МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

На правах рукопису

Мельничук Ксенія Миколаївна

Вивчення діофантових рівнянь на факультативних заняттях з математики у старшій профільній школі

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:
Піддубний Олексій Михайлович

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ
Протокол № ___________
Засідання кафедри теорії функцій
та методики навчання математики

Від _______________ 20__ р.
Завідувач кафедри
Гембарська С.Б._______

Луцьк 2024

ЗМІСТ

Вступ

Поняття рівняння є одним із основних понять математичної науки. Одним із важливих типів рівнянь є діофантові рівняння, які найчастіше зустрічаються у теорії чисел. Розв'язування рівнянь у цілих числах або діофантових рівнянь бере початок ще з робіт давньогрецького математика Діофанта, який проживав та займався наукою у місті Олександрія близько 250–150 рр. до н. е. Власне на його честь і названі ці рівняння. Він був автором серії книг під назвою «Арифметика» (до наших часів дійшло лише 6 книг з 13). «Арифметика» Діофанта є своєрідним збірником задач, який складається з 189 завдань, кожне з яких є розв'язаним з відповідними поясненнями, а іноді й не одним способом. Задачі у книзі досить ретельно підібрані для демонстрації різних методів розв'язування рівнянь.

Багато математичних задач-головоломок, які нині відомі як стародавні задачі та задачі з фольклору різних країн (стародавня арабська задача, стародавня болгарська задача, задача з австралійського фольклору і т.д.), моделюються за допомогою діофантових рівнянь. Розв'язуванням різних рівнянь у цілих числах також займалося багато вчених Індії. Вони розробили загальний алгоритм розв'язування лінійних діофантових рівнянь та деяких рівнянь другого степеня у зв'язку з різними астрономічними задачами. З деяких історичних джерел відомо, що лінійні діофантові рівняння $ax+by=c$ уміли розв'язувати ще до Діофанта, зокрема стародавніми греками було виявлено, що вказане рівняння має розв'язок $\left(x_0;y_0\right)$, який задовольняє множину $\left(x;y\right)$, де $x=x_0+bk$, $y=y_0-bk$, причому k – довільне ціле число.

У 1637 році П'єр де Ферма на полі своєї копії книги «Арифметика» сформулював такі гіпотези: «Неможливо розділити куб натурального числа на два інші куби натуральних чисел, або четвертий степінь на два доданки, які є теж четвертим степенем, або взагалі, будь-який степінь, більший за 2 другу, на два доданки, які є такими ж степенями натуральних чисел».

Ці твердження сформулювали сучасною мовою славнозвісну Велику теорему Ферма: «Рівняння $a^n + b^n = c^n$ не має розв'язків (a,b,c) у цілих числах для будь-якого $n \in N, n > 2$». Слідом за цим Ферма написав: «Я виявив справді дивовижне доведення цього твердження, але поля книжки занадто вузькі для його запису». Однак довести цю теорему століттями не вдавалося математикам і лише в 1995 році доведення все ж було отримане британським математиком Ендрю Вайлзом.

У 1657 р. Ферма робив спробу розв'язати діофантове рівняння виду $61x^2 + 1 = y^2$ (ще за 1000 років перед тим це рівняння розв'язував Брахмагупта). Врешті-решт рівняння було вирішене Л. Ейлером на початку 18 століття, який також розв'язав ряд інших діофантових рівнянь. Найменший розв'язок цього рівняння в натуральних числах: $x = 226153980$, $y = 1766319049$ був отриманий за допомогою методу Чакравалі.

У 1900 році Давид Гільберт запропонував проблему розв'язуваності усіх діофантових рівнянь як 10-ту за номером у сформульованому ним списку з 23-х проблем на 20-те століття. Оригінальне формулювання Гільберта його Десятої проблеми було наступним: «Дано рівняння Діофанта з будь-якою кількістю невідомих та довільними раціональними числовими коефіцієнтами: розробити алгоритм, згідно з яким можна визначити за скінченну кількість операцій, чи розв'язується це рівняння в раціональних цілих числах».

У 1970 році Юрій Матіясевич вирішив цю проблему, спираючись на роботи Джулії Робінсон, Мартіна Девіса та Хіларі Патнам. Він довів, що загальний алгоритм розв'язання усіх рівнянь у цілих числах існувати не може.

