Міністерство освіти і науки України

Волинський національний університет імені Лесі Українки

Кафедра теорії функцій та методики навчання математики

На правах рукопису

КРИСАК КАРИНА ЮРІЇВНА

Прикладні задачі на екстремум

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)
Освітньо-професійна програма Середня освіта. Математика
Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

ПІДДУБНИЙ ОЛЕКСІЙ МИХАЙЛОВИЧ,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ
Протокол № _________
засідання кафедри теорії функцій
та методики навчання математики
від _________________20___ року
Завідувач кафедри
Гембарська С.Б. ______________

ЛУЦЬК - 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Прикладні задачі на екстремум займають важливе місце в шкільній програмі з математики. Це пояснюється насамперед значним практичним значенням даної теми. Щоб забезпечити всебічну освіту, сучасна школа має зосереджуватись не лише на підвищенні науково-теоретичних стандартів викладання, але й на розвитку вміння учнів застосовувати отримані знання, підвищуючи їхні розумові здібності, виховуючи в них інтерес до предмета та сприяння їх самостійності в отриманні знань. Такі завдання, відомі як задачі на екстремуми або задачі оптимізації, зустрічаються у багатьох сферах людської діяльності і відіграють важливу роль у нашому житті.

Задачі на пошук екстремального значення функції трапляються на олімпіадах різного рівня та престижних математичних змаганнях, таких як математичні бої або турніри. Загалом, вивчення задач на екстремум та їх застосування в алгебрі та початку аналізу значно сприяє розвитку здібностей учнів до логічного мислення. У таких задачах існує кілька можливих шляхів досягнення результату, і необхідно знайти найкращий спосіб досягнення цілі. Проте в одній і тій же ситуації різні розв'язки можуть бути оптимальними залежно від обраного або заданого критерію.

Важливість вивчення мінімального та максимального значення в математичній освіті є значною, оскільки вона дозволяє досліджувати як базові, так і складні рішення елементарних математичних задач у середній школі. Тому рішення зосередитися на темі прикладних задач на екстремум в шкільному курсі математики зумовлене бажанням познайомити учнів із широкою застосовністю та універсальністю прикладних задач.

Об'єктом дослідження є вивчення теми «Прикладні задачі на екстремум» в середніх загальноосвітніх навчальних закладах.

Предметом дослідження є методи розв'язування задач на екстремум.

Метою роботи є дослідження методики вивчення задач на екстремум в шкільному курсі.

Для досягнення мети планується виконати такі **завдання**:

- опрацювати науково-методичну літературу, що стосується даної теми;
- провести аналіз вивчення задач на екстремум та їх застосування в шкільному курсі алгебри та початків аналізу;
- розробити план-конспект уроку з вивчення екстремумів функції;
- зробити висновки.

Практичне значення дослідження. Матеріали даного дослідження можуть бути корисними для вчителів математики для ефективнішого навчання учнів щодо розв'язування прикладних задач на екстремум.

Апробація результатів дослідження. Основні положення кваліфікаційної роботи оприлюднено у тезах «Прикладні задачі на екстремум» на інтернет-конференції «Професійна компетентність педагога: теорія, методика, практика » та опубліковано їх [22] .

Структура роботи складається з вступу, двох розділів з підрозділами, висновків, переліку використаних джерел та додатку.

РОЗДІЛ 1
ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ НА ЕКСТРЕМУМ

1.1. Історія прикладних стародавніх задач на екстремум та їх значення

Протягом усього історичного розвитку математики задачі на екстремум та методи їх розв'язування незмінно викликали інтерес як професіоналів, так і ентузіастів. Можливо, це захоплення можна пояснити вродженим прагненням людства до досконалості, а також властивою елегантністю та привабливістю екстремальних викликів. Ідею про те, що природа діє на основі екстремальних принципів, вперше запропонував давньогрецький вчений Герон. Спочатку до кожної екстремальної проблеми підходили особливо та розв'язували її різними методами. Проте з часом у різних дисциплінах, таких як геометрія, алгебра та фізика, з'явилося безліч переконливих і важливих проблем, які оберталися навколо пошуку максимумів і мінімумів. Відомі діячі минулих епох, включаючи Евкліда, Архімеда та Ньютона, зробили внесок у дослідження та вирішення цих конкретних проблем. Процес розв'язування окремих проблем зрештою стимулював розвиток теорії та розробку методів, які можна було б універсально застосовувати для розв'язання широкого кола різноманітних проблем [2)24].

Перші задачі на максимум і мінімум з'явилися в дуже далекі часи: класична ізопериметрична задача обговорювалась ще в V ст. до н. е. Довгий час кожна задача на екстремум розв'язувалась індивідуально. В XVII ст. виникла необхідність створення загальних методів їх розв'язання. Такі методи були розроблені П. Ферма, І. Ньютоном, Г. Лейбніцем та іншими – спочатку для однієї, а пізніше для нескінченної кількості змінних.

Історія дослідження екстремальних задач налічує приблизно три тисячоліття. У період з 14 по 18 століття численні відомі математики, зокрема Снелліус, Ферма, Ньютон, Лейбніц, Ейлер, Лагранж, Бернуллі, Лежандр, Якобі, Вейєрштрасс, Гамільтон і Гільберт, присвятили свої зусилля дослідженню цих проблем. Саме в 17 столітті П'єр де Ферма сформулював фундаментальний принцип для аналізу екстремальних задач.

Протягом усієї еволюції математики, дослідження екстремумів мало важливе значення. Різноманітні інтригуючі екстремальні проблеми були сформульовані та вирішені в сферах геометрії, алгебри та фізики в різні моменти часу. Нижче наведено збірку деяких із цих проблем.

Задача Дідони [10]. Розповідь з «Енеїди» Вергілія свідчить про те, що в 9 столітті до нашої ери фінікійська принцеса Дідона втекла від переслідувань свого брата та подорожувала на захід уздовж узбережжя Середземного моря в пошуках притулку. Досягнувши Туніської затоки, Дідона почала переговори з місцевим лідером Ярбом щодо купівлі землі, яку вона бажала. Вимагаючи лише стільки землі, скільки могла охопити волова шкіра, Дідона успішно переконала Ярба погодитися на її умови. Потім вона розрізала шкіру бика на смуги, які зв’язала разом, щоб оточити велику територію, на якій вона заснувала фортецю та місто Карфаген. Цей епізод спонукає до роздумів над інтригуючим питанням про обмеження землі, яку можна обгородити однією воловою шкірою. У сучасному математичному представленні це питання зображується наступним чином:

серед замкнених плоских кривих, заданої довжини, знайти таку, яка охоплює найбільшу площу.

Цю задачу зазвичай називають *задачею Дідони* або *традиційною ізопериметричною задачею*, яка стосується фігур з рівними периметрами. Рішення цієї проблеми передбачає кругову криву. У описі Вергілієм дій Дідони використовується дієслово «*circumdare*» (оточити), що відображає корінь «*circus*» (коло). Отже, можна зробити висновок, що Дідона успішно розв’язала класичну ізопериметричну задачу.

Багато вчених стверджують, що це найперший випадок екстремальної задачі, яка розглядається в наукових працях. На додаток до вивчення ізопериметричних характеристик кола, стародавні математики також спостерігали ізопіфанічні якості сфери, які стосуються її здатності охоплювати максимальний об'єм порівняно з іншими формами з еквівалентною площею поверхні.

Задача Евкліда [10]. У відомій праці Евкліда «Початки» з 4 століття до нашої ери існує окрема проблема, зосереджена на визначенні максимуму, яке можна представити в сучасних математичних термінах як таке:

у даний трикутник ABC вписати паралелограм ADEF ($EF||AB, DE||CA$) *найбільшої площі.*

Було встановлено, що фігура, про яку йде мова, є паралелограмом з вершинами *D, E* і *F*, які служать серединами відповідних сторін трикутника (рис. 1.1).

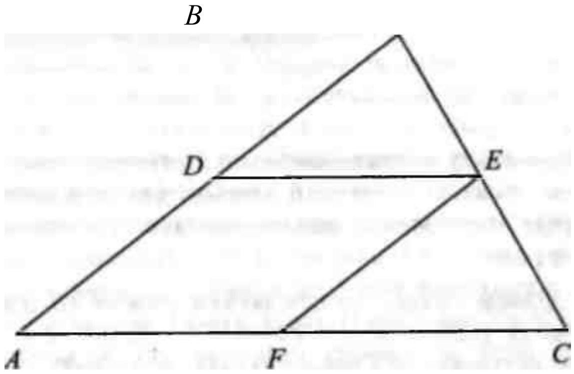


Рис. 1.1. Задача Евкліда

Задача Герона [10]. *Дано дві точки A і B з одного боку від прямої l. Потрібно знайти на прямій l точку D таку, щоб сума відстаней від A до D і від D до B була найменшою.*

Герон Олександрійський вважається автором цієї математичної задачі, яка з'являється в його трактаті «Про дзеркала», що датується І століттям до нашої ери. Рішення проблеми Герона передбачає визначення точки *D* як точки перетину прямої AB_1 з прямою l , де B_1 -точка, симетрична до точки *B* відносно прямої l (рис. 1.2).

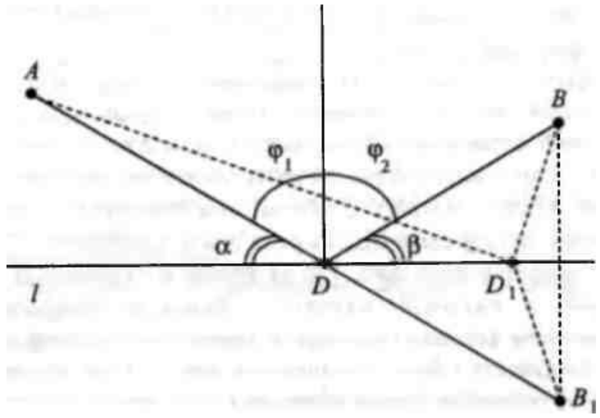


Рис. 1.2. Задача Герона

Дійсно, для будь-якої точки $D_1 \neq D$ має місце співвідношення:

$$|AD_1|+|D_1B|=|AD_1|+|D_1B_1|>|AB_1|=|AD|+|DB|$$

Слід зазначити, що точка D має характеристику, за якою кут α рівний куту β, а кут φ_1 рівний куту φ_2. Зокрема, кут падіння променя AD (α) дорівнює куту відбиття (β). Тобто кут падіння променя AD α дорівнює куту відбивання β.

Задача Штейнера [10]. *У площині трикутника знайти точку, сума відстаней від якої до вершин трикутника мінімальна.*

Це завдання розглядається в працях італійського математика Вінченцо Вівіані в його праці «Про максимальні та мінімальні значення» (1659), яка вважається першою роботою, присвяченою виключно проблемам оптимізації. Інтерес до цієї проблеми виявляли численні відомі математики 17 ст, такі як Б. Кавальєрі, Н. Торрічеллі, П. Ферма. У 19 столітті німецький геометр Якоб Штайнер досліджував цю та пов'язані з нею проблеми, що призвело до того, що їх зазвичай називають проблемами Штайнера.

Розв'язанням вище згаданого завдання є *точка Торрічеллі*, яка походить від імені одного з осіб, якому приписують розробку рішення. Ця точка характеризується здатністю забезпечувати видимість усіх сторін трикутника під кутом 120 градусів, як показано на рисунку 1.3. У випадках, коли трикутник містить кут, що має мінімум 120°, точка Торрічеллі збігається з вершиною зазначеного кута.

