МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Кафедра теорій функцій та методики навчання математики

На правах рукопису

МІГДАЛЬ ГАННА АНДРІЇВНА

ТЕОРЕТИЧНІ ТА МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ З МОДУЛЕМ

Спеціальність: 014 Середня освіта. Математика

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:
Кандидат педагогічних наук,
доцент кафедри теорії функцій та
методики навчання математики
ВНУ імені Лесі Українки
Падалко Ніна Йосипівна

РЕКОМЕНДОВАНА ДО ЗАХИСТУ

Протокол №___

засідання кафедри теорій функцій та методики

навчання математики від __ ________ 2024 року

Завідувач кафедри

доц. Гембарська С. Б. ________________

ЛУЦЬК – 2024

Зміст

Вступ

Глибоке розуміння математичної термінології та методів математики сприяє кращому засвоєнню математики. Це дає можливість її застосовувати в інших науках. Модуль – це одна з найцікавіших та багатогранних тем у математиці. Проте на засвоєння знань з даної теми приділяється мало часу. Базові підручники з математики містять лише окремі задачі на модуль числа, але з модулем потрібно працювати і протягом інших тем, які вивчають у 6-11 класах. Засвоєння цього поняття потрібне не лише для вивчення алгоритмів арифметичних дій з додатними та від'ємними числами. Воно сприяє в учнів формуванню абстрактного та алгоритмічного мислення, логічного мислення, наочно-образного мислення. Для перевірки в учнів наявності цих типів мислення включають завдання на модуль числа у тест НМТ Поняття модуля широко використовується в інших дисциплінах, зокрема, у фізиці та хімії.

Навчання – це досить клопіткий процес, який потребує багато часу, терпіння, зусиль та зосередженості. Під час військового стану важко налаштувати себе до вивчення нового матеріалу. Повітряні тривоги, новини кожного разу травмують дитячу психіку. Тому навчальний процес потребує чітких, швидких та вчасних рішень, доступних роз'яснень, нових підходів та методів викладання. Незалежно від форм навчання вчитель повинен підтримувати, допомагати та полегшувати навчання, особливо якщо діти вивчають математику. Тема «Рівняння та нерівності з модулями» тяжко сприймалася і при навчанні у мирний час, а тепер це стає ще складнішим.

Актуальність дослідження. Труднощі, які виникають в учнів при розв'язанні рівнянь та нерівностей з модулем, підборі методів та способів розв'язування, обумовлюють необхідність глибшого вивчення цієї теми.

Мета: перевірити методику вивчення рівнянь та нерівностей з модулем в шкільному курсі математики, розглянути та проаналізувати програми які допомагають покращити навчальний процес, розробити методику вивчення теми «Рівняння та нерівності з модулем» у курсі за вибором.

Для досягнення поставленої мети слід вирішити наступні завдання:

1. Проаналізувати шкільні програми і підручники та рекомендовані засоби ІКТ за темою «Рівняння та нерівності з модулем».
2. Розробити методику вивчення теми «Рівняння та нерівності з модулем» з використанням ІКТ (програмних засобів рекомендованих програмою).
3. Перевірити методику вивчення теми «Рівняння та нерівності з модулем».

Об'єктом дослідження є рівняння та нерівності з модулем.

Предметом дослідження є методи й алгоритми розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем з використанням ІКТ (програмних засобів рекомендованих програмою).

Практичне значення одержаних результатів. Ознайомлення з матеріалами магістерської роботи стане у пригоді здобувачам освіти при підготовці до НМТ та вчителям при викладанні даної теми чи курсу за вибором.

Апробація дослідження:

- Участь у Всеукраїнській інтернет-конференції «Професійна компетентність педагога: теорія, методика, практика», яка проходила 18 квітня 2024 року з подальшою публікація тез «Активізація вивчення математики в сучасних умовах» [30, ст.121]
- Публікація тез «Розв'язування рівняння з модулем, що містить параметр за допомогою ІКТ» до збірника тез доповідей учасників XIII Міжнародної науково-практичної конференції «Математика. Інформаційні технології. Освіта» Луцьк-Світязь 31 травня – 2 червня 2024 року. [18, ст.234]

Структура роботи. Робота складається з вступу, двох розділів, які, у свою чергу, поділяються на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. У даній роботі розглядаються методи розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем, використання ІКТ на уроках математики.

Розділ 1.

Теоретичні та методологічні основи поняття рівнянь та нерівностей з модулем

1.1 Історія розвитку поняття модуля

Математика є однією з найдавніших наук, чиї основні концепції формувалися ще в глибоку давнину, коли людина розв’язувала задачі прикладного характеру. Поняття «модуль числа» посідає значне місце в математичній теорії, яке склалося в результаті розвитку математики та алгебри протягом століть. Основи цього поняття беруть початок в античному світі, де давньогрецькі вчені вивчали відстань на числовій прямій, хоч і не використовували термін «модуль» безпосередньо.

Перші кроки до усвідомлення концепції модуля були здійснені в середньовічній арабській математиці. Аль-Хорезмі (Джафар Мухаммад Аль-Хорезмі), арабський математик і астроном, працював над розв'язуванням рівнянь і досліджував числові відстані. Вплив його робіт, що охоплювали арифметику та алгебру, поширився на Західну Європу, де його визнали новатором у цих галузях. Досягнення Аль-Хорезмі увійшли в європейську математичну традицію, а термін «алгебра» походить від назви його книги «Скорочений трактат про Джабр і Мугабала». Незважаючи на відсутність прямих згадок про поняття модуля, вважається, що Аль-Хорезмі розглядав числові відстані як важливу концепцію.

Завдяки перекладам арабських текстів у середньовіччі математика та алгебра арабського світу стали доступними європейським вченим. Математики, такі як Фібоначчі та Орестій Макеллі, вивчали числові відстані і застосовували їх до математичних задач. Фібоначчі, зокрема, виявляв великий інтерес до арабських алгебраїчних методів, оскільки навчався у мусульманського вчителя.

Перше формальне визначення модуля як відстані від початку координат до певної точки приписують Роджеру Котсу, хоча це досягнення і досі викликає сумніви. Готфрід Лейбніц також використовував термін «модуль» (від лат. modulus — «міра»), однак його загальне використання стало стандартом лише після робіт Карла Вейєрштрасса. Наприкінці XIX століття Огюстен Коші та Жан

Роберт Арган розширили поняття «модуль» для комплексних чисел, а Хендрик Лоренц застосував його до позначення довжини вектора. Відоме нині позначення модуля було запропоноване Карлом Нейманом і згодом закріпилося в мовах програмування.

Сучасне поняття модуля числа охоплює широкі сфери — від теорії чисел і алгебри до математичного аналізу. Воно використовується для опису відстаней на числовій прямій, розв'язання рівнянь і математичних задач різної природи, що свідчить про його важливість у сучасній математиці.

1.2 Основні означення про модуль (алгебраїчне та геометричне)

Означення 1. Модулем невід'ємного числа називається саме це число, а модулем від'ємного числа – протилежне йому додатне число, тобто $|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0; \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$

Геометричне означення модуля числа: модулем називають відстань від початку відліку до точки, що зображує дане число на координатній прямій, саме тому модуль числа набуває лише невід'ємних значень.

Означення 2. Рівняння $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$=$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається рівнянням з модулем, якщо воно містить невідомі або функції від невідомих під знаком модуля.

Означення 3. Нерівності з модулем називаються нерівності, що містять невідомі або функції від невідомих під знаком модуля.

Розв'язуючи рівняння і нерівності з модулем, використовують таке твердження: якщо область визначення E заданого рівняння (нерівності) подамо у вигляді об'єднання кількох множин : $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_s$, розв'яжемо це рівняння (нерівність) окремо на кожній з множин і потім об'єднаємо всі знайдені множини розв'язків, то дістанемо множину всіх розв'язків заданого рівняння (нерівності).

1.3 Основні методи розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем

Розв'язування рівнянь з модулем зводиться до розв'язування відповідних сукупностей рівнянь або мішаних систем рівнянь і нерівностей, що не містять невідомих і функцій під знаком модуля, розв'язування нерівностей з модулями зводиться до розв'язання сукупностей або систем звичайних нерівностей.

1.3.1 Методи розв'язування рівнянь з модулем

1) Найпростішими рівняннями з модулем з одним невідомим є рівняння виду: $|f(x)|=a$, (1) де $f(x)$ – деяка елементарна функція від невідомого x, а a – деяке число. Якщо $a<0$, то рівняння (1) розв'язків не має. Якщо $a \geq 0$, то, як випливає з означення модуля, рівняння (1) еквівалентне сукупності рівнянь $\left[\begin{array}{l} f(x)=a; \\ f(x)=-a. \end{array}\right.$ (2)

Отже, його розв'язання зводиться до розв'язування цієї сукупності рівнянь.

2) Рівняння виду $\Phi(|f(x)|)=0$ (3) за допомогою підстановки $|f(x)|=t$ зводиться до рівняння $\Phi(t)=0$, (4). Якщо рівняння 4 має розв'язки $t_1, t_2, \dots, t_m$, то для відшукання x потрібно розв'язати сукупність рівнянь $\left[\begin{array}{l} |f(x)|=t_1; \\ |f(x)|=t_2; \\ \quad\dots \\ |f(x)|=t_m. \end{array}\right.$ (5)

3) Рівняння виду $F(x, |x|) = 0$ (6), де $F(x, |x|)$ – деяка функція від x і $|x|$, рівносильне сукупності мішаних систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} F(x,x)=0; \\ x \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} F(x,-x)=0; \\ x<0. \end{cases} \end{array}\right.$ (7) Оскільки при $x \geq 0$ $F(x,|x|)=F(x,x)$, а при $x<0$ $F(x,|x|)=F(x,-x)$.

Отже, розв'язання рівняння (6) зводиться до розв'язання сукупностей систем (7).

Якщо функція $F(x, |x|)$ парна або непарна , то розв'язування рівняння (6) зводиться до розв'язування мішаної системи $\begin{cases} F(x,x)=0; \\ x \geq 0; \end{cases}$ (8) або $\begin{cases} F(x,-x)=0; \\ x<0. \end{cases}$ (9)

Справді, якщо $F(x, |x|)$ – функція парна або непарна, то відмінні від нуля корені рівняння (6) попарно протилежні, тобто якщо відмінне від нуля число c є коренем рівняння (6), то й протилежне йому число $-c$ також буде коренем цього рівняння.

Отже, для відшукання коренів рівняння (6) достатньо розв'язати одну з систем (8) і (9) і до знайдених коренів приєднати протилежні їх знаки.

4) Рівняння виду $|f(x)| = \varphi(x),$ (10) де $f(x)$ та $\varphi(x)$ – деякі функції від невідомого x, рівносильне сукупності мішаних систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = \varphi(x); \\ \varphi(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = -\varphi(x); \\ \varphi(x) \geq 0, \end{cases} \end{array}\right.$ а також сукупності $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = \varphi(x); \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = -\varphi(x); \\ f(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Отже, розв'язання рівняння (10) зводиться до розв'язання однієї з цих сукупностей.

5) Рівняння виду $|f_1(x)| \pm |f_2(x)| \pm \cdots \pm |f_n(x)| \pm \varphi(x) = 0$ (11) , де $f_i(x)$ (i =1, 2, 3, … , n) і $\varphi(x)$ – деякі елементарні функції від x, розв'язуються так.

Знайдемо спочатку область визначення функції $F(x) = |f_1(x)| \pm |f_2(x)| \pm \cdots \pm |f_n(x)| \pm \varphi(x)$, тобто переріз областей визначення функцій $f_i(x)$ (i =1, 2, 3, … , n) і $\varphi(x)$. Оскільки функції $f_i(x)$ – елементарні, то всі вони неперервні в цій області. Тоді відшукаємо розв'язки функцій $f_i(x)$ (i =1, 2, 3, …, n). Нехай ними є числа $b_1 < b_2 < \cdots < b_l$. Ці числа поділяють область визначення функцій $F(x)$ на деякі інтервали $(c_0, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_{l-1}, c_l)$, де $c_j = const$ (j= 1, 2, … , l) , на кожному з яких функції $f_i(x)$ (i =1, 2, 3, … , n) неперервні і не мають коренів. Тому на кожному з цих інтервалів функції $f_i(x)$ (i =1, 2, 3, …, n) зберігають свої знаки.

Далі розглядаємо рівняння (11) послідовно на кожному з проміжків $c_k \leq x < c_{k+1}$, (k = 1, 2, …, l-1). Якщо на цьому проміжку функція $f_i(x)$ (i =1, 2, 3, … , n) невід'ємна, тобто $f_i(x) \geq 0$, то замінюємо в рівнянні (11) вираз $|f_i(x)|$ функцією $f_i(x)$, а якщо на цьому проміжку $f_i(x) \leq 0$, то замінимо вираз $|f_i(x)|$ функцією $-f_i(x)$. В результаті отримуємо рівняння без модулів, яке на проміжку $c_k \leq x < c_{k+1}$ рівносильне рівнянню (11). Розв'язуємо це рівняння і отримуємо корені рівняння (11), що належать розглянутому проміжку.

Отже, розглянувши рівняння (11) послідовно на кожному з проміжків $c_k \leq x < c_{k+1}$, (k = 1, 2, …, l-1) і знайшовши його корені, що належать кожному з них, знайдемо всі корені рівняння (11).

6) Ще одним методом розв'язування рівнянь з модулями є графічний спосіб. Суть якого полягає в тому, щоб побудувати графіки функцій, які входять до обох частин рівняння. Якщо побудовані графіки перетнуться, то коренями рівняння будуть точки перетину графіків функцій. А якщо графіки не перетнуться, то можна зробити висновок, що рівняння розв'язків не має.

Отже, щоб розв'язати рівняння з модулем використовують такі методи: метод інтервалів, графічний метод, метод розв'язання сукупності систем.

Приклад 1. [4, ст. 322] $|\sin x + \cos x| = 1$

Розв'язання. Це рівняння виду $|f(x)|=a$, і воно еквівалентне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 1; \\ \sin x + \cos x = -1. \end{array}\right.$$

Розв'яжемо перше рівняння сукупності:

$$\sin x + \cos x = 1,$$

$$\sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin x \times \sin\frac{\pi}{4} + \cos x \times \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n\ , n \in Z.$$

Аналогічно розв'яжемо друге рівняння сукупності:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\ , n \in Z.$$

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ або $x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\ , n \in Z.$

Приклад 2. [4, ст. 323] $|x|^3 - 2x^2 - |x| + 2 = 0$

Розв'язання. Це рівняння виду *Ф(|f(x)|)=0*. Введемо заміну $|x| = t$, матимемо $t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$. Погрупуємо доданки, та винесемо спільні доданки за дужки, отримаємо:

$$t^2(t-2) - (t-2) = 0,$$

$$(t^2 - 1)(t-2) = 0,$$

$$(t-1)(t+1)(t-2) = 0.$$

Прирівнявши кожен множник до 0, отримаємо: $t_{1,2} = \pm 1, t_3 = 2$. Оскільки модуль не може бути від'ємним числом, то отримаємо наступну сукупність: $\left[\begin{array}{l}|x| = 1;\\ |x| = 2.\end{array}\right.$ Звідси $x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm 2$.

Відповідь: $\pm 1, \pm 2$.

Приклад 3. [4, ст. 324] $3^{|x^2-2x-1|} = 9$

Розв'язання. Запишемо це рівняння в іншому вигляді: $3^{|x^2-2x-1|} = 3^2$. Воно рівносильне рівнянню : $|x^2 - 2x - 1| = 2$.

Це рівняння виду |*f(x)*|=a, воно еквівалентне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}x^2 - 2x - 1 = 2;\\ x^2 - 2x - 1 = -2.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x^2 - 2x - 3 = 0;\\ x^2 - 2x + 1 = 0.\end{array}\right.$$

За теоремою Вієта маємо такі розв'язки: $x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ x_{3,4} = 1$

Відповідь: ± 1, 3.

Приклад 4. [4, ст. 325] $\sin|x| \cos x - \frac{1}{2} = 0$

Розв'язання. Оскільки дана функція $F\ (x, |x|) = \sin|x| \cos x - \frac{1}{2}$ – парна, то щоб розв'язати це рівняння необхідно знайти корені мішаної системи і до знайдених розв'язків приєднати протилежні їх числа.

$$\left[\begin{array}{c}\sin x \cos x - \dfrac{1}{2} = 0;\\ x \geq 0.\end{array}\right.$$

Розв'яжемо перше рівняння системи:

$$\sin x \cos x - \tfrac{1}{2} = 0,$$

$$2\sin x\cos x = 1,$$

$$\sin 2x = 1,$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Відповідь: $x = \pm\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right), n \in Z$

Приклад 5. [4, ст. 326] $2^{2|x|} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

Розв'язання. Це рівняння виду $F\,(x, |x|) = 0$, і воно рівносильне сукупності мішаних систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0; \\ x \geq 0;\end{cases} \\ \begin{cases}2^{-2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0; \\ x < 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Розв'яжемо першу систему сукупності: $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$. Введемо заміну $2^x = t\ (t \geq 1)$. Отримуємо $t^2 - 6t + 8 = 0$. За теоремою Вієта маємо такі корені: $t_1 = 4, t_2 = 2$.

Таким чином, для відшукання розв'язків даної системи маємо сукупність рівнянь $\left[\begin{array}{l}2^x = 4; \\ 2^x = 2,\end{array}\right.$ звідси $x_1 = 2, x_2 = 1$.

Розв'яжемо тепер другу систему сукупності: $2^{-2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

Введемо заміну $2^x = t\ (0 < t < 1)$. Отримуємо $\frac{1}{t^2} - 6t + 8 = 0$. Коренів, які б задовольняли умову $0 < t < 1$, це рівняння не має.

Отже, дане рівняння має два розв'язки: $x_1 = 2, x_2 = 1$.

Відповідь: 1, 2.

Приклад 6. [4, ст. 327] $|\sin x| = \sin 3x$

Розв'язання. Це рівняння виду $|f(x)| = \varphi(x)$, отже, воно рівносильне сукупності мішаних систем: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x = \sin 3x; \\ \sin x \geq 0\,;\end{cases} \\ \begin{cases}\sin x = -\sin 3x; \\ \sin x < 0\,;\end{cases}\end{array}\right.$.

Розв'яжемо першу систему сукупності: $\begin{cases}\sin x = \sin 3x; \\ \sin x \geq 0\,.\end{cases}$

$$\sin x - \sin 3x = 0,$$

$$\cos 2x \sin x = 0,$$

$$\cos 2x = 0 \text{ або } \sin x = 0,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n \text{ та } x = \pi n, \ n \in Z.$$

З цих розв'язків виберемо ті, які задовольняють умову $\sin x \geq 0$. Значення $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$ задовольняють цю умову при $n = 4k, n = 4k + 1, k \in Z$, а значення $x = \pi n$ – при будь-якому $n \in Z$. Отже, розв'язками першої системи є $x = \pi k,\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$.

Розв'яжемо тепер другу систему сукупності: $\begin{cases} \sin x = -\sin 3x; \\ \sin x < 0\,. \end{cases}$

$$\sin x + \sin 3x = 0,$$

$$\sin 2x \cos x = 0,$$

$$2 \sin x\, (\cos x)^2 = 0,$$

$$(\cos x)^2 = 0 \text{ або } \sin x = 0,$$

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n \text{ та } x = \pi n, \ n \in Z.$$

З цих розв'язків виберемо ті, які задовольняють умову $\sin x < 0$. $x = \pi n$ – не задовольняють умову, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ – задовольняють умову, $n \in Z$.

