МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Кафедра теорії функцій та методики навчання математики

На правах рукопису

Корецька Марія Петрівна

НЕСТАНДАРТНІ ЗАДАЧІ У МАТЕМАТИЦІ: ІДЕЇ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

Освітньо-професійна програма Середня освіта. Математика

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

проф. Харкевич Юрій Іліодорович

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № ___

Засідання кафедри теорії функцій

та методики навчання математики

від _______________ 2024 р.

Завідувач кафедри

доц. Гембарська С. Б._______

Луцьк 2024

Зміст

Вступ 2

Розділ 1. Теоретичні основи нестандартних задач у математиці **5**

1.1 Поняття та класифікація нестандартних задач 5

1.2 Історичний розвиток підходів до розв’язування нестандартних задач 9

1.3 Роль нестандартних задач у формуванні математичного мислення 12

Висновки до розділу 1 .... **15**

Розділ 2. Методи розв’язування нестандартних математичних задач **16**

2.1 Доведення від супротивного у вирішенні нестандартних задач 16

2.2 Підрахунок двома способами для пошуку рішень 20

2.3 Векторно-координатний метод до розв’язання нестандартних задач 25

Висновки до розділу 2 .... **30**

Розділ 3. Практичне застосування нестандартних задач **35**

3.1 Нестандартні задачі у шкільній математичній освіті 35

3.2 Розв’язування нестандартних задач у вищій математиці 40

Висновки до розділу 3 .... **43**

Список використаної літератури **46**

Додатки **48**

ВСТУП

Актуальність теми "Нестандартні задачі у математиці: ідеї та методи їх розв’язування" полягає в тому, що такі задачі мають велике значення для розвитку як математичних знань, так і прикладних методів у різних галузях науки та техніки. Однією з основних причин цієї актуальності є те, що нестандартні задачі часто вимагають не тільки класичних математичних методів, а й пошуку нових ідей і підходів. Вони стимулюють розвиток творчого та критичного мислення, сприяють розширенню меж стандартних методів і допомагають відкривати нові закономірності в математиці. Крім того, розв'язування таких задач часто вимагає інтеграції знань з різних математичних дисциплін, що сприяє розвитку міждисциплінарних методів.

Розв’язування нестандартних задач також має безпосереднє застосування в науково-технічних і практичних сферах. Багато задач, що здаються теоретичними, знаходять своє застосування у фізиці, економіці, інженерії, біології та багатьох інших областях. Наприклад, математика часто виступає як інструмент для моделювання складних процесів у природі або для вирішення інженерних задач, що потребують оптимізації або прогнозування. Завдяки нестандартним задачам математичні моделі здатні наближати розв'язки для реальних проблем, що виникають у повсякденному житті.

Завдяки нестандартним задачам математика не лише розвивається теоретично, але й отримує нові можливості для практичного застосування. Вони допомагають створювати нові алгоритми, методи обчислень, статистичні моделі, які згодом можуть бути застосовані в технологіях, таких як машинне навчання, великі дані, обробка інформації та розробка нових матеріалів. Ці задачі відкривають нові горизонти для наукових досліджень і створюють можливості для інновацій у багатьох галузях.

Нестандартні задачі також мають велике значення для математичної освіти. Вони сприяють формуванню у студентів та молодих науковців навичок розв’язування складних, нестандартних проблем, розвивають здатність до аналітичного та абстрактного мислення. Оскільки стандартні методи можуть не працювати в нових або складних умовах, такі задачі змушують шукати нові рішення, що допомагає підготувати кваліфікованих спеціалістів, здатних вирішувати нестандартні проблеми у будь-якій науковій чи технічній сфері.

У підсумку, актуальність теми нестандартних задач у математиці полягає в тому, що вони є важливим інструментом для розвитку математичної науки, а також для вирішення практичних проблем у різних галузях. Вони сприяють розвитку нових підходів до розв’язування проблем, вимагають від математиків інноваційних і творчих рішень, а також допомагають вивести математику на новий рівень, що має безпосереднє значення для розвитку технологій та науки загалом.

Об’єкт дослідження. Процес розв’язування нестандартних математичних задач та їх використання в освітньому середовищі.

Предмет дослідження. Ідеї, методи та прийоми розв’язування нестандартних математичних задач, а також підходи до їх класифікації, використання та впровадження в освітній процес

Мета дослідження. Розробити, систематизувати та проаналізувати ідеї та методи розв’язування нестандартних математичних задач, виявити їх значення для розвитку математичного мислення, а також запропонувати ефективні підходи до їх використання в освітньому процесі.

Завдання роботи:

1. Проаналізувати теоретичні основи та класифікацію нестандартних математичних задач.
2. Описати основні методи та прийоми розв’язування нестандартних задач, зокрема евристичні, алгоритмічні та графічні підходи.
3. Дослідити роль нестандартних задач у розвитку творчого та логічного мислення учнів і студентів.

4. Вивчити застосування нестандартних задач у різних галузях математики та прикладних науках.

Апробація результатів та публікацій

Всесвітня інтернет-конференція «Професійна компетентність педагога: теорія, методика, практика» 18 квітня 2021 року місто Луцьк

Структура та обсяг роботи. Магістерська робота складається із вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Повний обсяг роботи становить __ сторінок.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ НЕСТАНДАРТНИХ ЗАДАЧ У МАТЕМАТИЦІ

1.1 Поняття та класифікація нестандартних задач

Нестандартні задачі є чудовим засобом для розвитку мислення, просторової уяви, здатності аналізувати умови задачі та логічно міркувати. Для таких задач не існує універсальних правил чи чіткої програми розв’язання. Вони можуть виникати в будь-яких сферах людської діяльності, включаючи науку, техніку, бізнес, освіту тощо. Такі задачі відрізняються від звичних або стандартних тим, що їхнє розв’язання не є очевидним або стандартним, і потребує більше креативності, гнучкості мислення та здатності шукати нові шляхи вирішення.

Одним із типів нестандартних задач є логічні задачі. Процес їх розв’язання полягає у послідовному виконанні двох основних кроків:

1. Перетворення або переформулювання нестандартної задачі так, щоб вона стала рівносильною стандартній.
2. Розділення нестандартної задачі на кілька стандартних підзадач.

Залежно від характеру задачі, застосовують одну або обидві ці операції. У розв’язанні складніших задач ці дії можуть повторюватися кілька разів.

Класифікація нестандартних задач

1. За рівнем складності

Нестандартні задачі можна класифікувати за рівнем складності залежно від того, наскільки складним є процес їх вирішення.

Прості нестандартні задачі: Ці задачі не є дуже складними, але вимагають оригінального підходу. Це можуть бути задачі на знаходження раціональних шляхів вирішення в умовах обмеженого часу або ресурсів.

Приклад: Потрібно розв’язати задачу з геометрії, де потрібно визначити площу фігури, розбиваючи її на частини, але деякі частини мають незвичну форму.

Складні нестандартні задачі: Це задачі, які є викликом навіть для досвідчених фахівців. Вони можуть вимагати знання спеціальних теорій, нових математичних моделей або алгоритмів. Рішення таких задач часто передбачає багато етапів, використання спеціалізованих інструментів або технологій.

Приклад: Оптимізація логістичних маршрутів для доставки товарів в умовах змінної вартості пального, погодних умов і т. д.

2. За характером рішення

Нестандартні задачі можуть розрізнятися залежно від того, що саме потрібно знайти або вирішити.

Задачі на пошук одного рішення: Це задачі, де необхідно знайти чітке і однозначне рішення. Вони можуть бути складними, але результатом їх розв’язку буде одна правильна відповідь.

Приклад: Пошук оптимального рішення для встановлення маршруту доставки товару, де важливим фактором є час і відстань.

Задачі на оптимізацію: Вони вимагають знаходження найкращого рішення в рамках заданих умов. В таких задачах зазвичай є кілька можливих рішень, але необхідно вибрати таке, яке найкраще задовольняє визначені критерії (наприклад, мінімізація витрат, часу, ризиків і т. п.).

Приклад: Задача на оптимізацію виробничих процесів, де потрібно мінімізувати витрати та час на виготовлення продукції.

Задачі з множинністю рішень: Вони передбачають існування кількох можливих рішень. Така задача може мати багато варіантів вирішення, і кожне з них може бути правильним в залежності від контексту.

Приклад: Планування проекту, де є кілька варіантів використання ресурсів, і кожен з них дає різні результати.

3. За галуззю застосування

Нестандартні задачі можуть виникати в різних галузях людської діяльності, і кожна з них має свої специфічні характеристики та методи розв'язання.

Математичні нестандартні задачі: Ці задачі вимагають застосування математичних методів для вирішення. Вони можуть стосуватися алгебри, геометрії, теорії ймовірностей, комбінаторики, математичного аналізу та інших галузей математики.

Приклад: Задача на побудову математичної моделі, яка описує поведінку системи в умовах невизначеності.

Інженерні нестандартні задачі: Вони виникають у процесі проектування, виробництва, експлуатації технічних систем та технологій. Зазвичай вони вимагають глибокого розуміння технічних аспектів і застосування інженерних принципів.

Приклад: Розробка нових конструкцій або технологій, які мають покращити енергоефективність або зменшити вплив на навколишнє середовище.

Економічні та соціальні нестандартні задачі: Це задачі, які стосуються управління, планування, аналізу економічних процесів або соціальних явищ, і потребують застосування нових моделей та підходів.

Приклад: Прогнозування економічного розвитку країни в умовах глобальних змін, таких як економічні кризи, пандемії чи зміна клімату.

4. За методами вирішення

В залежності від того, як саме вирішується задача, можна виділити кілька видів нестандартних задач.

Евристичні задачі: Вони потребують застосування методів, які не дають гарантовано оптимального рішення, але дозволяють знайти задовільне рішення за невеликий проміжок часу.

Приклад: Використання евристичних методів для розв'язання складних комбінаторних задач, таких як задача подорожуючого торговця.

Алгоритмічні задачі: Для таких задач розробляються спеціальні алгоритми, які дозволяють систематично і ефективно знайти рішення.

Приклад: Розробка алгоритмів для обробки великих даних або пошуку в великих базах даних.

Значення нестандартних задач

1. Стимул для розвитку нових ідей: нестандартні задачі допомагають розвивати креативне мислення, оскільки вони вимагають пошуку нових рішень. Вони часто приводять до відкриттів та інновацій.
2. Практичне застосування: багато нестандартних задач, які виникають у науці, бізнесі чи техніці, стають основою для розробки нових технологій або удосконалення існуючих процесів.
3. Покращення навичок вирішення проблем: вирішення нестандартних задач допомагає розвивати здатність до нестандартного мислення, гнучкості у підходах до проблем і швидкості прийняття рішень.