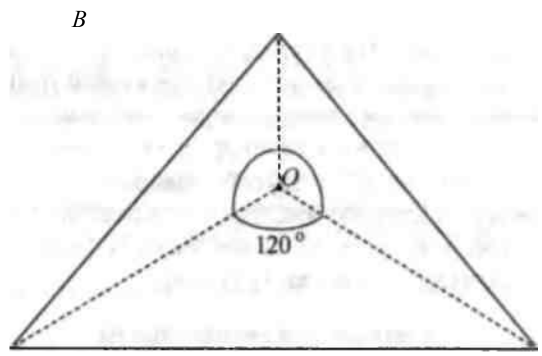


Рис. 1.3. Задача Штейнера

Узагальненням проблеми Штейнера є така задача: *для n точок* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *заданих на площині, знайти точку A таку, щоб величина* $|A_1A|+|A_2A|+\ldots+|A_nA|$ *була мінімальною.* Це завдання має важливе практичне значення при побудові ефективних мереж ліній електропередачі та телекомунікацій. Коли задані точки утворюють вершини опуклого чотирикутника, розв'язок цієї задачі простий – шукана точка буде точкою перетину діагоналей. Однак, коли $n=5$, явне вирішення проблеми неможливо. У таких випадках для наближеного розв'язку узагальненої задачі Штейнера можна використовувати різні чисельні методи.

Задачі Кеплера [10]. Йоганн Кеплер, видатний вчений 17 століття, представив новаторські концепції у своїй публікації 1615 року «Нова стереометрія винних бочок», включаючи перші вичерпні вказівки щодо вирішення екстремальних математичних проблем. Методи Кеплера, які пізніше були вдосконалені та розширені такими видатними діячами, як П'єр де Ферма, Ісаак Ньютон і Готфрід Вільгельм Лейбніц, запропонували вирішення різноманітних складних проблем, таких як *визначення максимального об'єму циліндра, який може поміститися в певній сфері*. Подібна проблема у планіметричному варіанті полягає в тому, щоб знайти *найбільшу можливу площу прямокутника, який можна вписати в дане коло*.

Рішення початкової задачі передбачає циліндричну форму з відношенням діаметра основи до висоти, еквівалентним квадратному кореню з двох, тоді як наступна задача стосується квадрату.

Згодом цей принцип був розширений відомими математиками І. Ньютоном і Г. Лейбніцем, що поклало початок математичного аналізу.

У 18 столітті внесок Л. Ейлера та Дж. Лагранжа привів до розробки методів вирішення багатовимірних екстремальних задач, як без обмежень, так і з обмеженнями. Серед цих методів особливо важливим став метод множників Лагранжа.

Цей розділ математики з часом став відомий як математичне програмування.

Задача про максимальну швидкодію (задача про брахістохрону) [10].

Однією з перших задач варіаційного числення була задача Івана Бернуллі про брахістохрону (1696 р.). У вертикальній площині задано дві точки $A(a;y_a)$ і $B(b;y_b)$ (рис.1.4). Необхідно визначити криву, яка може ефективно з'єднати дві дані точки, дозволяючи матеріальній точці рухатися вздовж неї під дією сили тяжіння з точки A без будь-якої початкової швидкості, щоб досягти точки B за мінімально можливий час.

Аналітичне формулювання цієї задачі: серед неперервно диференційовних функцій $y(x)$ знайти таку, яка досягає мінімуму функціоналу

$$I[y] = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{y}}dx$$

при крайових умовах $y(a) = y_a$; $y(b) = y_b$.

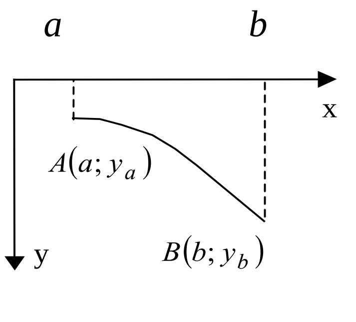


Рис. 1.4. Задача Бернуллі

Задача про геодезичні лінії. Нехай на поверхні $\varphi(x,y,z) = 0$ задано дві точки $A(x_1;y_1;z_1)$ і $B(x_2;y_2;z_2)$. Виберіть лінію на вказаній поверхні, яка з'єднує точки А і В з найкоротшою довжиною дуги серед усіх можливих ліній, що відповідають цьому критерію.

Аналітична постановка задачі передбачає ідентифікацію неперервно диференційовних за параметром t функцій $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ і визначення того, які з цих функцій задовольняють рівнянню $\varphi(x(t), y(t), z(t)) = 0$ при мінімізації заданого функціоналу $I[x,y,z] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$

при крайових умовах

$$x(t_1) = x_1;\ y(t_1) = y_1;\ z(t_1) = z_1;$$

$$x(t_2) = x_2;\ y(t_2) = y_2;\ z(t_2) = z_2.$$

Ізопериметрична задача (задача Дідо) [10]. Розглянемо дві точки $A(a;0)$ і $B(b;0)$ на осі координат. За заданої довжини l виберимо пряму на декартовій площині, яка сполучає точки A і B і обмежує найбільшу площу в поєднанні з відрізком AB (рис.1.5).

Аналітичне формулювання цієї задачі: серед неперервно диференційовних функцій $y(x)$ вибрати таку, яка задовольняє рівняння зв'язку $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx = 1$ і досягає максимуму функціонала $I[y] = \int_a^b y(x)\, dx$

при крайових умовах $y(a) = 0$; $y(b) = 0$.

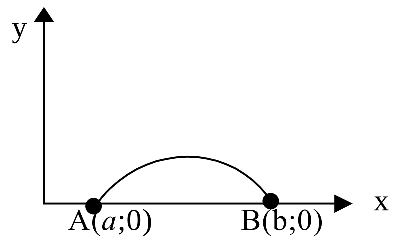


Рис. 1.5. Ізопериметрична задача

1.2. Алгоритм розв'язування задач на екстремум

Застосування похідної в математичному моделюванні відкриває широкі можливості для вирішення прикладних задач. Від пошуку найбільшого та найменшого значення функції до складних викладів, використання похідної у задачах різних рівнів складності стає ключовим інструментом.

Похідна функції $f(x)$ у точці x_0 визначається як границя відношення зміни функції в точці x_0 до зміни аргументу, коли зміна аргументу наближається до нуля і границя існує.

Позначення, яке використовується для представлення похідної функції $f(x)$ у певній точці x_0, є $f'(x_0)$. Це визначення виражається у вигляді рівняння:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

або

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

В математичному значенні похідна функції зазвичай розуміється як числове значення при оцінці в певній точці. Однак, коли термін «похідна» використовується без конкретного посилання на точку, це, як правило, стосується похідної як математичної функції [1].

Процес знаходження похідної функції відомий як диференціювання.

Вивчення функцій для максимумів, мінімумів, найбільших і найменших значень передбачає ознайомлення учнів з кількома новими поняттями. Ці поняття включають точку максимуму функції, точку мінімуму функції, точку екстремуму, максимум функції, мінімум функції та екстремуми функції. Учні часто плутають поняття «точка максимуму функції» і «максимум функції», а також «точки екстремуму функції» і «екстремум функції». Важливо підкреслити, що терміни «максимум» і «мінімум» відносяться до значення аргументу, тоді як «максимум» і «мінімум» відносяться до значення функції. Крім того, слід зазначити, що точки максимуму та мінімуму (екстремуми) описують поведінку функції в дуже малому околі навколо певної точки, а не всю область чи сегмент області. Насправді можливо, що визначений максимум функції в одній точці буде меншим за мінімум в іншій точці в межах цієї околиці. Обговорюючи поняття найбільшого та найменшого значень функції, слід повторити, що ці поняття конкретно описують поведінку функції в межах певного сегмента $[a;\ b]$. Крім того, вводячи поняття «критичні точки функції», особливу увагу слід приділяти тим критичним точкам, де похідна не існує. Для ефективної ілюстрації цих моментів можна використовувати графічні зображення.

Сформулюємо алгоритм пошуку максимальних функцій. Щоб перевірити функцію на екстремум, потрібно:

– визначити критичні точки функції, встановлюють похідну $f'(x)$ рівною нулю, вирішують для x і включіть будь-які точки, де похідна не існує, як розв'язок рівняння;

– розташувати критичні точки на координатній прямій у порядку зростання їх при $f\,'(\mathrm{x}) = 0$;

– аналіз похідної $f'(x)$ слід проводити з обох сторін від кожної критичної точки, щоб визначити природу функції $y = f(x)$ у цій точці. Якщо знак похідної змінюється з позитивного на негативний, коли x проходить через критичну точку, функція має максимум у цій точці. І навпаки, якщо знак змінюється з негативного на позитивний, функція має мінімум. Якщо знак похідної не змінюється в критичній точці, функція не має ні максимуму, ні мінімуму в цій точці;

– визначити максимальне та мінімальне значення функції, оцінюючи функцію $y = f(x)$ у визначених критичних точках [4].

Враховуючи те, що питання щодо визначення інтервалів зростання, спадання та екстремуму для функцій взаємопов'язані, стає доцільним розробити алгоритм, який може вирішувати ці проблеми одночасно. Цей алгоритм виявляється корисним при комплексному вивченні функцій і побудові відповідних їм графіків: щоб визначити інтервали зростання, спадання та екстремуми функції, необхідно виконати декілька кроків:

– необхідно знайти область визначення функції $D(f)$;

– знайти похідну функції;

– знайти критичні точки на області визначення функції, упорядкувати їх у порядку зростання та записати в таблицю разом із інтервалами, де визначена функція;

– знак похідної на кожному з отриманих інтервалів можна визначити за допомогою контрольних точок;

– проаналізувати знак похідної, та з'ясувати, зростає чи спадає функція в кожному інтервалі;

– крім того, можна виявити та обчислити наявність екстремумів у кожній критичній точці.

Під час розв'язування задач на визначення максимального та мінімального значень заданої функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ також рекомендується акцентувати увагу на алгоритмі, який складається з трьох окремих кроків:

– знайти всі критичні точки функції на відрізку $[a;b]$;

– визначити значення функції в кожній критичній точці, а також на кінцях інтервалу a і b;

– з одержаних чисел вибрати найбільше (max) і найменше (min).

Приклад 1 [1]. *Дослідити функцію і побудувати її графік*

$$y = \frac{3x}{1 + x^2}$$

Розв'язання:

Область визначення D(y) = R. При підстановці x=0 знайдемо значення функції. Такий же результат отримуємо, якщо функцію прирівнюємо до нуля.

$$y(0) = \frac{3 * 0}{1 + 0^2} = 0$$

Точка єдина точка перетину з осями координат.Перевірка на парність

$$y(-x) = \frac{-3x}{1+(-x)^2} = -\frac{3x}{1+x^2} = -y(x);$$

Отже, функція **непарна**.

$$y' = \frac{3(1 + x^2) - 2x * 3x}{(1 + x^2)^2} = \frac{3 + 3x^2 - 6x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{3 - 3x^2}{(1 + x^2)^2}$$

$3 - 3x^2 = 0 => 1 - x^2 = 0 => x = \pm 1$ - **критичні точки**.

$$y(-1) = \frac{3 * (-1)}{1 + (-1)^2} = -\frac{3}{2}$$

$$y(1) = \frac{3}{2}$$

$$y' > 0; \mathrm{x} \in (-1; 1)$$

$$y' < 0; \mathrm{x} \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$$

Функція зростає на [-1;1] та спадає на $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$.

Точка мінімуму $x_{min} = -1$.

Точка максимуму $x_{min} = 1$.