На сьогодні одним із перспективних розділів, які вивчають діофантові рівняння, є діофантова геометрія, яка спирається на застосування методів алгебраїчної геометрії. Центральною ідеєю діофантової геометрії є ідея раціональної точки, а саме розв'язку поліноміального рівняння або системи поліноміальних рівнянь, яке є вектором у заданому полі *K*, коли *K* не є алгебраїчно замкненим. Одним із небагатьох сучасних загальних підходів у дослідженнях діофантових рівнянь є принцип нескінченного спуску та принцип Хассе. Вони стали традиційним методами вивчення таких рівнянь [7; 22].

На сьогодні питання, пов'язані з вивченням діофантових рівнянь, вживлюються майже у всі розділи математики, створюючи при цьому навіть їх нові підрозділи (зокрема, діофантова геометрія). Крім того, діафантові рівняння застосовуються **у** хімії, біології, генетиці, фізиці, економіці, комп'ютерних науках, теорії кодування та інших галузях наукового знання.

Тож актуальність досліджуваної теми щодо вивчення діофантових рівнянь підтверджується цілими епохами їх розвитку та стійким інтересом до їх застосувань на сучасному етапі.

Об'єкт дослідження: теорія діофантових рівнянь.

Предмет дослідження: методика вивчення діофантових рівнянь у шкільному курсі математики.

Мета дослідження – обґрунтувати теоретичні та методичні засади вивчення діофантових рівнянь у школі; визначити місце діофантових рівнянь у шкільному курсі математики; розробити програму факультативу та декілька конспектів занять для старшокласників за даною тематикою.

Відповідно до мети дослідження поставлено такі *завдання:*

1) проаналізувати наукову, психолого-педагогічну, методичну та навчальну літературу з теми дослідження;

2) розглянути відомості з теорії діофантових рівнянь щодо їх класифікації, методів розв'язування та застосування в різних сферах наукового знання;

3) визначити роль та місце діофантових рівнянь у шкільному курсі математики;

4) дослідити методичні особливості та надати методичні рекомендації щодо вивчення діофантових рівнянь у ході позакласної роботи з математики;

5) розробити програму факультативу з теми «Діофантові рівняння та їх застосування» для учнів старшої профільної школи;

6) навести приклади розроблених самостійно конспектів занять з даної теми для учнів 10 класу.

Для розв'язання поставлених завдань використовувались такі *методи дослідження*:

– системний та порівняльний аналіз, узагальнення наукової, психолого-педагогічної, методичної та навчальної літератури з проблеми дослідження;

– вивчення досвіду вчителів та методистів щодо вивчення діофантових рівнянь у шкільному курсі математики, зокрема під час підготовки учнів до участі у математичних змаганнях.

Наукова новизна дослідження полягає в обґрунтуванні та удосконаленні методичних особливостей вивчення діофантових рівнянь під час проведення факультативних занять з математики.

Практичне значення дослідження передбачає розробку методичних рекомендацій, програми факультативного курсу з теми «Діофантові рівняння та їх застосування» та конспектів декількох занять за даною тематикою.

Структура магістерської роботи. Магістерська робота складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

В основні частині роботи досліджено теоретичні аспекти та методичні особливості вивчення діофантових рівнянь у шкільному курсі математики.

У висновках до роботи зроблено аналіз результатів проведеного дослідження, а також наведено рекомендації по використанню отриманих результатів.

Основний зміст роботи викладено на 45 сторінках. Список використаних джерел (39 найменувань), поданий в кінці роботи, може бути корисним для викладачів, вчителів та майбутніх вчителів математики в їх науково-професійній, методичній та навчальній діяльності.

Розділ 1. Необхідні відомості з теорії діофантових рівнянь

1.1. Діофантові рівняння та методи їх розв'язування

З точки зору класичної математики діофантові рівняння розглядаються як поліноміальні рівняння з раціональними коефіцієнтами, розв'язками яких є цілі числа. Проте, на сучасному етапі дане рівняння не є обов'язково раціональним і розв'язки можуть бути не лише цілими.

Відомо, що загальна теорія діофантових рівнянь є лише частково дослідженою. Досить лише пригадати історію Великої теореми Ферма. Якщо звернутися до класифікації діофантових рівнянь, то відомо, що для алгебраїчних рівнянь з однією змінною довільного степеня, лінійних рівнянь із будь-якою кількістю невідомих, рівнянь другого степеня з двома невідомими та небагатьох інших є загальні методи розв'язування. Зауважимо, що є й такі типи діофантових рівнянь, для яких загальні способи розв'язуванням ще повністю не досліджені [30]. Все це демонструє вагомість та актуальність математичної науки та нових математичних відкриттів на сучасному етапі.