Загалом, нестандартні задачі відіграють важливу роль в розвитку науки, техніки та інших галузей, оскільки вони стимулюють пошук нових рішень і сприяють прогресу.

1.2 Історичний розвиток підходів до розв'язування нестандартних задач

Еволюція підходів до вирішення нестандартних задач тісно пов'язана з розвитком наукового та технічного мислення, а також зі зміною уявлень про природу проблем і способи їх розв'язання. Цей розвиток можна розглянути через основні етапи, що відображають поступовий прогрес науки, філософії та технологій.

Основні етапи цього розвитку:

I. Античність і Середньовіччя: Зародження математичного та логічного мислення

У цей період підходи до розв'язання нестандартних задач були обмеженими через відсутність систематизованих наукових знань та методів. Проте вже тоді з'являються перші спроби вирішення складних задач.

У Древній Греції дуже багато використовувалось логічних і математичних підходів до вирішення задач. Відомі вчені, такі як Евклід, Архімед та Піфагор, використовували дедуктивний метод для доведення геометричних тверджень. Наприклад, Евклід у своїй праці «Начала» побудував аксіоматичну систему геометрії, що дозволяла розв'язувати задачі через логічні висновки. Архімед, окрім геометрії, впровадив методи наближеного обчислення, які стали прототипом інтегрального числення.
У період Середньовіччя науковий прогрес у Європі був значною мірою обмежений релігійними догмами. Проте в арабському світі наука, навпаки, активно розвивалася.

Арабські вчені зробили значний внесок у розвиток математики. Аль-Хорезмі розробив основи алгебри та ввів поняття алгоритмів, що є невід'ємною частиною сучасних методів вирішення задач.

У Європі домінувала схоластика, яка більше опиралася на філософські принципи, ніж на наукові експерименти. Математика застосовувалася обмежено, здебільшого для календарних розрахунків та релігійних обчислень.

II. Ренесанс і Новий час: Початок математичної індукції та розвиток наук

У цей період починається розвиток сучасної науки, де нестандартні задачі стають складнішими, а методи їх розв'язування — більш систематизованими.

У період Ренесансу виникає потреба у нових методах розв'язування задач, що виходять за межі простих математичних рівнянь. Вчені починають використовувати індукцію, дедукцію, методи наближеного обчислення.

Приклад: Ісаак Ньютон та Ґотфрід Лейбніц незалежно один від одного розробили математичний аналіз (диференціальні та інтегральні рівняння), який відкрив нові горизонти для вирішення фізичних та інженерних задач.

Класична механіка: Механіка, як наука, базується на математичних моделях, що дозволяють вирішувати нестандартні задачі, пов'язані з рухом тіл та іншими фізичними процесами.

III. XIX століття: Систематизація та спеціалізація методів

Протягом XIX століття відбувалося активне систематизування методів розв'язування задач. Наука стала більш формалізованою, з'явилися нові галузі математики, фізики та хімії, які вимагали розв'язання дедалі складніших проблем.

У цей період були закладені основи теорії ймовірностей (Пуассон, Лаплас) і теорії груп (Галуа), які стали основою для вирішення задач, пов'язаних із симетріями та структурними взаємодіями.

Прикладні задачі: інженерні проблеми, наприклад, проектування мостів чи залізниць, стимулювали розвиток математичних моделей для розв'язання задач, пов'язаних із стійкістю матеріалів.

Математика і статистика: З’являються нові розділи, такі як теорія ймовірностей, статистика, теорія груп. Це дозволяє ефективніше розв’язувати задачі, пов’язані з аналізом великих даних і варіативністю.

IV. XX століття: Створення теоретичних основ для вирішення складних задач

У 20-му столітті виникли нові галузі науки та техніки, що спричинило потребу в розв’язанні ще складніших і специфічніших задач. Математика, інформатика, економіка та соціальні науки розвивали нові методи для вирішення нестандартних проблем.

Сучасні методи оптимізації, алгоритмічні підходи та числові методи дозволяють розв'язувати найскладніші задачі, які раніше були б вважаються нездійсненними. Зокрема, розвиток теорії алгоритмів, чисельних методів, комп’ютерного моделювання відкрив нові можливості для розв’язку складних задач.

V. Сучасний етап: Інтеграція та використання новітніх технологій

Сьогодні розв’язування нестандартних задач включає використання новітніх технологій, таких як штучний інтелект, машинне навчання, великі дані, квантові обчислення тощо.

Штучний інтелект і машинне навчання: Сучасні технології дозволяють розв’язувати складні проблеми в реальному часі за допомогою автоматизованих систем, які здатні виявляти закономірності в великих обсягах даних.

1.3 Роль нестандартних задач у формуванні математичного мислення

Нестандартні задачі у математиці мають фундаментальне значення для формування математичного мислення, оскільки вони стимулюють не лише використання стандартних теорій і методів, а й сприяють розвитку здатності до інноваційного підходу в розв'язанні складних задач. Ці задачі допомагають будувати зв’язки між різними математичними концепціями та відкривають нові перспективи для застосування відомих методів до нетипових ситуацій, що неминуче веде до удосконалення математичних навичок.

По-перше, нестандартні задачі дають можливість працювати з концепціями, які не завжди піддаються простому формалізованому підходу. Вони часто виникають в умовах, де стандартні теореми і методи не є достатніми для досягнення розв'язку. Такі задачі можуть виявитися надзвичайно складними і не мати одного правильного рішення, а кілька альтернативних підходів до розв'язку можуть призвести до різних результатів або до нового розуміння математичних понять. Це спонукає до використання нестандартних технік, створення нових формулювань задач і навіть введення нових теоретичних результатів.

Розв’язування нестандартних задач розвиває критичне мислення. Це стає очевидним, коли потрібно вибирати між кількома методами для вирішення задачі або коли розв’язання вимагає не тільки технічної вправності, але й уміння оцінити, який метод є найбільш ефективним і обґрунтованим в даних умовах. Критичне мислення виявляється в здатності аналізувати проблему з різних точок зору, перевіряти різні гіпотези і моделі, а також у вмінні знаходити помилки у власних міркуваннях або у використаних методах.

Нестандартні задачі допомагають розвивати інтуїцію, оскільки вони часто вимагають здогадок, які можуть базуватись не тільки на логіці та строгих формулах, але й на практичному досвіді, що накопичується під час вирішення таких задач. Математичні інтуїції — це не просто здогадки без підґрунтя, а логічні висновки, які виникають після серії спроб вирішення складних проблем.

Наприклад, при розв'язуванні задачі на оптимізацію або інтеграцію, яка не має чітко визначеного алгоритму, може виникнути ідея, що здається правильним шляхом до розв'язку, яка насправді призводить до нового результату, що відкриває нові напрямки для досліджень.

Ще однією важливою складовою формування математичного мислення через нестандартні задачі є розвиток здатності до абстракції. Часто для вирішення таких задач потрібно перейти від конкретних випадків до загальних принципів, побудувати абстрактні моделі або виявити універсальні закономірності, що діють у різних умовах. Це сприяє виведенню нових математичних теорем і закономірностей, які можуть бути застосовані в широкому діапазоні задач.

Нестандартні задачі також є чудовим інструментом для навчання стійкості та терпіння у вирішенні складних і тривалих задач. Вони часто мають багато етапів, вимагають уважності до деталей і точності на кожному кроці. Саме через таку поетапну роботу з більш складними задачами, у процесі вирішення яких виникають помилки і невдачі, формується здатність до довготривалої роботи над проблемами, до здолання труднощів та до самоконтролю. Така стійкість є важливою рисою математичного мислення, оскільки багато складних задач, які можуть здатися непідйомними на перший погляд, стають вирішуваними після кількох спроб та правильного підходу.

Розв'язування нестандартних задач також сприяє розвитку творчих здібностей. Коли стандартні методи не працюють, необхідно шукати нові підходи і рішення, що є основою творчого процесу в математиці. Це може бути розробка нових способів подання проблеми, введення нових понять чи вдосконалення існуючих методів. Математики, які часто стикаються з нестандартними задачами, розвивають навички генерації нових ідей, які потім можуть бути застосовані в різних розділах науки.

У процесі роботи з нестандартними задачами розвивається також здатність до системного мислення. Вони вимагають розуміння не лише конкретної задачі, але й усіх можливих зв'язків між різними частинами математичної теорії. Наприклад, вирішення задачі може потребувати знання з кількох галузей математики, таких як алгебра, геометрія, аналіз, що допомагає формувати вміння поєднувати різні математичні концепції і працювати з ними на високому рівні.

Нестандартні задачі також сприяють розвитку навичок комунікації та обміну ідеями. При розв’язуванні складних задач часто виникає потреба в обговоренні з іншими людьми, що дозволяє не тільки перевірити власні міркування, а й побачити проблему з різних точок зору. Врахування чужих ідей і підходів до розв’язання може призвести до відкриття нових шляхів вирішення, що є важливим аспектом розвитку математичного мислення.

Таким чином, нестандартні задачі відіграють надзвичайно важливу роль у формуванні математичного мислення, оскільки вони розвивають здатність до абстракції, критичного і творчого мислення, інтуїції та гнучкості в пошуку рішень. Вони не лише допомагають глибше зрозуміти математичні концепції, але й формують комплексний підхід до розв’язання складних і багатогранних проблем, що є основою для подальшого розвитку в математиці і суміжних науках.

Висновки до розділу 1

Історія розвитку підходів до розв'язування нестандартних задач свідчить про постійний прогрес у науковому та технічному мисленні. Від простих логічних висновків і методів античності до складних математичних моделей і новітніх технологій сучасності — підходи до вирішення таких задач стають все більш комплексними, інтегрованими та ефективними, дозволяючи розв'язувати проблеми, які ще не так давно здавалися нездійсненними.

Нестандартні задачі є важливим інструментом у формуванні математичного мислення, оскільки вони стимулюють розвиток ключових навичок: критичного і логічного мислення, абстракції, стратегічного планування та творчого підходу. Такі задачі допомагають сформувати математичну інтуїцію, здатність до самостійного навчання та адаптації до нових ситуацій, що є важливими компонентами вищого рівня математичної підготовки та здатності до вирішення складних проблем у науці, техніці та інших сферах.

Таким чином, історичний розвиток методів розв'язування нестандартних задач показує, як людство поступово удосконалювало свої інструменти та підходи, реагуючи на виклики часу. Кожна епоха додавала нові ідеї та інструменти, що розширюють можливості людського мислення і роблять сьогоднішні задачі вирішуваними.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ

2.1 Доведення від супротивного у вирішенні нестандартних задач

Хоча деякі відомі математики не визнали цього методу, уявити без нього сучасну математику неможливо. Міркування приблизно такі: «Припустимо, що твердження задачі не правильне. Якщо з цього припущення отримуємо суперечність, то твердження задачі правильне». Як бачимо, цей метод опирається на логічний закон виключеного третього.