Таблиця 1.1

Області зростання та спадання функції

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; \infty)$
y'	–	0	+	0	–
y	↓	3/2	↑	3/2	↓
		min		max	

Графік функції:

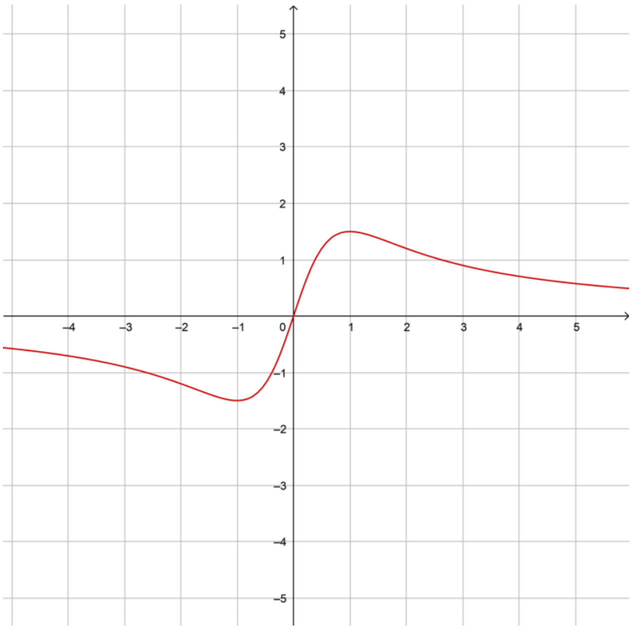


Рис.1.6. Графік функції

Вивчення теми «Екстремуми функції» має важливе значення для старшокласників. Цей предмет актуальний у різних галузях, таких як фізика, економіка, статистика та інші науки. Вирішуючи реальні задачі, не обмежуючись математикою, учні можуть підвищити свою адаптивність і організованість у навчанні. Подальше вивчення цієї теми може призвести до розробки прикладних математичних, фізичних та економічних проблем, які стосуються різних аспектів нашого повсякденного життя. Такі дослідження принесуть велику користь учням старших класів, покращивши їхні теоретичні та практичні знання, а також уміння та навички.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

2.1. Пошук оптимального розв'язку в алгебраїчних задачах

Задачі на пошук оптимального розв’язку, тобто знаходження такого значення змінної (декількох змінних), при яких цільова функція досягає максимуму чи мінімуму на певному відрізку, використовуються в багатьох розділах математики та суміжних галузей. У недалекому майбутньому особи, які здобули освіту в Україні, займуть керівні посади в промислових, фінансових чи наукових організаціях, що потребуватиме виконання управлінських обов’язків майбутніми фахівцями. Це завдання є складним, оскільки ефективне управління вимагає розгляду взаємодії між різними елементами як всередині організації, так і за її межами. Моделювання служить цінним інструментом для аналізу складних систем управління, причому математичне моделювання пропонує можливість оцінити різні стратегії, спрямовані на досягнення конкретних цілей.

Моделювання є фундаментальним підходом у науковому дослідженні, де основна увага приділяється дослідженню конкретного замінника фактичного об’єкта дослідження. Цей замінник, відомий як модель, навмисно створений, щоб мати ідентичні риси та якості, що й оригінальний об’єкт. Перш ніж застосовувати математичні методи для вирішення практичних завдань, необхідно побудувати математичне представлення проблеми, що розглядається. Таким чином, дослідники зазвичай визначають модель як матеріальну або концептуальну сутність, яка служить заміною для предмета дослідження.

Згідно з науковими дослідженнями, вирішення практичних або реальних проблем за допомогою математичних методів зазвичай передбачає три етапний процес: формулювання математичного представлення проблеми, вирішення математичних рівнянь та оцінка результатів [33].

Академічне значення використання математичних моделей полягає в його здатності надати цінну інформацію про об’єкт, що вивчається, його процеси та потенційну поведінку в майбутньому. Використовуючи математичні моделі, дослідники можуть ефективно досліджувати явища реального світу з мінімальними ресурсами. Крім того, ці моделі дозволяють дослідникам зосередитися на найбільш важливих властивостях, пов’язаних із конкретними досліджуваними аспектами.

Практика побудови, аналізу та використання моделей відома як моделювання. Математичні моделі служать для впорядкування дослідницьких процесів і сприяють отриманню бажаних результатів ефективніше та швидше, ніж прямі спостереження предмета. Отже, розуміння різноманітних явищ вимагає використання математичних моделей, що робить розробку таких моделей головним завданням сучасної математики.

Дослідження різноманітних кривих, утворених перерізом конуса площин, таких як кола, еліпси, параболи та гіперболи, почалося ще стародавніми математиками. Результати вивчення цих кривих виявилися вирішальними в галузях фізики, техніки, астрономії та військової стратегії. Лише коли рівняння для цих кривих були розроблені за допомогою методів Декарта і Ферма, було досягнуто значного прогресу в їх аналізі [24].

У шкільних підручниках є обмежена кількість завдань моделювання, тому доцільно розширити їх наявність та вивчення методів розв’язання.

Оптимізаційні задачі можна розв’язувати різними методами. *Найпростішим є графічний, або графоаналітичний метод, де розв’язок можна знайти за допомогою графіку функції.*

Наведемо приклад, де для розв’язання системи побудуємо графік цільової функції в програмі GeoGebra та визначимо область, в якій вона існує .

$$F = -4x_1 - 6x_2 - 3 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -5 \\ 2x_1 - 3x_2 \geq -10 \\ 7x_1 - 9x_2 \leq 72 \\ 2x_1 - 8x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Перепишемо цільову функцію у вигляді :

$$4x_1 - 6x_2 - 3 \leq 0$$

$$x_2 \geq -2/3x_1 - 1/2$$

Тоді її графік матиме вигляд (Рис. 2.1.):

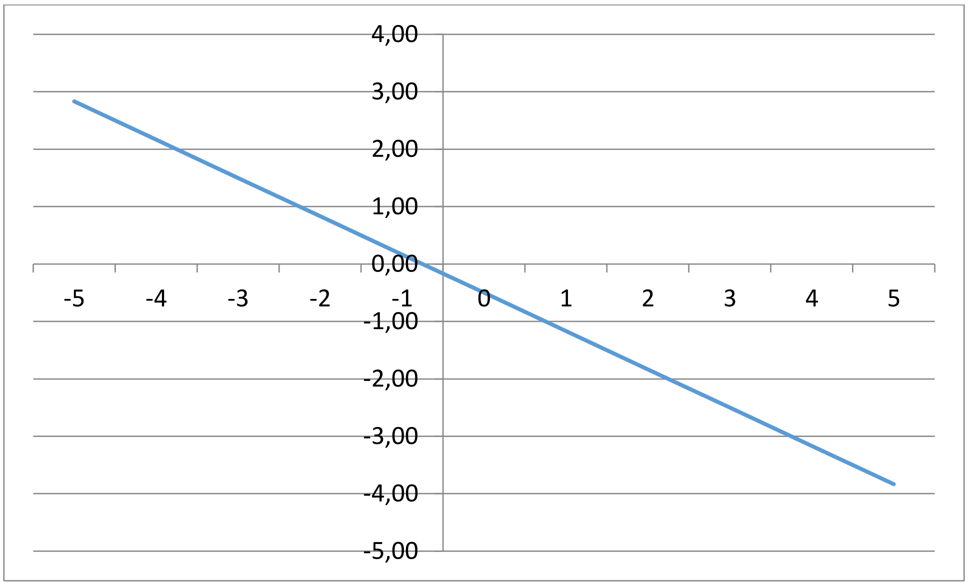


Рис. 2.1 Графік цільової функції

Оскільки цільова функція прямує до мінімуму, то при наявності від'ємних коефіцієнтів при x_iзі збільшенням значень x зменшується значення цільової функції.

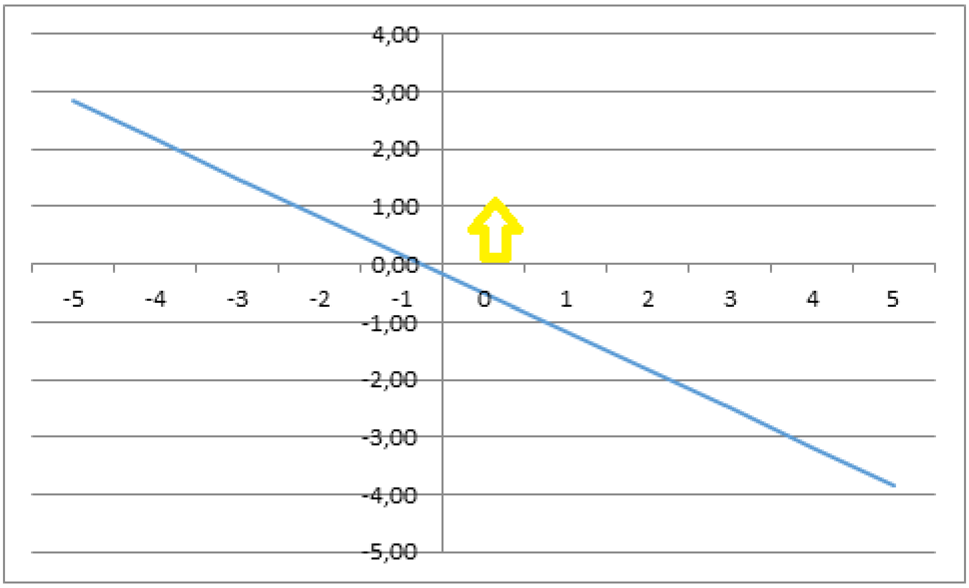


Рис. 2.2 Напрямок зростання цільової функції з врахуванням обмеження $x_1, x_2 \geq 0$.

Для визначення області, в якій ми досліджуємо цільову функцію, всі обмеження перепишемо у вигляді $F_i(x_1)$.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -5 \\ 2x_1 - 3x_2 \geq -10 \\ 7x_1 - 9x_2 \leq 72 \\ 2x_1 - 8x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 \leq 3/2x_1 + 5/2 \\ x_2 \leq 2/3x_1 + 10/3 \\ x_2 \geq 7/9x_1 - 8 \\ x_2 \geq 1/4x_1 - 2 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Зобразимо на графіку отримані обмеження (Рис. 2.3).

Зафарбуємо область, де перетинаються всі припустимі значення x_1та x_2 (Рис. 2.4).