Відповідь: $x = \pi k,\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Приклад 7. [4, ст. 325] $|6x^3 - 2x^2 + 4x - 33| = 10x - 35$

Розв'язання. Це рівняння виду $|f(x)| = \varphi(x)$, отже, воно рівносильне сукупності мішаних систем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6x^3 - 2x^2 + 4x - 33 = 10x - 35; \\ 10x - 35 \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 6x^3 - 2x^2 + 4x - 33 = -10x + 35; \\ 10x - 35 \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Розв'яжемо першу систему сукупності: $\begin{cases} 6x^3 - 2x^2 + 4x - 33 = 10x - 35; \\ 10x - 35 \geq 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x^3 - 2x^2 + 4x - 10x - 33 + 35 = 0; \\ 10x - 35 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x^3 - 2x^2 - 6x + 2 = 0; \\ 10x \geq 35. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1) = 0; \\ x \geq 3{,}5. \end{cases}$$

$$\begin{cases}(x^2-1)(6x-2)=0;\\ x\geq 3{,}5.\end{cases}$$

$$(x^2-1)=0 \text{ або } (6x-2)=0,$$

$$x=\pm 1 \text{ або } x=\frac{1}{3},$$

$$\begin{cases}x=\pm 1;\\ x=\dfrac{1}{3};\\ x\geq 3{,}5.\end{cases}$$

Дана система розв'язків не має.

Розв'яжемо тепер другу систему сукупності:

$$\begin{cases}6x^3-2x^2+4x-33=-10x+35;\\ 10x-35\geq 0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}6x^3-2x^2+14x-68=0;\\ x\geq 3{,}5.\end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння системи.

$$6x^3-2x^2+14x-68=0,$$

$$6x^3-48-2x^2+8+14x-28=0,$$

$$6(x^3-8)-2(x^2-4)+14(x-2)=0,$$

$$6(x-2)(x^2+2x+4)-2(x-2)(x+2)+14(x-2)=0,$$

$$(x-2)(6x^2+12x+24-2x-4+14)=0,$$

$$(x-2)(6x^2+10x+34)=0,$$

$$x-2=0 \text{ або } 6x^2+10x+34=0,$$

$$x=2 \text{ або } 3x^2+5x+17=0,$$

$$D=25-4\cdot 3\cdot 17=-179.$$

Дискримінант менше 0, тому дійсних розв'язків квадратне рівняння не має.

$$\begin{cases}x=2\\ x\geq 3{,}5\end{cases}$$

Друга система розв'язків немає.

Отже, розглянуте нами рівняння розв'язків немає.

Відповідь: розв'язків немає.

Приклад 8. [4, ст. 329] $|x^2-x-2|-|4x-1|=3$

Розв'язання. Це рівняння виду $|f_1(x)|\pm|f_2(x)|\pm\cdots\pm|f_n(x)|\pm\ \varphi(x)=0$.

Функції $f_1(x) = x^2 - x - 2$ та $f_2(x) = 4x - 1$ визначені та неперервні при всіх дійсних значеннях x. Знайдемо нулі підмодульних виразів: $x^2 - x - 2 = 0$, $4x - 1 = 0$. За теоремою Вієта квадратне рівняння має такі розв'язки: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. А інше рівняння має такий розв'язок: $x_3 = \frac{1}{4}$. Дані розв'язки поділяють множину всіх дійсних чисел на такі проміжки: $(-\infty;\ -1)$, $\left[-1;\ \frac{1}{4}\right)$, $\left[\frac{1}{4}; 2\right)$, $[2;\ +\infty)$. Складемо таблицю, де вкажимо знаки підмодульних функцій (Таблиця 1).

Таблиця 1.

	$(-\infty;\ -1)$	$\left[-1;\ \frac{1}{4}\right)$	$\left[\frac{1}{4}; 2\right)$	$[2;\ +\infty)$
$\lvert x^2 - x - 2\rvert$	$x^2 - x - 2$	- $(x^2 - x - 2)$	- $(x^2 - x - 2)$	$x^2 - x - 2$
$\lvert 4x - 1\rvert$	- $(4x - 1)$	- $(4x - 1)$	$4x - 1$	$4x - 1$

Тепер розв'яжемо дане рівняння на кожному з проміжків:

1) Розглянемо проміжок $(-\infty;\ -1)$: $x^2 - x - 2 + 4x - 1 = 3$,

$$x^2 + 3x - 6 = 0,$$

$$D = 9 + 24 = 33,$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

З цих значень x тільки $x = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}$ належить проміжку $(-\infty;\ -1)$.

2) Розглянемо проміжок $\left[-1;\ \frac{1}{4}\right)$: $-x^2 + x + 2 + 4x - 1 = 3$,

$$x^2 - 5x + 2 = 0,$$

$$D = 25 - 8 = 17,$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Жодне з цих розв'язків не належать проміжку $\left[-1;\ \frac{1}{4}\right)$.

3) Розглянемо проміжок $\left[\frac{1}{4}; 2\right)$: $-x^2 + x + 2 - 4x + 1 = 3$,

$$x^2 + 3x = 0,$$

$$x(x + 3) = 0,$$

$$x_1 = 0 \text{ або } x_2 = -3.$$

Жодне з цих розв'язків не належать проміжку $\left[\frac{1}{4}; 2\right)$.

4) Розглянемо проміжок $[2; +\infty)$: $x^2 - x - 2 - 4x + 1 = 3$,

$$x^2 - 5x - 4 = 0,$$

$$D = 25 + 16 = 41,$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}.$$

З цих значень x тільки $x = \frac{5+\sqrt{41}}{2}$ належить проміжку $[2; +\infty)$.

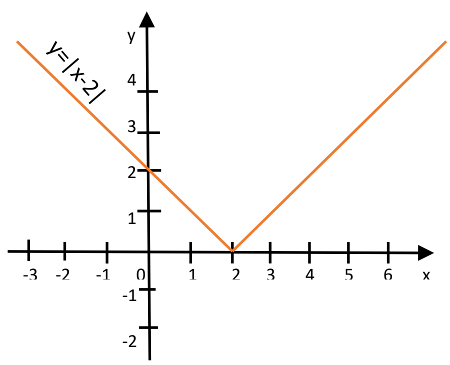
Отже, дане рівняння має два корені: $x_1 = \frac{-3-\sqrt{33}}{2}, x_2 = \frac{5+\sqrt{41}}{2}$.

Відповідь: $x_1 = \frac{-3-\sqrt{33}}{2}, x_2 = \frac{5+\sqrt{41}}{2}$.

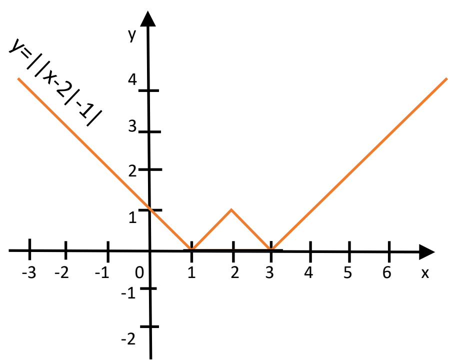
Приклад 9. [4, ст. 329] $\left|\left||x-2|-1\right|-2\right| = x + 1$

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій: $y = \left|\left||x-2|-1\right|-2\right|$, $y = x + 1$.

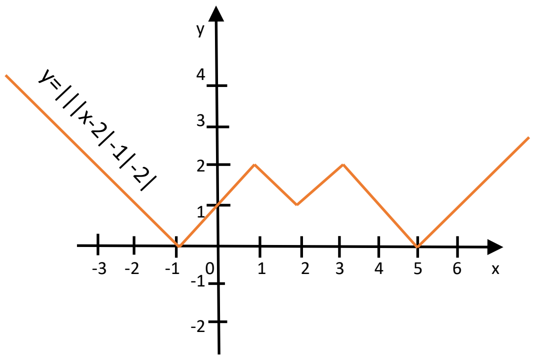
Мал.1



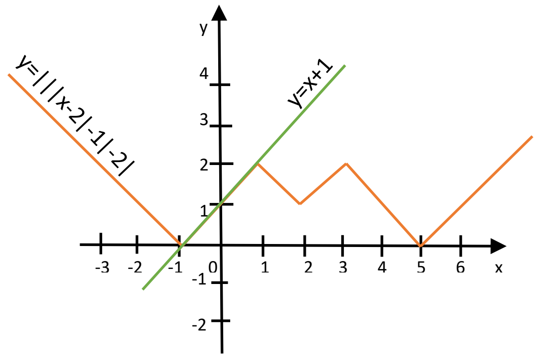
Мал.2



Мал.3



Мал.4



Як бачимо на малюнку 4 графіки функцій: $y = \left|\left||x-2|-1\right|-2\right|$, $y = x+1$ перетинаються, тому розв'язком даного рівняння є числа з проміжку $x \in [-1; 1]$.
Відповідь: $x \in [-1; 1]$.

1.3.2 Методи розв'язування нерівностей з модулем

1) Найпростішими нерівностями з модулем з одним невідомим є нерівність виду: $|f(x)|<a$, (12) де $f(x)$ – деяка елементарна функція від невідомого x, а a – деяке число. Розв'язується за допомогою системи: $\begin{cases} f(x) < a; \\ f(x) > -a. \end{cases}$ (13)

Нерівність виду : $|f(x)|>a$, (14), розв'язується за допомогою сукупності: $\left[\begin{array}{l} f(x) > a; \\ f(x) < -a. \end{array}\right.$ (15)

2) Нерівність виду $|f(x)| < \varphi(x)$, (16) де $f(x)$ та $\varphi(x)$ – деякі функції від невідомого x, рівносильна системі: $\begin{cases} f(x) < \varphi(x); \\ f(x) > -\varphi(x). \end{cases}$ (17) А нерівність виду $|f(x)| > \varphi(x)$, (18) рівносильна сукупності: $\left[\begin{array}{l} f(x) > \varphi(x); \\ f(x) < -\varphi(x). \end{array}\right.$ (19)

3) **Графічний метод.**

Цей метод застосовується не тільки як ілюстрація, а й щоб перевірити чи правильно розв'язана нерівність. Суть методу полягає в тому, що коли дано нерівність $|f(x)| < \varphi(x)$, то на одному рисунку будують графік функції $y = |f(x)|$ та $y = \varphi(x)$ і знаходять область тих значень аргументу x, для яких точки графіка функції $y = |f(x)|$ розміщені нижче відповідних точок графіка $y = \varphi(x)$.

4) **Метод проміжків.**

Метод базується на теоремі.

Теорема. Неперервна функція зберігає знак на проміжку, де вона визначена і не має коренів.

Геометричний зміст теореми: якщо неперервна крива не перетинає вісь OX , то вона лежить по один бік від цієї осі.

Щоб розв’язати нерівність $|f(x)| < a$ або $|f(x)| > a$ методом проміжків, треба спочатку знайти проміжки, в яких функція неперервна й не має коренів, потім з’ясувати знак функції на кожному із проміжків. Для цього досить знайти знак $f(x)$ в одній з точок відповідного проміжку. Об’єднання проміжків, в яких $|f(x)| < a$ або $|f(x)| > a$ і є множиною розв’язків даної нерівності.

Приклад 1. [12, ст. 10] $|\log_{\frac{1}{2}} x| \leq 1$

Розв’язання. Це нерівність виду *|f(x)|<a*, тому рівносильна такій системі: $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x \leq 1; \\ \log_{\frac{1}{2}} x \geq -1. \end{cases}$ Розв’яжемо її.

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}; \\ \log_{\frac{1}{2}} x \geq -\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}; \\ \log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} 2\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0; \\ x \geq \frac{1}{2}; \\ x \leq 2. \end{cases}$$

Відповідь: x є $[-\frac{1}{2};\ 2]$

Приклад 2. [12, ст.78] $|\log_3 x| \geq 1$

Розв’язання. Це нерівність виду *|f(x)|>a*, тому рівносильна такій сукупності: $\left[\begin{array}{l} \log_3 x \geq 1; \\ \log_3 x \leq -1. \end{array}\right.$ Розв’яжемо її.

$$\left[\begin{array}{l}\log_3 x \geq \log_3 3\,; \\ \log_3 x \leq -\log_3 3.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_3 x \geq \log_3 3; \\ \log_3 x \leq \log_3 \dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x > 0; \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 3; \\ x \leq \dfrac{1}{3}.\end{array}\right.\end{cases}$$

Відповідь: $x \in \left[0;\ \frac{1}{3}\right] \cup [3;\ +\infty)$.

Приклад 3. [12, ст.42] $|x^2 + x - 1| < 2x - 1$

Розв'язання. Це нерівність виду $|f(x)| < \varphi(x)$, тому рівносильна такій системі: $\begin{cases} x^2 + x - 1 < 2x - 1; \\ x^2 + x - 1 > 1 - 2x. \end{cases}$ Розв'яжемо її.

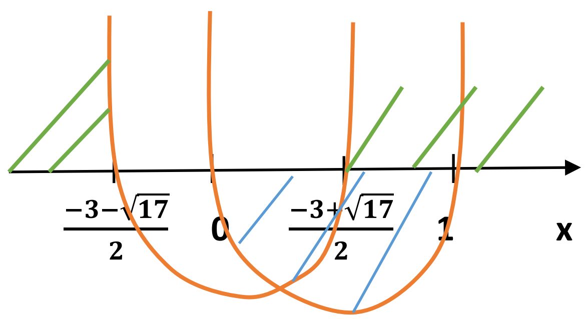
$$\begin{cases} x^2 - x < 0; \\ x^2 + 3x - 2 > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-1) < 0; \\ x^2 + 3x - 2 > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 0; \\ x = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{2}; \\ x = \dfrac{-3 - \sqrt{17}}{2}. \end{cases} \end{cases}$$

Зобразимо розв'язки на координатній прямій.

Мал.5



Як бачимо з малюнку 5, розв'язком є проміжок $x \in \left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; 1\right)$.

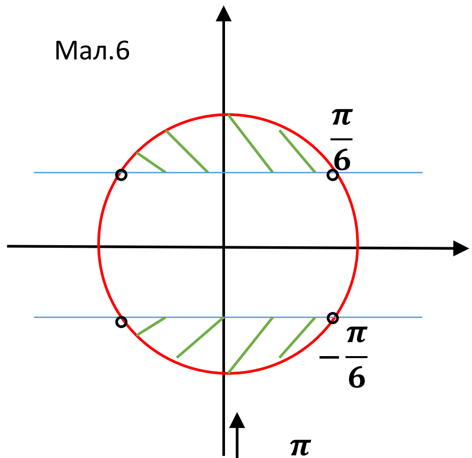
Відповідь: $x \in \left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; 1\right)$.

Приклад 4. [12, ст.12] $|\sin x| < \frac{1}{2}$

Розв'язання. Це нерівність виду $|f(x)|<a$, тому рівносильна такій системі: $\begin{cases} \sin x < \frac{1}{2}; \\ \sin x > -\frac{1}{2}. \end{cases}$

Зобразимо розв'язки на графіку (Мал.6).

Мал.6



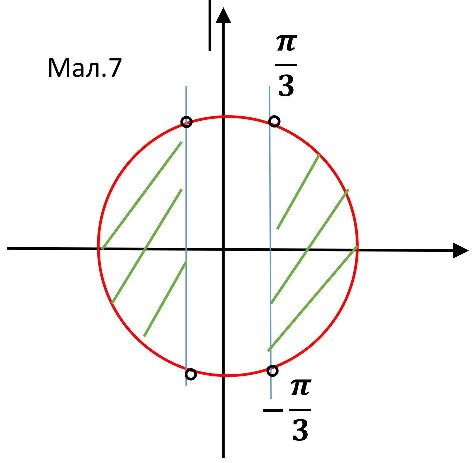
Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{\pi}{6} + \pi n\right), n \in Z.$

Приклад 5. [12, ст.13] $|\cos x| > \frac{1}{2}$

Розв'язання. Це нерівність виду $|f(x)|>a$, тому рівносильна такій системі: $\begin{cases} \cos x > \frac{1}{2}; \\ \cos x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$

Зобразимо розв'язки на графіку (Мал.7).

Мал.7



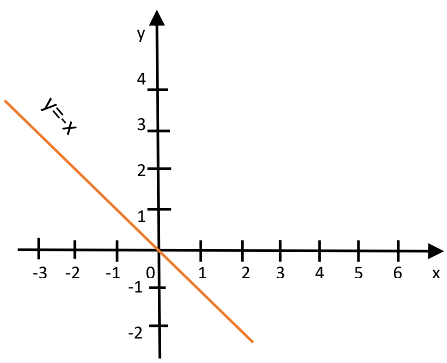
Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + \pi n;\ \frac{\pi}{3} + \pi n\right), n \in Z$

Приклад 6. [12, ст. 23] $1 - \big|1 - |1 - x|\big| < 0$

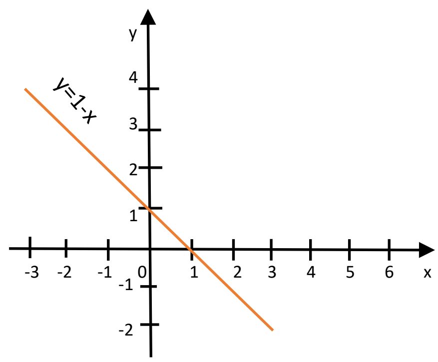
Розв'язання. Розв'яжемо цю нерівність графічним методом, для цього виконаємо наступні кроки:

1) Побудуємо графік функції $y = -x$ – це бісектриса 2-ої та 4-ої координатних чвертей. (Мал.8)
2) Побудуємо тепер графік функції $y = 1 - x$ – графік функції $y = -x$ переносимо на одну одиницю вправо. (Мал.9)

Мал.8

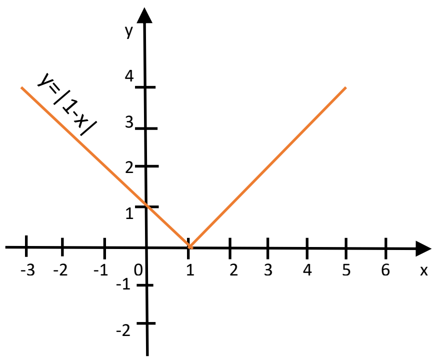


Мал.9

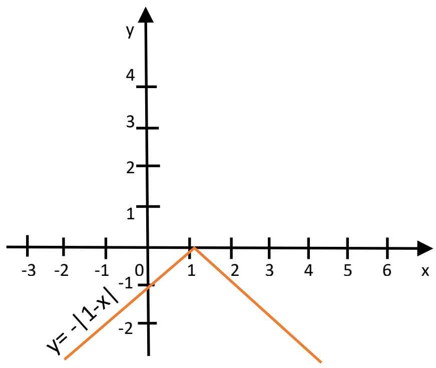


3) Побудуємо тепер графік функції $y = |1 - x|$ – графік функції $y = 1 - x$ симетрично відбиваємо відносно осі OX від'ємні значення y. (Мал.10)
4) Будуємо графік функції $y = -|1 - x|$ – графік функції $y = |1 - x|$ відбиваємо симетрично відносно осі OX. (Мал.11)