Доведення від супротивного використовується при розв'язанні різноманітних задач.

Метод доведення від супротивного є надзвичайно важливим інструментом у математиці, особливо коли йдеться про нестандартні задачі. Його застосування дає можливість вирішувати складні проблеми, які не мають простого чи прямого вирішення, а також дає змогу глибше зрозуміти логічну структуру математичних теорій та тверджень. Для більш детального розгляду цього методу варто подивитися на його сутність, процес застосування та його переваги у вирішенні нестандартних задач.

Якщо говорити про доведення від супротивного, то цей метод ґрунтується на припущенні, що теорема або твердження, яке ми хочемо довести, є хибним. Тобто ми починаємо з припущення, що "немає такої ситуації", що теорема є істинною. Потім через серію логічних висновків і маніпуляцій з цією гіпотезою ми намагаємось знайти суперечність із відомими математичними фактами або аксіомами.

Цей метод працює лише в тому випадку, коли припущення про хибність початкового твердження призводить до логічної чи математичної суперечності. Якщо така суперечність виникає, це автоматично означає, що припущення було неправильним, і, отже, теорема є істинною.

Структура методу доведення від супротивного

1. **Формулювання припущення**: На першому етапі ми припускаємо, що теорема або твердження є хибним. Це основна частина методу, оскільки подальші кроки будуються на цьому припущенні.
2. **Логічні висновки**: Після того як ми припустили, що твердження є хибним, ми повинні зробити кілька логічних висновків. Вони можуть бути побудовані на відомих математичних законах, аксіомах або вже доведених теоремах. У процесі цього кроку ми намагаємось знайти ланцюг доказів, який буде заснований на припущенні про хибність.
3. **Пошук суперечності**: Це критичний етап у методі. Виходячи з наших припущень, ми повинні знайти логічну чи математичну суперечність. Наприклад, ми можемо дійти до висновку, що певне твердження суперечить основним аксіомам або є абсурдним в рамках заданих умов.
4. **Висновок про істинність**: Коли ми знаходимо суперечність, це означає, що наше початкове припущення (що твердження є хибним) неправдиве. Звідси випливає, що початкове твердження є істинним.

У нестандартних задачах часто відсутні чітко виражені шляхи до розв’язку або завдання містять невідомі, незвичні умови. Такі задачі можуть бути складними, і прямий підхід до їх розв'язку може бути дуже важким або навіть неможливим. У таких випадках метод доведення від супротивного може стати надзвичайно корисним, оскільки він дозволяє рухатися зворотним шляхом: не шукати рішення напряму, а через виключення помилкових варіантів знаходити правильне рішення.

Основні етапи використання методу в нестандартних задачах

1. **Аналіз умов задачі**: Щоб застосувати метод доведення від супротивного, треба уважно проаналізувати умови задачі. Часто задачі мають приховані, неочевидні деталі, що можна використовувати для побудови припущення про хибність.
2. **Припущення про хибність**: На основі умов задачі припускається, що певне твердження або результат є хибним. Це може бути твердженням про

існування певних об'єктів, властивостей або ситуацій, які в задачі припускаються як істинні.

3. **Логічне обґрунтування та висновки**: Після формулювання припущення, необхідно побудувати логічний ланцюг, що випливає з цього припущення. Важливо використовувати відомі факти, аксіоми та теореми для досягнення суперечності.
4. **Пошук суперечності та завершення доказу**: На останньому етапі ми шукаємо логічну суперечність, що може виникнути при здійсненні певних операцій чи обчислень. Якщо суперечність знайдена, ми можемо зробити висновок, що початкове припущення було хибним, і твердження, яке потрібно було довести, є істинним.

Переваги методу

1. **Гнучкість і універсальність**: Метод доведення від супротивного є універсальним інструментом, який можна застосовувати до різних типів задач, включаючи ті, що не мають очевидних шляхів розв'язку. Це дає можливість знаходити рішення навіть у ситуаціях, де інші методи не дають результату.
2. **Поглиблене розуміння математичних теорій**: Використання методу від супротивного дозволяє краще зрозуміти структуру математичних теорій та засадничі принципи, оскільки він базується на логічному аналізі та виключенні помилкових варіантів.
3. **Розвиток логічного мислення**: Цей метод сприяє розвитку критичного і абстрактного мислення, що є важливим аспектом у вивченні математики. Здатність бачити суперечності в припущеннях та здійснювати логічні висновки допомагає формувати більш міцну математичну інтуїцію.
4. **Застосування до складних, абстрактних проблем**: У теоретичній математиці метод доведення від супротивного дозволяє працювати з абстрактними поняттями та доводити існування або неіснування певних об'єктів, що вимагає вищого рівня математичної абстракції.

Застосування методу в інших галузях

Хоча метод доведення від супротивного є основним інструментом у теоретичній математиці, його також можна застосовувати в інших науках, таких як логіка, фізика, інформатика та економіка. В цих галузях він допомагає не тільки доводити теореми, а й аналізувати складні ситуації, де важливо виключити неправильні варіанти для того, щоб знайти правильне рішення.

Приклад 1. По колу написано в довільному порядку 4 одиниці та 5 нулів. Над ними виконується така операція: між однаковими цифрами пишуть нуль, а між різними – одиницю, після чого попередні цифри витирають. Потім така сама операція виконується над отриманими цифрами і т. д. Довести, що після кількох таких операцій неможливо отримати 9 нулів.

Розв'язання. Припустимо, що після таких операцій отримано 9 нулів. Тоді після -ї операції всі цифри на колі повинні бути рівні одиниці, а тому після -ї операції довільні дві сусідні цифри на колі повинні бути різні. Тоді нулів має бути стільки, скільки й одиниць, звідки отримуємо, що загальна кількість цифр є парним числом. Це суперечить умові.

Приклад 2. Довести, що простих чисел нескінченно багато.

Розв'язання. Припустимо супротивне, тобто, що простих чисел скінченна кількість, а саме - всі прості числа. Тоді число також просте, бо не ділиться на жодне з чисел Це суперечить припущенню. Отже, простих чисел нескінченно багато.

2.2 Підрахунок двома способами для пошуку рішень

Метод підрахунку двома способами є потужним і надійним інструментом у математиці, зокрема в комбінаторних задачах. Він дозволяє знаходити кількість варіантів певної ситуації різними шляхами, що допомагає краще зрозуміти структуру задачі, перевірити правильність розв'язку та виявити логічні помилки. Цей метод активно використовується в задачах на комбінування, перестановки, розподіли предметів, а також у теорії ймовірностей та інших математичних дисциплінах.

Додаткові приклади застосування методу

1. **Перестановки з обмеженнями**: У задачах, де є певні обмеження або умови, метод підрахунку двома способами дозволяє врахувати ці умови в одному з підрахунків, а потім порівняти їх з іншими способами, щоб підтвердити правильність результату.

   Наприклад, у задачах на перестановки, де потрібно переставити предмети з певними обмеженнями (наприклад, деякі предмети повинні бути на певних місцях або мають бути розташовані поряд), підрахунок двома способами дозволяє розглядати задачу з різних підходів, аби переконатися в правильності вирішення.

2. **Задачі на розподіл об'єктів між групами**: Для задач, де потрібно розподілити певну кількість об'єктів між кількома групами, метод підрахунку двома способами може включати різні способи розподілу (наприклад, з обмеженням або без). Підрахунок двома способами дозволяє виявити кількість можливих варіантів як з огляду на умови задачі, так і за допомогою загальних принципів комбінування.
3. **Теорія ймовірностей**: У теорії ймовірностей метод підрахунку двома способами є важливим для перевірки ймовірностей подій. Кількість способів настання події можна порахувати двома шляхами — через ймовірності окремих результатів або за допомогою комбінаторних

принципів. У таких задачах метод дозволяє підтвердити, чи правильний результат, отриманий на основі одного підрахунку, збігається з результатом іншого.

Особливості застосування методу підрахунку двома способами

1. **Аналіз умов задачі**: Щоб застосувати метод підрахунку двома способами, необхідно уважно проаналізувати умови задачі та знайти можливі варіанти її вирішення. Чітке розуміння ситуації допомагає вибрати найбільш підходящі шляхи для підрахунку кількості варіантів. Наприклад, для задач на перестановки може бути зручнішим використовувати формули для перестановок, а для задач на комбінування — формули для комбінацій.
2. **Обчислення з урахуванням різних підходів**: Метод підрахунку двома способами може передбачати застосування різних комбінаторних принципів: перестановок, комбінацій, біноміальних коефіцієнтів або принципу включень і виключень. У кожному випадку необхідно застосувати метод, що найбільше відповідає умовам задачі, а потім порівняти обидва варіанти підрахунку.
3. **Пошук помилок у підрахунках**: Якщо підрахунок двома способами дає різні результати, це свідчить про наявність помилки в одному з підрахунків. Така ситуація змушує уважніше переглянути умови задачі, зробити нові висновки або коригування, щоб дійти до правильного результату.
4. **Перевірка коректності результату**: Завдяки підрахунку двома способами ми можемо бути впевненими у правильності нашого розв'язку. Якщо обидва способи дають однаковий результат, це є гарним підтвердженням того, що рішення вірне.

Застосування методу в різних сферах математики

Метод підрахунку двома способами активно використовується не лише в комбінаторних задачах, а й в інших сферах математики. Наприклад:

- **У теорії ймовірностей**: Якщо є декілька способів настання події, можна підрахувати ймовірність цієї події двома способами — через прямий підрахунок варіантів або через використання формул ймовірностей.
- **В алгебрі та теорії груп**: У задачах, що стосуються груп, кількості елементів групи або симетрії, метод підрахунку двома способами дозволяє перевіряти рівність кількості елементів, використовуючи різні підходи до розв'язку.
- **У геометрії**: У задачах, що стосуються геометричних фігур, підрахунок двома способами може використовувати різні методи для визначення площі або об'єму об'єктів. Наприклад, у задачах на площу можна застосовувати різні способи обчислення, наприклад, за допомогою геометричних формул чи методом інтерграцій.

Переваги методу

1. **Перевірка результату**: Найбільша перевага методу полягає в тому, що він дозволяє перевірити правильність розв'язку, порівнюючи два різних способи підрахунку. Це особливо корисно в складних задачах, де один із способів може дати помилковий результат через неправильні припущення або обчислення.
2. **Гнучкість і універсальність**: Метод підрахунку двома способами можна застосовувати в будь-яких задачах, що вимагають комбінаторного підходу. Це дозволяє використовувати його в багатьох різних контекстах і ситуаціях, де потрібно знайти кількість варіантів, комбінацій або перестановок.
3. **Поглиблене розуміння задачі**: Використання цього методу дозволяє не лише знайти правильну відповідь, але й краще зрозуміти саму задачу. Кожен підрахунок дає можливість по-різному побачити структуру проблеми та застосувати різні комбінаторні принципи.
4. **Розвиток логічного мислення**: Метод підрахунку двома способами розвиває критичне мислення та здатність до аналізу задачі з різних точок

зору. Це важливо не лише для вирішення комбінаторних задач, а й для загального розвитку математичного мислення.