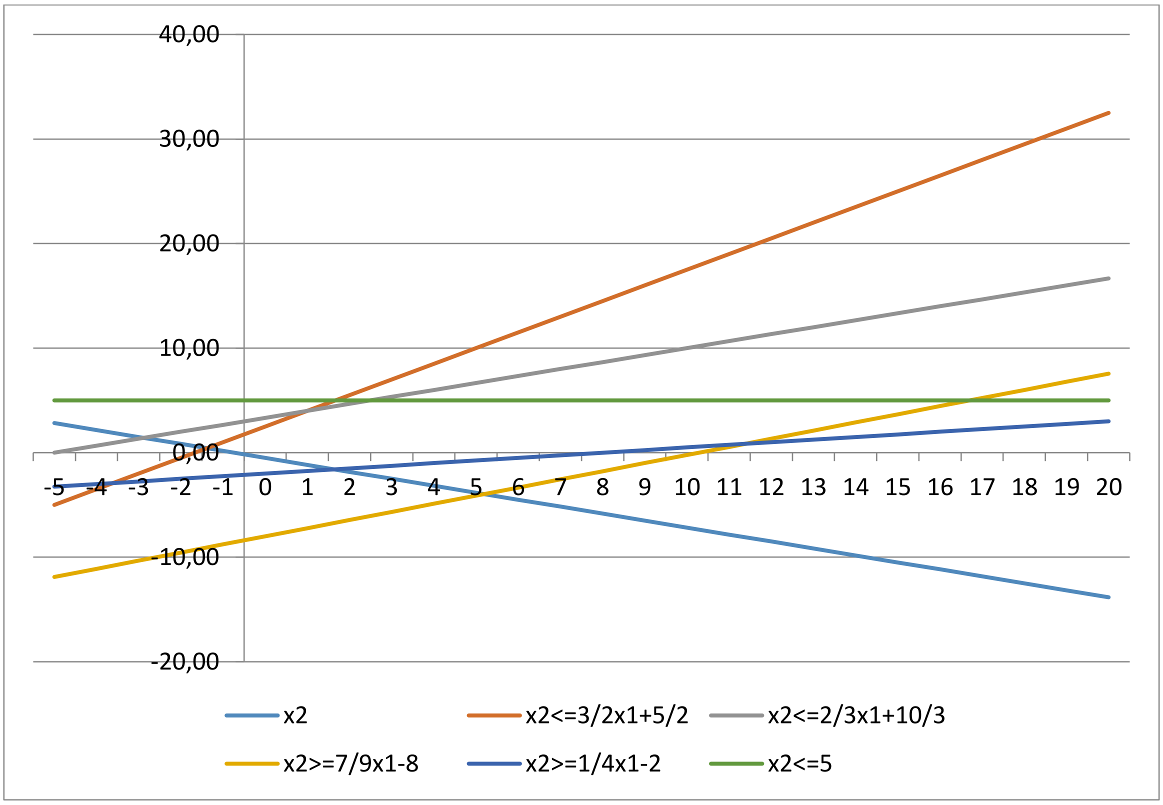


Рис. 2.3. Графіки обмежень цільової функції

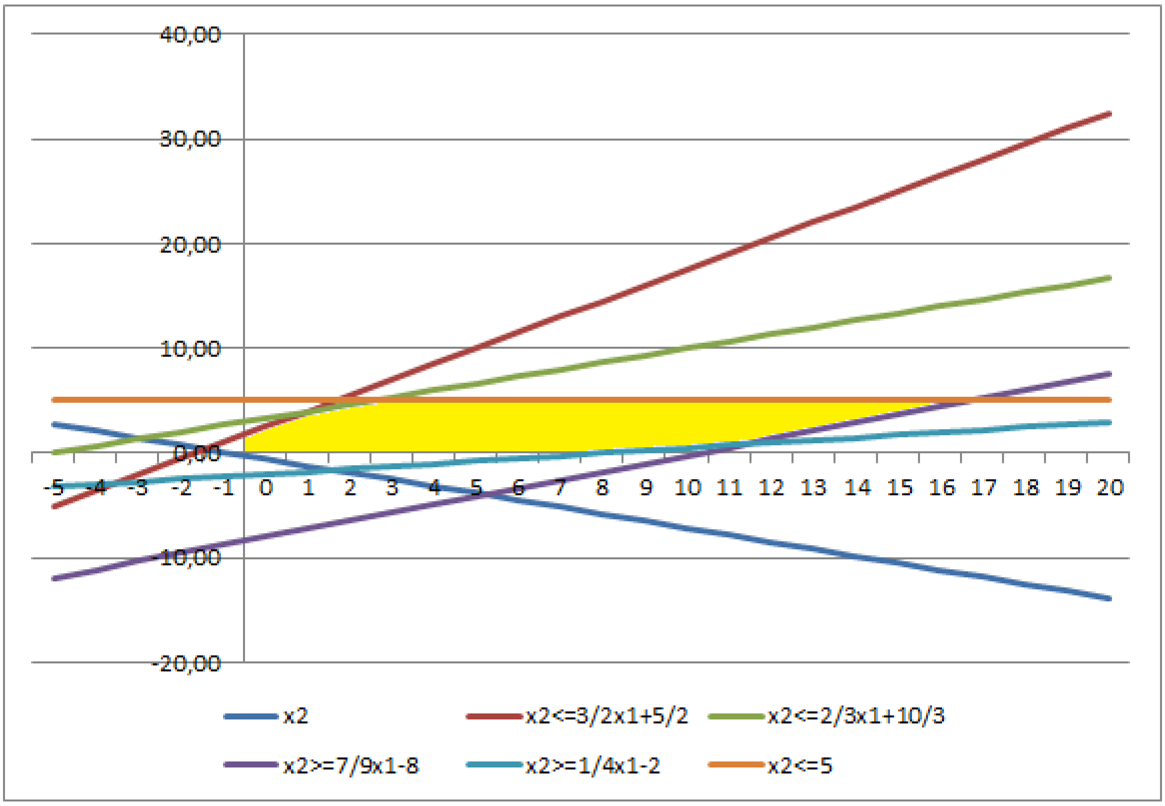


Рис. 2.4. Область допустимих значень функції

Оскільки вектор зростання цільової функції є перпендикулярним її графіку, то $F = -\ 4x_1 - 6x_2 - 3 \rightarrow \min$ отримуємо на межі обмежень, а саме на перетині графіків

$$\begin{cases} x_2 \geq 7/9x_1 - 8 \\ x_2 \leq 5 \end{cases}$$

Звідси $x_1 = 117/7 = 16{,}714$; $x_2 = 5$.

Маємо точку $X^*(16{,}714; 5)$– оптимальне рішення за графічним методом. Значення F в даній точці: $117/7\ \cdot(-4) + 5\ \cdot(-6)\ - 3\ =\ -99{,}86$.

Процес проведення аналізу чутливості на моделях зазвичай відбувається після визначення оптимального рішення даної проблеми. Цей аналіз допомагає виявити, як на оптимальне рішення можуть вплинути варіації вихідної моделі. Відсутність такого аналізу може привести до того, що отримане рішення застаріє ще до своєї реалізації.

Говорячи про ресурси, ми маємо на увазі, що встановлені деякі максимальні межі їх запасів, тому у відповідних вихідних обмеженнях повинен використовуватися знак ≤. Обмеження зі знаком ≥ не можуть розглядатися як обмеження на ресурси.

$$F = -4x_1 - 6x_2 - 3 \to \min$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 9x_2 \leq 72 \\ 2x_1 - 8x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Як бачимо, ресурс x_2 в нас обмежений значенням 5, і оскільки рішення знаходиться на перетині прямих

$$\begin{cases} 7x_1 - 9x_2 \leq 72 \\ x_2 \leq 5 \end{cases}$$

то даний оптимальний план є нестійким, оскільки у випадку зміни даного ресурсу ми отримаємо зміну значення цільової функції, наприклад, якщо зміниться запас ресурсу x_2 до значення 4, то для отримання такого ж значення цільової функції ($F_{\text{опт}} = -99{,}86$) значення x_1 повинне бути рішенням рівняння: $F = -4x_1 - 6 \cdot 4 - 3 = -99{,}86$.

Звідси $x_1 = (99{,}86 + 3 + 24)/4 = 31{,}715$.

Перевіримо, чи задовольняє дане значення наявним обмеженням:

$$7x_1 - 9x_2 \leq 72$$

$$7 \cdot 31{,}715 - 9 \cdot 4 = 186 > 72$$

Отже, зміна обмежень на ресурс x_2 змінить оптимальний план, і ми не зможемо отримати таке саме значення цільової функції, як при початковому обмеженні на даний ресурс. Отже, отримане рішення є чутливим до зміни одного з ресурсів чи обох ресурсів, і є нестійким.

2.2. Використання похідних в прикладних задачах на екстремум

У шкільному курсі алгебри та початків аналізу основна увага приділяється вивченню різних аспектів функцій за допомогою похідних. Вони включають аналіз монотонності функцій, розуміння точок екстремуму та екстремумів функції, визначення найбільшого та найменшого значень у заданому околі та вивчення концепції опуклості. Заглиблюючись у ці теми, можна отримати повне розуміння того, як можна використовувати похідні для дослідження та інтерпретації поведінки функцій.

Процес розуміння того, як функції можуть демонструвати зростання, спадання, передбачає вивчення знайомих графіків, таких як параболи, гіперболи та прямі лінії, які паралельні вісі Ox.

Означення. Похідна функції f в точці x_0 визначається як межа відношення зміни функції f в точці x_0 до зміни аргументу, коли зміна аргументу наближається до нуля. Ця похідна представлена символічно зі штрихом як $f'(x_0)$, враховуючи це учні в змозі записати подане означення у вигляді символічної мови:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(\mathrm{x}) / \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) / \Delta x$$

Підручник, написаний А. Г. Мерзляком, Д. А. Номіровським, В. Б. Полонським, М. С. Якіром [19] містить схему обчислення похідної.

Щоб розвинути всебічне розуміння поняття похідної, учні співпрацюють з викладачем, щоб заглибитись у предмет математичної компетентності. Разом вони аналізують низку проблем і приходять до спільного висновку щодо геометричних і механічних наслідків похідної. Це дослідження задокументовано в детальній таблиці, згаданій як таблиця 2.1, яка надає вичерпний огляд спостережуваних взаємозв’язків і висновків, отриманих із розглянутих проблем.

Таблиця 2.1

Зміст похідної

Механічний зміст похідної $s(t)$ – закон руху матеріальної точки $v(t)$ – миттєва швидкість $s'(t_0) = v(t_0)$	У момент часу миттєва швидкість t_0 дорівнює похідній функції, що визначає закон руху матеріальної точки координатною прямою у точці t_0.

Геометричний зміст похідної $f'(x_0) = kk(x_0) = tg\beta$, де f – дана функція β– кут нахилу дотичної до графіка f kk – кутовий коефіцієнт дотичної $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$– рівняння дотичної до графіка функції f в точці x_0	Похідна функції заданої точки це кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в цій конкретній точці, тобто рівна тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в заданій точці. (Кут відлічують від додатного напрямку осі OX протилежно годинниковій стрілці.)

Після вивчення підходу до знаходження похідної визначенням фокус зміщується на вивчення таблиці похідних, також відомої як таблиця 2.2. Для вдосконалення дослідницьких навичок учні отримують завдання визначити похідні вказаних функцій.

Таблиця 2.2

Таблиця похідних

№	Дана функція	Похідна даної функції
1	$c,\ c - const$	0
2	x	1
3	x^2	$2x$
4	$x^n,\ n \in R$	nx^{n-1}
5	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
7	$\sin x$	$\cos x$
8	$\cos x$	$-\sin x$
9	$tg\ x$	$\frac{1}{cos^2 x}$
10	$ctg\ x$	$-\frac{1}{sin^2 x}$
11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$acrtg\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$
14	$arcctg\ x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Використання таблиці 2.2 є дуже зручним, коли йдеться про вивчення та застосування практичних концепцій. Однак перш ніж повністю зрозуміти його переваги, учні повинні ознайомитися з фундаментальними підходами до визначення похідних різних типів функцій.

При розгляді графіка функції $y = x^2$ видно, що на інтервалі $x \in (0; +\infty)$, де функція, як відомо, зростає, дотична до графіка в кожній даній точці утворює гострий кут із додатним напрямком осі Ox, що вказує на додатну похідну. Навпаки, на інтервалі $x \in (-\infty; 0)$ похідна від'ємна. Крім того, для прямої лінії, паралельної осі Ox, заданої функцією $y = b$, похідна в будь-якій точці дорівнює нулю. Ці спостереження підтверджуються наступними теоремами.

Теорема 2.1 (ознака зростання функції).

Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку.

Теорема 2.2 (ознака спадання функції).

Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція f спадає на цьому проміжку.

Теорема 2.3 (ознака сталості функції).

Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) = 0$, то функція f константна на цьому проміжку.

Існує кілька інших системних підходів для встановлення адекватних умов для визначення монотонності функцій. Один із таких підходів, викладений у підручнику М. І. Башмакова, передбачає ознайомлення студентів із термінами 9-11 шляхом використання механічних аспектів похідної. Цей метод використовується також у підручнику А. Г. Мерзляка та ін. [15], щоправда, виключно для виведення знака постійності функції.

Теорема 2.4 (властивість зростаючої (спадної) функції).

Якщо диференційована на проміжку I функція f є зростаючою (спадною), то для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).

Аналіз функцій на монотонність включає серію алгоритмічних процедур, які зазвичай демонструються за допомогою аналізу кількох функцій. З. І. Слєпкань також надала подібний набір інструкцій у своєму посібнику [35].

Для того щоб знайти проміжки зростання (спадання) функції, потрібно:

1) Знайти область визначення функції та точки розриву.

2) Знайти похідну.

3) Записати і розв'язати нерівність $f'(x) > 0$, вибравши з множин її розв'язків інтервали, на яких задана функція. Ці інтервали являють собою періоди зростання для функції.

4) Записати і розв'язати нерівність $f'(x) < 0$, вибравши з множин її розв'язків інтервали, на яких задана функція. Ці інтервали являють собою періоди спадання для функції.

Крім того, учнів навчають, як можна використати теорему щодо ознаки сталості функції для встановлення математичних тотожностей. Так, якщо вдалося встановити, що похідна функції f на проміжку I дорівнює нулю і для деякого $x_0 \in I$ виконується рівність $f(x_0) = A$, то тим самим установлено, що $f(x) = A$ для всіх $x \in I$.