1.1.1. Лінійні діофантові рівняння

Лінійним діофантовим рівнянням називається рівняння виду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b, \{a_i, b\} \in Z, \ a_i \neq 0 \qquad (1.1)$$

у якому розв'язки $(x_1, x_2, ..., x_n)$ містяться на множині цілих чисел [11].

Якщо розв'язок цього рівняння розуміти як довільну послідовність цілих чисел $v_1, v_2, ..., v_n$, для якої має місце тотожність: $a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = b$, то з подільності кожного коефіцієнта a_i на найбільший спільний їх дільник $(a_1, a_2, ..., a_n) = d$ маємо отримати подільність коефіцієнта *b* на цей дільник. Нехай

$b = cd, c \in N$. Тоді за властивістю найбільшого спільного дільника для деяких цілих чисел $u_1, u_2, ..., u_n$ має виконуватись рівність

$$d = a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n,$$

тобто

$$a_1(cu_1) + a_2(cu_2) + ... + a_n(cu_n) = b \text{ [12].}$$

Отже, має місце така теорема, що використовується при розв'язуванні лінійних діофантових рівнянь.

Теорема 1.1. *Лінійне діофантове рівняння* $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ *має розв'язки в цілих числах тоді тільки тоді, коли* b *ділиться на найбільший спільний дільник d чисел* $a_1, a_2, ..., a_n$ [11].

У математиці найчастіше розглядають лінійні діофантові рівняння з двома змінними:

$$ax + by = c, \ \{a, b, c\} \in Z. \qquad (1.2)$$

Множина розв'язків даного рівняння або є порожньою, або нескінченою.

Справедливою є наступна теорема, якою користуються при розв'язуванні рівнянь виду (1.2).

Теорема 1.2. *Нехай задане діофантове рівняння* $ax + by = c$, *в якому* $(a, b) = 1$, *и нехай* $x = x_0$, $y = y_0$ *– деякий розв'язок цього рівняння. Тоді множина всіх розв'язків заданого рівняння матиме вигляд:* $x = x_0 - bt$, $y = y_0 + at$ *для будь-якого* $t \in N$ [36].

Фактично, для одержання розв'язку діофантового рівняння необхідно знайти деякий його частинний розв'язок $x = x_0$, $y = y_0$. Цей розв'язок іноді вдається знайти методом підбору, проте у більшості випадків користуються іншими методами, розглянемо їх.

1) Найчастіше лінійні діофантові рівняння *розв'язують відносно однієї змінної, а іншу вважати цілою*.

При цьому користуються наступними прийомами:

– виражають у рівнянні одну змінну через іншу, причому іншу змінну вибирають так, щоб вона була цілою;

– розкладають ліву частину діофантового рівняння на множники враховуючи, що права частина рівності є цілим числом, а після цього замінюють рівняння на сукупність систем більш простіших рівнянь;

– враховуючи певні особливості рівняння, виокремлюють множину, яка може містити розв'язки, а далі за допомогою перевірки знаходять їх[4; 34].

2) Розв'язування рівнянь *за допомогою конгруенцій*.

Означення 1.1. *Кажуть, що число a конгруентне числу b за модулем m, якщо числа a та b мають однакові остачі при її діленні на число m. У цьому випадку записують так звану конгруенцію:*

$$a \equiv b \pmod{m},$$

де $a, b \in Z$ *– називають відповідно лівою та правою частинами конгруенції, а* $m \in Z \setminus \{0\}$ *– її модулем* [11].

Розглянемо найважливіші *властивості конгруенцій* [5], що використовуються при розв'язуванні рівнянь.