Приклад 3. За круглим столом сидить 30 учнів. Кожен з них або завжди говорить правду, або завжди бреше. Відомо, що серед двох сусідів кожного брехуна є рівно один брехун. При опитуванні 12 учнів сказали, що рівно один з їхніх сусідів брехун, а решта сказали, що обидва сусіди брехуни. Скільки брехунів сидить за столом?

Розв'язання. Проаналізуємо відповіді учнів. Вони залежать від того, хто сам учень і хто його сусіди. Можливі такі розміщення трійками: 1 - БПБ, 2 - БПП, 3 - ППБ, 4 - ППП, 5 - БББ, 6 - ПБП, 7 - ББП, 8 - ПББ. Проте розміщення 5 та 6 неможливі внаслідок умови, що серед двох сусідів кожного брехуна є рівно один брехун, а розміщення 4 не було, тому що не було відповіді: «Нема жодного брехуна». При п'яти можливих розміщеннях відповіді були такі: БПБ - 2, БПП - 1, ППБ - 1, ББП - 2, ППБ - 2. Неважко помітити, що в кожному випадку опитуваний учень правильно називав кількість брехунів у трійці учнів, всередині якої він сидить. При цьому кожен брехун згадувався тричі - собою та своїми двома сусідами. В усіх відповідях згадувалося $12 \cdot 1 + 18 \cdot 2 = 48$ брехунів. Отже, загальна кількість брехунів $48 : 3 = 16$.

Приклад 4. Одну з вершин правильного 2001-кутника пофарбовано у чорний колір, а решту його вершин - у білий. За один крок дозволяється вибрати будь-яку пофарбовану в чорний колір вершину та змінити колір на протилежний (білий - на чорний, а чорний - на білий) у неї та ще у двох сусідніх з нею вершин. Чи можливо за декілька зазначених кроків перефарбувати всі вершини початкового 2001-кутника у білий колір?

Розв'язання. Припустимо, що таке перефарбування можливе. Помічаємо, що після кожного кроку кількість чорних вершин або збільшується на 1, або зменшується на 3. Оскільки спочатку є 1 чорна вершина, а наприкінці - жодної, то кількість таких кроків має бути непарним числом.

Позначимо вершини початкового многокутника через $A_1, A_2, \dots, A_{2001}$. Нехай у процесі перефарбовування вершина $A_k (k = 1, 2, \dots, 2001)$ обиралася a_k разів за "центральну". Тоді загальна кількість кроків $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{2001}$ має бути непарним числом.

Нехай на початку описаного процесу вершину A_1 пофарбовано в чорний колір. Тоді вершина A_1 змінювала свій колір непарну кількість раз, а всі інші вершини змінювали свій колір парну кількість раз. З іншого боку, сума $a_1 + a_2 + a_3$ дорівнює кількості змін кольору вершини A_2, сума $a_4 + a_5 + a_6$ дорівнює кількості змін кольору вершини A_3,..., сума $a_{1999} + a_{2000} + a_{2001}$ дорівнює кількості змін кольору вершини A_{2000}. Тому загальна кількість кроків

$$S = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \dots + (a_{1999} + a_{2000} + a_{2001})$$

має бути парним числом. Прийшли до суперечності.

Отже, перефарбування за допомогою описаного в умові процесу неможливе.

2.3 Векторно-координатний метод до розв’язання нестандартних задач

Застосування векторів, їх координат, операцій над векторами до розв’язування геометричних задач називається векторно-координатним методом.

Векторно-координатний метод є важливим і потужним інструментом для розв’язання різноманітних задач у вищій математиці, зокрема в геометрії, фізиці та інших галузях. Він дозволяє зручно і чітко вирішувати багато задач, використовуючи принципи векторної алгебри та координатної геометрії. Цей метод широко застосовується для розв’язування задач, що пов’язані з визначенням геометричних властивостей фігур, пошуком кутів між прямими та площинами, а також для аналізу руху в просторі.

Загальні положення векторно-координатного методу

Векторно-координатний метод ґрунтується на використанні векторів для опису положення точок у просторі або на площині та їх взаємодії. Основні принципи цього методу включають:

1. **Вектори** — це математичні об’єкти, що мають напрямок та величину, і вони використовуються для опису різних фізичних або геометричних величин, таких як переміщення, швидкість, сила тощо. Вектор записується у вигляді координат, що дозволяє працювати з ним у різних системах координат (декадичній, прямокутній, полярній і так далі).
2. **Координати** — це числові значення, які визначають точку в просторі або на площині відносно певної системи координат. Для двовимірної простору використовуються пари чисел (x, y), для тривимірного — трійки (x, y, z).

Векторно-координатний метод передбачає представлення всіх геометричних об'єктів (прямих, площин, точок) через координати та вектори. Це дозволяє застосовувати алгебраїчні операції, такі як додавання векторів, скалярний добуток, векторний добуток, що дає змогу вирішувати складні геометричні задачі, аналізуючи їх через координати.

Кроки векторно-координатного методу

1. **Визначення координат точок і векторів**: Задачу потрібно почати з представлення всіх об'єктів, які згадуються в умові, у вигляді векторів і координат. Наприклад, точки А(x_1, y_1, z_1) і $B(x_2, y_2, z_2)$ можна подати у вигляді векторів, що сполучають початок координат із точками A і B.
2. **Алгебраїчні операції над векторами**: Залежно від умови задачі, треба виконувати різноманітні операції над векторами, такі як додавання векторів (для визначення суміжних точок або руху), множення вектора на скаляр (для зміни величини вектора), скалярний добуток (для обчислення кута між векторами) чи векторний добуток (для визначення площі паралелограма, визначення нормалі до площини).
3. **Пошук необхідних елементів**: Використовуються векторні операції для знаходження відстаней, кутів, рівнянь прямих та площин, визначення перетинів між різними геометричними об’єктами (наприклад, між прямою та площиною).
4. **Інтерпретація результатів**: Після виконання всіх необхідних обчислень, потрібно інтерпретувати отримані числові значення у геометричному контексті. Наприклад, для задачі на знаходження кута між прямими потрібно вивести це значення у вигляді кута між векторами, а для задачі на перетин двох прямих — знайти точку перетину.

Переваги методу

1. **Універсальність**: Векторно-координатний метод можна застосовувати до широкого спектра задач у геометрії, фізиці та інших галузях, що дозволяє вирішувати задачі різного рівня складності.
2. **Алгебраїчна природа**: Метод дає змогу працювати з алгебраїчними виразами, що часто є більш зручним і зрозумілим, ніж геометричні

побудови. Це дозволяє швидше виконувати обчислення та отримувати точні результати.

3. **Ефективність**: Використання векторів дозволяє розв'язувати задачі, що можуть бути складними за допомогою геометричних побудов, з більшою легкістю, особливо коли мова йде про багатовимірні простори.
4. **Гнучкість**: Можливість використовувати різні системи координат дозволяє оптимізувати розв'язок задачі в залежності від її специфіки (наприклад, перехід до полярних або циліндричних координат для деяких задач).

При встановленні різних векторних співвідношень часто використовується таке твердження.

Теорема 25.1 *Якщо M – точка перетину медіан трикутника ABC, то для довільної точки O (простору) справедлива векторна рівність*

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

Крім операцій додавання, віднімання векторів, множення вектора на число доцільно використовувати скалярний добуток векторів. Якщо $\vec{a}\,(a_1; a_2)$, $\vec{b}\,(b_1; b_2)$, то скалярний добуток $\vec{a}\,\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$. Аналогічне означення має місце для векторів, які розташовані в просторі

Справедлива формула $\vec{a}\,\vec{b}$ = $|\vec{a}\,|\,|\vec{b}|\cos\varphi$, де $\varphi = \angle(\vec{a}\,;\vec{b})$. Формулу $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$ зручно використовувати для знаходження кутів між векторами (чи прямими).

Для знаходження довжини вектора зручною є формула $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}\,)^2}$.

Приклад 5. Всередині трикутника ABC взято точку O. На променях OA, OB, OC побудовано вектори з початком у точці O, довжина кожного з яких дорівнює 1. Довести, що сума цих векторів має довжину, меншу за 1.

Розв'язання. Нехай на променях OA, OB, OC побудовано відповідно вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ такі, що $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}\,| = 1$. Позначимо $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \gamma$, $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = \gamma$, $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = \alpha$, $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \beta$. Очевидно, що $\alpha + \beta + \gamma = 360°$.

Тоді отримуємо

$$|\vec{d}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2} == \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{a}\cdot\vec{c} + 2\vec{b}\cdot\vec{c}} =$$

$$= \sqrt{3 + 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma} =$$

$$= \sqrt{3 + 2(\cos\alpha + \cos\beta) + 2\cos(\alpha + \beta)} =$$

$$= \sqrt{3 + 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 2} =$$

$$= \sqrt{1 + 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{1 + 8\cos\left(180° - \frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \sqrt{1 - 8\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} < 1,$$

оскільки $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$ – гострі.

Приклад 6. Нехай $SABC$ – тригранний кут. Довести, що коли один із кутів, які утворюють між собою бісектриси плоских кутів при вершині S, є прямим, то два інших також прямі.

Розв'язання. Відкладемо на ребрах даного тригранного кута рівні між собою відрізки SA, SB, SC та позначимо $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$ Тоді бісектриси плоских кутів при вершині S паралельні векторам $\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}$. За умовою два з цих векторів перпендикулярні (тобто їх скалярний добуток дорівнює нулю), довжини цих векторів рівні між собою, попарні скалярні добутки цих векторів також рівні між собою:

$$\left((\vec{a}+\vec{b}),(\vec{b}+\vec{c})\right)=\left((\vec{b}+\vec{c}),(\vec{c}+\vec{a})\right)==\left((\vec{a}+\vec{b}),(\vec{c}+\vec{a})\right)=$$

$$=\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right)+(\vec{c},\vec{a})+|\vec{a}|^2.$$

Отже, вектори $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{c}+\vec{a}$, а значить і бісектриси плоских кутів при вершині S попарно перпендикулярні.

Висновки до розділу 2

Метод доведення від супротивного надає можливість математикові або досліднику знаходити рішення складних задач через побудову логічного ланцюга, який з певної точки зору здається нелогічним, але насправді призводить до суперечності, що неминуче підтверджує правильність початкового припущення. У випадках нестандартних задач, де інші методи можуть виявитися малоефективними або не дають результату, доведення від супротивного дозволяє знайти альтернативні підходи до вирішення проблеми, відкриваючи нові можливості для досягнення правильного результату.