Розглянемо окремі задачі на екстремум, які можна розв'язати за допомогою похідної.

Задача 2.1. *Витрати на виробництво продукції об'ємом x визначаються заданою функцією. Товар реалізується виробником за ціною 25 ум.од. Визначити максимальний прибуток, позначений як R, і відповідний рівень випуску продукції x.*

Розв'язування:

План розв'язування	**Реалізація плану**
Запишемо вихідне вираження для обчислення величини, екстремальне значення якої ми маємо знайти	Прибуток можна визначити як різницю між виручкою U та витратами C. $$R = U - C$$
Визначаємо функцію, яка корелює зі змінною *x*.	При реалізації продукції у обсягах за ціною 25 ум.од., підприємець отримує виручку $U = 25x$. У той же час його витрати становлять $C(x) = x^2 + 5x + 4$. Таким чином, $R = U - C = 25x - (x^2 + 5x + 4) = -x^2 + 20x - 4$

Визначаємо область визначення функції за критеріями, викладеними в завданні	З огляду на умову завдання, обсяг продукції х може бути будь-яким додатним числом, тобто $x \in (0, +\infty)$
Сформулюємо математичну задачу	Знайти максимальне значення функції $R(x) = -x^2 + 20x - 4$ при $x \in (0, +\infty)$
Досліджуємо функцію з аргументом х на екстремум в знайденому проміжку	$R'(x) = -2x + 20$ $\Pi'(x) = 0, \quad -2x + 20 = 0$, отож критична точка функції x = 10 <table><tr><td></td><td>(0; 10)</td><td>10</td><td>(10; +∞)</td></tr><tr><td>$R'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td></tr><tr><td>$R(x)$</td><td>↗</td><td>96</td><td>↘</td></tr><tr><td></td><td></td><td>*max*</td><td></td></tr></table>Знак похідної змінюється з додатного на від'ємний, коли він проходить через цю точку, вказуючи, що $x = 10$ представляє точку максимуму. $R_{\max} = R(10) = -10^2 + 20 \cdot 10 - 4 = 96$ (ум.од.)
Пояснюємо отримані результати та формулюємо відповідь	Пік прибутку в 96 ум.од. досягається, коли обсяг виробництва досягає 10 ум.од.

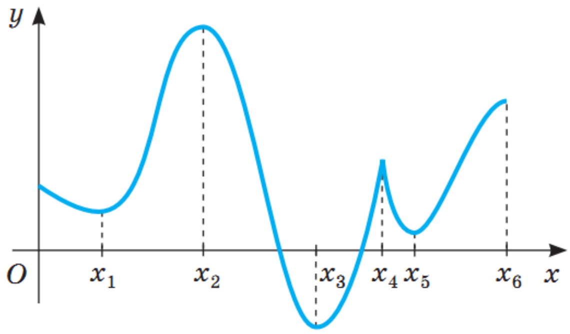
Задача 2.2. *На малюнку зображено графік функції, що описує робочий процес деякого виробництва. Користуючись малюнком, визначте:*

а) критичні точки цієї функції;

б) проміжки росту та спаду;

в) точки максимуму і мінімуму.

Творче завдання: на основі графічного зображення функції перейдіть до побудови графіка похідної функції.



Відповідь: а) критичні точки функції x_1, x_2, x_3, x_4, x_5;

б) проміжки зростання: $x \in [x_1, x_2]$ і $[x_3, x_4]$ і $[x_5, x_6]$;

спадання $x \in [0, x_1]$ і $[x_2, x_3]$ і $[x_4, x_5]$;

в) точки максимуму: x_2, x_4 і мінімуму: x_1, x_3, x_5.

2.3. Застосування нерівності Коші для розв'язування прикладних задач

Екстремальні задачі мають велике значення в галузі математики. Існують ефективні методи визначення екстремальних значень функцій без використання похідних, зокрема для функцій певної структури. Нерівність Коші виділяється як цінний інструмент у цьому відношенні, що дозволяє визначати екстремальні значення без необхідності обчислень похідних.

Нерівність Коші. Для будь-якого набору невід'ємних чисел x_1 , x_2 , ..., x_n справджується нерівність

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \ \geq \ n \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}\,. \tag{2.1}$$

Рівність досягнена у випадку, коли $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Наслідок. Якщо сума додатних чисел є сталою, то їх добуток набуває найбільшого значення, коли ці числа рівні.

Відповідно до нерівності Коші для двох чисел, середнє арифметичне двох невід'ємних чисел a і b завжди більше або дорівнює їх середньому геометричному:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \tag{2.2}$$

де $\frac{a+b}{2}$ - середнє арифметичне, а $\sqrt{ab}$ – середнє геометричне. Причому рівність досягається лише за умови, що $a = b$.

Доводиться вона дуже просто. Нехай $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Оскільки $a + b \geq 0$ та $a - b \geq 0$, то нерівність можна піднести до квадрату:

$$(a + b)^2 \geq 4ab \leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \geq 0 \leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0.$$

Таким чином ми довели, що нерівність дійсна при будь-яких a і b.

Повна форма нерівності Коші включає як середнє гармонійне, так і середнє квадратичне.

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}\ldots \qquad (2.3)$$

де $a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0, \ldots, a_n \geq 0$.

Нерівність Коші часто застосовується в області геометрії. Розвиток числових концепцій можна віднести до практичних вимог людської діяльності. Маніпуляції з числами вимагали здатності робити порівняння між ними [1].

Приклад 1. *Знайти найбільше і найменше значення функції*

$arcsin^3 x + arccos^3 x$

Розв'язання: Нехай $arcsin\,x = \alpha$, $arccos\,x = \beta$. Оскільки $\alpha + \beta = \pi$, то $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \pi^3/8 - 3\pi/2\ \alpha\beta = y$

Значення функції буде найменшим, коли найбільшим буде значення добутку $\alpha\beta$. Оскільки $\beta \geq 0$, то найбільше значення $\alpha\beta$ потрібно шукати при $\alpha > 0$.

Із нерівності Коші маємо

$\alpha\beta \leq \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$, але $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{16}$, тому $\alpha\beta \leq \frac{\pi^2}{16}$.

Найбільше значення $\alpha\beta$ прийматиме при $\alpha = \beta = \pi/4$.

Тоді $arcsin\,x = \alpha = \pi/4$; $x = 1/\sqrt{2}$ і найменше значення функції буде:

$$y_{min} = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2}\alpha\beta = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2}\alpha\beta \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^3}{32}$$

Найменше значення $\alpha\beta$ очевидно буде при $\alpha < 0$. При $x = -1$ маємо $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\beta = \pi$. Беручи до уваги ці значення, можна помітити, що добуток буде мінімізовано, коли α наближається до свого мінімального значення, а β наближається до максимального значення. Отже при $x = -1$ функція приймає найбільше значення

$$y_{max} = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2}\pi \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{7\pi^3}{8}$$

Таким чином, найбільшим значенням буде $7\pi^3/8$, а найменшим $\pi^3/32$.

Приклад 2. *Довести, що для довільних $a \geq 0, b \geq 0$ виконується нерівність $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (нерівність Коші).*

Доведення. Розглянемо різницю $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ і покажемо, що вона не може бути від'ємною. Маємо

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$$

Очевидно, що вираз $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$ не може давати від'ємного значення для будь-яких невід'ємних значень a та b. Таким чином, різниця $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ невід'ємна. Це означає, що $(a+b)/2 \geq \sqrt{ab}$. Важливо відзначити, що рівність справедлива лише за певних умов, коли $a = b$.

Розглянемо задачу відшукання найбільшого значення функції

$$f(x_1, x_2, \dots, x) = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n} \qquad (2.4)$$

якщо додатні числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ задовольняють рівність $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$, де a – додатна стала; $k_1, k_2, \dots, k_n$ – натуральні числа[2)34]. Питання визначення умовного екстремуму функції з декількома змінними можна вирішити за допомогою різних підходів, таких як використання множників Лагранжа. У цьому дослідженні ми прагнемо продемонструвати досягнення бажаного результату, використовуючи наслідки, отримані з нерівності Коші. Оскільки

$$f(x_1, x_2, \dots, x) = \underbrace{x_1 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_1}_{k_1} \cdot \underbrace{x_2 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_2}_{k_2} \cdot \dots \cdot \underbrace{x_n \cdot x_n \cdot \dots \cdot x_n}_{k_n}$$

є добутком $k_1 + k_2 + ... + k_n$ множників, то умову $x_1 + x_2 + ... + x_n = a$ подамо у вигляді суми $k_1 + k_2 + ... + k_n$ доданків, а саме:

$$\underbrace{\frac{x_1}{k_1}+\frac{x_1}{k_1}+\cdots+\frac{x_1}{k_1}}_{k_1}+\underbrace{\frac{x_2}{k_2}+\frac{x_2}{k_2}+\cdots+\frac{x_2}{k_2}}_{k_2}+\cdots+\underbrace{\frac{x_n}{k_n}+\frac{x_n}{k_n}+\cdots+\frac{x_n}{k_n}}_{k_n}=a$$

За наслідком з нерівності Коші добуток $x^{k_1} \cdot x^{k_2} \cdot ... \cdot x^{k_n}$ набуває найбільшого значення, якщо $x_1/k_1 = x_2/k_2 = ... = x_n/k_n$. Отримаємо

$$x_i = \frac{k_i a}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}$$

$i = 1, 2,\ldots,n$. Тоді

$$f_{max}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{k}_1^{k_1} \cdot \mathrm{k}_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot \mathrm{k}_n^{k_n} \left(\frac{a}{k_1+k_2+\cdots+k_n}\right)^{k_1+k_2+\cdots+k_n}.$$

Нехай потрібно визначити найбільше значення функції

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{\frac{l_1}{m_1}} \cdot x_2^{\frac{l_2}{m_2}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\frac{l_n}{m_n}} \qquad (2.5)$$

де додатні числа $x_1, x_2, ..., x_n$ задовольняють рівність $x_1 + x_2 + ... + x_n = a$, a – додатна стала; $\frac{l_1}{m_1}, \frac{l_2}{m_2}, \ldots, \frac{l_n}{m_n}$ – звичайні нескоротні дроби.

m = НСК ($m_1, m_2, ..., m_n$) ,

$ml_1 / m_1 = k_1, ..., ml_n / m_n = k_n$. Тоді функція

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g^m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

набуває вигляду (2.4).

Отже, задачу відшукання найбільшого значення функції g за умови $x_1 + x_2 + ... + x_n = a$ зведено до задачі, розглянутої вище. Тоді $g_{max} = \sqrt[m]{f_{max}}$.

У результаті отримаємо

$$g_{max}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\left(\frac{l_1}{m_1}\right)^{\frac{l_1}{m_1}}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{l_n}{m_n}\right)^{\frac{l_n}{m_n}}\cdot\left(\frac{a}{\frac{l_1}{m_1}+\cdots+\frac{l_n}{m_n}}\right)^{\frac{l_1}{m_1}+\cdots+\frac{l_n}{m_n}}$$

До розглянутої вище задачі зводиться також задача визначення найбільшого значення функції

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{\frac{l_1}{m_1}} \cdot x_2^{\frac{l_2}{m_2}} \cdot \dots \cdot x_n^{\frac{l_n}{m_n}}$$

де додатні числа $x_1, x_2, ..., x_n$ задовольняють рівність

$$x_1^{\frac{p_1}{s_1}} + x_2^{\frac{p_2}{s_2}} + \dots + x_n^{\frac{p_n}{s_n}} = a$$

a – додатна стала; l_1 / m_1, ..., l_n / m_n, p_1 / s_1, ..., p_n / s_n – звичайні нескоротні дроби.

Викладений підхід можна ефективно використовувати для визначення екстремальних значень багатьох функцій певного вигляду однієї і більше змінних[2)12].