Нехай задано a, b, c, d – цілі числа, а m і n – натуральні, то справедливими є наступні твердження:

1) кожне ціле число конгруентне саме собі за будь-яким модулем: $a \equiv a \pmod{m}$ (*рефлексивність*);

2) якщо $a \equiv b \pmod{m}$, то $b \equiv a \pmod{m}$ (*симетричність*);

3) якщо $a \equiv b \pmod{m}$ і $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$(*транзитивність*);

4) дві конгруенції за одним і тим самим модулем можна почленно додавати, віднімати, множити, тобто якщо $a \equiv b \pmod{m}$ і $c \equiv d \pmod{m}$, то $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$ і $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$;

5) до обох часин конгруенції можна додавати (віднімати) довільне ціле число: $a \pm k \equiv b \pm k \pmod{m}$, де довільне $k \in \mathbb{Z}$;

6) ліву та праву частини конгруенції можна множити на одне й те є саме ціле число: $a \cdot n \equiv b \cdot n \pmod{m}$, де $n \in \mathbb{Z}$;

7) обидві частини конгруенції можна підносити до натурального степеня: $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, де $n \in \mathbb{N}$;

8) ділити обидві частини конгруенції можна лише на те натуральне число, яке є взаємно-простим з модулем: $\frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n} \pmod{m}$, де $(m;n) = 1$.

3) Використання *алгоритму Евкліда*.

Алгоритм Евкліда є одним із способів знаходження НСД двох чисел.

Нехай є два числа a і b , причому $a > b > 0$. Поділимо a на b з остачею: $a=bq+r$, де $0 \leq r < b$.

Далі поділимо b на остачу r, одержимо: $b=rq_1+r_1$, де $0 \leq r_1 < r$. На наступному кроці ділимо остачу r на остачу r_1: $r=r_1q_2+r_2$, $0 \leq r_2 < r_1$ і так далі. Такий процес поступового ділення є скінченним, оскільки остачі, що одержуються на кожному кроці, утворюють спадний ланцюг невід'ємних цілих чисел $b > r > r_1 > r_2 > \ldots$, а він обмежений знизу нулем. Останнє означає, що на деякому кроці одержимо остачу $r_{n+1}=0$ і весь процес ділення запишеться наступним чином [3; 11]:

$$a=bq+r, \quad 0 \leq r < b,$$
$$b=rq_1+r_1, \quad 0 \leq r_1 < r,$$
$$r=r_1q_2+r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1,$$

. . .

$r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n, \quad 0 \leq r_n < r_{n-1},$

$r_{n-1}=r_nq_{n+1}.$

4) *Застосування ланцюгових дробів* при розв'язуванні діофантових рівнянь (більш детально про скінченні ланцюгові дроби та їх властивості у [18]).

Загальний розв`язок лінійного діофантового рівняння $ax+by=c$, де $(a,b)=1$, можна подати у вигляді: $\begin{cases} x=(-1)^{n-1}cQ_{n-1}+bt, \\ y=(-1)^n cP_{n-1}-at, \end{cases}$, де $t\in Z$ [37].

5) Іноді застосовується *графічний метод* розв'язування діофантових рівнянь. При цьому змінну *y* виражають через *x* та будують графік відповідної функції. За графіком знаходять хоча б один окремий розв'язок рівняння та записують загальний його розв'язок.

6) При розв'язування олімпіадних задач на застосування діофантових рівнянь користуються *методом спуску*. Сутність цього методу полягає у тому, що спочатку необхідно обрати змінну, що має найменший коефіцієнт та виразити її через іншу змінну, потім, виділивши цілу частину у виразі, ввести заміну таким чином, щоб зменшити коефіцієнти, а в подальшому, шляхом декількох замін, отримати цілий вираз – фактично здійснити «спуск», для отримання відповіді необхідно піднятися «вгору», поступово підставивши всі заміни [37; 38].

1.1.2. Діофантові рівняння другого та третього порядків

Розглянемо особливості розв'язування діофантових рівнянь другого (квадратних) та третього степенів.

1) Розв'язуючи діофантові рівняння вищих степенів, часто користуються відомим *методом розкладання на множники* та *методом перебору* [31].

2) При розв'язуванні діофантових рівнянь вищих порядків *використовують конгруенції, основні теоремами теорії подільності, зокрема, теорему Ейлера та малу теорему Ферма*.

Теорема 1.3 (*Теорема Ейлера*). *Для кожного цілого числа a, яке є взаємно простим із даним числом m, має місце конгруенція*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

У формулюванні цієї теореми присутня так звана мультиплікативна функція Ейлера. Відомо, що функцією Ейлера $\varphi(n)$ довільного натурального числа $n \geq 1$ називається функція, значення якої дорівнює кількості різних натуральних чисел $m < n$, які є взаємно простими з *n* [11].