Завдяки застосуванню цього методу, учні та дослідники вчаться не лише працювати з готовими математичними фактами та теоремами, а й розвивати гнучкість мислення, здатність аналізувати задачі з різних точок зору. Вони отримують можливість бачити більш глибокі, приховані зв'язки між різними концепціями та теоріями, що значно покращує їх математичну інтуїцію. Крім того, цей метод стимулює розвиток абстрактного мислення та уміння будувати доведення, що є важливим аспектом у вивченні вищої математики.

Доведення від супротивного є не тільки важливим інструментом у теоретичних дослідженнях, але й необхідним етапом для розвитку фундаментальних математичних теорій, таких як теорія чисел, топологія, теорія графів, алгебра та інші галузі. Цей метод застосовується не лише в математичних науках, але й у таких дисциплінах, як логіка, фізика, інформатика, економіка, де він допомагає перевіряти теорії і знаходити оптимальні рішення для складних задач.

Загалом, метод доведення від супротивного є важливим не лише з точки зору математичних досліджень, але й для розвитку загальних навичок у вирішенні складних проблем. У процесі його застосування людина навчається думати абстрактно, використовувати логіку на високому рівні та знаходити рішення, які на перший погляд здаються неможливими. Всі ці аспекти роблять цей метод незамінним у математичних дослідженнях та значно підвищують рівень математичного мислення як у студентів, так і в професіоналів.

Метод підрахунку двома способами є одним із основних інструментів у комбінаторних задачах та в математичних дослідженнях загалом. Його застосування дозволяє не тільки знайти правильний розв'язок складних задач, а й перевірити точність отриманих результатів через порівняння двох різних підходів до одного і того самого питання. Цей метод має великий потенціал у розвитку математичного мислення та глибокого розуміння комбінаторних принципів, що робить його незамінним для студентів, дослідників і професіоналів у різних галузях.

Перше, що потрібно зазначити, це те, що підрахунок двома способами надає можливість переконатися в правильності отриманого результату, що є особливо важливим у складних комбінаторних задачах. Якщо два різних методи дають однаковий результат, це є сильним підтвердженням того, що розв'язок вірний. Таке перевірене рішення дозволяє зняти будь-які сумніви щодо правильності виконаного підрахунку та дає впевненість у результаті.

По-друге, метод підрахунку двома способами сприяє розвитку аналітичного та критичного мислення, дозволяючи математикові або студенту розглядати задачу з різних точок зору. Під час розв'язування задачі через різні підходи можна не лише застосувати різні комбінаторні формули та принципи, але й глибше зрозуміти зв'язки між елементами задачі, що в свою чергу розвиває здатність до абстрактного мислення та покращує навички побудови логічних висновків.

Крім того, метод підрахунку двома способами є дуже універсальним і може бути застосований до широкого спектра задач в комбінаторики, теорії ймовірностей, алгебрі, теорії чисел, геометрії та інших галузях математики. Це дозволяє використовувати його не лише в академічних задачах, а й у практичних застосуваннях, де необхідно знаходити кількість можливих варіантів, таких як організація та розподіл ресурсів, оптимізація, а також в інженерії та програмуванні.

Не менш важливим є й те, що цей метод сприяє розвитку здатності працювати з великими обсягами інформації, ефективно обчислювати кількість варіантів у складних ситуаціях, а також знаходити оптимальні рішення для задач з множиною варіантів. Завдяки цьому підрахунок двома способами стає не лише важливим математичним інструментом, а й корисним вмінням для практичних задач у реальному житті.

Загалом, метод підрахунку двома способами є важливим елементом комбінаторної математики, що дозволяє не лише знайти правильні рішення складних задач, але й розвивати логічне мислення, підвищувати математичну інтуїцію, покращувати навички аналізу і перевірки. Його застосування дозволяє значно глибше зрозуміти суть комбінаторних задач, а також перевіряти їх вирішення, що робить цей метод важливим інструментом як у навчанні, так і в наукових дослідженнях і практичних застосуваннях.

Векторно-координатний метод є важливим інструментом у вищій математиці, який застосовується для розв'язання різноманітних задач, зокрема в геометрії, фізиці, а також у багатьох інших галузях. Цей метод дозволяє значно спростити процес розв'язування задач, перевівши геометричні конструкції в алгебраїчну форму, що робить їх більш доступними для обчислень і аналізу. Векторно-координатний метод відкриває перед математикою широкі можливості, оскільки з його допомогою можна вирішувати як прості, так і надзвичайно складні задачі в багатовимірних просторах.

В основі цього методу лежить ідея використання векторів і координат для опису геометричних об'єктів, що дозволяє проводити операції з цими об'єктами за допомогою стандартних алгебраїчних методів. Замість того, щоб будувати геометричні фігури вручну, за допомогою цього методу можна працювати з рівняннями прямих, площин, кривих і навіть вищих поверхонь, що значно спрощує вирішення складних задач. Зокрема, такі задачі, як обчислення відстаней, кутів, перетинів, рівнянь прямих і площин, можна легко розв'язувати за допомогою векторів і координат.

Застосування векторно-координатного методу дозволяє не тільки спрощувати процес вирішення задач, а й робить його більш систематизованим. Це підвищує ефективність роботи з математичними конструкціями та дає можливість аналізувати не лише геометричні властивості об'єктів, а й їх взаємодії в більш абстрактному вигляді. Завдяки тому, що векторно-координатний метод застосовується для широкого кола задач, він займає важливе місце в навчальних курсах і наукових дослідженнях.

Окрім цього, векторно-координатний метод має важливе значення для практичних застосувань у фізиці, інженерії, комп’ютерних науках та багатьох інших галузях. Наприклад, у механіці за допомогою цього методу можна моделювати рухи тіл, аналізувати сили і моменти, а в комп'ютерній графіці — вирішувати задачі, пов'язані з трансформаціями об'єктів у тривимірному просторі.

Метод також має важливе значення для розвитку математичного мислення. Він дозволяє студентам і дослідникам розвивати навички просторового та абстрактного мислення, адже замість звичних геометричних побудов учасники процесу мають справу з алгебраїчними виразами і математичними операціями, що дає їм можливість глибше зрозуміти сутність задачі і способи її вирішення. Векторно-координатний метод також стимулює розвиток логічного і критичного мислення, оскільки на кожному етапі розв'язання задачі важливо уважно перевіряти правильність виконаних операцій.

Крім того, цей метод сприяє розвитку аналітичних і обчислювальних навичок. Оскільки векторно-координатний метод тісно пов'язаний з математичним аналізом, застосування його до різноманітних задач допомагає розвивати здатність до абстрактного мислення, побудови логічних доказів і вирішення складних задач за допомогою математичних моделей.

Одним із головних переваг векторно-координатного методу є його універсальність. Він застосовний для вирішення задач як на площині, так і в тривимірному просторі, а також може бути адаптований для роботи в більш високих вимірах. Це дозволяє вирішувати не лише класичні задачі з геометрії, а й задачі з багатовимірних просторів, такі як вектори в статистиці або фізиці, що дає змогу вивчати складніші структури.

Отже, векторно-координатний метод є важливим і ефективним інструментом для розв'язання широкого спектра математичних задач. Його застосування допомагає не лише знаходити правильні відповіді, але й розвивати математичне мислення, аналітичні здібності і вміння працювати з абстрактними математичними об'єктами. У майбутньому цей метод залишатиметься основним інструментом для вирішення задач, що стосуються геометрії, фізики, інженерії та інших прикладних галузей, а також для розвитку математичних теорій.

РОЗДІЛ 3. ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ ЗАДАЧ

3.1 Нестандартні задачі у шкільній математичній освіті

Нестандартні задачі в шкільній математичній освіті є невід'ємною частиною навчального процесу, оскільки вони не лише допомагають учням застосовувати знання з різних галузей математики, але й сприяють розвитку критичного, логічного і творчого мислення. Такі задачі є потужним інструментом, що дозволяє учням розширювати свої можливості в розв'язанні не тільки стандартних задач, але й задач з багатьох математичних дисциплін, часто виходячи за межі стандартних навчальних програм.

Роль нестандартних задач у розвитку математичного мислення

Основне завдання нестандартних задач у шкільному навчанні — це формування у учнів здатності до абстрактного мислення та творчого підходу. Зазвичай у шкільній програмі більшість задач має чітко визначені методи та алгоритми розв'язку, які відпрацьовуються за допомогою практики. Нестандартні задачі ж не обмежуються жорстким набором правил, вони вимагають від учнів знаходити власні шляхи до розв'язку, що сприяє розвитку гнучкості мислення. Учні змушені шукати нові підходи, комбінувати різні методи та творчо розглядати задачу, що дозволяє виявити їх індивідуальний підхід до математичних проблем.

Нестандартні задачі здатні виявити не тільки глибину знань учня, але й рівень його математичної інтуїції. Вони часто включають завдання, які не можна вирішити традиційними або стандартними методами, що змушує учнів вчитися адаптувати отримані знання до нових умов. Ці задачі розвивають здатність до нестандартного мислення, яке вкрай важливе як в математиці, так і в інших науках, в тому числі й в повсякденному житті.

Переваги нестандартних задач для учнів

1. **Виховання самостійності та впевненості в своїх силах**. Нестандартні задачі часто не мають однозначних шляхів розв’язку, що змушує учнів шукати рішення самостійно. Це формує впевненість у своїх силах і розвиває уміння працювати з новою інформацією, не покладаючись на готові рішення.
2. **Розвиток аналітичних і логічних здібностей**. Вирішення нестандартних задач зазвичай вимагає від учнів розбірливого аналізу умов задачі, виділення важливих фактів і зв’язків, а також перевірки своїх результатів. Це сприяє розвитку вміння аналізувати дані, робити висновки, а також відслідковувати логічні помилки.
3. **Формування інтересу до математики**. Задачі, які виходять за рамки стандартних методів, зазвичай більше цікавлять учнів. Вони викликають інтерес завдяки своїй новизні і оригінальності, а також через потребу в креативному підході до вирішення. Це особливо важливо для учнів, які можуть бути незацікавлені в класичному підході до математики, але зацікавлені в її застосуванні до нестандартних ситуацій.
4. **Підготовка до наукових досліджень і майбутньої професійної діяльності**. Здатність вирішувати нестандартні задачі є важливою складовою не лише математичної освіти, а й підготовки до наукових досліджень. Математика відіграє важливу роль у багатьох професіях, і уміння застосовувати нестандартний підхід до вирішення задач буде корисним для подальшої кар'єри в науці, техніці та інших галузях.
5. **Відкриття нових математичних принципів**. Нестандартні задачі часто виявляють нові математичні принципи, оскільки вони можуть не мати стандартного алгоритму розв’язку. Це спонукає учнів до глибшого вивчення теорій і принципів, на яких базуються ті чи інші математичні задачі.