Мал.10

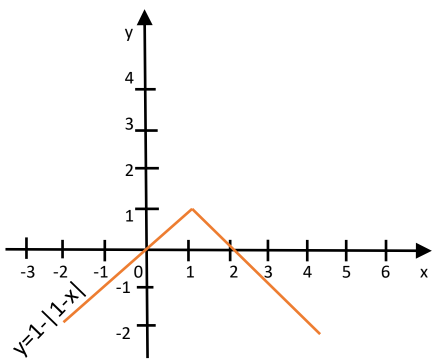


Мал.11

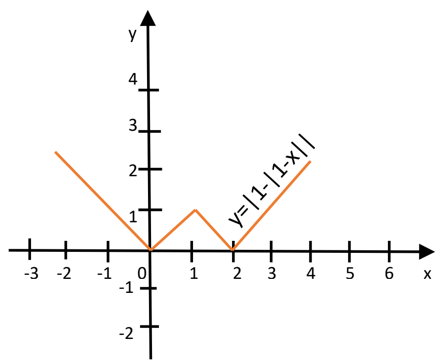


5) Будуємо графік функції $y = 1 - |1 - x|$ – графік функції $y = -|1 - x|$ піднімаємо вгору на одну одиницю. (Мал.12)
6) Будуємо графік функції $y = \big|1 - |1 - x|\big|$ – графік функції $y = 1 - |1 - x|$ симетрично відбиваємо відносно осі OX від'ємні значення y. (Мал.13)

Мал.12



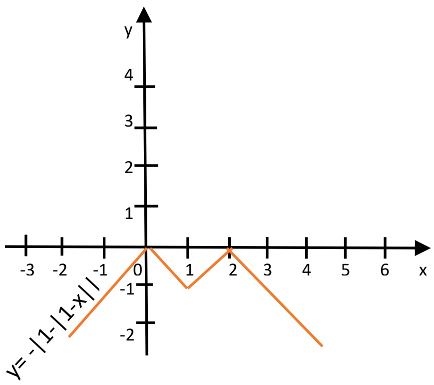
Мал.13



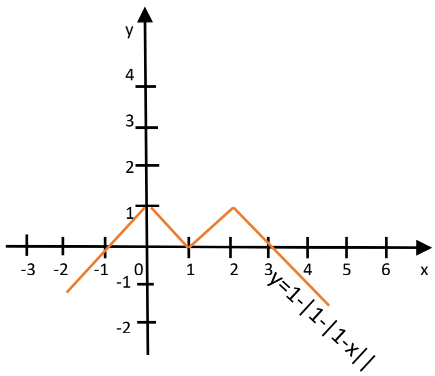
7) Тепер побудуємо графік функції $y = -\big|1 - |1 - x|\big|$, для цього відбиваємо симетрично відносно осі OX графік функції $y = \big|1 - |1 - x|\big|$. (Мал.14)
8) Побудуємо тепер графік функції $y = 1 - \big|1 - |1 - x|\big|$, для цього піднімаємо вгору на одну одиницю графік функції $y = -\big|1 - |1 - x|\big|$. (Мал.15)

9) Будуємо графік функції $y = 0$,та знаходимо розв’язок нерівності.(Мал.16)

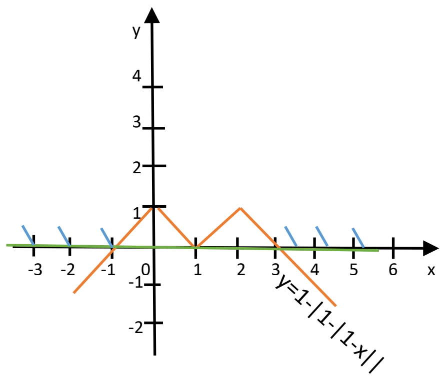
Мал.14



Мал.15



Мал.16



Відповідь: $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

1.4. Місце рівнянь та нерівностей з модулем у шкільному курсі математики

Пропедевтика вивчення теми «Рівняння та нерівності з модулем» розпочинається ще з 5 класу, коли учні вчаться порівнювати натуральні числа та розв’язувати рівняння. Розглянемо особливості вивчення теми «Модуль» та «Рівняння і нерівності з модулем» на основі підручників з математики та алгебри для середніх та старших класів авторів Істер О.С. та Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.

Поняття модуля числа вводиться у підручнику «Математика 6 клас» (автор Істер О. С.) при вивчення розділу «Раціональні числа та дії з ними», дана тема розглядається після вивчення тем: «Додатні та від’ємні числа. Число 0.», «Координатна пряма», «Протилежні числа. Цілі числа. Раціональні числа». Автор вводить поняття модуля числа, як відстань на координатній прямій від даного числа до початку координат. У даній темі пояснюється основне визначення та основні властивості модуля. У підручнику наведені приклади розв'язування деяких вправ на знаходження модуля числа, розв'язування рівнянь, що містять модуль та знаходження цілих розв'язків нерівностей з модулем. Підручник містить багато різнорівневих вправ, що дозволяє краще освоїти дану тему. Вправи на розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем присутні у кожному рівні складності, що дозволяє поступово формувати вміння та навички, розвивати логічне мислення та забезпечує глибоке засвоєння теми.

У підручнику «Математика 6 клас» (авторів Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.) поняття модуля аналогічно вивчається у розділі «Раціональні числа та дії з ними», після вивчення тих же тем, що й у підручнику «Математика 6 клас» (автор Істер О. С.). Поняття модуля вводиться аналогічно, як і у підручнику Істера О. С., проте прикладів розв'язання вправ менше. Підручник містить достатню кількість вправ для самостійного розв'язання, але завдань на розв'язування вправ та нерівностей з модулем набагато менше та наявні лише в одному рівні складності.

У підручнику «Алгебра 7 клас» (автор Істер О. С.) поняття модуля зустрічається при вивченні розділу «Лінійні рівняння та їх системи», а саме при вивченні теми «Лінійне рівняння з однією змінно». У цій темі розглядається поняття лінійного рівняння, та способи його розв'язування, присутні приклади розв'язання деяких прикладів. У підручнику є велика кількість різнорівневих вправ на розв'язування лінійних рівнянь з однією змінною, але вправи на розв'язування рівнянь з модулем, лише 4 рівня складності, що обмежує учнів.

У підручнику «Алгебра 7 клас» (авторів Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.) аналогічно поняття модуля зустрічається при вивченні розділу «Лінійні рівняння та їх системи» у темі «Лінійне рівняння з однією змінно». У підручнику наведені основні поняття та методи розв'язування лінійних рівнянь. Доречним є наведення розв'язання деяких рівнянь, зокрема рівняння, що містять модуль. Підручник містить велику кількість різнорівневих вправ, зокрема рівняння, що містять модуль є у всіх рівнях складності, і доречним є наявність вправ у підвищеному рівні складності, це дозволяє готувати учнів до більш складних вправ, що можуть зустрітися на НМТ.

При вивченні алгебри у 8 класі за підручником «Алгебра 8 клас» (автор Істер О. С.) учні стикаються з поняттям модуля впродовж усього курсу, зокрема, при вивченні таких тем: «Раціональні рівняння. Раціональні вирази.», «Функція $y = \frac{k}{x}$, її графік та властивості», «Властивості арифметичного квадратного кореня», «Квадратні рівняння. Неповні квадратні рівняння». У кожній з даних тем присутні рівняння, що містять модуль та функції з модулем, але таких вправ досить небагато, і вони лише 4 рівня складності.

При вивченні курсу алгебри за підручником «Алгебра 8 клас» (авторів Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.) поняття модуля зустрічається у темах: «Функція $y = \frac{k}{x}$», «Властивості арифметичного квадратного кореня», «Квадратні рівняння», як вправи для поглибленого вивчення.

За підручником «Алгебра 9 клас» (автор Істер О. С.) здобувачі освіти починають на вищому рівні вивчати розділ «Нерівності». У цьому розділі учні знайомляться із лінійними нерівностями, основними властивостями числових нерівностей, із означенням числових проміжків, ознайомлюються із поняттям множини та дії з ними. Наскрізною темою вивчення алгебри у 9 класі є функції, властивості функцій, елементарні перетворення функцій. Впродовж вивчення теми «Функція. Область визначення, область значень і графік функції.» здобувачі освіти вперше вивчають графік функції $y = |x|$, та його властивості. У підручнику подана теорія та приклади розв'язування вправ, є достатня кількість вправ різного рівня. При вивченні теми «Найпростіші перетворення графіків функції.» автор зосереджує увагу на теорії та конкретних прикладах розв'язування завдань, що дозволяє поступово сформувати в учнів навички роботи з графіками, забезпечуючи чітке розуміння кожного виду перетворення та його геометричної інтерпретації. Автор підібрав доцільні вправи різного рівня та типу, зокрема присутні вправи на побудову функції, що містить модуль, та вправи підвищеного рівня складності на розв'язування рівнянь графічним способом.

При вивченні курсу алгебри за підручником «Алгебра 9 клас» (авторів Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.) учні також знайомляться із тими ж вправами, але автори підібрали більшу кількість різнорівневих вправ. Зокрема, у підручнику наявні нерівності, що містять модуль різного рівня складності. При вивченні теми «Функція. Область визначення, область значень і графік функції.» автори не зосередили увагу на підборі теоретичного матеріалу для пояснення функції $y = |x|$, що може ускладнити засвоєння теми, оскільки без чіткого теоретичного пояснення учні ризикують неправильно інтерпретувати властивості функції $y = |x|$. Незважаючи на відсутність теоретичного матеріалу, автори включили у підручник вправи на побудову та дослідження даної функції різного рівня складності.

Змістовою лінією алгебри і початків аналізу старшої профільної школи є «Функції та функціональні залежності». Тому, вивчення математики варто починати з теми «Функції, їх властивості та графіки», яка є основою всіх подальших математичних досліджень. Ця тема дозволяє повторити та систематизувати знання про функції, отримані в базовій школі, а також поглибити та розширити їх, зокрема за рахунок вивчення степеневих функцій. Основна мета опрацювання даної теми виникає у підготовці учнів до освоєння нових типів функцій, таких як тригонометричні, степеневі, показникові та логарифмічні, а також у мотивації необхідності використання похідної для аналізу функцій. Ключовою ідеєю теми є демонстрація того, як функції можуть бути застосовані для моделювання реальних процесів.

У старшій школі значно розширюється зміст навчальної програми, таким чином, у фокусі опинились теми, пов’язані з обчисленнями, перетвореннями виразів, розв’язуванням рівнянь та нерівностей. Розглядаються нові класи рівнянь і нерівностей, а також ефективні методи їх розв'язування та застосування. Ці аспекти навчання пов'язані з вивченням властивостей функцій. Наприклад, у старшій школі учні працюють з такими темами, як «Ірраціональні нерівності», «Показникові нерівності», «Логарифмічні нерівності» та

«Тригонометричні нерівності», що сприяє формуванню більш глибокого розуміння функціональних залежностей.

Порівняльний аналіз підручників «Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень» для 10-11 класів авторів Істер О. С. та Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. подані у таблиці 2.

Таблиця 2.

Критерії	**«Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень» 10-11 класи автор Істер О. С.**	**«Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень» 10-11 класи авторів Мерзляк А. Г. та ін.**
Теоретичний аспект	Теорія подається обгрунтовано, з докладним поясненням кожного поняття. Особливий акцент зроблено на наведені формул, описі алгоритмів і властивостей функцій. Підручник містить приклади застосування математики в реальному житті, що стимулює інтерес до предмета.	Теорія викладена більш компактно та спрямована на основі. Більше уваги приділяється прикладному розвитку знань. Для теми, як-от «Ірраціональні рівняння» або «Логарифмічні рівняння», наведено короткі формулювання властивостей і алгоритмів розв'язання без зайвої деталізації. У тексті часто зустрічаються історичні довідки та приклади застосування теми в реальних умовах, що додає змісту прикладної спрямованості.

Практичний аспект	Містити багато завдань для самостійного опрацювання, які структуровані за рівнями складності.	Містить набагато більше завдань для самостійного розв’язування різного рівня складності, містить олімпіадні завдання.
Особливості	Наведені розгорнуті приклади розв'язування завдань, що полегшує сприйняття складних тем.	Акцентується увага на завданнях, які моделюють реальні ситуації, наприклад, у фінансах чи техніці.

1.5 Висновки до Розділу 1

Розгляд теоретичних та методологічних основ рівнянь і нерівностей з модулем показав, що ця тема є фундаментальною як у математиці загалом, так і в шкільному курсі зокрема. Його історичний розвиток показує поступовий перехід від простих геометричних уявлень про відстань до складних аналітичних підходів, що вимагає поняття абсолютного значення. Це засвідчує її важливість для поглиблення розуміння математичних зв'язків та структури числових систем.

Розглянуті методи розв’язування рівнянь та нерівностей з модулем дозволяють учням розвивати гнучкість мислення, уміння структурувати процес розв’язування задач.

Аналізуючи шкільні програми і підручники, виявилося, що тема рівнянь і нерівностей з модулем має значний освітній потенціал. Проте її показник у шкільному курсі часто потребує вдосконалення, обмежене висвітлення теоретичних основ і недостатня кількість прикладних завдань можуть ускладнити засвоєння цієї теми. Для ефективного навчання доцільно інтегрувати більш систематичний підхід до пояснення модуля властивостей та практичного застосування його методів.

Таким чином, рівняння і нерівність з модулем є розділом математики, який забезпечує формування ключових компетентностей, навичок і знань учнів.

Подальша модернізація підходів до викладання цієї теми сприятиме підвищенню інтересу до неї та кращому розумінню її практичного значення.

Розділ 2.

Застосування інформаційно-комунікаційних технологій для організації діяльності учнів у процесі вивчення теми «Рівняння та нерівності з модулем»

2.1. Поняття інформаційно-комунікаційних технологій

Інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ) – це комплекс методів, процесів, обладнання та програмних рішень, що забезпечують збирання, зберігання, обробку, передавання й використання інформації. ІКТ є основою сучасного інформаційного суспільства, де обмін інформацією стає ключовим аспектом у різних сферах життя: від освіти й науки до бізнесу та соціальної сфери. ІКТ сприяють розвитку освіти, надаючи можливості для дистанційного навчання, використання мультимедійних ресурсів, інтерактивних платформ тощо.

2.2. Опис та характеристика системи динамічної математики

Нове покоління учнів звикло для розв'язування проблеми у сфері освіти використовувати гаджети. Тому доцільним стане використання інформаційних технологій при вивченні математичних тем. Учні краще сприймають інформацію побачену на моніторі комп'ютера, телевізора, ніж написану учителем крейдою на дошці. Однією з програм, яка полегшить викладання нового матеріалу є онлайн-платформа Wordwall.

Wordwall – це інтерактивний застосунок, за допомогою якого можна створювати інтерактивні вправи для навчання та матеріали для друку. Інтерактивні вправи можна відтворювати на будь-якому веб-пристрої, наприклад, комп'ютері, планшеті, телефоні чи інтерактивній дошці. Учні та учениці можуть відтворювати їх самостійно, або це може робити вчитель чи вчителька в той час, як учні та учениці виконують вправу по черзі біля дошки.

Матеріали для друку можна видрукувати з сайту або завантажити у вигляді файлу PDF. Їх можна використовувати як додаток до інтерактивної вправи або як окрему вправу. Вправи створюються за допомогою шаблонів. Ці шаблони включають знайомі класичні формати, як-от вікторина і кросворд.

Даний застосунок доцільно використовувати на уроках математики у середній школі. Для викладання математики у старшій школі доцільно використовувати такі застосунки як GeoGebra, Symbolab, WolframAlpha, Desmos.

Розглянемо детальніше онлайн застосунок Desmos. Desmos – це графічний калькулятор, який дозволяє вам візуалізувати функції, графіки та розв'язувати різноманітні математичні задачі, включаючи рівняння та нерівності з модулем. Він є потужним інструментом для навчання та розв'язування математичних проблем.

Основний функціонал Desmos:

1. **Побудова графіків функцій.** Desmos дозволяє будувати графіки різноманітних функцій, зокрема лінійних, квадратичних, експоненційних, тригонометричних, логарифмічних тощо. Можливе створення графіків як окремих функцій, так і систем рівнянь, що дуже корисно для порівняння та аналізу.
2. **Дослідження параметрів і взаємозв'язків.** Desmos надає можливість змінювати параметри функцій в реальному часі, що дозволяє спостерігати, як зміни параметрів впливають на форму графіка.
3. **Анімація.** Desmos підтримує анімацію графіків, що допомагає пояснювати такі концепти, як періодичність та амплітуда в тригонометричних функціях.
4. **Візуалізація даних і таблиці.** Крім роботи з функціями, Desmos підтримує введення даних в таблиці та створення графіків на основі цих даних. Це особливо корисно для побудови діаграм та аналізу статистичних даних.
5. **Малювання фігур.** Desmos також дозволяє малювати геометричні фігури та працювати з нерівностями. Це розширює можливості використання платформи в геометрії, дозволяючи, наприклад, візуалізувати області, які відповідають системам нерівностей.

6. **Спільний доступ і збереження проєктів.** Всі графіки можна зберігати онлайн, ділитися ними через посилання або завантажувати для друку. Це зручно для домашніх завдань та проєктних робіт.

Переваги Desmos:

1. Доступність: Desmos працює прямо в браузері, що робить його доступним на будь-якому пристрої з інтернетом.
2. Безкоштовність: Платформа безкоштовна, що дозволяє її використовувати як у школах, так і вдома.
3. Простий інтерфейс: Інтуїтивно зрозумілий інтерфейс, що підходить як для початківців, так і для досвідчених користувачів.

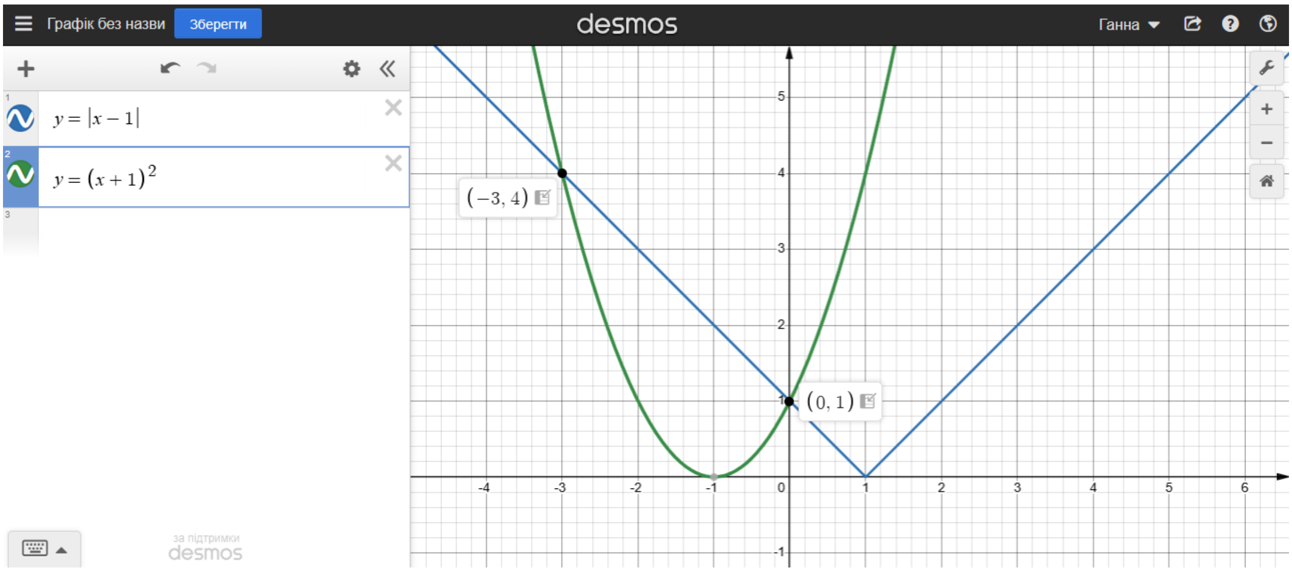
Desmos є чудовим інструментом для викладання математики і надає учням можливість глибше розуміти математичні концепції через наочні і динамічні приклади.