Якщо канонічний розклад числа n має вигляд: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, де p_i – різні прості числа, а α_i – натуральні числа. Тоді значення функції Ейлера можна обчислити за такою формулою:

$$\varphi(n) = \begin{cases} n\left(1 - \dfrac{1}{p_1}\right)\left(1 - \dfrac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \dfrac{1}{p_s}\right), n \geq 2, \\ 0, n = 1. \end{cases}.$$

Теорема 1.4 (Мала теорема Ферма). *Для кожного цілого числа a, яке є взаємно простим із даним простим числом p, число* $a^{p-1} - 1$ *ділиться націло на це число p* [11].

3) Одним із основних методів розв’язування діофантових рівнянь вищих степенів є *метод локалізації* сутність якого полягає у визначенні проміжків на яких містяться розв’язки заданого рівняння або умов, що дозволяють значно локалізувати корінь рівняння.

Відомими у математиці є наступні типи діофантових рівнянь.

Розглянемо діофантове рівняння виду $x^2 + y^2 = z^2$ розв’язкам якого є так звані трійки натуральних чисел, що називають *піфагоровими числами* (довжини сторін деяких прямокутних трикутників). Часто дане рівняння називається *діофантовим рівнянням Піфагора* [2; 39]. Справедливою є наступна теорема.

Теорема 1.5. *Натуральними розв'язками рівняння* $x^2 + y^2 = z^2$ *є трійки чисел* $x = (m^2 - n^2)k$, $y = 2mnk$, $z = (m^2 + n^2)k$, *де* $\{m, n, k\} \in N$, *які задовольняють наступні умови: 1) m і n взаємно прості; 2) m і n різної парності; 3)* $m > n > 0$, $k > 0$ [6; 39].

Цікавим прикладом рівнянь другого порядку є *рівняння Пелля*, тобто рівняння виду

$$x^2 - ay^2 = 1,$$

де $a \in N$ і не є квадратом іншого натурального числа.

Очевидно, що дане рівняння має тривіальні розв'язки $(1,0)$ та $(-1,0)$ [3]. Відповідь про існування нетривіальних розв'язків рівняння Пелля дасть наступна теорема.

Теорема 1.6. *Будь-яке рівняння Пелля має нетривіальні додатні розв'язки, які можна одержати з рівностей* $(x_i, y_i) = (x_0 x_{i-1} + a y_0 y_{i-1}, x_0 y_{i-1} + y_0 x_{i-1})$, $i \in N$, *де* (x_0, y_0) *– деякий нетривіальний розв'язок рівняння* [3; 36].

Отже, розв'язування рівняння Пелля зводиться до знаходження деякого одного нетривіального розв'язку, як правило, за допомогою безпосередньо методу підбору.

1.2. Застосування діофантових рівнянь в математиці, економіці та природознавстві

Змістова лінія рівнянь займає важливе місце у підготовці спеціалістів будь-якої галузі, так як рівняння мають велику кількість прикладних застосувань. Діофантові рівняння не є виключеннями, оскільки вони широко використовуються не лише у математичних дослідженнях, але й у природничих (фізиці, хімії, біології, генетиці) та економічних науках, інформатиці.

Продемонструємо приклади застосування лінійних діофантових рівнянь при розв'язуванні прикладних задач з математики, фізики, хімії та економіки.

Розв'яжемо наступну математичну задачу прикладного характеру, що зводиться до запису відповідного лінійного діофантового рівняння з двома змінними.

Задача 1.1. Певна кількість туристів, що розмістилися порівну у п'яти комфортабельних автобусах (відомо, що у кожному з автобусів не більше 54 людей) була доставлена до залізничного вокзалу, де до них приєдналось ще 7 чоловік і всі туристи розмістилися порівну у 14 вагонах пасажирського потяга. Скільки всього було туристів?

Розв'язання

Нехай x – кількість місць у комфортабельному автобусі, а y – кількість місць у вагоні потяга, де розташувалися туристи. Оскільки було всього 5 автобусів, то кількість людей у цих автобусах дорівнює $5x$. Всі туристи потім розташувалися у 14 вагонах потяга, то кількість всіх людей у потязі дорівнює $14y$.

Відомо, що на вокзалі до туристів приєдналося ще 7 чоловік, тобто маємо рівняння: $5x+7=14y$ або $5x=14y-7$.

Очевидно, права частина останньої рівності ділиться на 7, тоді і ліва частина також має ділитися на 7. Позначимо $x=7k$.