Застосування нестандартних задач у навчальному процесі

Нестандартні задачі можуть бути використані на всіх етапах навчання: від початкової школи до старших класів. Вони можуть бути інтегровані у різні розділи шкільної програми з математики, від алгебри до геометрії, комбінаторики і теорії ймовірностей. Важливо, що такі задачі не тільки допомагають розв’язувати абстрактні математичні проблеми, а й розвивають здатність застосовувати математичні знання для вирішення реальних практичних задач.

1. **Вивчення базових понять через нестандартні задачі**. Наприклад, вивчаючи геометричні фігури, учням можна запропонувати не лише стандартні задачі на площі або периметр, а й розв’язувати задачі на побудову, на доведення властивостей фігур або знаходження оптимальних шляхів у заданих умовах.
2. **Математичні конкурси та олімпіади**. Нестандартні задачі є основною частиною олімпіад і конкурсів з математики, де учням пропонуються задачі, що потребують нестандартного підходу і глибокого розуміння теорії. Участь у таких конкурсах розвиває в учнів не лише математичні навички, але й здатність працювати в стресових умовах, знаходити рішення за обмежений час.
3. **Робота в групах і колективне вирішення задач**. Нестандартні задачі є хорошим інструментом для командної роботи, оскільки вимагають обміну ідеями та колективного обговорення. Це допомагає учням покращити комунікативні навички, а також дає можливість вчитися у однокласників, знаходячи нові способи підходу до вирішення задач.

Приклади задач із шкільного курсу математики:

8 клас

1. Знайти три попарно взаємно прості числа такі, що сума будь-яких двох з них ділиться на третє.

2. Мандріник виходить з готелю о 15-1 годині дня і повертається о 21-й годині вечора тим самим маршрутом. Відомо, що рівними ділянками шляху він іде зі

швидкістю 4 км/год, вгору - 3 км/год і вниз - 6 км/год. Знайти відстань, яку пройшов мандрівник,якщо він ішов без відпочинку.

3. Довести,що не існує цілих чисел x, y, z, не рівних нулю одночасно і таких, що $x^2 + y^2 = 3z^2$.

4. Обчислити суму

$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}$.

якщо відомо, що $xyz = 1$.

5. Картки послідовно пронумеровано натуральними числами від 1 до $2n + 1$. Яку найбільшу кількість карток можна дібрати так, щоб жоден з номерів не дорівнював сумі якихось двох інших номерів карток?

9 клас

1. Чи існує натуральне число, добуток цифр якого дорівнює 1980?

2. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоту CH і медіану BK, причому BK = CH і кути KBC та HCB рівні між собою. Довести, що трикутник ABC рівнобедрений.

3. Прості числа p і q та натуральне число n задовольняють 1співвідношення $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ $+ \frac{1}{pq} = 1$. Знайти ці числа.

4. Довести, що натуральне число, десятковий запис якого складається з однієї одиниці, двох двійок, трьох трійок,..., дев'яти дев'яток, не може бути точним квадратом.

5. Клітинки аркуша зошита розфарбовано у вісім кольорів. Довести, що знайдеться фігура, зображена на рисунку, всередині якої є дві клітини одного кольору.

10 клас

1. Дано n чисел a, «2,..., a, кожне з яких дорівнює +1 або - 1, та $a_1a_2+a_2a_3+ ...+ a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$. Довести, що n ділиться на 4.

2. Довести, що при будь-якому натуральному n маємо

$\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{8}\right)\left(1 + \frac{1}{15}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right) < 2.$

3. Натуральне число у одержано з числа х перестановкою цифр.

Відомо, що $x + y = 10^{200}$. Довести, що х ділиться на 50.

4. Площину розфарбовано: а) в 2; б) в 3; в) в 100 кольорів. Довести, що знайдеться прямокутник з вершинами одного кольору.

5.На площині дано 25 точок. Відомо, що з будь-яких трьох точок можна вибрати дві, відстань між якими менша від 1. Довести, що серед даних точок знайдеться 13, що лежать у колі радіуса 1.

11 клас

1. У квадраті 1×1 розміщено кілька кіл, сума радіусів яких дорівнює 0,6. Довести, що існує пряма, паралельна стороні квадрата, яка перетинає не менш як два кола.

2. Король за хід може поставити по хрестику в будь-які дві вільні клітинки нескінченного аркуша паперу. Міністр за хід може поставити нулик у будь-яку вільну клітинку. Чи може король поставити 100 хрестиків у ряд?

3. Чи можна записати в ряд 10 чисел так, щоб сума будь-яких п'яти чисел поспіль була додатною, а сума будь-яких семи поспіль – від'ємною?

4. Довести, що серед будь-яких 39 послідовних натуральних чисел знайдеться одне, сума цифр якого ділиться на 11.

5. У клітинки прямокутної таблиці записано дійсні числа. Дозволяється одним ходом змінити знак у всіх чисел, що стоять у будь-якому рядку чи будь-якому стовпчику. Довести, що такими операціями можна добитись того, щоб сума чисел у таблиці була невід'ємною.

3.2 Розв’язування нестандартних задач у вищій математиці

Розв'язування нестандартних задач у вищій математиці є важливим етапом у розвитку математичних навичок та формуванні вміння мислити нестандартно, креативно і гнучко. Ці задачі відіграють важливу роль у розвитку математичного мислення, оскільки вони змушують студента виходити за межі стандартних методів і шукати нові підходи для вирішення складних проблем. Вони дозволяють не лише перевіряти і закріплювати базові математичні концепції, але й стимулюють застосування різноманітних методів, які можуть бути не очевидними на перший погляд.

Глибше розуміння нестандартних задач

Нестандартні задачі вищої математики можуть бути визначені через кілька характерних ознак. Вони, як правило, не мають єдиного або стандартного методу розв’язку. Такі задачі можуть бути за складністю набагато вищими за звичайні вправи, які лише тренують алгоритмічні навички. У таких задачах важливо не тільки застосовувати добре відомі математичні методи, але й адаптувати їх під нові умови, поєднувати різні математичні дисципліни, а іноді навіть шукати нові математичні підходи. Часто такі задачі ставлять перед студентами умови, що вимагають глибшого аналізу, логічного мислення та креативного підходу.

Задачі можуть бути представлені у вигляді складних теорем, що потребують доведення за допомогою відомих методів, або задач, що мають пряме застосування до реальних практичних ситуацій, таких як задачі з фізики, економіки або техніки, де необхідно оптимізувати процеси або знайти найкраще рішення. У всіх цих випадках підхід до розв'язання вимагає детального аналізу та пошуку більш складних рішень.

Особливості та підходи до розв'язування нестандартних задач

1. **Пошук нових підходів та методів**. Задачі можуть вимагати створення нових або нестандартних методів для досягнення рішення. У таких

випадках важливо застосовувати набір вже відомих технік з різних математичних дисциплін, комбінувати їх і застосовувати до нових, нестандартних умов. Наприклад, у задачах з теорії ймовірностей або комбінаційної математики можуть бути використані методи комбінаторики, що поєднуються з принципами алгебри та аналізу.

2. **Використання додаткових уявлень та моделей**. Для розв'язування складних задач необхідно побудувати математичні моделі, які будуть максимально наближені до реальних умов. Це може бути побудова графічних моделей, використання геометричних уявлень, або пошук наближених числових методів. Важливим є також застосування методів числових обчислень, якщо задача вимагає обробки великої кількості даних або складних функцій, що не піддаються точному аналітичному розв'язку.
3. **Перетворення задачі в зручну форму для аналізу**. Часто нестандартні задачі вимагають змінити їх початкову форму для того, щоб полегшити процес розв’язку. Це може включати зміну змінних, перехід до системи координат, побудову допоміжних функцій або впровадження специфічних математичних трансформацій, які полегшують подальші обчислення чи доведення.
4. **Пошук аналогій та використання попереднього досвіду**. Розв'язання складних математичних задач часто включає в себе використання аналогій із раніше вирішеними задачами. Цей підхід дозволяє не лише зекономити час на пошук рішення, але й ефективно застосувати вже вивчені теореми та методи до нових задач.
5. **Робота з множинами та абстракціями**. Вищу математику часто можна розглядати через абстрактні структури, такі як множини, групи, кільця чи простори. Нестандартні задачі можуть містити елементи, які дозволяють використовувати абстрактні концепції для розв'язання конкретних проблем. Наприклад, задачі на доведення властивостей множин або геометричних фігур можуть бути розв'язані через побудову певних абстракцій.

6. **Інтуїтивне розв'язання через проби і помилки**. У деяких випадках нестандартні задачі вимагають від учнів або дослідників прояву інтуїції та здатності до "перебору" можливих варіантів розв'язку. Це може бути важливо в умовах обмеженого часу чи коли точні методи не можуть бути застосовані через складність або нечіткість умов задачі.

Застосування нестандартних задач вищої математики

Нестандартні задачі мають широке застосування в наукових дослідженнях та практичних галузях. Вони використовуються в фізиці, інженерії, економіці, комп'ютерних науках та інших галузях. У математиці ж вони стимулюють розвиток нових теорій та принципів, часто приводячи до відкриттів, які можна застосувати не лише в академічних дослідженнях, а й у реальних ситуаціях.

Для студентів вищих навчальних закладів ці задачі є потужним інструментом для розвитку як академічних знань, так і навичок, необхідних у практичній діяльності. Вони допомагають краще зрозуміти теорії та принципи вищої математики, навчити студентів вирішувати складні, комплексні завдання, що вимагають від них глибоких знань і критичного підходу до кожного аспекту задачі.

Висновок до розділу 3

Нестандартні задачі в шкільній математичній освіті є важливим інструментом для розвитку математичного мислення учнів. Вони не лише сприяють закріпленню базових математичних знань, а й значно розширюють кругозір учнів, допомагаючи їм розуміти математику як живу науку, що постійно змінюється і розвивається. Вони вимагають творчого підходу до вирішення, розвитку аналітичних здібностей і вміння адаптувати вивчене до нових ситуацій, що є необхідними навичками не тільки в математиці, але й у будь-якій іншій науці або професії.

Нестандартні задачі виходять за межі стандартних навчальних планів, даючи учням можливість не лише повторювати вже відомі методи, але й шукати нові способи розв’язку, що є основою творчого мислення. Це важливо, оскільки сучасний світ вимагає від молодих людей здатності до самостійного мислення, уміння вирішувати нестандартні проблеми, адаптувати знання до різноманітних умов. Розв'язання нестандартних задач допомагає школярам розвивати здатність до узагальнення, виявлення закономірностей, до пошуку оптимальних шляхів вирішення проблем.

