, а послідовність наближень методом дотичних - монотонно зростаючою. При одночасному застосуванні методу дотичних і методу хорд до коренів рівняння можна наближатися з обох боків і отримати надмірне або недостатнє наближення.

На кожному етапі складеного методу наближене значення береться, як фіксований кінець формули кодового методу і обчислюється за допомогою методу дотичних на тому ж етапі.

ВИСНОВКИ

У магістерській роботі було досліджено поняття похідної, розглянуто її теоретичні основи та практичне застосування. Мета даної роботи полягає в розкритті деяких питань застосування похідної, а саме:

1. дослідження функції;
2. екстремум функції;
3. знаходження найбільшого та найменшого значення функції;
4. розв’язування рівнянь;
5. доведення нерівностей;
6. знаходження границь;
7. розв’язування нелінійних рівнянь комбінованим методом хорд та дотичних;
8. розв’язування диференціальних рівнянь.

У першому розділі розкрито поняття похідної, її геометричний та фізичний зміст, а також основні властивості, що лежать в основі її використання в прикладних задачах. Поняття похідної, зростаючої і спадної функції та границі функції вивчаються для кращого розуміння того, як зміни функцій можуть бути описані за допомогою похідних.

У другому розділі було продемонстровано, як похідна може бути використана для розв’язування рівнянь та доведення нерівностей. Дослідження показали, що похідна є потужним інструментом у аналізі поведінки функцій, а також у пошуку границь. Завдяки застосуванню похідної можна розв'язувати складні математичні задачі, що потребують розуміння змін у функції на різних проміжках.

У третьому розділі досліджено комбіновані методи хорд і дотичних, наближені методи розв’язування звичайних диференціальних рівнянь, а також метод простої ітерації. Ці методи є ефективними для наближених обчислень у задачах, де точне рішення отримати важко або неможливо. Наближені методи з використанням похідних знайшли застосування в інженерних обчисленнях, моделюванні фізичних процесів та інших науках, що підтверджує практичну значущість результатів.

У курсі математики використовують диференціальне та інтегральне числення для дослідження властивостей функцій, побудови графіків та розв'язування задач на знаходження максимальних і мінімальних значень. Похідна дозволяє розглянути багато завдань, які ефективно розв’язуються за допомогою поняття похідної.

Диференціальне числення широко використовуються при дослідженні функцій. За допомогою похідної можна знайти проміжки монотонності функції, точки екстремуму, найбільші та найменші значення. Похідну можна застосовувати для встановлення кількості коренів рівняння або їх відсутності, для доведення окремих типів нерівностей.

Таким чином, магістерська робота підтвердила важливість і багатогранність застосування похідної у теоретичних і прикладних аспектах. Похідна не лише є основним поняттям математичного аналізу, але й ефективним інструментом для вирішення реальних проблем у різних сферах. Отримані результати і методи можуть стати основою для подальших досліджень та застосування в сучасних наукових і технічних задачах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Chapra S. C. Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists / Steven C. Chapra. – New York: McGraw-Hill Education, 2018. – 548 p.
2. Epperson J. F. An Introduction to Numerical Methods and Analysis / J. F. Epperson. – Hoboken: John Wiley & Sons, 2013. – 71 p.
3. Stewart J. Calculus: Early Transcendentals / J. Stewart. – Boston: Cengage Learning, 2015. – 190 p.
4. Strang G. Calculus / G. Strang. – Wellesley: Wellesley-Cambridge Press, 1991. – 181 p.
5. Swokowski E. W., Jeffery A. C. Calculus: The Classic Edition / E. W. Swokowski, A. C. Jeffery. – Boston: Brooks/Cole, 1991. – 263 p.
6. Давидов М. О. Курс математичного аналізу. Частина 1 / М. О. Давидов. – Київ: Вища школа, 1976. – 157 с.
7. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. Частина 1 / А. Я. Дороговцев. – К.: Либідь, 1994. – 141с.
8. Колмогоров А. Н., Фомін С. В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомін. – Київ: Вища школа, 1974. – 98 с.
9. Ляшенко М. Я., Головань М. С. Чисельні методи / М. Я. Ляшенко, М.С. Головань. – К.: Либідь, 1996. – 27 с.
10. Макарусь О. О. Застосовування похідної до розв’язування рівнянь // Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень: матеріали конференції. – Луцьк: ВНУ ім. Л. Українки, 2022. – С. 130-132.
11. Макарусь О. О. Розв’язування звичайних диференціальних рівнянь методом Ейлера // Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень: матеріали конференції. – Луцьк: ВНУ ім. Л. Українки, 2024. – С. 142-144
12. Марон А. Я. Курс диференціального та інтегрального числення / А. Я. Марон. – Київ: Вища школа, 1989. – 112 с.

13. Сясєв А. В. Диференціальні рівняння / А. В. Сясєв. – Дніпро: Видавництво Дніпропетровського університету, 2007. – 246 с.
14. Усов А. В., Шпинковський О. А., Шпинковська М. І. Чисельні методи та їх реалізація у середовищі SCILAB / А.В. Усов, О.А. Шпинковський, М.І. Шпинковська. – Київ: Освіта України, – 2013. – 65 с.
15. Цегелик Г. Г. Чисельні методи / Г. Г. Цегелик. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, – 2004. – 67 с.

Анотація

Макарусь О. О. Похідна та її застосування. *Магістерська робота.* Луцьк, 2024. 49 с.

У даній роботі розглянуто поняття похідної функції, її геометричний зміст, властивості, застосування похідної для розв’язування рівнянь, нерівностей та знаходження границь, наближені обчислення за допомогою похідних.

Магістерська робота містить 50 сторінок, список використаної літератури налічує 15 джерел.

Ключові слова: похідна функції, екстремуми функції, метод хорд, метод дотичних, комбінований метод.

Annotation

Makarus O. O. Derivative and Its Applications. Master's Thesis. Lutsk, 2024. 49 pages.

This work examines the concept of the derivative of a function, its geometric meaning, properties, and applications of the derivative in solving equations, inequalities, and finding limits, as well as approximation calculations using derivatives. The thesis consists of 48 pages, and the list of references includes 15 sources.

Key words: derivative of a function, function extrema, chord method, tangent method, combined method.