Тоді отримаємо: $35k=14y-7$ або $5k+1=2y$.

Очевидно, права частина останньої рівності ділиться на 2, тоді і ліва частина також має ділитися на 2, а це означає, що доданок $5k$, відтак і множник k, має бути непарним. Позначимо $k=2m-1$.

Тоді отримаємо: $10m-4=2y \Rightarrow y=5m-2$, $m\in Z$.

Підставляючи отримане значення у вихідне рівняння, маємо

$$5x=14(5m-2)-7=70m-35 \Rightarrow x=14m-7,\ m\in Z.$$

Враховуючи додатково умови задачі, що $x > 0, y > 0, 14y \le 54$, отримуємо що розв'язком є значення виразу $14y = 14(5m-2)$ лише при $m=1$, тобто число 42.

Відповідь: всього було 42 туристи.

Розглянемо приклад фізичної задачі, зокрема задачі на механічний рух.

Задача 1.2. Автомобіль починає рухатися по звивистій дорозі. Визначити довжини трьох послідовних ділянок дороги, які виражаються цілою кількістю метрів пройденого шляху, якщо на цих ділянках автомобіль рухався зі сталими швидкостями 13, 24 і 50 м/с відповідно, сумарна довжина цих ділянок дорівнює 3 кілометри 770 метрів і автомобіль витратив на весь шлях 4 хвилини.

Розв'язання

Позначимо за x, y та z шукані довжини трьох частин шляху. Користуючись умовою задачі, матимемо такі діофантові рівняння, що є математичними моделями даного фізичного процесу: $\frac{x}{13} + \frac{y}{24} + \frac{z}{50} = 240$ або $x + y + z = 3000$.

Виконавши заміну змінних: $\frac{x}{13} = a, \frac{y}{17} = b, \frac{z}{19} = c$, отримаємо таку систему лінійних діофантових рівнянь $\begin{cases} a+b+c=240, \\ 13a+24b+50c=3770, \end{cases}$ де змінні a, b, c за змістом задачі виражатимуть невідомий час (у секундах) руху автомобіля на трьох ділянках дороги. Розв'яжемо цю систему: $\begin{cases} c = 240 - a - b, \\ 13a + 24b + 50(240 - a - b) = 3770. \end{cases}$

Із другого рівняння системи матимемо, що $37a + 26b = 8230$.

Останнє діофантове рівняння можна розв'язати за допомогою конгруенції:

$$37a \equiv 8230 \pmod{26}.$$

Розв'яжемо її. Додаючи і віднімаючи числа, кратні модулю, за властивістю конгруенцій матимемо

$$37a \equiv 8230 - 7800 = 430 \equiv 430 - 520 = -90 \equiv -90 + 104 = 14 \pmod{26},$$

$$14 \equiv 37a \equiv 37a + 26a = 63a \pmod{26}.$$

Поділивши ліву та праву частини конгруенції на 7 та скориставшись попередньою властивістю, отримаємо: $9a \equiv 2 \equiv 2 + 52 = 54 \pmod{26}$,

Поділивши ліву та праву частини конгруенції на 9, виходить, що $a \equiv 6 \pmod{26}$, тобто $a = 26k + 6$, $k \in Z$. Підставляючи отриманий вираз у рівняння $37a + 26b = 8230$, матимемо: $37(26k + 6) + 26b = 8230$, $37 \cdot 26k + 26b = 8008$, $b = 308 - 37k$, $k \in Z$.

Підставляючи отримані вирази для a та b у перше рівняння системи, матимемо: $c = 240 - (26k + 6) - (308 - 37k) = 11k - 74$, $k \in Z$.

Таким чином, розв'язок початкової системи матиме вигляд: $\begin{cases} a = 26k + 6, \\ b = 308 - 37k, \ k \in Z. \\ c = 11k - 74; \end{cases}$

Враховуючи також, що за умовою задачі змінні a, b, c повинні задовольняти нерівності $0 < a < 240, 0 < b < 240, 0 < c < 240$, то з усіх отриманих розв'язків при $k \in Z$ матимемо лише 2 підходящих: $a_1 = 188, b_1 = 49, c_1 = 3$ (при $k = 7$) і $a_2 = 214, b_2 = 12, c_2 = 14$ (при $k = 8$).