2.3. Технологія знаходження розв'язків рівнянь та нерівностей з модулем за допомогою онлайн сервісу Desmos.

Використання онлайн-сервісу Desmos для знаходження розв'язків рівнянь та нерівностей з модулем є ефективним інструментом, який дозволяє учням візуально досліджувати множину розв'язків і глибше зрозуміти сутність модуля через побудову графіків. Для розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем, необхідно вираз розглядати як дві функції. Відповідно у програму вводимо дані функцій і програма за допомогою коду будує графіки даних функцій. За даним графіком визначаємо розв'язки рівнянь та нерівностей.

Приклад 1. [10, ст. 96] $|x-1|=(x+1)^2$

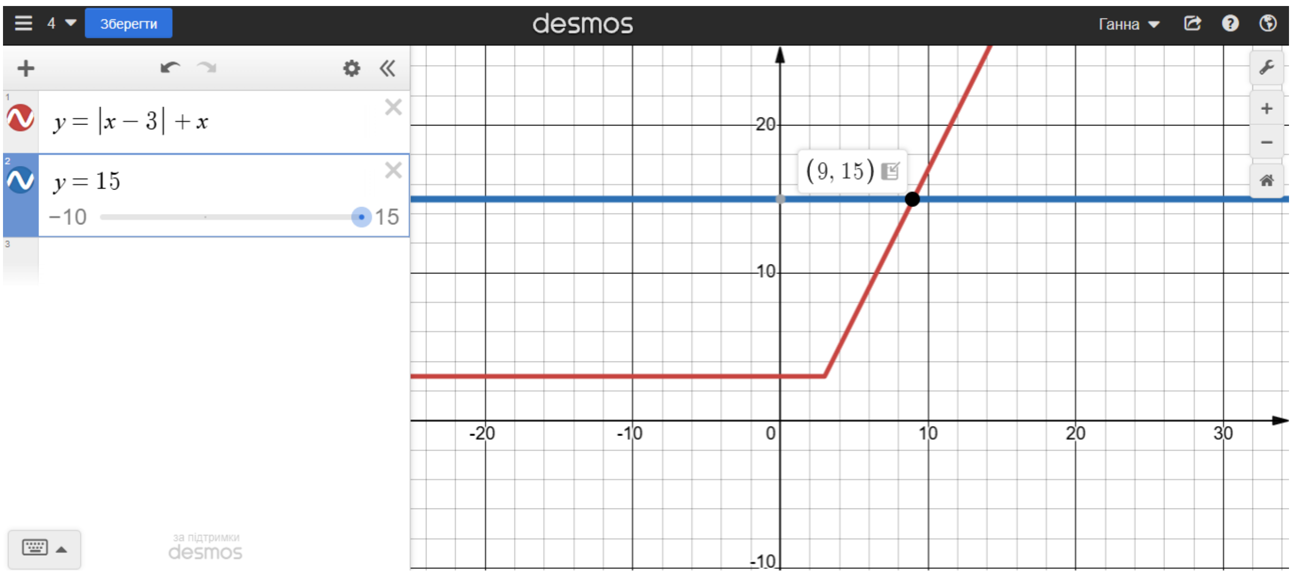
Розв'язання. Це рівняння виду $|f(x)|=\varphi(x)$. Для розв'язку даного рівняння у програмі Desmos, вводимо дані функцій: $y=|x-1|, y=(x+1)^2$. Точки перетину даних функціє і будуть розв'язками даного рівняння. З графіка видно, що рівняння має два розв'язки.



Відповідь: $x = -3; x = 0.$

Приклад 2. [10, ст.40] $|x - 3| + x = 15$

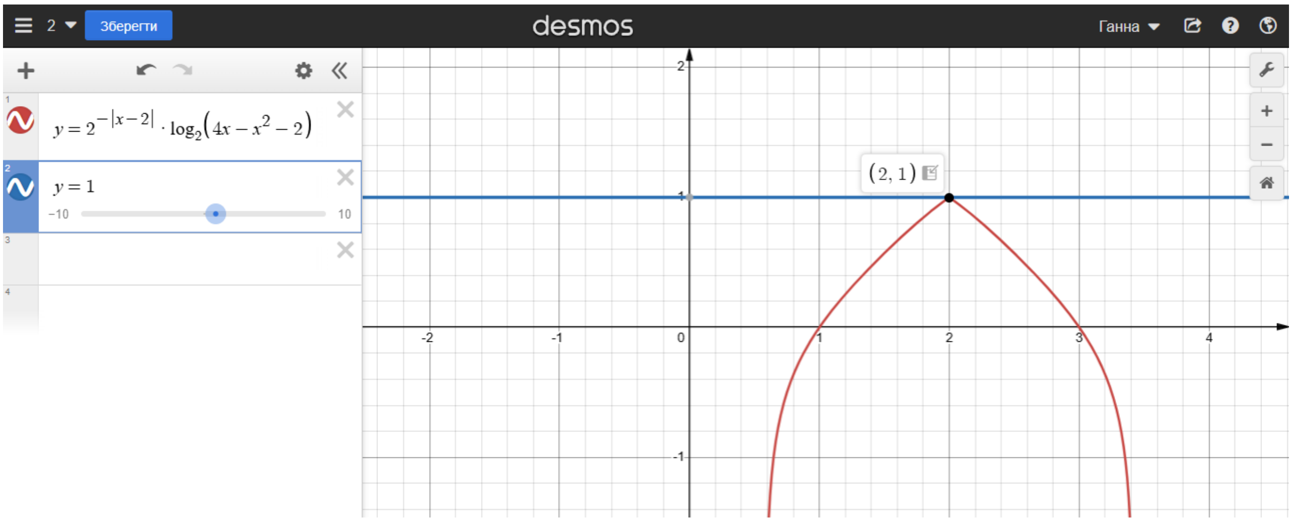
Розв'язання. Це рівняння виду $|f(x)| = \varphi(x)$, розв'яжемо його за допомогою програми Desmos. Аналогічно розглядаючи дві функції: $y = |x - 3| + x$, $y = 15$. За даним графіком, ми бачимо, що рівняння має один розв'язок.



Відповідь: $x = 9.$

Приклад 3. [21, ст. 356] $2^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) = 1$.

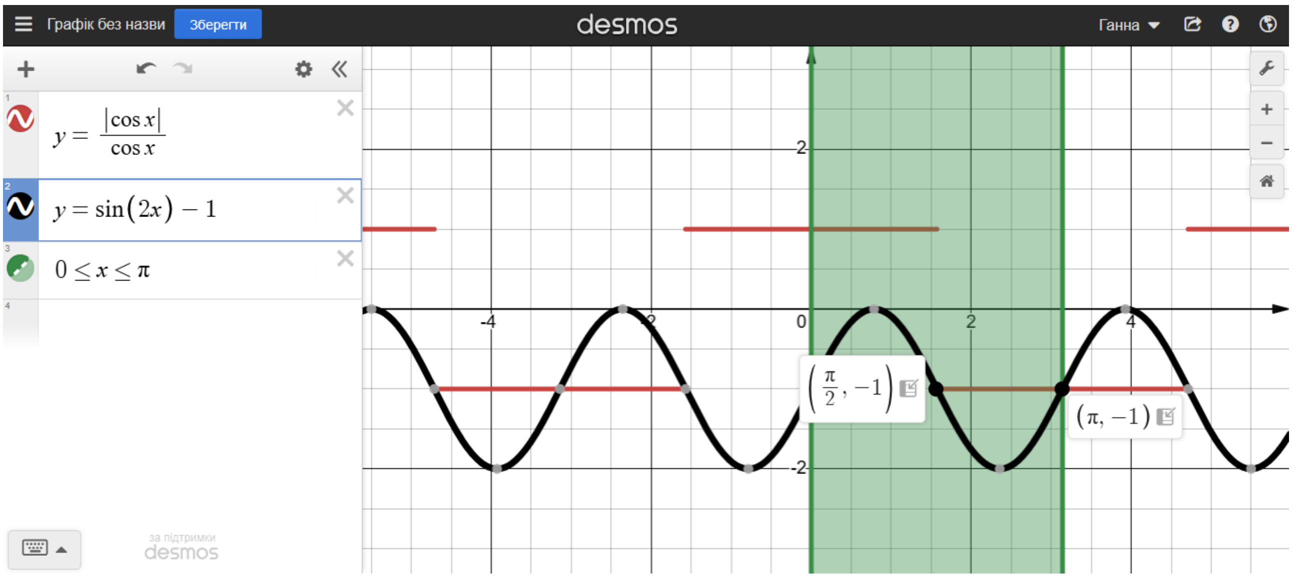
Розв'язання. Це рівняння виду $F\,(x, |x|) = 0$, вводимо дані функцій: $y = 2^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2)$, $y = 1$. За даним графіком, ми бачимо, що рівняння має один розв'язок.



Відповідь: $x = 2$.

Приклад 4. [6, ст.294] Знайдіть усі розв'язки рівняння $\frac{|\cos x|}{\cos x} = \sin 2x - 1$, що належать проміжку $[0;\ \pi]$.

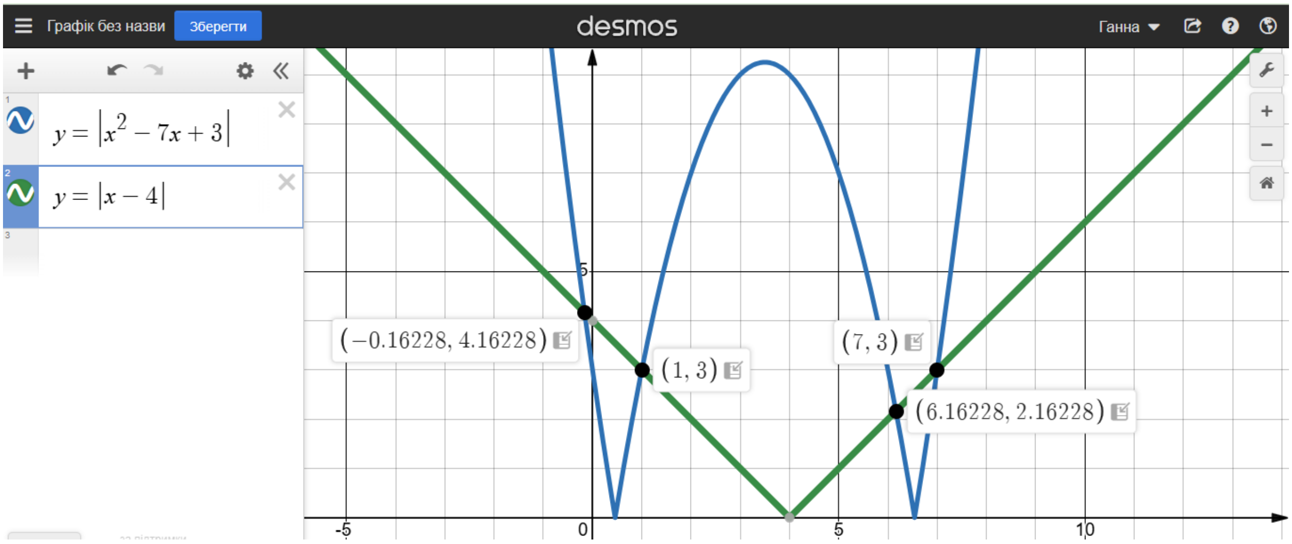
Розв'язання. Це рівняння виду $|f\,(x)| = \varphi(x)$, водимо дані двох функцій: $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$, $y = \sin 2x - 1$ та проміжок. Із графіку видно, що рівняння має два розв'язки на даному проміжку.



Відповідь: $x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \pi$.

Приклад 5. [21, ст. 347] $|x^2 - 7x + 3| = |x - 4|$

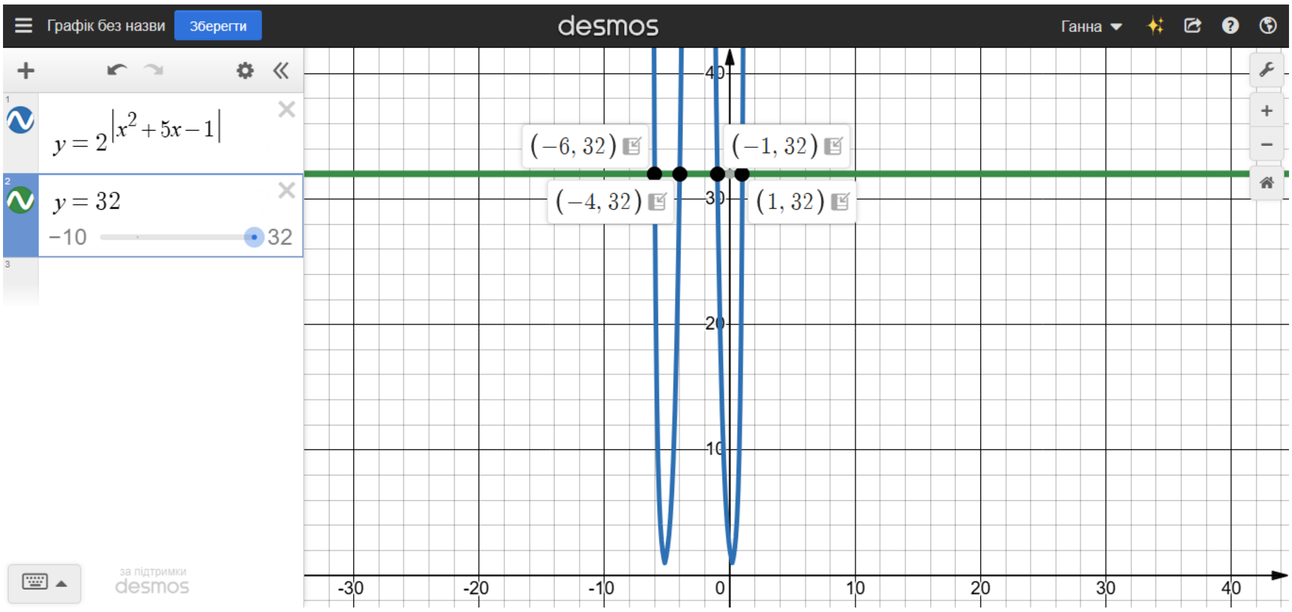
Розв'язання. Це рівняння виду $|f_1(x)| \pm \cdots \pm |f_n(x)| \pm \ \varphi(x) = 0$, водимо дані двох функцій: $y = |x^2 - 7x + 3|$, $y = |x - 4|$. На графіку видно, що рівняння має чотири корені.



Відповідь: $x_1 = 3 - \sqrt{10},\ x_2 = 1,\ x_3 = 7,\ x_4 = 3 + \sqrt{10}.$

Приклад 6. [20, ст. 356] $2^{|x^2+5x-1|} = 32$

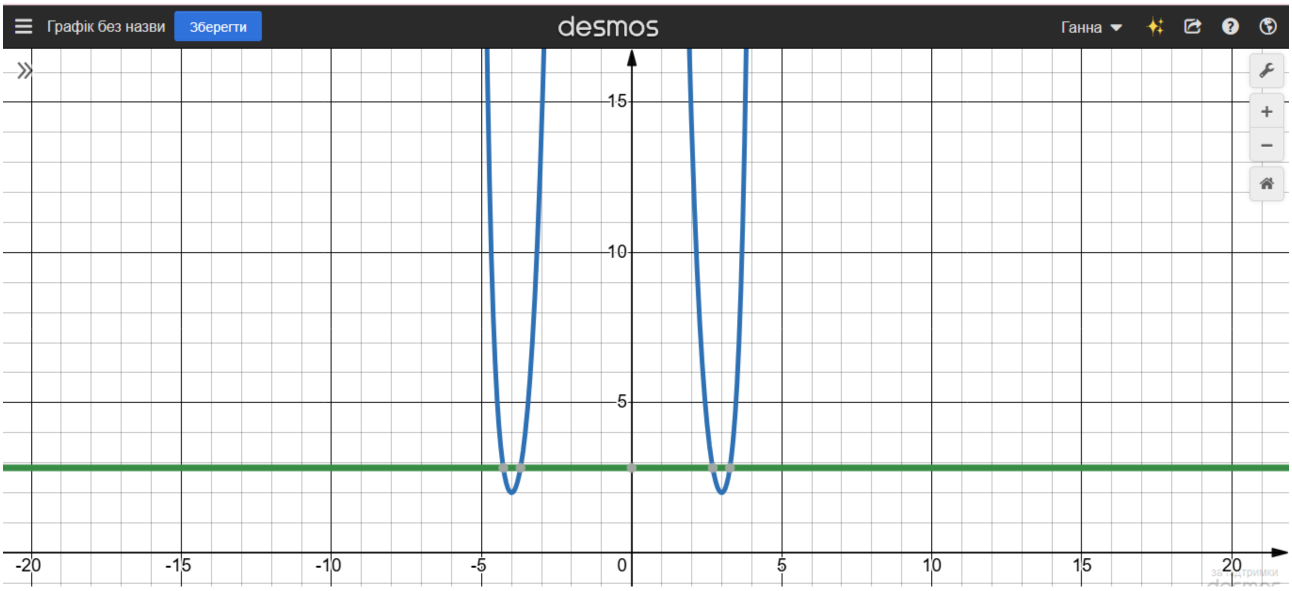
Розв'язання. Це рівняння виду $|f(x)| = a$, вводимо дані функцій: $y = 2^{|x^2+5x-1|}$, $y = 32$. На графіку видно, що рівняння має чотири корені.