Додатково, нестандартні задачі сприяють формуванню в учнів навичок самоосвіти. Задачі, що не мають очевидного шляху розв’язку, спонукають учнів до самостійного пошуку рішення, звернення до додаткових джерел інформації та інструментів, що є важливими для подальшого розвитку вищих академічних навичок. Це дозволяє учням сформувати комплексний підхід до вирішення проблем, на основі якого вони можуть працювати не лише в класичній математиці, але й в інших наукових галузях, таких як фізика, інформатика, економіка.

Крім того, нестандартні задачі сприяють розвитку навичок колективної роботи. Учні, розв'язуючи складні задачі в групах, вчаться обмінюватися ідеями, аргументувати свою точку зору, слухати інших і разом знаходити рішення. Це важливий етап в розвитку комунікативних навичок, які також є важливими для успішної кар'єри в будь-якій професійній сфері.

Вони сприяють формуванню в учнів інтересу до математики як до важливої частини загальної освіти, а також допомагають побачити її застосування в реальному житті. Задачі з реальними умовами дозволяють учням зрозуміти, як математика допомагає в ряді практичних ситуацій, таких як економіка, архітектура, техніка. Це не тільки покращує розуміння математики, але й мотивує учнів до більш глибокого вивчення предмета.

Важливою перевагою нестандартних задач є їх здатність готувати учнів до участі в математичних олімпіадах та конкурсах. Ці завдання, які часто виходять за межі стандартних навчальних програм, тренують учнів у вирішенні складних проблем у стислі терміни, що підвищує їх здатність до ефективного використання часу, зосередження на важливих аспектах задачі та здатності розв'язувати її поетапно.

Таким чином, нестандартні задачі не лише покращують рівень знань з математики, але й значно сприяють розвитку важливих для майбутнього кар'єрного росту компетенцій. Вони допомагають формувати в учнів критичне і логічне мислення, самостійність, здатність до творчого вирішення проблем, вміння працювати в команді та адаптувати отримані знання до нових умов. Вони готують учнів до реальних життєвих ситуацій, де нестандартні рішення є необхідними для досягнення успіху. Отже, включення нестандартних задач у навчальний процес є необхідним і важливим етапом у підготовці учнів до майбутнього, як в академічній сфері, так і в професійному житті.

Висновок про розв'язування нестандартних задач у вищій математиці підкреслює важливість такого підходу в навчальному процесі та розвитку математичних навичок. Нестандартні задачі є не лише інструментом для перевірки знань, але й важливим способом розвитку критичного і творчого мислення. Вони дають можливість студентам зрозуміти, що математика — це не лише набір стандартних правил і процедур, але й жива, постійно розвиваюча наука, яка вимагає від них пошуку нових ідеї та нестандартних підходів.

Нестандартні задачі сприяють розвитку здатності до абстрактного мислення, адже для їх розв'язання необхідно знаходити зв'язки між різними математичними концепціями, використовувати методи з різних галузей математики. Це дозволяє студентам краще засвоювати теоретичні матеріали, а також застосовувати отримані знання до розв'язання реальних завдань у науці та техніці.

Крім того, нестандартні задачі стимулюють учнів до самостійного пошуку рішень, що є важливим аспектом розвитку навичок, необхідних не лише для успіху в математичних дисциплінах, але й у професійній діяльності. Вміння розв'язувати складні і нестандартні проблеми є ключовим для професіоналів у багатьох сферах — від інженерії до економіки, від інформаційних технологій до фізики.

Цей підхід дозволяє формувати вміння логічно міркувати, робити обґрунтовані висновки та приймати правильні рішення у складних ситуаціях. Розв'язання нестандартних задач також підвищує рівень математичної інтуїції, дозволяючи побачити нетривіальні зв'язки між різними елементами задачі.

Таким чином, важливість розв'язування нестандартних задач у вищій математиці полягає не лише в розвитку математичних знань, але й у формуванні здібностей до творчого та критичного мислення, які є необхідними для успішної кар'єри в науці, техніці, бізнесі та інших галузях. Тому включення таких задач в навчальний процес є надзвичайно важливим для підготовки кваліфікованих спеціалістів, здатних вирішувати складні і нестандартні проблеми в умовах сучасного світу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. — К.: Видавництво А.С.К., 2004. — 344 с.; іл.
2. Нестандартні задачі. Активізація творчої діяльності учнів. *Освітній проект «На Урок» для вчителів*. URL: https://naurok.com.ua/nestandartni-zadachi-aktivizaciya-tvorcho-diyalnosti-uchniv-45627.html.
3. Онлайн-курс: Класне керівництво: загальні принципи і робота в умовах дистанційного навчання. *Освітній проект «На Урок» для вчителів*. URL: https://naurok.com.ua/learn/klasne-kerivnictvo-zagalni-principi-i-robota-v-umovah-distanciynogo-navchannya-48.
4. Що ж таке нестандартна задача? :: нестандартні задачі з математики. *Нестандартні задачі з математики*. URL: https://njestandartn-zadach.webnode.com.ua/news/shcho-zh-takje-njestandartna-zadacha-/.
5. Учасники проектів Вікімедіа. Доведення від супротивного – Вікіпедія. *Вікіпедія*. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Доведення_від_супротивного.
6. Векторний метод розв'язування задач. *Освітній проект «На Урок» для вчителів*. URL: https://naurok.com.ua/vektorniy-metod-rozv-yazuvannya-zadach-410953.html
7. Попов О. А. Приклади вирішення нестандартних задач [Електронний ресурс] / Олександр Андрійович Попов. – 2021. – Режим доступу до ресурсу: https://vseosvita.ua/library/prikladi-virisenna-nestardantnih-zadac-415607.html.
8. Розв'язування нестандартних задач - урок.освіта.ua. *Урок.ОСВІТА.UA*. URL: https://urok.osvita.ua/materials/math/5497/
9. Методика розв’язування нестандартних задач та їх роль в інтелектуальному розвитку учнів. *Інституційний репозитарій Рівненського державного гуманітарного університету вітає вас! - Інституційний репозитарій Рівненського державного гуманітарного університету*. URL: http://repository.rshu.edu.ua/id/eprint/13441/1/Стрілець%20Яна.pdf.

10. Нестандартні математичні завдання й задачі як засіб розвитку продуктивного мислення молодших школярів [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://kursova.shop/575-nestandartni-matematychni-zavdannia-i-zadachi-iak-zasib-rozvytku-produktyvnoho-myslennia-molodshykh-shkoliariv.html.

Додатки

Додаток 1

Урок «Свято задачі»

Тема. Розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь.

Мета. Удосконалення вмінь та навичок роз'язування різних типів задач на складання квадратних рівнянь. Нормування вмінь виявляти закономірності, узагальнювати, проводити міркування за аналогією. Розвиток творчого мислення, активності, пізнавальної самостійності. Виховання математичної мови, культури математичних записів на дошці і в зошитах.

Девіз уроку. «Математику не можна вивчити і спостерігати як це роблять інші». А. Нівен

Хід уроку.

І. Організаційна частина.

Хочу всіх вас привітати

Успіху вам побажати, -

Всім, хто вміє задачі розв'язувати,

Любить думати і міркувати,

Правильну відповідь умить відшукати.

ІІ. Вступне слово вчителя.

Могутні крила сучасної науки в нестримному леті підносять нас до вершин пізнання, допомагають осягнути таємниці Всесвіту. Рвуть пута земного тяжіння космічні кораблі, павутиною вкрив земну кулю мобільний зв'язок, працює приручений атом. Те, що вчора було фантастикою, стає сьогодні невід'ємною частиною нашої дійсності. Але з поміж усіх турбот науки найголовнішою залишається одна - людина, найдосконаліше творіння живої природи.

Лише велика попередня праця, напружена робота думки, розуму, інтуїція, творче натхнення ведуть до результатів. Варто згадати слова видатного англійського філософа Френсіса Бекона: «У кожній людині природа проростає або злаками, або бур'яном. Нехай же вона своєчасно поливає перше і знешкоджує друге». Тому слід розвивати свої можливості, в процесі навчання вдосконалювати свої задатки. Якщо до цього додати наполегливість, силу волі, працелюбство, то з кожного учня з часом сформулюється особистість, яка зможе досягнути висот у певному виді діяльності. працюючи активно сьогодні на уроці ви збагатите свої знання з математики.

Завдання нашого уроку – користуючись основними властивостями рівнянь, знайти загальні методи і прийоми розв'язування задач на складання квадратних рівнянь. Сьогодні у нас «Свято задачі» Розпочнемо його.

III. Актуалізація опорних знань.

Гра «Закінчіть речення».

- Рівність , яка містить невідоме число, позначене буквою, називається …
- Значення змінної, що перетворює рівняння в правильну рівність, називається …
- Квадратним рівнянням називається рівняння виду …
- Дискримінант квадратного рівняння обчислюється за формулою …
- Формула коренів квадратного рівняння має вид …
- Якщо ми розв'язуємо задачу на складання рівняння, то:

1) треба позначити за Х …

2) виразити через Х …

3) скласти …

4) пояснити …

IV. Розв'язування задач.

На сьогоднішнє свято до нас завітали казкові герої. У кожного із них для нас подарунок-задачка, яку ми повинні розв'язати. Якщо у нас виникнуть труднощі, то герої допоможуть

№1. (задача від Попелюшки) На середині відстані між нашим будинком і королівським замком, моя карета затрималась на 20 хв. Щоб ліквідувати запізнення на бал, кучер збільшив швидкість на 10 км/год. Потрібно відшукати початкову швидкість карети, якщо відстань між пунктами 200 км.

№2. (задача від Чародія) Я задумав три послідовні цілі числа. Сума квадратів цих чисел дорівнює 194. Відгадайте, будь-ласка, ці числа.

Відпочинок.

Відгадай загадку.

Загадкове, нам знайоме,
В ньому є щось невідоме.
Його треба розв'язати,
Тобто корінь відшукати.
Кожен легко, без вагання
Відповість, що це …

(Рівняння)

Ми ділили, додавали,
Там де треба знак міняли,
Різні спрощення робили,
Корені знайти зуміли
Ось і зроблено завдання –
Розв'язали ми …

(Рівняння)

Їх в підручнику багато,
Кожну треба розв'язати.
Не будьте ви ледачі,
Розв'язуйте …

(Задачі)

Нам вірний та надійний друг,
Без нього дехто – як без рук.
І кнопки, і екран він має,

Нам результат доповідає.

Обчислень він організатор,

Чудовий прилад …

(Калькулятор)

№3. (задача від жителів країни Чудес) Жителі нашого містечка обмінялись своїми SMS-повідомленнями. Відгадайте скільки жителів у містечку, якщо для обміну потрібно було 600 SMS-повідомлень.