Відповідні значення змінних x, y, z маємо такі: $\begin{cases} x_1 = 2444, \\ y_1 = 1176, \\ z_1 = 150; \end{cases}$ і $\begin{cases} x_2 = 2782, \\ y_1 = 288, \\ z_1 = 700. \end{cases}$

Відповідь: довжини трьох послідовних ділянок дороги дорівнюють 2 км 444 м, 1 км 176 м і 150 м, або 2 км 782 м, 288 м і 700 м.

Діофантові рівняння застосовуються у хімії, зокрема для урівнювання коефіцієнтів хімічної реакції. Розглянемо відповідний приклад.

Задача 1.3. Нехай маємо хімічну реакцію:

$$k_1\,\mathrm{FeSO_4} + k_2\,\mathrm{KMnO_4} + k_3\,\mathrm{H_2SO_4} \to k_4\,\mathrm{Fe_2(SO_4)_3} + k_5\,\mathrm{MnSO_4} + k_6\,\mathrm{K_2SO_4} + k_7\,\mathrm{H_2O},$$

де $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7 \in N$ – коефіцієнти, які необхідно урівняти [1].

Розв'язання

Для кожного з елементів речовин реакцій складемо та розв'яжемо діофантове рівняння:

$\mathrm{Fe}:$ $\quad k_1 = 2k_4$; $\underline{k_4 = t,\ k_1 = 2t, \quad t \in N.}$

$\mathrm{S}:$ $\quad k_1 + k_3 = 3k_4 + k_5 + k_6 \Rightarrow 2t + k_3 = 3t + k_5 + k_6 \Rightarrow k_3 - k_5 - k_6 = t$;

$\underline{k_5 = u,\ k_6 = v,\ k_3 = t + u + v, \quad t, u, v \in N.}$

$\mathrm{O}:$ $\quad 4k_1 + 4k_2 + 4k_3 = 12k_4 + 4k_5 + 4k_6 + k_7 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8t + 4k_2 + 4t + 4u + 4v = 12t + 4u + 4v + k_7 \Rightarrow 4k_2 = k_7$;

$\underline{k_2 = w,\ k_7 = 4w, \quad w \in N.}$

$\mathrm{K}:$ $\quad k_2 = 2k_6 \Rightarrow w = 2v$; $\underline{k_2 = 2v,\ k_7 = 8v, \quad v \in N.}$

$\mathrm{Mn}:$ $\quad k_2 = k_5 \Rightarrow 2v = u$; $\underline{k_3 = t + 3v,\ k_5 = 2v, \quad v \in N.}$

$\mathrm{H}:$ $\quad 2k_3 = 2k_7 \Rightarrow t + 3v = 8v \Rightarrow t = 5v$;

$\underline{k_1 = 10v, k_2 = 2v, k_3 = 8v, k_4 = 5v, k_5 = 2v, k_6 = v,\ k_7 = 8v, \quad v \in N.}$

Таким чином, рівняння реакції запишеться у такому вигляді:

$$10\mathrm{FeSO_4} + 2\mathrm{KMnO_4} + 8\mathrm{H_2SO_4} \rightarrow 5\mathrm{Fe_2}\left(\mathrm{SO_4}\right)_3 + 2\mathrm{MnSO_4} + \mathrm{K_2SO_4} + 8\mathrm{H_2O}.$$

Розв'яжемо старовинну задачу на застосування діофантових рівнянь з галузі економіки сільського господарства.

Задача 1.4. Заможний селянин витратив 100 гривень на придбання різних домашніх тварин. Кожна корова обійшлася йому в 10 гривень, свиня у 3 гривні, а вівця у 1 гривню. Вважаючи, що заможній селянин придбав принаймні по одній тварині кожного виду, знайдемо, скільки голів худоби кожного виду він купив.

Розв'язання

Нехай *x*, *y*, *z* – кількість корів, свиней та овець відповідно.

Тоді, вартість всіх тварин дорівнює $\left(10x + 3y + z\right)$.

Враховуючи, що селянин на придбання тварин витратив 100 гривень отримаємо діофантове рівняння

$$10x + 3y + z = 100.$$

Зрозуміло, що розв'язками даного рівняння мають бути лише натуральні числа, менші за 100. Зауважимо, що *x* має бути меншим 10.