Відповідь: $x_1 = -6; x_2 = -4; x_3 = -1; x_4 = 1.$

Приклад 7. [21, ст. 356] $(\sqrt{\sqrt{2}-1})^{|x^2+x-12|}+(\sqrt{\sqrt{2}+1})^{|x^2+x-12|}=2\sqrt{2}$

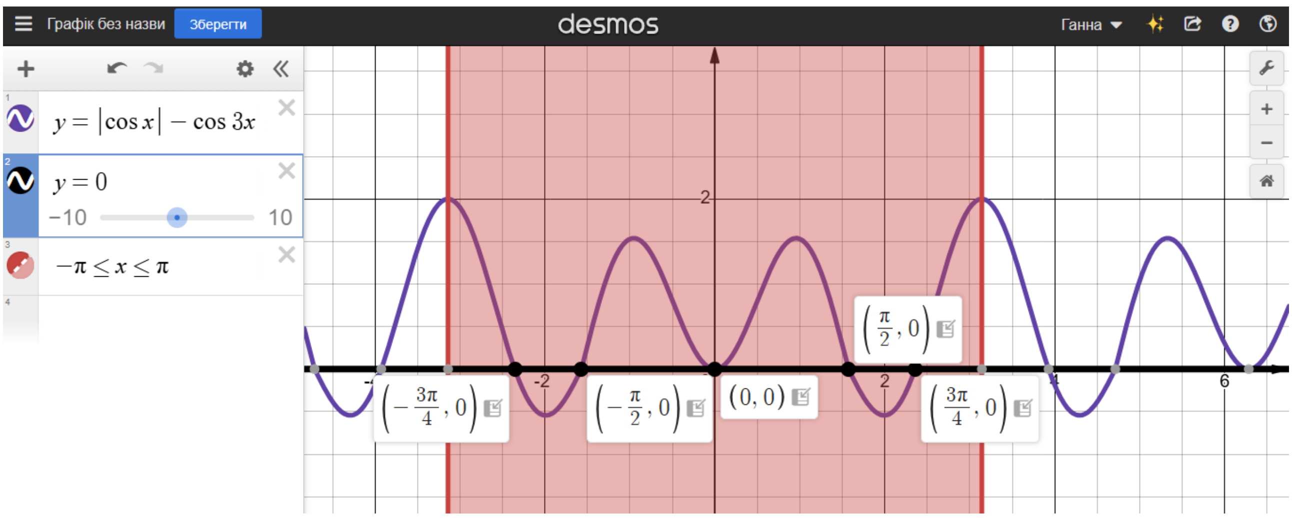
Розв'язання: Це рівняння виду *Ф(|f(x)|)=0*, вводимо дані функцій: $y=(\sqrt{\sqrt{2}-1})^{|x^2+x-12|}+(\sqrt{\sqrt{2}+1})^{|x^2+x-12|}$, $y=2\sqrt{2}$. На графіку видно, що рівняння має чотири корені.



Відповідь: $x_1=\frac{-1-\sqrt{57}}{2}, x_2=\frac{-1+\sqrt{57}}{2}, x_3=\frac{-1-\sqrt{41}}{2}, x_4=\frac{-1+\sqrt{41}}{2}$.

Приклад 8. [6, ст. 294] Знайдіть усі розв'язки рівняння $|\cos x|-\cos 3x=0$, що належать проміжку $[-\pi;\ \pi]$.

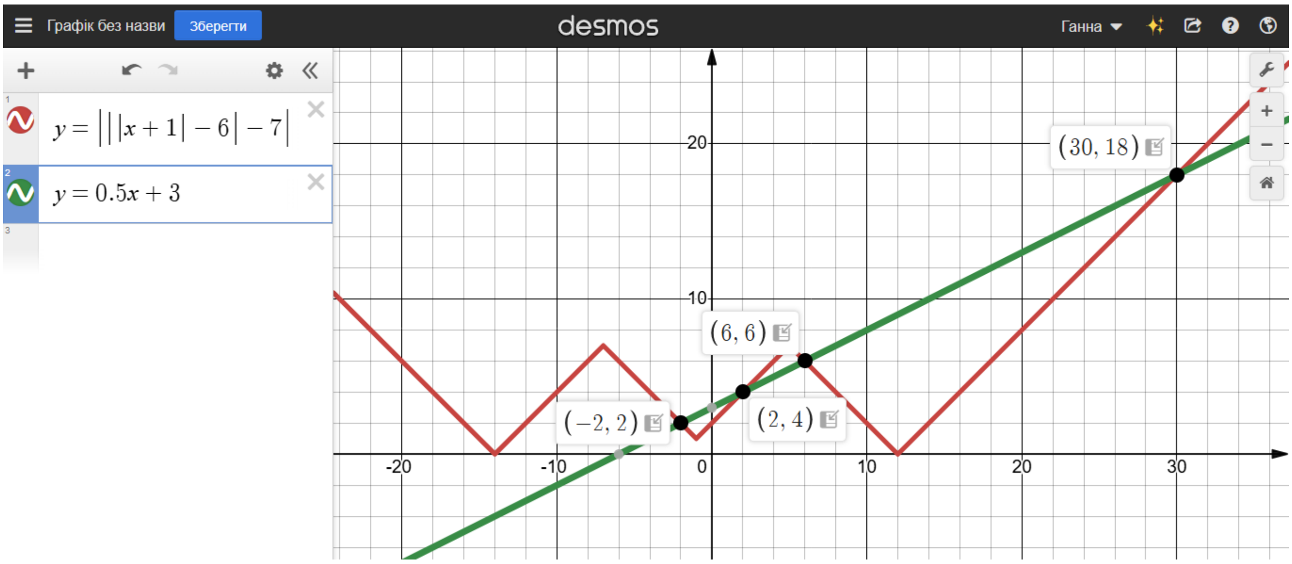
Розв'язання. Це рівняння виду $|f(x)|=\varphi(x)$, водимо дані двох функцій: $y=|\cos x|-\cos 3x$, $y=0$ та проміжок. Із графіку видно, що рівняння має п'ять розв'язків на даному проміжку.



Відповідь: $x_1=\frac{-3\pi}{4};\ x_2=\frac{-\pi}{2};\ x_3=0;\ x_4=\frac{\pi}{2};\ x_5=\frac{3\pi}{4}$.

Приклад 9. [26, ст. 156] $\left|\left||x+1|-6\right|-7\right| = 0{,}5x+3.$

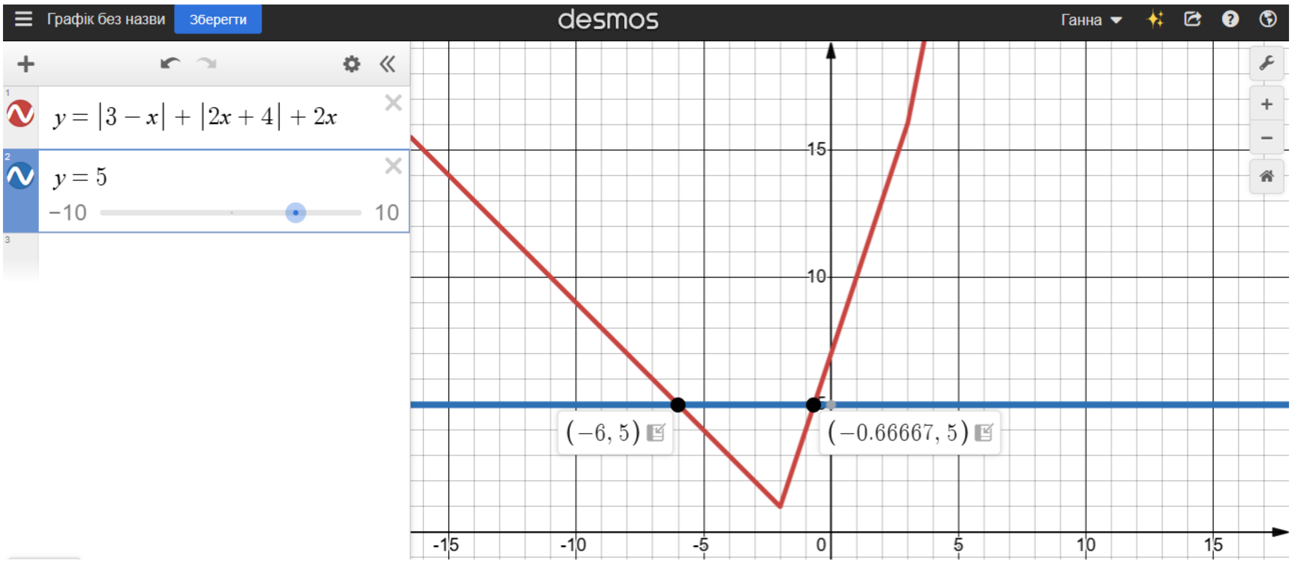
Розв'язання. Це рівняння виду $|f(x)| = \varphi(x)$, водимо дані двох функцій: $y = \left|\left||x+1|-6\right|-7\right|$, $y = 0{,}5x+3$. На графіку видно, що рівняння має чотири корені.



Відповідь: $x_1 = -2;\ x_2 = 2;\ x_3 = 6;\ x_4 = 30.$

Приклад 10. [20, ст. 350] $|3-x| + |2x+4| + 2x = 5.$

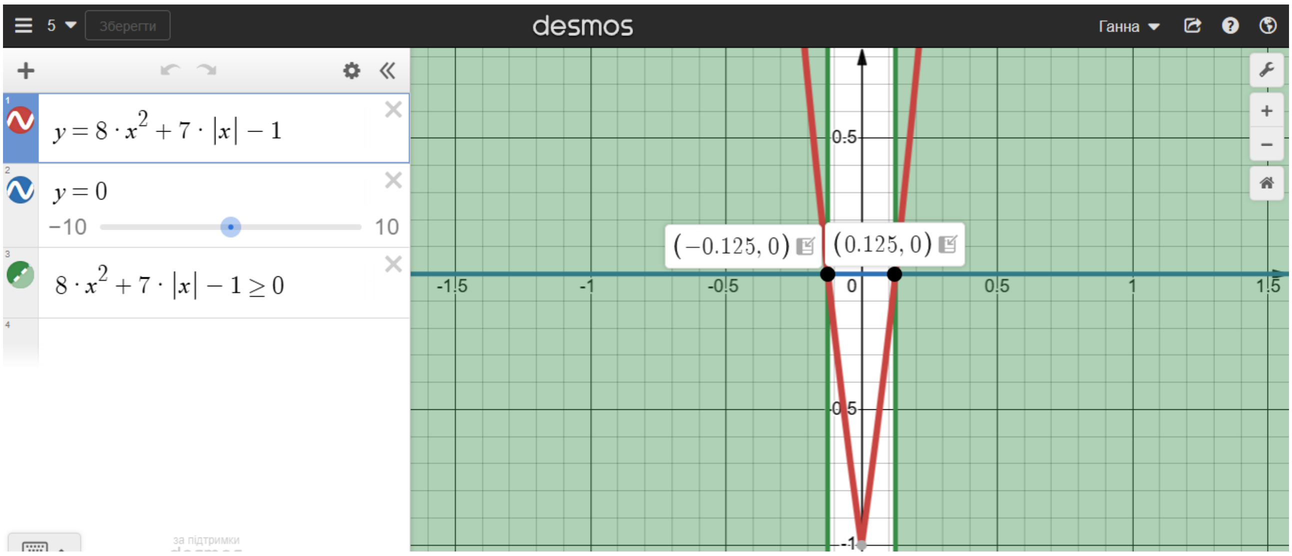
Розв'язання. Це рівняння виду $|f_1(x)| \pm \cdots \pm |f_n(x)| \pm \varphi(x) = 0$, водимо дані двох функцій: $y = |3-x| + |2x+4| + 2x$, $y = 5$. На графіку видно, що рівняння має два корені.



Відповідь: $x_1 = -6;\ x_2 = -\frac{2}{3}.$

Приклад 11. [16, ст. 124] $8x^2 + 7|x| - 1 \geq 0$

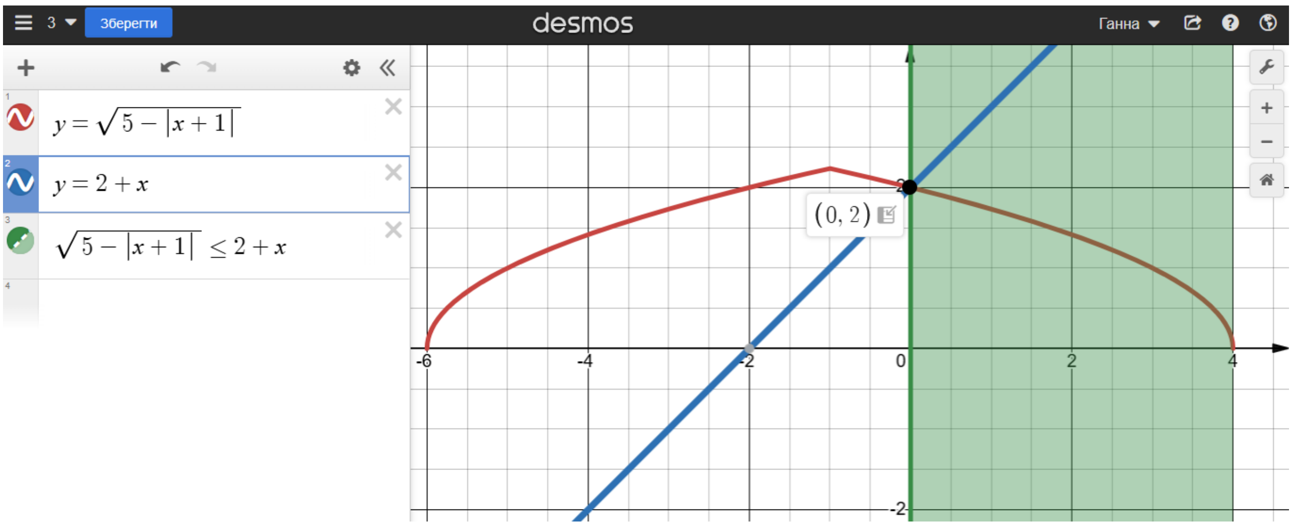
Розв'язання. Це нерівність виду $F\,(x, |x|) \geq 0$, вводимо у програму дані функцій: $y = 8x^2 + 7|x| - 1, y = 0,$ та задану нерівність. На графіку ми бачимо розв'язок нашої нерівності.



Відповідь. $x \epsilon (-\infty;\ -0{,}125] \cup [0{,}125;\ +\infty)$.

Приклад 12. [21, ст. 356] $\sqrt{5 - |x + 1|} \leq 2 + x$

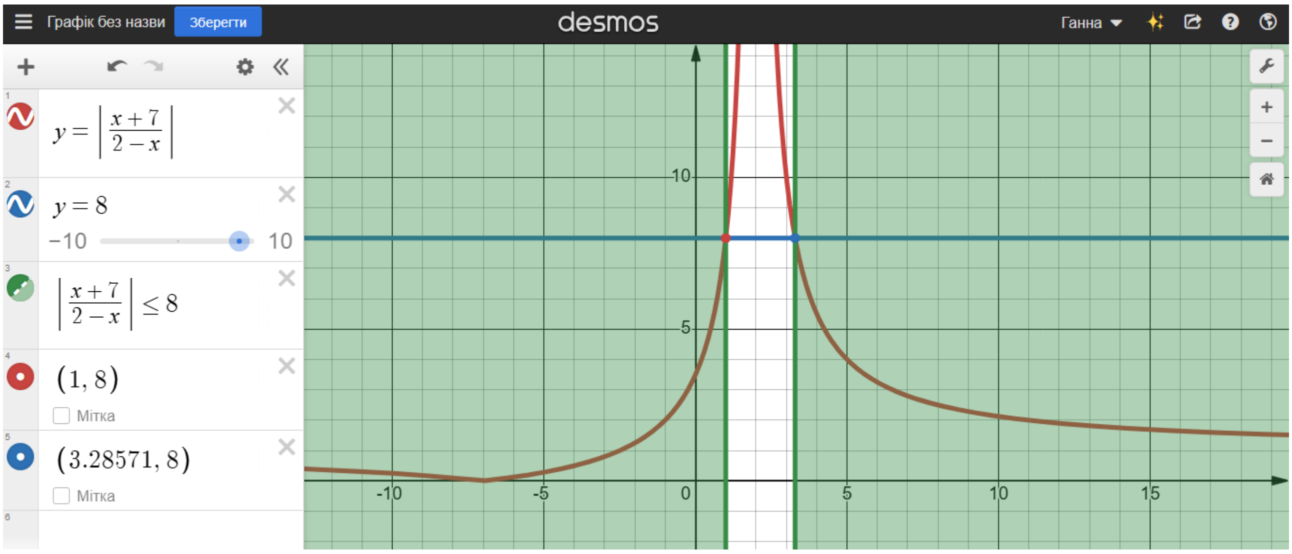
Розв'язання. Розглядаємо дану нерівність, як дві функції: $y = \sqrt{5 - |x + 1|}$ та $y = 2 + x$. Вводимо данні функцій та саму нерівність у програму, яка за допомогою коду будує графіки функцій та множину розв'язків нерівності, позначені зеленим кольором. З графіку видно розв'язок нерівності.



Відповідь: $x \in [0;\ +\infty)$.

Приклад 13. [26, ст. 160] $\left|\frac{x+7}{2-x}\right| \leq 8.$

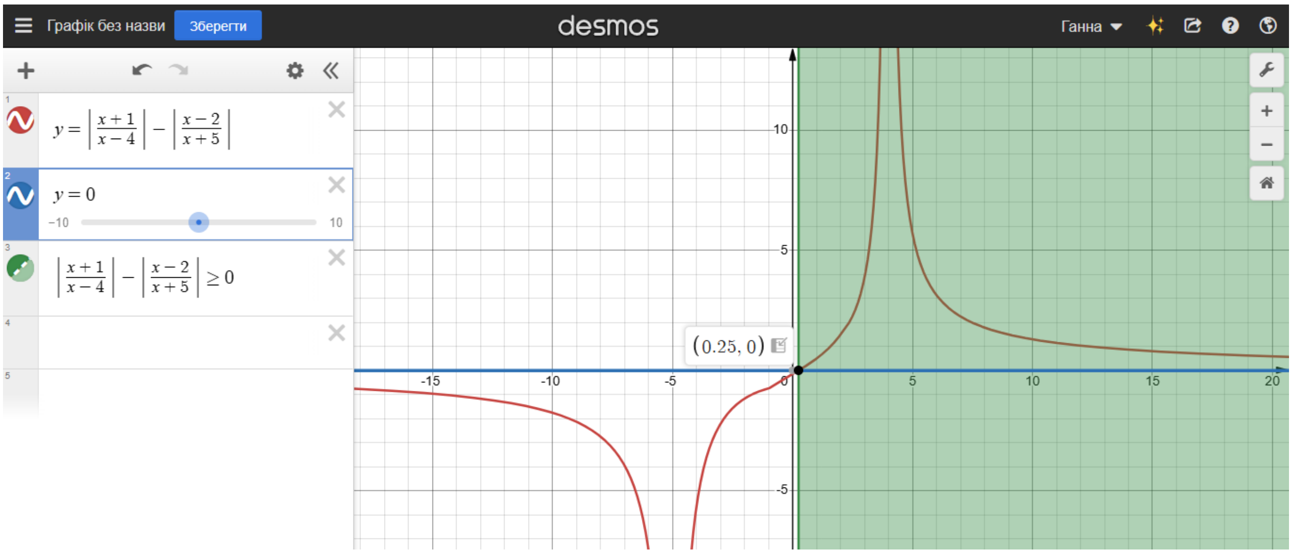
Розв'язання. Це нерівність виду $|f(x)| \leq a$, вводимо у програму дані функцій: $y = \left|\frac{x+7}{2-x}\right|, y = 8,$ та задану нерівність. На графіку ми бачимо розв'язок нашої нерівності.