2.4. Прикладні задачі на екстремум в курсі алгебри ЗЗСО

При розв’язуванні задач на екстремум важливо проводити ті ж самі міркування, що і при розв’язуванні численних задач у сферах природничих наук та економіки. Аналіз та роз’язування таких задач буде корисним для учнів, які вивчають математику в класах природничого-математичного напряму (фізико-математичного, хіміко-біологічного, екологічного профілю) та економічного профілю.

Під час вивчення точок екстремуму функцій учням важливо розуміти, що точки максимуму та мінімуму вважаються точками екстремуму. Крім того, важливо зазначити, що значення функції в цих точках екстремуму є екстремумом функції. На жаль, студентам часто важко розрізняти ці поняття, що призводить до помилок у їхній роботі.

Перед введенням означення точок максимуму і мінімуму, говорять про окіл точки.

Означення. Інтервал $(a; b)$, який містить точку x_0, називають околом точки x_0.

Теорема 4.1. (про точки екстремуму).

Якщо x_0 є точкою екстремуму функції f, то або $f'(x_0) = 0$, або функція f не є диференційованою в точці x_0 .

Виникає питання щодо того, чи завжди екстремальне значення функції буде знаходитися в точці в межах області визначення функції, де похідна дорівнює нулю або не визначена. Важливо розуміти, що це припущення не завжди відповідає дійсності. Наводячи приклади, можна показати, що хоча наявність похідної, що дорівнює нулю або не існує в точці x_0, є необхідною умовою для існування екстремуму, цього не завжди достатньо, щоб гарантувати, що екстремум відбудеться в x_0.

Означення. Критичні точки функції — це ті внутрішні точки в області, де похідна дорівнює нулю або не визначена.

З цього визначення випливає, що точки екстремуму, розташовані серед цих критичних точок.

Згодом досліджують теореми, які служать адекватними критеріями для визначення точок екстремуму функції за допомогою її похідної.

Теорема 4.2. (ознака точки максимуму функції).

Нехай функція f є диференційованою на кожному з проміжків $(a; x_0)$ і $(x_0; b)$ і неперервною в точці x_0 . Якщо для всіх $x \in (a; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, а для всіх $x \in (x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, то точка x_0 є точкою максимуму функції f.

Теорема 4.3. (ознака точки мінімуму функції).

Нехай функція f є диференційованою на кожному з проміжків $(a; x_0)$ і $(x_0; b)$ і неперервною в точці x_0 . Якщо для всіх $x \in (a; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, а для всіх $x \in (x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції f.

Після вивчення необхідних умов для існування точок екстремуму, згодом представлена послідовність дій для дослідження функцій у цих критичних точках.

1) Знайти область визначення функції $f(x)$.
2) Знайти похідну даної функції $f'(x)$та визначити критичні точки.

3) Розмістити критичні точки на координатній прямій в порядку їх зростання та дослідити знак похідної в околах цих точок, зробити висновки щодо точок максимуму і мінімуму.

4) Обчислити максимуми та мінімуму функції, підставивши у формулу $y = f(x)$ значення точок максимуму і мінімуму.

У контексті неперервної функції f, визначеної на замкнутому інтервалі $[a, b]$, процес визначення максимального та мінімального значень у межах цього інтервалу виконується відповідно до наступної схеми.

1) Знайти похідну функції $f(x)$.

2) Знайти критичні точки функції $f(x)$, які належать відрізку $[a; b]$.

3) Обчислити значення функції в знайдених критичних точках і на кінцях певного відрізка.

4) З усіх знайдених значень обрати найбільше і найменше.

Неперервна функція завжди матиме як найбільше, так і найменше значення, але ці значення можна знайти лише в стаціонарних точках або на кінцях відрізка. У результаті не виконується достатньо умов, щоб гарантувати існування екстремуму в стаціонарних точках. Позначають екстремуми на відрізку наступним чином: $\max\limits_{[a;b]} f(x), \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

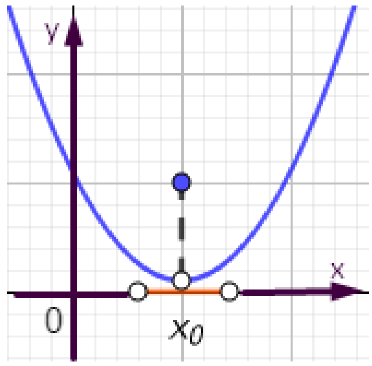
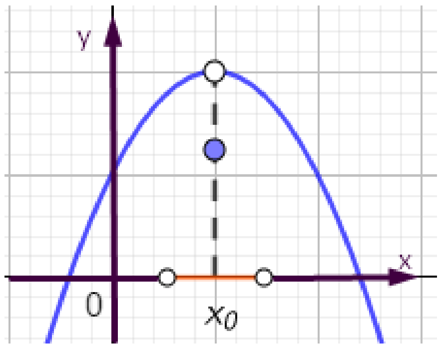
На додаток до цього, учні інформуються, що, використовуючи своє розуміння екстремальних значень, вони мають здатність вирішувати різні проблеми, які виникають у сценаріях реального життя.

Перш ніж заглиблюватися в методи застосування похідних для аналізу функцій, важливо оновити та вдосконалити наші знання та навички. Це гарантує, що учні не стикнуться з будь-якими перешкодами при роботі з теоремами, пов’язаними зі зростанням і спаданням функції, точками екстремуму, екстремуму функції, максимальним і мінімальним значенням на заданому інтервалі, а також поняттям опуклості функцій.

Пригадати означення точок максимуму і мінімуму можна за допомогою таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Точки екстремуму

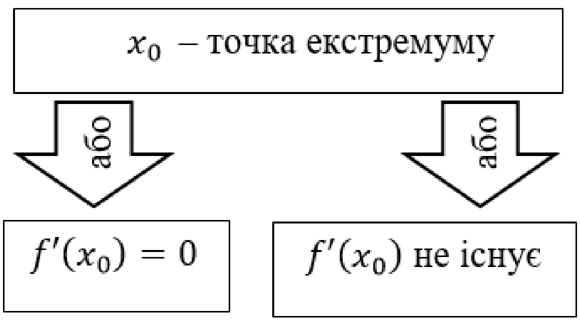
Точка мінімуму	**Точка максимуму**
Точку x_0 називають точкою мінімуму функції $y = f(x)$, якщо для всіх x з деякого околу точки x_0, справджується рівність $f(x_0) \leq f(x)$.  $x_{min} = x_0$ – точка мінімуму $y_{min} = f(x_{min})$ - мінімум	Точку x_0 називають точкою максимуму функції $y = f(x)$, якщо для всіх x з деякого околу точки x_0, справджується рівність $f\ (x_0) \geq f\ (x)$.  $x_{max} = x_0$ – точка максимуму $y_{max} = f(x_{max})$ – максимум

Після виведення цих теорем необхідно розробити алгоритми, які можуть ефективно визначати точки екстремуму, ідентифікувати максимальні та мінімальні значення функції в заданому інтервалі та встановлювати інтервали опуклості для функції. Крім того, важливо надати кілька ілюстративних прикладів, щоб продемонструвати практичну реалізацію та ефективність цих алгоритмів.

Після завершення розуміння теоретичних аспектів, що стосуються точок екстремуму функції, настійно рекомендується надати учням розширену та вичерпну інформацію, представлену у вигляді таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

Необхідна і достатня умови існування точок екстремуму

Необхідна умова	**Достатня умова**
У точках екстремуму похідна функції може не існувати або дорівнювати нулю.  	У випадку коли при переході через точку x_0, де функція є неперервною. 1) Якщо похідна функції змінює знак з плюса на мінус при переході через точку x_0, то x_0 є точкою максимуму.  2) Якщо похідна функції змінює знак з мінуса на плюс при переході через точку x_0, то x_0 є точкою мінімуму. 

Розглянемо задачі на знаходження найбільших та найменших значень.

Задача 1. *Знайти найменше значення виразу* $4a^2 + b^2$*, якщо* $ab = 3$.

Оскільки добуток виразів $4a^2$ та b^2 є сталим (із умови випливає, що $4a^2 \cdot b^2 = 36$), то вираз прийматиме найменше значення при $4a^2 = b^2$, тобто при $b = 2a$. При цьому $a^2 = \frac{3}{2}$, звідки $4a^2 + b^2 = 12$.

Задача 2. *Знайти найбільше значення функції* $y = \frac{x^2}{x^4 + 4}$.

При $x = 0$ значення функції дорівнює 0. При $x \neq 0$ запишемо вираз для функції у вигляді $y = \frac{1}{x^2 + \frac{4}{x^2}}$. Дослідимо, коли знаменник виразу найменший.

Зауваживши, що добуток виразів x^2 та $\frac{4}{x^2}$ є сталим числом, робимо висновок, що знаменник найменший при $x^2 = \frac{4}{x^2}$, тобто при $x^2 = 2$. Значення функції при цьому є максимальним і буде дорівнювати $\frac{1}{4}$.

Задача 3. *Довести, що для довільних* $a \geq 0,\ b \geq 0$, $\tilde{n} \geq 0,\ d \geq 0$ *виконується нерівність*

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}\ .$$

Доведення. Нам відомо, що при заданих обмеженнях на змінні виконуються нерівності $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\frac{\tilde{n}+d}{2} \geq \sqrt{cd}$. Застосувавши нерівність Коші до лівих частин записаних нерівностей та використавши записані вище співвідношення, дістаємо

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}\ ,$$

або $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$. Рівність можлива тоді і тільки тоді, коли одночасно виконуються умови $a = b,\ c = d$ та $\frac{a+b}{2} = \frac{c+d}{2}$, тобто, коли $a = b = c = d$.

Доведення закінчено.

Задача 4. *Довести, що для довільних додатних чисел* $x,\ y,\ z$ *виконується нерівність*

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{z}\right)\cdot\left(1+\frac{z}{y}\right) \geq 8\,.$$

Доведення. Використавши нерівність Коші, запишемо три вірні нерівності:

$$1+\frac{y}{x} \geq 2\cdot\sqrt{1\cdot\frac{y}{x}} = 2\sqrt{\frac{y}{x}},\ 1+\frac{x}{z} \geq 2\cdot\sqrt{1\cdot\frac{x}{z}} = 2\sqrt{\frac{x}{z}},\ 1+\frac{z}{y} \geq 2\cdot\sqrt{1\cdot\frac{z}{y}} = 2\sqrt{\frac{z}{y}}\ .$$

Перемноживши їх, отримаємо

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{z}\right)\cdot\left(1+\frac{z}{y}\right) \geq 8\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{y}} = 8\,.$$

Доведення закінчено.

Задача 5. *При додатних* a, b, c *довести нерівність*

$$\frac{a^4+b^4+c^4+16}{a^2b+b^2c+c^2a} \geq \frac{8}{3}.$$

Доведення. Користуючись двічі нерівністю Коші, дістаємо

$2a^4+b^4+16 \geq 2a^4+8b^2 \geq 8a^2b$.

Аналогічно отримуємо ще дві нерівності

$2b^4+c^4+16 \geq 8b^2c$, $\quad 2c^4+a^4+16 \geq 8c^2a$.

Додаючи одержані три нерівності, отримуємо

$3(a^4+b^4+c^4+16) \geq 8(a^2b+b^2c+c^2a)$,

звідки випливає нерівність, яку ми доводимо.

Доведення закінчено.

Задача 6. *Число 10 подайте у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб сума квадратів цих чисел була найменшою.*

Розв'язання. Отже, ми маємо два числа сума яких дорівнює 10.

Тому нехай перший доданок буде x, тоді другий $(10-x)$. Слідуючи умові ми маємо, що $x^2+(10-x)^2$, який за умовою має бути найменшим.

Відповідно найменше це значення виразимо через функцію залежну від даного х. І маємо $f(x)=x^2+(10-x)^2$.