№4. (задача від Шпунтика і Гвинтика) Ми двоє, працюючи разом, можемо виконати деяку роботу за 3 год 36 хв, а працюючи окремо, половину цієї самої роботи Шпунтик виконує на 1,5 год швидше, ніж Гвинтик. За який час може виконати цю роботу кожен із нас, працюючи окремо?

V.Підсумок уроку.

Виберіть рівняння, що задовольняє умову задачі.

Знайдіть катети прямокутного трикутника, коли відомо, що один із катетів на 2см менший від другого, а гіпотенуза дорівнює 10см.

1) $x^2 + (x-2)^2 = (10-2)^2$

2) $x^2 + (2-x)^2 = 102$

3) $x^2 + (2x)^2 = 102$

4) $x^2 + (x+2)^2 = 102$

Додаток 2

Евклід

Евклід — старогрецький математик і визнаний основоположник математики, якого прийнято називати «батьком геометрії».

Евклід народився близько 365 р. до н.е., імовірно, в м.Олександрія. Деякі арабські автори вважають, що він походив з багатої сім'ї з Нократа. Згідно з деякими документами, Евклід навчався в древньої школі Платона в Афінах, що було під силу тільки заможним людям. Вже після цього він переїде в м.Олександрія в Єгипті, де і покладе початок розділу математики, нині відомому як «геометрія».

Як розповідає Папп Александрійський (друга половина ІІ ст. н. е.), Евклід заснував в Александрії свою школу, щоб мати можливість навчати математики таких же ентузіастів, як він сам. Також існує думка, що в пізній період свого життя він продовжував допомагати своїм учням в розробці власних теорій і написанні праць.

Евклід є автором найдавніших трактатів з математики, що збереглись до сьогодення. В них підсумовано досягнення давньогрецької математики. Наукова діяльність Евкліда проходила в Александрійській бібліотеці — суспільній інституції, що являла собою бібліотечний, науковий, навчальний, інформаційно-аналітичний і культурологічний комплекс.

Основна праця Евкліда «Начала» складається із серії книжок, у яких міститься систематизований виклад геометрії, а також деяких питань теорії чисел. «Начала» відіграли винятково важливу роль у подальшому розвитку математичної науки. Історичне значення цієї праці полягає в тому, що в ній уперше здійснено спробу логічної побудови геометрії на основі аксіоматики. Зміст «Начал» свідчить про велику повагу їх автора до традиції, так як він зберіг в них деякі поняття, які в його час не вживались.

Прокл (410–485 рр. н.е) розповідає, ніби-то Птолемей I запитав Евкліда, чи немає коротшого шляху для розуміння геометрії, ніж той, який викладений в «Началах», на що Евклід відповів: «В геометрії немає царського шляху!»

Мав також роботи з астрономії, оптики, теорії музики.

Рік і причини смерті Евкліда залишаються для людства таємницею. У літературі зустрічаються туманні натяки на те, що він міг померти близько 300 р. до н.е.

Спадщина Евкліда пережила вченого на цілих 200 століть, і служила джерелом натхнення для таких особистостей, як, наприклад, Авраам Лінкольн. З чуток, Лінкольн завжди забобонно носив при собі «Начала», і в усіх своїх промовах цитував роботи Евкліда. Навіть після смерті вченого, математики різних країн продовжували доводити теореми і видавати праці під його ім’ям. У загальному і цілому, в ті часи, коли знання були закриті для широкого загалу, Евклід логічним і науковим шляхом створив формат математики давнини, який в наші дні відомий світові під назвою «евклідової геометрії».

Архімед

Архімед (287 до н. е. – 212 до н. е.) – давньогрецький математик, фізик та інженер з Сіракуз. Зробив безліч відкриттів в геометрії. Заклав основи механіки, гідростатики, автор ряду важливих винаходів.

Архімед народився близько 287 року до н.е. в Сіракузах, грецькій колонії на острові Сицилія. Батьком Архімеда був математик і астроном Фідій. Батько прищепив синові з дитинства любов до математики, механіки та астрономії. Для навчання Архімед відправився в Олександрію Єгипетську – науковий і культурний центр того часу.

Після повернення в Сіракузи почалася плідна робота. Так, наприклад, Архімед обґрунтував закон гідростатики (закон Архімеда). Інженерні здібності проявилися у Архімеда під час римської облоги, коли він розробив військові метальні машини.

Однак римлянам все ж вдалося взяти Сіракузи. Восени 212 року до н. е. внаслідок зради Сіракузи були взяті римлянами. При цьому Архімед був убитий.

Найбільше талант Архімеда проявився в математиці – вчений виконав безліч досліджень в галузі алгебри, геометрії, арифметики. Він запропонував більш універсальний метод для обчислення площ різних фігур. Його ідеї пізніше були покладені в основу теорії інтегрального числення. Також Архімед прекрасно проявив себе в механіці (удосконалив механізм важеля, написав кілька книг), в астрономії (створив планетарій).

Піфагор

Піфагор — давньогрецький філософ, релігійний та політичний діяч, засновник піфагореїзму, який став легендою і джерелом дискусій уже в стародавні часи. У 306 р. до н. е. йому, як найрозумнішому з греків, поставили пам’ятник у Римському Форумі. З тих часів мало що прояснилося в біографії Піфагора та в історичній ролі організованого ним товариства, клубу чи ордену піфагорійців. І досі висуваються нові гіпотези, тлумачення діяльності стародавнього мудреця та його послідовників.

Історію життя Піфагора важко відокремити від легенд, які представляють його як досконалого і величного мудреця посвяченого в усі таїнства греків і варварів. Ще Геродот називав його «найбільшим еллінським мудрецем». Основними джерелами про життя і вчення Піфагора є твори філософа-неоплатоника Ямвлиха (242—306 рр.) «Про Піфагорове життя»; Порфирія (234—305 рр.) «Життя Піфагора»; Діоген Лаертський (180—240 рр.) Кн. 8, «Піфагор». Ці автори спиралися на твори більш ранніх авторів, з яких слід відзначити учня Арістотеля Аристоксена (370—300 рр. до н. е.) родом з Тарента, де сильні були позиції піфагорійців. Таким чином, найдавніші відомі джерела писали про Піфагора 200 років після його смерті. Сам Піфагор не залишив творів, і всі відомості про нього і його вчення ґрунтуються на працях його послідовників, не завжди неупереджених.

Народився Піфагор на острові Самос. За переказами його батько Мнесарх був фінікійським купцем з Тіра. Під час голоду на грецькому острові Самос, він надав його мешканцям хліб, отримав за це самоське громадянство і оселився на острові. Напередодні чергової подорожі на Схід Мнесарх звернувся до Піфії і отримав відповідь, що подорож буде успішною, а його дружина народить дитину, яка буде виділятися з-поміж усіх, хто жив коли-небудь, красою й мудрістю, і принесе людському роду дуже велику користь на всі часи. Після пророцтва Мнесарх дав своїй дружині нове ім'я — Піфаїда. Вона й справді під час подорожі народила сина, якому Мнесарх дав ім'я Піфагор. За іншою версією Мнесарх належав до знатного, але збіднілого роду, і був каменерізом (щоправда, в такому випадку незрозуміло, навіщо йому було вирушати у подорож).

Батько дав Піфагору добру освіту, навчаючи його в найзнаменитіших учителів того часу. Багато хто вважав, що він — син бога Аполлона. За словами Ямвліха, «набираючи сили й від такої репутації, і від виховання з дитинства, і від богоподібної зовнішності, він ще більше прагнув бути гідним цих чеснот». Після смерті батька Піфагор вирушив до Мілета, де його вчителями були Ферекід Сіросський, Анаксімандр і Фалес. Саме за порадою Фалеса Піфагор, у віці 20 років, поїхав до Єгипту, де жив близько 22 років і витримав немало випробувань, перш ніж жерці Мемфіса і Діосполіса відкрили йому «дивовижне чергування чисел, хитромудрі правила геометрії, науку про зорі, медицину». До вавилонських магів і халдеїв він потрапив проти своєї волі — як полонений перського царя Камбіса I, який завоював на той час Єгипет. Там мандрівник прожив 12 років і вивчив у халдеїв релігійні таїнства та математику.

Переказують, що він побував і в Індії, де спілкувався з брахманами, від яких засвоїв не тільки філософію, зокрема вчення про переселення душ, а й секрети вправ для тіла.

Повернувшись у Грецію на п'ятдесятому році життя, Піфагор оселився на півдні італійського півострова в полісі Кротоні. Його появі передували чутки про зроблені ним чудеса, а його виступи перед кротонцями були першими кроками на шляху досягнення моральної і політичної влади.

Незабаром навколо Піфагора згуртувалися однодумці, організувавши аристократичний за духом, таємний релігійно-політичний союз — гетерію — прообраз майбутньої філософської школи. Незабаром і в інших полісах південної Італії та Греції виникли піфагорійські гетерії, в яких поряд з науковими проблемами — математичними, філософськими, етичними — розглядалися релігійні й політичні.

Доля Піфагора, як і його школи в Кротоні, трагічна. Один із впливових людей Кротона, Кілон, претендував на дружбу Піфагора. Коли його не прийняли до братства через важкий і владний характер, він став його ворогом і організував змову проти піфагорійців. Прихильники Кілона підпалили дім, де збирались піфагорійці. Чи був там Піфагор, достеменно невідомо, але, за переказами, врятуватися вдалось лише двом: Архіппу та Лісиду. За іншою версією, Піфагор, втікши від заколотників, загинув у Метапонті, у святилищі муз, де залишався без їжі 40 днів.

АНОТАЦІЯ

Корецька М. П. Нестандартні задачі у математиці: ідеї та методи їх розв'язування. Магістерська робота. Волинський національний університет імені Лесі Українки. Луцьк, 2024. 56 с., список використаних джерел із 10 найменувань, 3 розділи, 8 підрозділів.

Магістерська робота присвячена розв'язуванню нестандартних математичних задач та їх використанню в освітньому процесі.

У першому розділі розглянуто теоретичні основи нестандартних задач у математиці, в другому – методи розв'язування нестандартних задач, у третьому – практичне застосування.

Результати дослідження оформлено у вигляді тез доповідей.

Ключові слова: задача, розв'язок, методи, шкільна математика, вища математика.

ANNOTATION

Koretska M. P. Non-standard problems in mathematics: ideas and methods of solving. Master's thesis. Lesya Ukrainka Volyn National University. Lutsk, 2024. 56 p., list of used sources of 10 titles, 3 sections, 8 subsections.

The master's thesis is devoted to the process of solving non-standard mathematical problems and their use in the educational environment.

The first section of the master's thesis is devoted to the theoretical foundations of non-standard problems in mathematics, the second – to methods of solving non-standard problems, the third – to practical application.

The results of the study are presented in the form of abstracts of reports.

Keywords: problem, solution, methods, school mathematics, higher mathematics.