Відповідь: $x\epsilon(-\infty;\ 1] \cup [3\frac{2}{7};\ +\infty).$

Приклад 14. [26, ст. 190] $\left|\frac{x+1}{x-4}\right| - \left|\frac{x-2}{x+5}\right| \geq 0.$

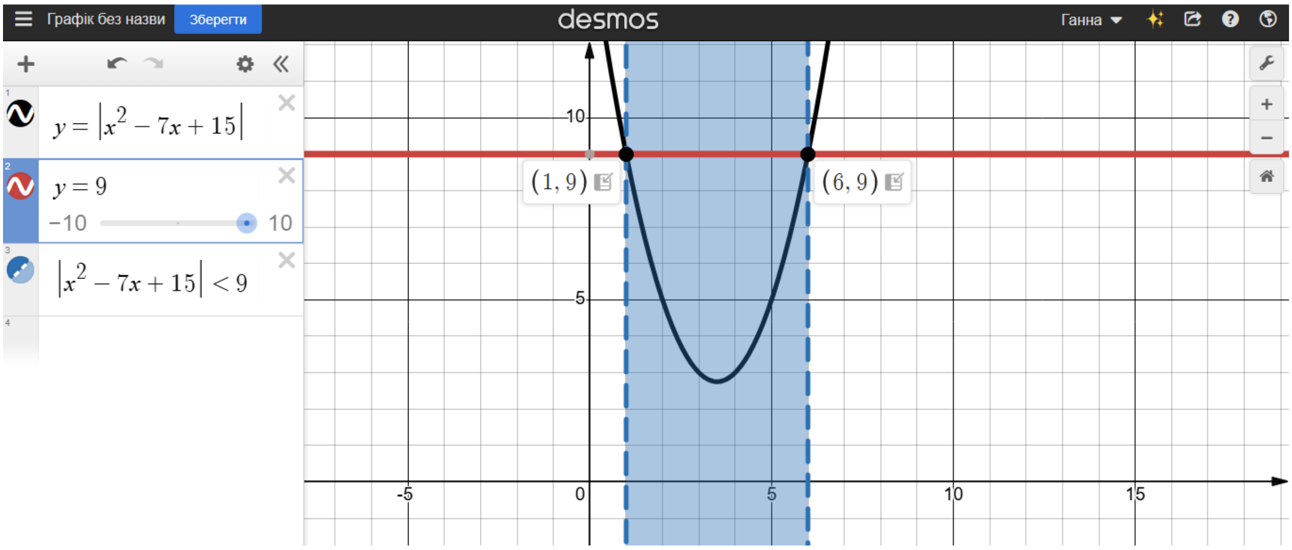
Розв'язання. Це нерівність виду $|f_1(x)| \pm \cdots \pm |f_n(x)| \pm \varphi(x) = 0,$ водимо дані двох функцій: $y = \left|\frac{x+1}{x-4}\right| - \left|\frac{x-2}{x+5}\right|,\ y = 0$ та дану нерівність. Дослідивши дані графіку, та врахувавши ОДЗ, отримаємо розв'язок нерівності.



Відповідь: $x\epsilon[0{,}25; 4) \cup (4; +\infty).$

Приклад 15. [26, ст. 180] $|x^2 - 7x + 15| < 9$.

Розв'язання. Це нерівність виду $|f(x)| \le a$, вводимо у програму дані функцій: $y = |x^2 - 7x + 15|$, $y = 9$, та задану нерівність. На графіку ми бачимо розв'язок нашої нерівності.



Відповідь: $x \in (1; 6)$.

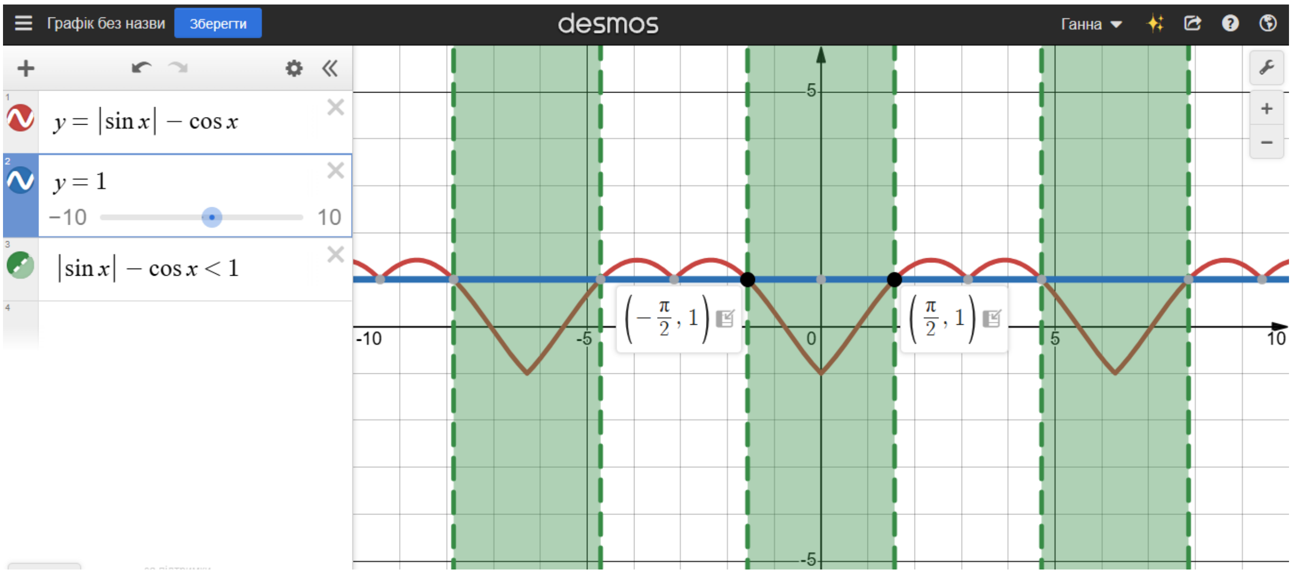
Приклад 16. [21, ст. 356] $\log_3\left(\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x+5|}\right) > 0$.

Розв'язання. Це нерівність виду $F(x, |x|) \ge 0$, вводимо у програму дані функцій: $y = \log_3\left(\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x+5|}\right)$, $y = 0$, та задану нерівність. На графіку ми бачимо розв'язок нашої нерівності.

Відповідь: $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Приклад 17. [20, ст. 348] $|\sin x| - \cos x < 1$.

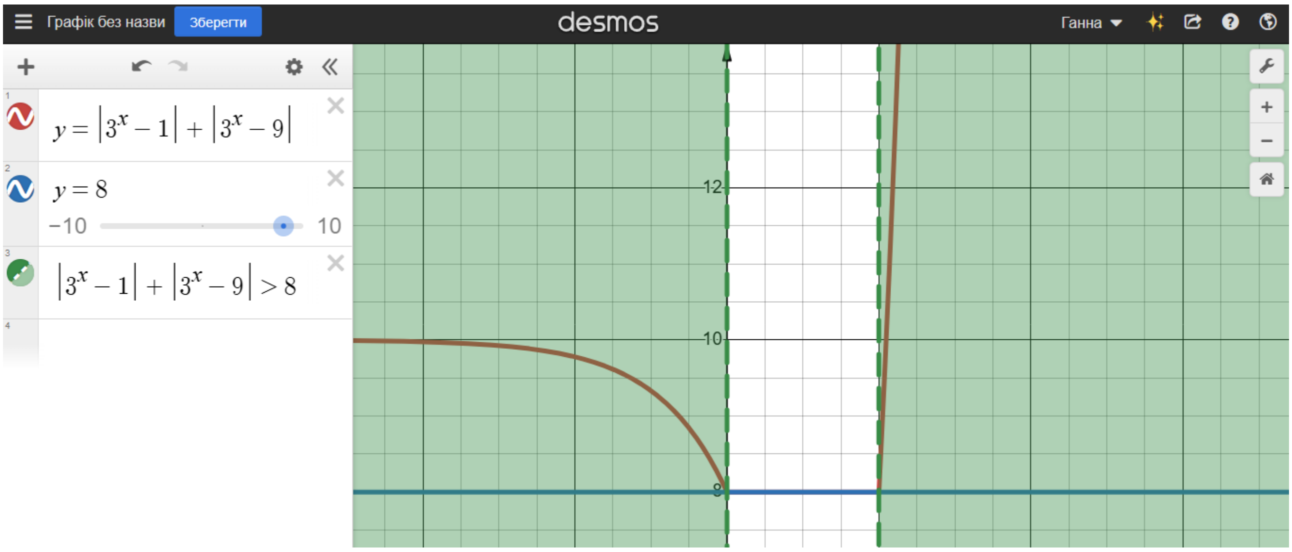
Розв'язання. Це нерівність виду $|f(x)| = \varphi(x)$, водимо дані двох функцій: $y = |\sin x| - \cos x < 1$, $y = 1$ та задану нерівність. На графіку ми бачимо розв'язок нашої нерівності.



Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$.

Приклад 18. [21, ст. 356] $|3^x - 1| + |3^x - 9| > 8$.

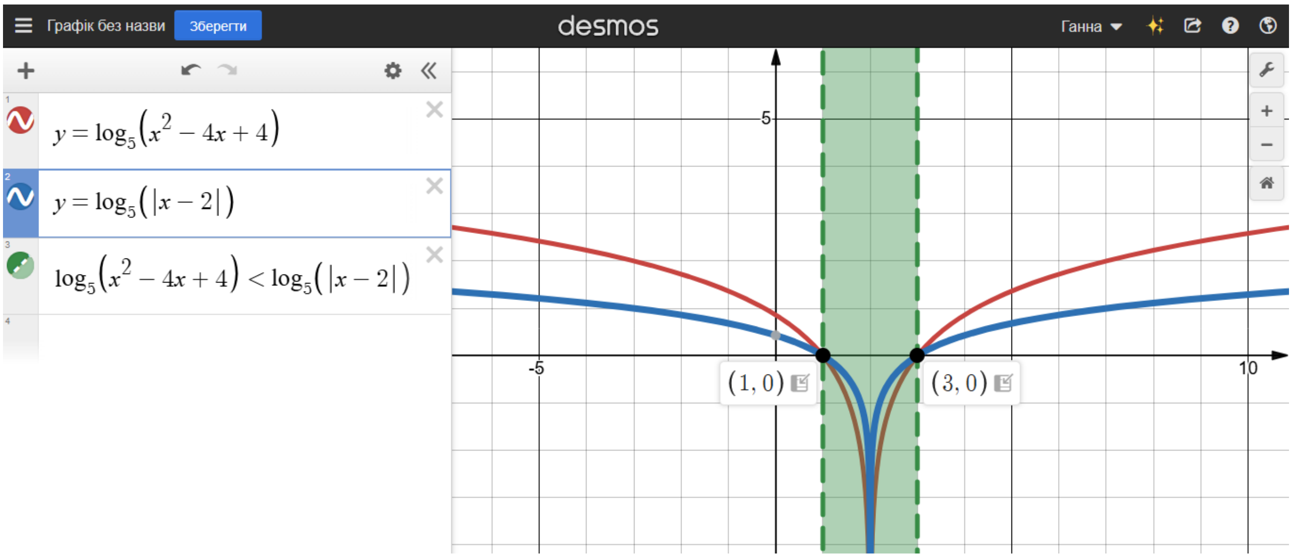
Розв'язання. Це нерівність виду $|f_1(x)| \pm \cdots \pm |f_n(x)| \pm \varphi(x) = 0$, водимо дані двох функцій: $y = |3^x - 1| + |3^x - 9|$, $y = 8$ та дану нерівність. На графіку ми бачимо розв'язок нашої нерівності.



Відповідь: $x \epsilon (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Приклад 19. [20, ст. 350] $\log_5(x^2 - 4x + 4) < \log_5|x - 2|$.

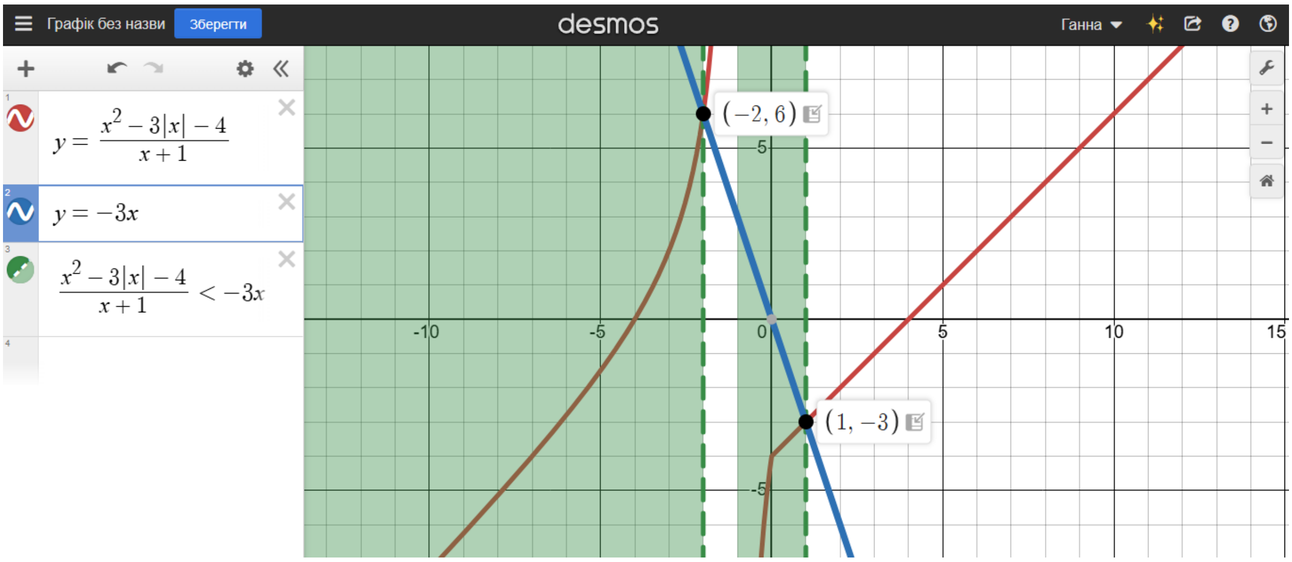
Розв'язання. Це нерівність виду $F\ (x, |x|) \geq 0$, вводимо у програму дані функцій: $y = \log_5(x^2 - 4x + 4)$, $y = \log_5|x - 2|$, та задану нерівність. Дослідивши дані графіку, та врахувавши ОДЗ, отримаємо розв'язок нерівності.



Відповідь: $x \in (1; 2) \cup (2; 3)$.

Приклад 20. [22, ст. 230] $\frac{x^2-3|x|-4}{x+1} < -3x$.

Розв'язання. Це нерівність виду $F\ (x, |x|) \geq 0$, вводимо у програму дані функцій: $y = \frac{x^2-3|x|-4}{x+1}$, $y = -3x$, та задану нерівність. Дослідивши дані графіку, та врахувавши ОДЗ, отримаємо розв'язок нерівності.



Відповідь: $x \in (-\infty;\ -2) \cup (-1; 1)$.

2.4. Методика формування вмінь та навичок у процесі вивчення курсу за вибором «Методи розв’язування рівнянь та нерівностей з модулем»

Нова українська школа передбачає навчання через діяльність, у якій буде комфортно навчатися і яка даватиме учням не тільки знання, а й вміння застосовувати їх у житті. Розвиток математики і математичної освіти в Україні займає особливе місце у державі. Актуальною проблемою сучасного навчання учнів НУШ є відібрання правильної методики викладання математики вчителем. Учень повинен не запам’ятовувати матеріал, а набувати компетентності.

У такій системі учень стає активним учасником навчання. Наприклад, замість традиційного запам'ятовування таблиць і формул, учням пропонують завдання, де математика застосовується для вирішення повсякденних задач, що розвиває гнучкість мислення. Діяльнісне навчання, яке рекомендує НУШ, включає роботу в групах, проєктну діяльність, ігрові вправи, моделювання реальних ситуацій, інтеграцію знань з різних предметів. Це дозволяє дітям бачити зв’язок математики з іншими сферами і формувати цілісне розуміння її застосування.

Також сучасна методика вивчення математики в НУШ акцентує на використанні інтерактивних технологій. Електронні ресурси, навчальні програми та симуляції роблять матеріал більш наочним і доступним, що особливо важливо для молодших учнів, які ще розвивають абстрактне мислення.

Важливими елементами ефективної методики викладання математики в НУШ є:

1. Інтеграція предметів – математика розглядається у зв’язку з іншими дисциплінами.
2. Використання практичних задач – це формує у дітей вміння застосовувати знання.
3. Розвиток критичного мислення – учні вчаться не просто слідувати алгоритмам, а й самостійно аналізувати задачі.
4. Інтерактивність та технології – використання планшетів, електронних підручників, навчальних ігор.

5. Зворотній зв’язок – вчитель активно комунікує з учнями, допомагаючи зрозуміти їхні помилки і знаходити правильні підходи.

Оскільки тема «Рівняння та нерівності з модулем» не вивчається, як окрема тема у шкільному курсі математики, проте завдання із модулем наявні у тестах НМТ та в олімпіадних завданнях, то доцільним буде впровадження курсу за вибором «Методи розв’язування рівнянь та нерівностей з модулем»

Курс призначений для учнів 9-11 класів, які прагнуть поглибити та вдосконалити свої знання та вміння. Даний курс допоможе зрозуміти властивості модуля, навчитись застосовувати їх при розв’язуванні завдань, що містить модуль. Також курс зорієнтований на практичне застосування в реальних ситуаціях.

Метою курсу є навчити учнів ефективно та впевнено працювати з рівняннями і нерівностями із модулем, застосовуючи різноманітні методи.

Курс складається з теоретичних та практичних розділів. Учні вивчають основи теорії модуля, методи розв'язування рівнянь і нерівностей із модулем та їх графічну інтерпретацію. Окрему увагу приділено задачам підвищеної складності та застосуванню модуля в реальних ситуаціях.

Курс охоплює:

Теоретичну частину – розгляд основних властивостей та означення модуля, методів аналізу рівнянь і нерівностей.

Практичну частину – розв’язування задач різного рівня складності та дослідження реальних прикладів.

Творчі завдання – задачі з параметрами, комбіновані приклади, олімпіадні задачі.

Особливості курсу:

Практична спрямованість – завдання курсу базуються на реальних життєвих ситуаціях і прикладних задачах.

Рівневий підхід – задачі поділяються на базові, середні та підвищеної складності, що дозволяє врахувати індивідуальні особливості учнів.

Інтерактивність – застосування графічних редакторів, програмного забезпечення для побудови графіків (Desmos), що робить вивчення теми наочним і захоплюючим.

Підготовка до олімпіад та НМТ – окремі заняття присвячено завданням, які часто зустрічаються на конкурсах та екзаменах.

Після завершення курсу учні зможуть:

1) розв'язувати рівняння та нерівності з модулем будь-якої складності;
2) аналізувати та графічно представляти функції з модулем;
3) досліджувати задачі з параметрами;
4) підвищити свій рівень підготовки до НМТ, олімпіад та інших змагань.

Цей курс є цікавим і корисним вибором для тих, хто хоче розвивати свої математичні здібності та отримати конкурентні переваги в навчанні.

Методика викладання курсу за вибором «Розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем» полягає у :

1) наочності (використання презентацій, схем, графіків, використання онлайн сервісів Desmos та Wordwall);
2) диференційований підхід (розв'язування завдань різного рівня складності);
3) поступовість (перехід від простих завдань до олімпіадного рівня);
4) творчість (використання задач на дослідження, проєктна діяльність, розв'язування задач із параметрами);
5) практична спрямованість.