Далі користуючись похідною нам потрібно знайти найменше значення функції. Для знаходження найменшого значення не вистачає проміжку. Знайдемо його користуючись безпосередньо умовою. В умові сказано, що число 10 подати у вигляді суми двох чисел. Тобто це може бути , наприклад

Сума чисел $0+10=10, 1+9=10$ $5+5=10$ $6+4=10$ і так далі. Тобто ми можемо сказати що під x ми розглянемо числа від 0 до 10. Ось ми і отримали проміжок х є [0; 10]. Отже, о $f(x)=x^2+(10-x)^2$ на проміжку x є [0; 10]. Далі розглянемо алгоритм знаходження найменшого значення.

1) $D(y)=R$;

2) $f'(x)=2x+2(10-x)\times(-1)=2x-20+2x=4x-20$;

3) $f'\,(x)=0$;

$4x - 20 = 0$,

$x - 5 = 0$

$x = 5$.

Дана критична точка належить проміжку $[0; 10]$.

4) Знайдемо значення функції на кінцях відрізка і в даній точці.

$f(0) = 0^2 + (10 - 0)^2 = 100$,

$f(10) = 10^2 + (10 - 10)^2 = 100$,

$f(5) = 5^2 + (10 - 5)^2 = 50$.

Запишемо найменше значення функції $\min\limits_{[0;10]} f(x) = f(5) = 50$.

Отже можна зробити висновок, що $x_1 = x_2 = 5$.

Задача 7. *Знайти точки екстремуму функції*

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3.$$

Розв'язання. Користуючись алгоритмом знайдемо екстремуми для даної функції.

1) $D(y) = R$.

2) $y' = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$.

3) $D(y') = R, y' = 0$, маємо рівняння: $(x - 1)(x + 2) = 0$, звідки $x_1 = 1$; $x_2 = -2$ – критичні точки.

4) Позначимо критичні точки на $D(y)$ (числовій осі) і визначимо знак похідної на кожному з отриманих проміжків:

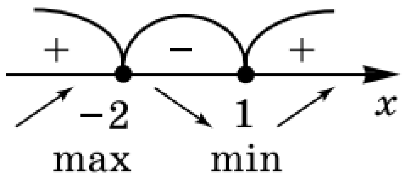
$y'(-5) = (-5 - 1)(-5 + 2) > 0$, тобто $y' > 0$ на $(-\infty; 2)$;

$y'(0) = (0 - 1)(0 + 2) < 0$, тобто $y' < 0$ на $(-2; 1)$;

$y'(2) = (2 - 1)(2 + 2) > 0$, тобто $y' > 0$ на $(1; +\infty)$.

Результат зображено на рис. 2.5.

Рис. 2.5



5) Отже, $x_{max} = -2;\ x_{min} = 1$.

Відповідь: $x_{max} = -2;\ x_{min} = 1$.

Задача 8. *Знайти екстремуми функції* $y = \frac{x^2-3}{x-2}$.

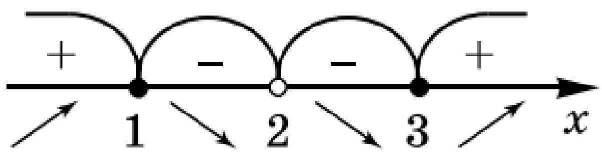
Розв'язання.1) $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

2)$y' = \frac{2x(x-2)-1(x^2-3)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$.

3) $y' = 0$, тобто $\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} = 0;\ x_1 = 1;\ x_2 = -2$ – критичні точки.

4) Позначимо критичні точки на області визначення функції та з'ясуємо знак похідної на кожному з отриманих проміжків (рис. 2.6) .

Рис. 2.6



5) Отже, $x_{max} = 1;\ x_{min} = 3$ – точки екстремуму.

Тоді $y_{max} = y(1) = \frac{1^2-3}{1-2} = 2;\ y_{min} = y(3) = \frac{3^2-3}{3-2} = 3.$

Відповідь: $y_{max} = y(1) = 2;\ y_{min} = y(3) = 3.$

ВИСНОВКИ

Прикладні задачі на екстремум відображають суть математики в реальному світі. Такі задачі є не лише основою для теорії оптимізації, але і ключовим інструментом для вирішення різноманітних проблему різних сферах, від виробництва до фінансів та медицини.

Завдяки прикладним задачам людина вчиться аналізувати ситуації, моделювати проблеми, шукати оптимальні рішення та враховувати обмеження. Це важливі навички як у повсякденному житті, так і в професійній діяльності.

В першому розділі розглянуто історію стародавніх прикладних задач та їхнє значення. Зокрема, розглянуло деякі екстремальні проблеми, які виникали протягом еволюції математики : задача Дідони, задача Евкліда, задача Герона та інші.

В другому розділі розглянуто пошуки оптимального розв'язку в алгебраїчних задачах. Оптимізаційні задачі можна розв’язувати різними методами. Найпростішим є графічний, де розв’язок можна знайти за допомогою графіку функції. Також був наведений приклад, де розв’язували систему шукаючи оптимальні розв'язки та використовували графічний метод побудови графіка цільової функції в програмі GeoGebra.

Третій розділ присвячено розв'язуванню прикладних задач на екстремум в курсі алгебри в ЗЗСО.

Отже, прикладні задачі — це застосування теоретичних знань використанням у житті. Вони не тільки допомагають вирішувати конкретні проблеми, але й формують ключові компетенції, необхідні для особистого та професійного розвитку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ачкан В.В., Ніколаєва О.В. Використання прикладних задач у процесі вивчення похідної у курсі алгебри та початків аналізу в класах різних профілів : зб. наук. праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). Бердянськ: БДПУ, 2011. № 2. 360 с.

2. Бабак І.. Узагальнення нерівності Коші, 2001. 31-35 с.

3. Бевз Г.П. Бевз В.Г. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту) : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с.

4. Бурда М.І. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / М.І. Бурда , Т.В. Колеснік, Ю.І.Мальований, Н.А.Тарасенкова. К. : УОВЦ «Оріон», 2018. 288 с.

5. Воронний О.М. Кіровоградські олімпіади юних математиків (1991-2000 рр.). Кіровоград: РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка, 2000. 140 с.

6. Дереза І.С., Іванова О.А. Формування дослідницької компетентності учнів при вивченні теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні. *ВІСНИК Міжнародного дослідного центру: «Людина: мова, культура, пізнання»*: наук. журн.: за заг. ред. В. В. Корольського. Кривий Ріг: КДПУ, МДЦ «ЛМКП», 2018. 171-178 с.

7. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. І. Допрофільна підготовка: Факультативи та курси за вибором / упоряд. Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна. Х.: Вид-во «Ранок», 2011. 320 с.

8. Звєрєва Г. І. Компетентнісний підхід до навчання учнів на уроках математики: *Методичний посібник для вчителів*. Харків: РМК Московського РУО, 2008. 81 с.

9. Клименко О. О. Компетентнісний підхід до навчання учнів на уроках математики. *Управління освіти, сім'ї, молоді та спорту Білгород-Дністровської міської ради*, 2018. 56 с.

10. Корольський В.В. Математичний аналіз. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної. Кривий Ріг, 2013. ч. 2-а. 393 с.

11. Кульчицька Н., Собкович Р. Основні методи доведення нерівностей. Івано-Франківськ, ПНУ ім. В.Стефаника, 2014. 100 с.

12. Лепська Я. Я. Застосування нерівності Коші до розв'язання задач на екстремум. Політ. Сучасні проблеми науки : тези доповідей XXI Міжнародної науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти і молодих учених . Національний авіаційний університет. Київ, 2021. С. 152-153.

13. Литвиненко Н. Застосування нерівності Коші при розв'язуванні задач. Наукові записки молодих учених. 2020. № 6.

14. Математика. 5-11 класи: навчальні програми, методичні рекомендації щодо організації навчально-виховного процесу в 2017/2018 навчальному році / укладач Б. В. Кудренко. Харків: Вид-во «Ранок», 2017. 144 с.

15. Мерзляк А. Г. Алгебра : підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики: у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків: Гімназія, 2011. Ч. 1. 256 с.

16. Мерзляк А. Г. Алгебра: підручник для 11 класу для профільного та академічного рівня вивчення математики / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків: Гімназія, 2011. 431 с.

17. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу :початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу., проф. рівень: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків: Гімназія, 2018. 512 с.

18. Мерзляк А.Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д.А.Номіровський, В. Б. Полонський, М.С.Якір. Х.: Гімназія, 2018. 256 с.

19. Методика вивчення математики / Укладач Звєрєва Г. Ф. Харків, 2016. 80 с.

20. Методичний пошук вчителя математики: зб. наук. праць за матеріалами І Всеукр. дистанц. наук.-практ. конф., 16 березня 2017 р. Міністерство освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. Вінниця, 2017. 269 с.

21. Навчальні матеріали онлайн. Факультативи, спецкурси і спецсемінари як форми організування навчання. URL: https://pidruchniki.com/70153/pedagogika/fakultativi_spetskursi_spetsseminari_formi_organizuvannya_navchannya (дата звернення 01.05.2024).

22. Матеріали Всеукраїнської інтернет-конференції «Професійна компетентність педагога: теорія, методика, практика» 18 квітня http://vippo.org.ua/files/conference/-2024-17186183908731.pdf

23. Навчальні програми МОН (математика). URL: http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/navchalni-programy.html (дата звернення 29.04.2024).

24. Науменко А.А. Екстремальні задачі як засіб активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів під час вивчення геометричних перетворень. *Матеріали конференції «Єдність навчання і наукових досліджень – головний принцип університету», УДУ ім. М.Драгоманова*. 2013. 250-251с.

25. Нелін Є. П. Алгебра в таблицях: навчальний посібник для учнів 7-11 класів. 3-е видання. Х.: Гімназія, 2011. 128 с.

26. Нелін Є.П., Долгова. О.Є. Алгебра. 11 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: академічний рівень, профільний рівень. Х.: Гімназія, 2011. 448 с.

27. Овчарук О. В. Компетентності як ключ до оновлення змісту освіти. *Стратегія реформування освіти в Україні*. 2023. № 3.68-75 с.

28. Перелік навчальних програм, підручників та навчально-методичних посібників, рекомендованих Міністерством освіти і науки України для використання в основній і старшій школі загальноосвітніх навчальних закладів з

навчанням українською мовою. URL: https://imzo.gov.ua/pidruchniki/pereliki/ (дата звернення 30.04.2024).

29. Пілявська Т.В. Доведення нерівностей у шкільному курсі математики. 9-10 клас: Навчально-методичний посібник. Хмельницький: Хмельницький ліцей № 17, 2014. 26 с.

30. Програма зовнішнього незалежного оцінювання з математики 2022 року. URL: http://testportal.gov.ua/progmath/ (дата звернення 29.04.2024).

31. Радченко А. А. Ігрові методи та прийоми. Відкритий урок. К, 2012. № 10. 47-49 с.

32. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : монографія. Х. : Факт, 2005. 360 с.

33. Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій: дис. доктора пед. наук. К., 2005. 503 с.

34. Репета В.К., Лепська Я.Я. Застосування нерівності Коші до дослідження функцій багатьох змінних на екстремум. URL: http://dspace.nuft.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/31825/1/Actual%20Scientific%20and%20
Methodological%20Problems%20of%20Physics%20and%20Mathematics%20in%20Higher%2 0Education.pdf (дата звернення 01.04.2024)

35. Саломатнікова О. М. Методичні рекомендації та поради щодо використання варіативної складової робочого навчального плану з математики. Управління освіти херсонської міської ради, 2012. 34 с.

36. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. 2-ге видання, доповнене і перероблене. К.: Вища школа, 2006. 582 с.

37. Слівінська Л. А. Урок на тему: «Застосування похідної до дослідження функцій». *Методичний вісник*. 2015. №4. С. 37-42

38. Чепіль М.М., Дудник Н.З. Педагогічні технології. К.: Академвидавництво, 2012. 222 с.