В результаті використання даної методики учні розуміють основні властивості модуля та застосовують їх на практиці, вміють аналізувати умови задач і знаходити ефективний метод розв'язку, розвивають логічне мислення, вміють узагальнювати та досліджувати графіки функцій.

2.5. Результативність впровадження методики формування вмінь та навичок у процесі вивчення курсу за вибором «Методи розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем»

Для визначення впливу інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) на навчальний процес при вивчені курсу за вибором «Методи розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем» було проведено педагогічний експеримент у двох класах. Експеримент тривав 4 тижні, було проведено по 8 уроків у кожному з класів.

Даний експеримент проводився у три основних етапи:

1) **Вхідне тестування:** оцінювання початкового рівня знань і навичок.
2) **Навчальний етап:**
   a) У 10 – А класі використовували ІКТ, інтерактивні презентації, онлайн-тестування, графічні симуляції та розв'язування задач на цифровій платформі Desmos.
   b) У 10 – Б класі навчання проходило традиційними методами (без використання комп'ютерів), з використанням друкованих підручників, конспектів та дошки.
3) **Підсумкове тестування:** оцінювання результатів після навчального етапу.

Порівняльна характеристика підходів до навчання з використанням ІКТ та без нього подана у таблиці 3.

Таблиця 3.

Критерій	10-А клас	10-Б клас
Візуалізація навчального матеріалу	Графіки, схеми, моделі створені в програмних середовищах (Desmos), що дає вам чітко і наочно пояснювати складні концепції.	Візуалізація обмежених зображень на дошці або у підручнику. Ручне креслення може бути неточним і менш зрозумілим.
Швидкість виконання завдань	Автоматизація побудови графіків, перевірки проміжних розрахунків пришвидшує швидкість виконання завдань.	Процес виконання завдань вимагає більше часу через ручне креслення та перевірку.

Розвиток цифрових компетентностей	Учні розвивають навички роботи з математичними програмами, інтерактивними платформами, онлайн-тестами.	Цифрові компетентності не розвиваються, лише акцент на традиційних методах роботи.
Інтерактивність навчання	Інтерактивні презентації, онлайн-симуляції та тести активно залучають учнів до процесу навчання. Учні можуть експериментувати з параметрами графіків.	Інтерактивність обмежена запитаннями вчителя або роботою в групах. Відсутність можливості інтерактивної перевірки результатів.
Залученість учнів	Учні активніше беруть участь у навчанні завдяки інтерактивним завданням і можливостям дослідження в цифровому середовищі.	Учні менш залучені, матеріал представлений переважно у текстовій чи вербальній формі.
Самостійність у навчанні	Завдяки доступу до онлайн-ресурсів, програмних засобів і платформи учні можуть самостійно досліджувати тему, виконувати завдання та перевіряти свої результати.	Самостійність обмежується виконанням домашніх завдань і вправ із підручника без можливості автоматичної перевірки.
Рівень глибини засвоєння матеріалу	Високий: завдяки інтерактивним методам учні краще розуміють складні теми, наприклад, побудову графіків.	Середній: складні теми потребують додаткових пояснень і більше прикладів розв’язування.

Підтримка диференціації навчання	Можливість адаптації темпу навчання: учні з високим рівнем підготовки можуть працювати у своєму темпі за допомогою онлайн-ресурсу.	Диференціація обмежена додатковими завданнями для сильніших учнів та за допомогою вчителя для слабших.
Рівень технічних навичок	Розвиваються сучасні навички роботи з комп'ютерами, які забезпечать подальшу освіту та професійну діяльність.	Технічні навички не розвиваються. Увага акцентується лише на базових математичних навичках.
Мотивація до навчання	Вища завдяки новинному підходу, інтерактивним засобам і можливості отримати швидкий зворотний зв'язок.	Мотивація часто нижча, після чого матеріал сприймається більш сухо та монотонно.

Проаналізуємо переваги та недоліки підходів до навчання з використанням ІКТ та без нього.

Підхід з використанням ІКТ.

Переваги:

1) Візуалізація.
2) Інтерактивність.
3) Швидкість та точність.
4) Розвиток цифрових компетентностей.
5) Диференціація.
6) Мотивація.
7) Самостійність.

Недоліки:

1) Технічні бар'єри.

2) Складність освоєння.
3) Перенасичення інформації.
4) Ризик технічних збоїв.

Підхід без використання ІКТ (традиційний)

Переваги:

1) Доступність.
2) Простота організації.
3) Формування математичних навичок.
4) Зрозумілість для учнів.
5) Менше відволікаючих факторів.

Недоліки:

1) Обмежені можливості візуалізації.
2) Менша інтерактивність.
3) Трудомісткість.
4) Відсутність цифрових навичок.
5) Мотивація.
6) Складність роботи з високими рівнями.

Результати експерименту подані у таблиці 4.

Таблиця 4.

Критерій	**10-А клас**	**10-Б клас**
Середній бал на вхідному тестуванні (%)	50	48
Середній бал на підсумковому тестуванні (%)	87	72
Здатність працювати графічними методами (%)	92	65
Кількість помилок на завдання (середня)	0,7	1,5
Швидкість виконання завдань (хв/завдання)	3,8	5,4

Порівняльний аналіз:

1. **Ефективність навчання:** учні 10 – А класу показали вищі результати в підсумковому тестуванні (+15%), що показали про ефективність використання ІКТ. Інтерактивні інструменти, такі як графічні редактори,

сприяли кращому розумінню структури модулів і способів розв'язання рівнянь.

2. **Здатність працювати з графічними методами:** візуалізація завдань у 10 – А класі дала можливість учням швидше отримати графічні методи розв’язання рівнів і нерівностей. У 10 – Б класі цей показник був нижчим, після графічних методів викладалися лише теоретично.
3. **Кількість помилок:** учні 10 – А класу припустили менше помилок завдяки можливості перевірити проміжні етапи розв'язування в математичній програмі Desmos, тоді як у 10 – Б класі складні задачі викликали більше помилок через обмежений час на аналіз.
4. **Швидкість виконання завдань:** використання програми для швидкої побудови графіків та перевірки розрахунків дозволило учням 10 – А класу виконувати завдання значно швидше (на 1,6 хв/завдання менше, ніж у 10 – Б класі).
5. **Рівень самостійності:** у 10 – А класі більшість активних учнів використовували онлайн-платформу для додаткового самостійного навчання, тоді як у 10 – Б класі учні більше покладалися на допомогу вчителя.

2.6 Висновки до Розділу 2

Використання інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) у процесі вивчення теми «Рівняння та нерівності з модулем» дозволяє суттєво підвищити ефективність навчального процесу. Інтерактивні програми, такі як Desmos, а також мультимедійні ресурси сприяють покращенню візуалізації складних понять, забезпечують гнучкість у виконанні завдань і адаптують навчання до індивідуальних потреб учнів.

ІКТ стимулюють активну участь учнів у навчанні завдяки можливості самостійного дослідження математичних моделей і швидкої перевірки результатів. Цифрові інструменти можуть учням побудувати чітке розуміння графічного й аналітичного підходів до розв'язування рівнів та нерівностей з модулем, що сприяє більш глибокому засвоєнню матеріалу.

Порівняння класів, у яких використовувалися та не використовувалися ІКТ, демонструє переваги сучасних технологій у навчанні. Учні з класів, де впроваджували ІКТ, показали вищий рівень розуміння теми, кращі результати тестів, а також більшу цікавість і мотивацію до вивчення математики.

Водночас впровадження ІКТ потребує належного технічного забезпечення, методичної підготовки вчителя та подолання технічних і організаційних бар’єрів.

Отже, використання ІКТ у вивчені теми «Рівняння та нерівності з модулем» є перспективним напрямком, що забезпечує розвиток не тільки математичних компетентностей, а й цифрових навичок, істотно для успішної соціалізації учнів у сучасному світі.

ВИСНОВКИ

Засвоєння поняття «Модуль числа» потрібне не лише для вивчення алгоритмів арифметичних дій з додатними та від'ємними числами, воно сприяє в учнів формуванню абстрактного та алгоритмічного мислення, логічного та наочно-образного мислення, тренує пам'ять і покращує здатність концентруватися. Уміння розв'язувати рівняння та нерівності з модулем дозволить учням з легкістю розв'язувати, здавалося б, складні завдання.

В дослідженні було:

- перевірено методику вивчення теми «Рівняння та нерівності з модулем»;
- проаналізовано шкільні програми і підручники за темою «Рівняння та нерівності з модулем».
- наведено низку прикладів розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем різними методами та з використанням ІКТ;
- розроблено модельну програму курсу за вибором «Методи розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем»;
- розроблено методику вивчення теми «Рівняння та нерівності з модулем» з використанням ІКТ;
- проведено педагогічний експеримент із викладання математики у традиційний метод та із використанням ІКТ.

У результаті дослідження шкільних програм і підручників з математики виявлено, що тема «Рівняння та нерівності з модулем» має значний потенціал для розвитку логічного мислення та математичних навичок учнів. Рекомендовані засоби ІКТ, такі як Desmos, забезпечують інтерактивний підхід до навчання, що сприяє глибшому розумінню даної теми.

Розроблена методика вивчення теми з використанням ІКТ передбачає поєднання класичних та сучасних підходів. Інтерактивні моделі, створені в програмному забезпеченні, допомагають безпосередньо демонструвати зміни графіків функцій з модулем та розв'язки рівнів і нерівностей. Особливий акцент зроблено на самостійному виконанні завдань учнями з використанням програмних засобів для закріплення навичок.

Проведена апробація методики в навчальному процесі підтвердила її ефективність. Учні, які використовували рекомендовані програмні засоби, показали вищий рівень розуміння теми, впевненість у розв’язанні завдань і здатність отримати отримані знання на практиці. Використання ІКТ підвищило зацікавленість школярів та створило умови для персоналізації навчання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. «A History of Mathematics»(Історія математики) авторства Carl B. Boyer та Uta C. Merzbach. URL: https://atiekubaidillah.files.wordpress.com/2013/03/a-history-of-mathematics-3rded.pdf
2. Бантова М.А. Методика викладання математики / М. А. Бантова, Т. В. Бельтюкова. – К.: Генеза, 2008. – 335 с
3. Вивальнюк Л. М., Соколенко О. І., Боровик В. Н. Математика : Посібник для факультативних занять, 9 клас – К.: Освіта, 1993. – 176 с.
4. Завало С. Т. Рівняння і нерівності : [посібник] / С. Т. Завало. - Київ : Рад. шк., 1973. - 384 с.
5. Ізюмченко Л. В. Раціональні рівняння та нерівності [Електронний ресурс]: метод. посіб. / Л. В. Ізюмченко, В. В. Нічишина, Р. Я. Ріжняк. – Кіровоград : РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2009. – 84 с. – Режим доступу: https://bit.ly/30e2NLo
6. Істер О. С. Алгебра і початки аналізу: (профіл. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ: Генеза, 2018. – 448 с. : іл.
7. Істер О. С. Алгебра і початки аналізу: (профіл. рівень) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ: Генеза, 2019. – 416 с. : іл.
8. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. – Київ: Генеза, 2015. – 256 с.
9. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 8-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. – Київ: Генеза, 2016. – 272 с.
10. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. – Київ: Генеза, 2017. – 264 с.
11. Істер О. С. Розв'язник основних конкурсних задач з математики зі збірника під редакцією М. І. Сканаві: Навч. посіб. – К.: А.С.К., 2004. – 280 с.

12.Каплан Я. Л. Розв’язування нерівностей : посіб. для вчителів / Я. Л. Каплан. - Київ : Рад. шк., 1967. - 124 с.

13.Коваленко В. Г. Розв’язування нерівностей / В. Г. Коваленко, М. Б. Гельфанд, Р. П. Шейнцвіт ; [редкол.: А. В. Скороход та ін.]. - Київ : Вища шк., 1975. - 132 с.

14.Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп’ютером: посібник для вчителів і студентів [за ред. М. І. Жалдака] / Т.Г. Крамаренко. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. – 272 с.

15.Кушнір В.А. Інноваційні методи навчання математик/ Науковометодичний посібник. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. –148 с.

16.Маркова І.С. Інтерактивні технології на уроках математики: навч.-метод. посібник/ І.С. Маркова. – Х.: Вид. група «Основа», 2007. – 126 с.

17.Маркова І.С. Урок математики в сучасних технологіях: теорія і практика: метод проектів. Комп’ютерні технології. Розвивальне навчання/ І.С. Маркова. – Х.: Вид. група «Тріада», 2007. – 171 с.

18.Математика. Інформаційні технології. Освіта: зб. матеріалів доповідей тез учасників XII Міжнародної науково-практичної конференції (Луцьк-Світязь, 23 травня-1 червня 2024 р.) Луцьк: ВНУ ім. Лесі Українки, 2024. 270 с.

19.Математика. Навчальна програма. Рівень стандарту – Електронний ресурс. URL: https://mon.gov.ua/osvita-2

20. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10-го кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір, Д. А. Номіровський. – Х.: Гімназія, 2018. – 400 с. : іл.

21. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 11-го кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір, Д. А. Номіровський. – Х.: Гімназія, 2019. – 352 с. : іл.

22. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 7-го кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – 2-ге вид., переробл. – Х.: Гімназія, 2020. – 288 с. : іл.

23. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 8-го кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – 2-ге вид., переробл. – Х.: Гімназія, 2021. – 240 с. : іл.

24. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 9-го кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2017. – 272 с. : іл.

25. Модуль в рівняннях, нерівностях та графіках функцій [Електронний ресурс] // Методичний вісник для вчителів математики / упоряд. М. Присяжнюк, – Івано-Франківськ, 2018. – С. 62. – Режим доступу: https://www.osvita.if.ua/data/pages/108/3f2d6f92d30f8d2cf396199a63863d19.pdf

26. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу [Електронний ресурс] : підручник /Є. П. Нелін. – Харків : Гімназія, 2010. – 416 с. – Режим доступу: http://www.soippo.edu.ua/userfiles/_Algebra10_Nelin_akad.pdf

27. Падалко А.М. Падалко Н.Й. Основні шляхи формування навчально-пізнавальної активності майбутніх інженерів – електриків. Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка.-2012.-№63. С.126-130.

28. Падалко Н. Й. Методика навчання математики : метод. посіб. Луцьк : Волин. нац. ун-т ім. Лесі Українки, 2021. 143 с.

29. Петренко С. В., Мартиненко О. В. Особливості навчання математики в профільній школі / Діяльність навчального закладу як умова розбудови освітнього простору регіону. Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції. – Чернігів: РВВЧДПУ, 2004. – С. 63-66.

30. Професійна компетентність педагога: теорія, методика, практика: зб. матеріалів доповідей (статей, тез) учасників Всеукр. інтернет-конф. (м. Луцьк, 18 квіт. 2024 р.) Луцьк: ВІППО, 2024. 224 с.

31. Прус А. В. Модуль у рівняннях та нерівностях [Електронний ресурс] :навч.-метод. посіб. / А. В. Прус. - Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. - 32 с. – Режим доступу: https://core.ac.uk/download/42976576.pdf
32. Прядко Н.О. Формування математичної грамотності учнів старшої школи/ Н.О. Прядко //Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Педагогічні науки. – 2013. – Вип. 109. – С. 98–100.
33. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ / С.А. Раков. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.
34. Чепіль Х. В. Модуль числа. Навчальний посібник [Електронний ресурс] / Відділ освіти Галицької районної державної адміністрації. Районний методичний центр/ упоряд. Лавер Н. О. , 2014. – 68 с.

АНОТАЦІЯ

Мігдаль Г.А. Теоретичні та методологічні основи вивчення рівнянь та нерівностей з модулем. Магістерська робота на здобуття ступеня магістра за спеціальністю 014 Середня освіта (Математика) – Волинський національний університет імені Лесі Українки. Кафедра «Теорії функцій та методики навчання математики» – Луцьк, 2024. – 71 с., список використаних джерел із 34 найменувань, два розділи, 11 підрозділів.

У магістерській роботі досліджено теоретичні, методологічні та практичні підходи до вивчення рівнянь і нерівностей з модулем у шкільному курсі математики. Перший розділ роботи присвячений теоретичним основам: розглядаються історичні аспекти розвитку поняття модуля, методи розв’язування задач цього типу, а також місце даної теми у шкільному курсі математики. У другому розділі аналізується застосування інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) для вивчення рівнянь та нерівностей з модулем.

Результати дослідження були представлені у вигляді доповідей на конференціях і містять практичні рекомендації для вчителів.

Ключові слова: модуль, рівняння з модулем, нерівності з модулем, методика навчання, Desmos, інформаційно-комунікаційні технології.

ANNOTATION

Migdal H.A. Theoretical and methodological foundations of the study of equations and inequalities with a modulus. Master's thesis for the degree of master in the specialty 014 Secondary Education (Mathematics) - Lesya Ukrainka Volyn National University. Department of "Function Theories and Methods of Teaching Mathematics" - Lutsk, 2024. - 71 p., list of used sources of 34 items, two sections, 11 subsections.

The master's thesis examines theoretical, methodological and practical approaches to the study of equations and inequalities with a modulus in the school mathematics course. The first section of the work is devoted to theoretical foundations: the historical aspects of the development of the concept of a modulus, methods for solving problems of this type, as well as the place of this topic in the school mathematics course are considered. The second section analyzes the use of information and communication technologies (ICT) for the study of equations and inequalities with a modulus.

The results of the study were presented in the form of reports at conferences and contain practical recommendations for teachers.

Keywords: module, equations with module, inequalities with module, teaching methodology, Desmos, information and communication technologies.

ДОДАТКИ

Додаток А Вправи для самостійного розв'язування

6 клас:

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $|x| = 12;$
2) $|x| = 0;$
3) $|x| = -28;$
4) $|-x| = 7;$
5) $|-x| = -1;$
6) $|x - 4| = 0;$
7) $|x + 6| = 0;$
8) $|6x - 5| = 0;$
9) $|7 - 3x| = 0;$
10) $|2x| = 4;$
11) $|5x - 6| = 1;$
12) $|x + 3| = 2;$
13) $|x - 12| = 10;$
14) $|5x - 13| = 25;$
15) $|x| - 4 = 0;$
16) $|2x| + 3 = 15;$
17) $|17x| + 16 = 5;$
18) $3 \cdot |x| + 15 = 24;$
19) $8 \cdot |x| - 10 = 22;$
20) $8 - 2 \cdot |x| = -14;$
21) $15 - 3|x| = 3;$
22) $\left||x| - 5\right| = 12;$
23) $\left||x| - 13\right| = 10;$
24) $\left|\frac{|x|}{7} - 5\right| = 3;$
25) $\left|\frac{|x|}{2} + 3\right| = 12;$

26) $\big||x| + 16\big| = 16;$

2. Знайдіть всі цілі числа, для яких нерівність буде правильною:

a) $|x| < 6;$
b) $|x| < 3{,}5;$
c) $|x| \leq 5;$
d) $|x| < 0{,}9;$
e) $|x| < -16.$

3.Запиши чотири від'ємних числа, що задовольняють нерівність:

a) $|x| < 9;$
b) $|x| > 16;$
c) $|x| > 7{,}6;$
d) $|x| > 8{,}3;$
e) $|x| < 1;$

4.Скільки існує цілих чисел, для яких буде правильною нерівність:

a) $|x| < 20;$
b) $|x| < 500;$
c) $|x| < 500{,}6;$
d) $|x| < 236;$
e) $|x| < 150;$

5.Познач на координатній прямій усі цілі числа, для яких буде правильною нерівність:

a) $|x| < 6{,}7;$
b) $|x| < 7{,}9;$
c) $|x| < 9{,}26;$
d) $5 < |x| < 10;$
e) $1{,}8 < |x| < 3{,}6;$
f) $0{,}9 < |x - 5| < 3{,}6.$

7 клас:

1.Розв'яжіть рівняння:

1. $|x| + 7 = 26;$

2. $|x| + 9 = 13;$
3. $|x| + 1{,}5 = 3{,}7;$
4. $|x| + 2{,}7 = 4{,}3;$
5. $|x| - 2 = 1;$
6. $|x| - 3 = 24;$
7. $|x| - 1{,}3 = 2{,}9;$
8. $|x| - 7{,}7 = 6{,}5;$
9. $|x| - 3{,}6 = -0{,}4;$
10. $|x| - 6{,}7 = -5{,}2;$
11. $|x + 13| - 36 = 1;$
12. $|5x - 3| + 1 = 3;$
13. $|2x - 7| - 1{,}3 = 9{,}9;$
14. $\big||x| - 6\big| + 2{,}3 = 6{,}7;$
15. $|3|x|+2| - 1{,}5 = 6{,}8;$
16. $|1{,}2|x|-4| + 2{,}9 = 8{,}6;$
17. $2 \cdot (|x| - 3) = |x|;$
18. $4 \cdot (|x| - 6) = |x|;$
19. $6 \cdot (|x| - 1{,}5) = 3|x|;$
20. $9 \cdot (|x| - 3{,}6) = 5|x|;$
21. $|x| + 4x = 15;$
22. $|x| + 3x = 12;$
23. $|x| + 3x = -18;$
24. $2x + |x| = 15;$
25. $x - |3x| = -8;$
26. $|x| - 4x = 9;$
27. $2x - |x| = -1;$
28. $|4x| - x = 15;$
29. $2(x - 5) - 6|x| = -18;$
30. $7|x| - 3(x + 2) = -10;$
31. $|x| = x;$

32. $|x| = -x$;
33. $|x| + |x - 6| = 0$;
34. $|x - 5| + |15 - 3x| = 0$;
35. $|3x + 2| = |x - 1|$;
36. $|x - 5| = |x + 1|$;
37. $|x + 4| = |x - 6|$;
38. $|3x - 2| = |x - 1|$;
39. $\big||x| - 1\big| = |x - 1|$;
40. $\big||x| - 2\big| = |x + 2|$;

2. Побудуйте графік функції:

1. $y = |x|$;
2. $y = -|x|$;
3. $y = \frac{1}{2}|x|$;
4. $y = -3|x|$;
5. $y = |x| + 5$;
6. $y = |x| - 1{,}5$;
7. $y = |x| + x$;
8. $y = |x| - x$;
9. $y = |3x| + 3x - 2$;
10. $y = 2x - 6|x| + 4$;
11. $y = 0{,}5x + |x| - 3$;
12. $y = 1{,}2x - 2|x| + 1$;
13. $y = |4x| - 2|x|$;
14. $y = \frac{|x|-1}{2}$.

8 клас:

1.Розв’яжіть рівняння:

1. $\frac{|x|-5}{x-5} = 0$;
2. $\frac{|x|-7}{14-2x} = 0$;

3. $\frac{|x-5|-6}{x+11}=0;$

4. $\frac{|x-10|-3}{x+1}=0;$

5. $\sqrt{|x+3|}=5;$

6. $\sqrt{|x-6|}=0{,}2;$

7. $\sqrt{|5x-7|}=3;$

8. $\sqrt{|8-2x|}=7;$

9. $2|x^2-5|+3=5;$

10. $2|x^2-4|+1=11;$

11. $x^2-5|x|=0;$

12. $-x^2+3|x|=0;$

13. $-\frac{x^3}{|x|}+9=0;$

14. $\frac{x^3}{|x|}-16=0;$

15. $x|x|-5x+6=0;$

16. $x|x|+10x+25=0;$

17. $x^2-3|x|=0;$

18. $x^2+6|x|=0;$

19. $|x^2+5x-3|=3;$

20. $|x^2-12x-18|=18;$

21. $\left||x^2-5x+1|-4\right|=3;$

22. $|x^2+x-3|=x;$

23. $|x^2+x-1|=2x-1;$

24. $|x-2|=x^2-2x;$

25. $|x-3|=x^2-6x+3;$

2. Побудуйте графік функції:

1. $y=\frac{2}{|x|};$

2. $y=\frac{-3}{|x|};$

3. $y = \frac{5}{2|x|}$;
4. $y = \sqrt{|x|}$;

9 клас:

1.Розв'яжіть нерівність:

1. $|x| > 0$;
2. $|x| < 0$;
3. $|x| \geq 2$;
4. $|x| \leq 9$;
5. $|x| > -x^2$;
6. $|x| > x$;
7. $|x| > -x$;
8. $|x - 2| < 3{,}6$;
9. $|2x + 3| < 5$;
10. $|5x + 7| > 4$;
11. $|7 - 2x| < 1$;
12. $|x + 3| + 2x \geq 6$;
13. $|x - 4| - 6x < 15$;
14. $|x - 1{,}5| \leq 7$;
15. $|x^2 - x - 3| < 9$;
16. $|x^2 + 5x| > 6$;
17. $x^2 - 8|x| - 33 < 0$;
18. $x^2 + 5|x| - 6 \geq 0$;
19. $5x^2 - 7|x| + 2 \geq 0$;
20. $x^2 + 10|x| - 24 \leq 0$;
21. $|x - 1| \cdot (x^2 - 5x + 6) > 0$;
22. $|x| - |x - 3| \leq 2x$;
23. $(3 - x)^3|x + 2|(x - 1)(2x - 5) < 0$;
24. $\left|\frac{x+2}{x}\right|(x^2 - 4x - 5) \leq 0$;
25. $\left|\frac{x-5}{x}\right|(x^2 - x - 12) \leq 0$;

26. $(|x|-2)(|x|-3) \leq 0$;
27. $(|x|-10)(|x|-16) \geq 0$;
28. $|x^2-9|(x-2) < 0$;
29. $|x^2-25|(x+3) > 0$;
30. $|x^2-4| < 3x$;
31. $|x^2-6| > 5x$;
32. $|4x^2-1| < x+2$;
33. $|x^2+3x| < x+4$;
34. $x^2-5x+9 > |x-6|$;
35. $x^2-x-2 < |5x-3|$;
36. $\frac{|x+2|-x}{x} < 2$;
37. $\frac{|x+3|+x}{x+2} > 1$;
38. $\left|\frac{2x-1}{x-1}\right| \geq 2$;
39. $\left|\frac{x-3}{x-5}\right| \geq 1$;
40. $|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}| \leq 1$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1. $|x+1|-|x| = \sqrt{x^4-1}$;
2. $|x-1|-|x+2| = \sqrt{9-x^2}$;
3. $|2x-1|+|x^2-x-6| = x^2+x-7$;
4. $|3x-2|+|x^2-5x+6| = x^2-2x+4$;
5. $|x^2-4|+|x^2-x-2| = |2x^2-x-6|$;
6. $|x^2-9|+|x^2+4x+3| = |2x^2+4x-6|$;
7. $\left||x-1|-1\right| = 2$;
8. $\left||x-2|-2\right| = 3$.

3. Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння:

1. $a-|x| = x^2$;
2. $|x|+a = -x^2$;
3. $3|x| = |x-a|$;

4. $|x-a|+|x|=2;$
5. $x^2+1=|x-a|;$
6. $2-x^2=|x+a|;$
7. $\big||x|-1\big|=a;$
8. $|x^2-1|=a;$
9. $|(x+1)^2-1|=a;$
10. $|(x+2)^2-3|=a;$
11. $|(|x|-1)^2-1|=a;$
12. $|(|x|-2)^2-3|=a;$
13. $|x^2-4|x|+3|=a;$
14. $|x^2-2|x|-3|=a;$
15. $x^2+3|x-1|-1=a;$
16. $x^2-4|x-1|-1=a?$

4. Знайдіть множину розв'язків нерівності залежно від значення параметра a:

1. $|x-a|(5x^2-2x-3)<0;$
2. $|x-a|(7x^2-4x-3)\le 0;$
3. $|x-1|(x^2-(a+3)x+3a)\le 0;$
4. $|x+2|(x^2-(a+1)x+a)<0.$

5. Побудуйте графік функції:

1. $y=|x-2|+1;$
2. $y=|x-1|-3;$
3. $y=|3-x|-2;$
4. $y=3-|x+2|;$
5. $y=2-|x+4|;$
6. $y=\frac{1}{2}|x+1|-3;$
7. $y=1-2|x-1|;$
8. $y=|2x-1|;$
9. $y=\frac{2}{|x|};$
10. $y=\frac{-6}{|x|};$

11. $y = |x^2 - 1|$;
12. $y = |x^2 - 4|$;
13. $y = \left|\sqrt{x} - 3\right|$;
14. $y = \left|\sqrt{x} - 5\right|$;
15. $y = \left|\frac{2}{x} - 1\right|$;
16. $y = \left|\frac{4}{x} - 2\right|$;
17. $y = \left|\frac{2}{x-1}\right|$;
18. $y = \left|\frac{4}{x-2}\right|$;
19. $y = \left|\frac{x-4}{x+1}\right|$;
20. $y = \left|\frac{x+2}{x-3}\right|$;
21. $y = (|x| + 2)^2$;
22. $y = (|x| - 3)^2$;
23. $y = (|x - 2| - 1)^2$;
24. $y = (|x + 1| + 2)^2$;
25. $y = \sqrt{|x - 2| - 3}$;
26. $y = \sqrt{|x - 1| + 2}$;
27. $y = \sqrt{2 - |x|}$;
28. $y = \sqrt{1 - |x|}$;
29. $y = \sqrt{3|x| + 1}$;
30. $y = \sqrt{2|x| - 1}$;
31. $y = \left||x| - 4\right|$;
32. $y = |2|x| - 4|$;
33. $y = \left|\left||x - 1| - 1\right| - 1\right|$;
34. $y = \left|1 - \left|1 - |x|\right|\right|$;

10 клас:

1.Побудуйте графік функції:

1. $y = |x^3|$;
2. $y = |x|x^4$;
3. $y = |x|x^4 + x^5$;
4. $y = \frac{1}{x|x|}$;
5. $y = |x^{-5}|$;
6. $y = |x^{-3}|$;
7. $y = tgx|cosx|$;
8. $y = ctgx|sinx|$;
9. $y = 2\,sin\left|x + \frac{\pi}{6}\right|$;
10. $y = -\,cos\left|x - \frac{\pi}{4}\right|$;
11. $y = \left|cos\left|2x - \frac{\pi}{3}\right|\right|$;
12. $y = \left|cos\left(2|x| - \frac{\pi}{3}\right)\right|$;
13. $y = sinx + |sinx|$;
14. $y = cosx + |cosx|$;
15. $y = \sqrt[3]{|x|}$;
16. $y = \sqrt[4]{|x|}$;
17. $y = \sqrt[3]{|x| - 1}$;
18. $y = \sqrt[4]{|x| + 1}$;
19. $y = \left|\sqrt[3]{x + 1} - 2\right|$;
20. $y = \left|\sqrt[4]{x + 2} - 2\right|$;

2.Розв’яжіть рівняння:

1. $(|x| - 3)\sqrt[6]{2 - x} = 0$;
2. $(|x| - 4)\sqrt[4]{3 - x} = 0$;
3. $(x + 0{,}5)^2|sinx| + sinx = 0$;
4. $cosx = (x - 2)^2|cosx|$;
5. $|cosx| - \frac{cosx}{(x+1{,}5)^2} = 0$;

6. $|sinx| + \frac{sinx}{(x-4)^2} = 0;$
7. $|cosx| = \frac{1}{2};$
8. $|sinx| = \frac{1}{2};$
9. $\sqrt{\frac{1-|x|}{2}} = 2x^2 - 1;$

3.Визначте кількість розв'язків рівняння в залежності від значення параметра:

1. $\left|1 - \sqrt{|x-2|}\right| = a;$
2. $\left|1 - \sqrt{|x+3|}\right| = a;$
3. $|2|x| - 3| = x + a;$
4. $|2|x| - 5| = a - x;$
5. $6a\cos\frac{\pi x}{2} - a^2(1 + 6|x|) + 7 = 0;$

4. Розв'яжіть нерівність:

1. $|tgx| \leq \sqrt{3};$
2. $|tgx| > 1;$
3. $|ctgx| < 1;$
4. $|ctgx| \leq \sqrt{3};$
5. $4|cosx| + 2cos2x > 1;$
6. $|cosx| < |sinx|;$
7. $|cosx| \geq \frac{\sqrt{2}}{2};$
8. $|cos3x| < \frac{\sqrt{2}}{2};$
9. $|tgx| > 2;$
10. $|sin2x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2};$
11. $|ctgx| > 5;$

11 клас:

1. Розв'яжіть рівняння:

1. $5^{|6-4x|} = 25^{3x-4};$
2. $2^{|3x-4|} = 4^{2x-2};$

3. $9^{|3x-1|} = 3^{8x-2}$;
4. $36^{|1-2x|} = 64^{4-6x}$;
5. $7^{|x+1|} = \left(\sqrt{7}\right)^{3-2x}$;
6. $5^{|x-1|} = \left(\sqrt{5}\right)^{2x+3}$;
7. $|3-x|^{3x^2-10x+3} = 1$;
8. $|x-2|^{2x^2-5x+2} = 1$;
9. $|3^x - 1| + |3^x - 9| = 8$;
10. $|2^x - 1| + |2^x - 2| = 1$;
11. $3^{|x|} - |3^{x+2} - 9| = 3^{x+2}$;
12. $2^{|x|} - |2^{x+1} - 2| = 2^{x+1}$;
13. $\log_2 \frac{1}{|x-1|-1} = 1$;
14. $\log_5(|x-3| - 2) = -1$;
15. $\log_2(|x+1| - 2) = -2$;
16. $\log_3 \frac{2}{|x+2|-3} = 0$;
17. $|x| \log_2 x = 4x$;
18. $|x| \log_{\frac{1}{3}}(-x) = 2x$;
19. $|x-1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x-1|^3$;
20. $2^{-|x-2|} \log_2(4x - x^2 - 2) = 1$;

2. Знайдіть кількість усіх цілих значень a з проміжку [–5; 10], за кожного з яких рівняння $\left(\sqrt{2x-a+4} - 1\right)|x-2| = 0$ має два різних корені.

3. При яких значеннях параметра a рівняння має єдиний розв'язок:

1. $2^{|x|} = ax^2 + a^2$;
2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} = \left(a + \frac{1}{3}\right)x^2 + a^2$;
3. $\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^x + \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^x = (3a+1)|x| + 2a^2$

Додаток Б. Календарне планування курсу за виром «Методи розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем»

№ уроку	Тема уроку	Дата проведення
1.	Вступ. Поняття модуля. Його властивості.	
2.	Графік функції $y = \|x\|$, та його властивості.	
3.	Аналітичний метод розв'язування рівнянь виду $\|f(x)\|=a$.	
4.	Графічний метод розв'язування рівнянь виду $\|f(x)\|=a$.	
5-6.	Аналітичний метод розв'язування рівнянь виду $\Phi(\|f(x)\|)=0$.	
7-8.	Графічний метод розв'язування рівнянь виду $\Phi(\|f(x)\|)=0$.	
9-10.	Аналітичний метод розв'язування рівнянь виду $F(x, \|x\|) = 0$.	
11-12.	Графічний метод розв'язування рівнянь виду $F(x, \|x\|) = 0$.	
13-14.	Аналітичний метод розв'язування рівнянь виду $\|f(x)\| = \varphi(x)$.	
15-16.	Графічний метод розв'язування рівнянь виду $\|f(x)\| = \varphi(x)$.	
17-18.	Аналітичний метод розв'язування рівнянь виду $\|f_1(x)\| \pm \|f_2(x)\| \pm \cdots \pm \|f_n(x)\| \pm \varphi(x) = 0$.	
19-20.	Графічний метод розв'язування рівнянь виду $\|f_1(x)\| \pm \|f_2(x)\| \pm \cdots \pm \|f_n(x)\| \pm \varphi(x) = 0$.	
21.	Розв'язування рівнянь, що містять знак модуля.	
22.	Узагальнення та систематизація знань з теми «Рівняння з модулем»	
23.	Контрольна робота № 1 «Рівняння з модулем»	

24.	Аналітичний метод розв'язування нерівностей виду $\lvert f(x)\rvert > a, \lvert f(x)\rvert < a, \lvert f(x)\rvert \geq a, \lvert f(x)\rvert \leq a.$	
25.	Графічний метод розв'язування нерівностей виду $\lvert f(x)\rvert > a, \lvert f(x)\rvert < a, \lvert f(x)\rvert \geq a, \lvert f(x)\rvert \leq a.$	
26-27.	Аналітичний метод розв'язування нерівностей виду $\lvert f(x)\rvert > \varphi(x), \lvert f(x)\rvert < \varphi(x), \lvert f(x)\rvert \geq \varphi(x), \lvert f(x)\rvert \leq \varphi(x).$	
28-29.	Графічний метод розв'язування нерівностей виду $\lvert f(x)\rvert > \varphi(x), \lvert f(x)\rvert < \varphi(x), \lvert f(x)\rvert \geq \varphi(x), \lvert f(x)\rvert \leq \varphi(x).$	
30.	Узагальнення та систематизація знань з теми «Нерівності з модулем»	
31.	Контрольна робота № 2 «Нерівності з модулем»	
32.	Підсумковий тест.	

Додаток В. Контрольна робота № 1 «Рівняння з модулем»

1. Укажіть правильне твердження:

А. $|2| = -2$ Б. $|-3| = 3$ В. $|-6| = -6$ Г. $|0| = 1$

2. Розв'яжіть рівняння $|x| = 7$

А. 7 Б. -7 В. $7, -7$ Г. розв′язків немає

3. Розв'яжіть рівняння $|x| = -7$

А. 7 Б. -7 В. $7, -7$ Г. розв′язків немає

4. Розв'яжіть рівняння $|x - 3| = 5$

А. $8, -2$ Б. 8 В. $5, -5$ Г. -2

5. Установіть відповідність між рівнянням (1-4) та кількість коренів рівняння (А-Д)

1. $x^2 - 3|x| = 0$	А. жодного
2. $|x| = -x$	Б. 1
3. $2x + |x| = 15$	В. 2
4. $\big||x - 1| - 1\big| = 2$	Г. 3
	Д. безліч

6. Розв'яжіть рівняння:

a) $x|x| - 5x + 6 = 0;$

b) $|2x - 1| + |x^2 - x - 6| = x^2 + x - 7;$

c) $(x + 0{,}5)^2|sinx| + sinx = 0;$

7. Побудуйте графік функції:

a) $y = \sin x + |\sin x|;$

b) $y = \sqrt{|x - 1| + 2};$

c) $y = (|x + 1| + 2)^2;$

8. Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння: $\left|1 - \sqrt{|x - 2|}\right| = a;$