Додаток

Конспект уроку *«Критичні точки. Локальний екстремум функції»* (10 клас)

***Тема.* «Екстремальні точки. Локальний екстремум функції»**

Мета уроку:

- Сприяти формуванню поняття критичних точок функції, точок екстремуму, екстремумів функції, засвоєнню необхідної й достатньої умови екстремуму, алгоритму знаходження екстремумів функції ;
- Сприяти розвитку творчих здібностей учнів, логічного мислення, вміння аналізувати, розвивати пам'ять, увагу, спостережливість, виконувати узагальнення і систематизацію отриманих знань;
- виховувати в учнів прагнення до самовдосконалення та саморозвитку.

Формування компетентностей*:*

- ***предметна компетентність:***
  - розглянути задачі на застосування основних теорем для знаходження екстремумів функції;
  - закріпити сформовані основні поняття та визначення;
  - сформувати вміння розв'язувати задачі, що передбачають застосування алгоритму для знаходження екстремумів;
- ***ключові компетентності:***
  - спілкування державною мовою – доречно та коректно вживати в мовленні математичну термінологію;
  - інформаційно-цифрова компетентність – визначати достатність даних для розв'язування задач;
  - соціальна та громадянська компетентності – оцінювати аргументи та змінювати думку на основі доказів.

Тип уроку: *засвоєння нових знань та вмінь.*

Матеріально-технічне забезпечення: *ноутбук, мультимедійний екран, мультимедійний проектор, підручник «Алгебра і початки аналізу та геометрія,, 10 клас» О.С.Істер.*

Навчальна література:

Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10-го кл, закл. заг. серед. освіти / О.С.Істер. – Київ: Генеза, 2018. – 384 с.: іл.

Хід уроку

І. Організаційний момент:

1. Взаємне привітання.

2. Перевірка наявності учнів за списком у журналі.

ІІ. Перевірка домашнього завдання.

1.Колективне розв'язування вправи.

Приклад 1[31]. Знайдіть проміжки монотонності функцій:

а) $f(x) = x^3 - 5x^2 - 32x + 9$; б) $f(x)=\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x+5$.

Відповіді: а) функція зростає на кожному із проміжків $(-\infty;\ -2)$, $\left(\frac{16}{3};+\infty\right)$; спадає на проміжку $\left(-2;\frac{16}{3}\right)$; б) функція зростає на кожному із проміжків $(-\infty;\ -1)$, $(3;\ +\infty)$; спадає на проміжку $(-1;\ 3)$.

2. Дати відповіді на запитання, що виникли в учнів під час виконання домашніх вправ.

ІІІ. Повідомлення теми, мети уроку.

VI. Сприйняття і усвідомлення поняття точок екстремуму та екстремуму функції, необхідної та достатньої умов.

Перед введенням означення точок максимуму і мінімуму, говорять про окіл точки.

Означення. Інтервал $(a; b)$, який містить точку x_0, називають околом точки x_0.

Далі ми надаємо визначення максимальних і мінімальних точок.

Теорема [про точки екстремуму].

Якщо x_0 є точкою екстремуму функції f, то або $f'(x_0) = 0$, або функція f не є диференційованою в точці x_0 .

Означення. Критичні точки функції — це ті внутрішні точки в області, де похідна дорівнює нулю або не визначена.

З цього визначення випливає, що точки екстремуму, розташовані серед цих критичних точок.

Згодом досліджують теореми, які служать адекватними критеріями для визначення точок екстремуму функції за допомогою її похідної.

Теорема [ознака точки максимуму функції].

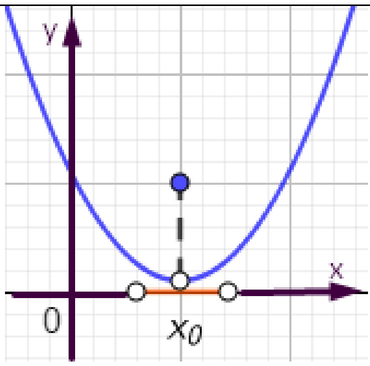
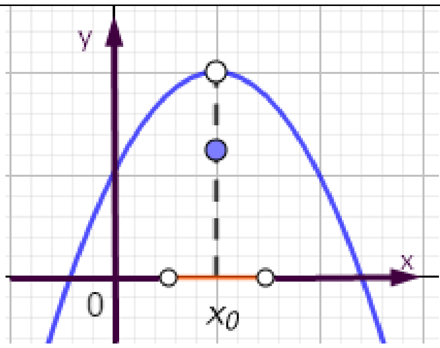
Нехай функція f є диференційованою на кожному з проміжків $(a; x_0)$ і $(x_0; b)$ і неперервною в точці x_0 . Якщо для всіх $x \in (a; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, а для всіх $x \in (x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, то точка x_0 є точкою максимуму функції f.

Теорема [ознака точки мінімуму функції].

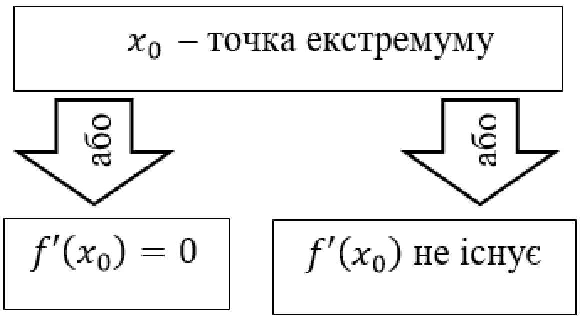
Нехай функція f є диференційованою на кожному з проміжків $(a; x_0)$ і $(x_0; b)$ і неперервною в точці x_0 . Якщо для всіх $x \in (a; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, а для всіх $x \in (x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції f.

Точки екстремуму

Точка мінімуму	**Точка максимуму**
Точку x_0 називають точкою мінімуму функції $y = f(x)$, якщо для всіх x з деякого околу точки x_0, справджується рівність $f(x_0) \leq f(x)$.	Точку x_0 називають точкою максимуму функції $y = f(x)$, якщо для всіх x з деякого околу точки x_0, справджується рівність $f(x_0) \geq f(x)$.

 $x_{min} = x_0$ – точка мінімуму $y_{min} = f(x_{min})$ - мінімум	 $x_{max} = x_0$ – точка максимуму $y_{max} = f(x_{max})$ – максимум

Необхідна і достатня умови існування точок екстремуму

Необхідна умова	Достатня умова
У точках екстремуму похідна функції може не існувати або дорівнювати нулю.  	У випадку коли при переході через точку x_0 , де функція є неперервною. 1) Якщо похідна функції змінює знак з плюса на мінус при переході через точку x_0 , то x_0 є точкою максимуму.  2) Якщо похідна функції змінює знак з мінуса на плюс при переході через точку x_0, то x_0 є точкою мінімуму. 

Алгоритм для пошуку найбільшого та найменшого значення функції:

1) Знайти область визначення функції $f(x)$.
2) Знайти похідну даної функції $f'(x)$та визначити критичні точки.
3) Розмістити критичні точки на координатній прямій в порядку їх зростання та дослідити знак похідної в околах цих точок, зробити висновки

щодо точок максимуму і мінімуму.

4) Обчислити максимуми та мінімуму функції, підставивши у формулу $y = f(x)$ значення точок максимуму і мінімуму.

V. Розв'язування вправ.

1. ***Приклад 1.*** Знайдіть точки екстремуму функції $f(x) = x^3 - 3x$**.**

Розв'язання

Область визначення даної функції — R.

Знайдемо $f`(x)$: $f`(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$.

Похідна існує для всіх $x \in R$.

Знайдемо стаціонарні точки: $f(x) = 0$, $3x^2 - 3 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1$.

Наносимо область визначення та стаціонарні точки на координатну пряму (рис. 1) і визначимо знак похідної на кожному проміжку:

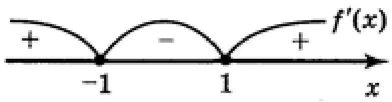


Рис.1

$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 9 > 0$;

$f'(0) = 3 \cdot (0)^2 - 3 = -3 < 0$;

$f'(2) = 3 \cdot (2)^2 - 3 = 9 > 0.$

Точка $x = -1$ є точкою максимуму, бо похідна при переході через цю точку змінює знак з «+» на «-»: $x_{max} = -1$.

Точка $x = 1$ — є точкою мінімуму, бо похідна при переході через цю точку змінює знак з «-» на «+»: $x_{min} = 1$.

Відповідь: $x_{max} = -1$, $x_{min} = 1$.

Приклад 2. Знайдіть екстремуми функції $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Розв'язання

Область визначення функції — R.

Знайдемо похідну:

$f'(x) = (x^4 - 4x^3) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$.

Знайдемо стаціонарні точки: $f'(x) = 0$, $4x^2(x - 3) = 0$, $x = 0$ або $x = 3$.

Наносимо стаціонарні точки на координатну пряму (рис. 2) та визначаємо знак похідної на кожному інтервалі.

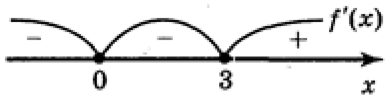


Рис.2

$x = 3$ — точка мінімуму, бо при переході через цю точку похідна змінює знак з «–» на «+»: x_{min}= 3.

Точка x = 0 не є точкою екстремуму, бо похідна не змінює знак при переході через цю точку.

Отже, $y_{min} = f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 = -27$.

Відповідь: $y_{min} = f(3) = -27$.

Приклад 3. Знайти екстремуми функції $y = \frac{x^2-3}{x-2}$.

Розв'язання

1) $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

2)$y' = \frac{2x(x-2)-1(x^2-3)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$.

6) $y' = 0$, тобто $\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = -2$ – критичні точки.

7) Позначимо критичні точки на області визначення функції та з'ясуємо знак похідної на кожному з отриманих проміжків (рис. 3) .

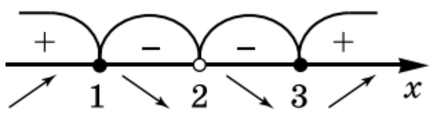


Рис. 3

8) Отже, $x_{max} = 1$; $x_{min} = 3$ – точки екстремуму.

Тоді $y_{max} = y(1) = \frac{1^2-3}{1-2} = 2$; $y_{min} = y(3) = \frac{3^2-3}{3-2} = 3$.

Відповідь: $y_{max} = y(1) = 2$; $y_{min} = y(3) = 3$.

2. Виконати тестування на знаходження екстремумів функції за посиланням.

https://naurok.com.ua/test/ekstremumi-funkci-435308.html

VI. Підведення підсумків уроку.

Підводимо підсумки за допомогою вправи **«Плюс-мінус-цікаво»**

Ця вправа дозволяє вчителю глянути на урок очима учнів, проаналізувати його з точки зору цінності для кожного учня. Можна виконувати як усно, так і письмово.

В графу «П» – «плюс» записуємо все, що сподобалось на уроці, що здалося цікавим та корисним

В графу «М» – «мінус» записуємо все що не сподобалось, здалося важким, незрозумілим та нудним.

В графу «Ц» – «цікаво» учні записують факти, про які дізнались на уроці, чого б ще хотілось дізнатися.

VII. Домашнє завдання.

1.Опрацювати §22. Виконати вправи 21.35, 21.40.

2. Підготувати історичну довідку про П'єра Ферма.

АНОТАЦІЯ

Крисак К. Ю. Прикладні задачі на екстремум. Магістерська робота. Волинський національний університет імені Лесі Українки. Луцьк, 2024. 46 с.

У магістерській роботі досліджувалась методика вивчення задач на екстремум в шкільному курсі математики. Розглянуто основні методи розв'язування задач на екстремум функції.

Ключові слова: екстремум, функція, окіл.

ANNOTATION

Krysak K. Y. Applied problems for extremum. Master's thesis. Lesya Ukrainka Volyn National University. Lutsk, 2024. 46 p.

In the master's thesis the method of studying extremum problems in the school course of mathematics was investigated. The main methods of solving extremum function problems were considered.

Key words: extremum, function, environment.