Складемо відповідну таблицю значень для *x*, *y*, *z*:

x	*y*	*z*
9	3	1
8	6	2
7	9	3
6	12	4
5	15	5
4	18	6
3	21	7
2	24	8
1	27	9

У таблиці підібрано 9 можливих варіантів придбання тварин різного виду. Проте, можливі й інші варіанти, наприклад $x = 7$, $y = 7$, $z = 9$, які можна скомпонувати поступово зменшуючи значення змінної *y* і, відповідно, збільшуючи значення *z*.

Відповідь*:* заможній селянин може придбати 9 корів 3 свині та 1 вівцю (один із можливих варіантів).

Розділ 2. Вивчення діофантових рівнянь у ході позакласної роботи з математики

2.1. Місце діофантових рівнянь у шкільному курсі математики

Діафантові рівняння не є відомою та популярною темою у шкільному курсі математики. Прийнято вважати, що з діофантовими рівняннями учні знайомляться при підготовці до олімпіад з математики, оскільки саме вони часто зустрічаються у завданнях олімпіадного характеру. Більшість учнів, як правило, не мають жодного уявлення про діофантові рівняння та методи їх розв’язування.

Проте, аналізуючи підручник з алгебри для 8 класу з поглибленим вивченням математики авторів Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. [25], нами було виявлено завдання з діофантовими рівняннями. Дані рівняння розглядаються при вивченні теми «Основи теорії подільності». Як зазначається у програмі для поглибленого курсу математики [26] тема «Основи теорії подільності» є однією з найскладніших для розуміння та вивчення, оскільки восьмикласники ще не мають повноцінно сформованого уявлення про можливості практичного застосування відповідних знань, отриманих з даної теми. У процесі вивчення відповідної теми учні знайомляться з ключовими поняттями з теорії чисел: «подільність чисел», «ділення націло», «ділення з остачею», «конгруенція», «просте число» та інші; з формулюванням та доведенням основних теорем (основна теорема арифметики, мала теорема Ферма, теорема Ейлера та інші). Крім того, відбувається також систематизація, узагальнення та розширення знань з теорії подільності, які були отримані у попередніх класах; в учнів намагаються сформувати розуміння прикладної та практичної застосовності теорії чисел шляхом як розширення знань, так і знайомством з історією теорії чисел та основними дослідженнями вчених у даній галузі.

Важливо зазначити, що у параграфі «Подільність націло та її властивості» автори підручника [25] пропонують розв'язання двох діофантових рівнянь другого порядку $x^2+xy-x-y=5$ та $x^2-y^2=14$ способом розкладу на множники та записом відповідних систем [25, с. 54]. У якості завдань для самостійного розв'язування пропонується 21 діофантових рівнянь вищих степенів.

8.20.• Розв'яжіть у цілих числах рівняння:

1) $9x^2-y^2=6$;
2) $x^2+2xy=2x+9$;
3) $x^2+2xy-x-2y=4$;
4) $x^2-4xy+3y^2=3$;
5) $x^2+xy-6y^2=6$;
6) $x^2-2xy-3y^2+x+y=14$.

8.21.• Розв'яжіть у цілих числах рівняння:

1) $x^2-4y^2=5$;
2) $y^2+3xy=15+y$;
3) $x^2-3xy+3y-x=10$;
4) $2y^2-xy-x^2=2$.

8.22.• Розв'яжіть у цілих числах рівняння:

1) $xy=x+y$;
2) $xy-x-2y=5$.

8.23.• Розв'яжіть у цілих числах рівняння $2xy+2x-3y-4=0$.

9.29.• Розв'яжіть у цілих числах рівняння:

1) $x^2-3y=8$;
2) $x^2-4y^3=11$;
3) $m^3-7n^2=19$;
4) $z^3-9t=16$.

9.30.• Розв'яжіть у цілих числах рівняння:

1) $x^2-3y^2=17$;
2) $9x^2-28y=15$;
3) $8x^3+7y^3=38$;
4) $16x^4-5y^3=18$.

Рис. 2.1. Завдання з діофантовими рівняннями за підручником [25]

Зауважимо, що у підручнику відсутні лінійні діофантові рівняння і, крім того, автори не називають ці рівняння не діафантовими, а рівняннями в цілих числах. У наступних параграфах підручника є діофантові рівняння, які автори рекомендують розв'язати на множині натуральних чисел: $x(y-1)^2=8y$ та $x(y+1)^2=243y$ (розв'язання першого рівняння представлено у підручнику).

Вважаємо, що діофантові рівняння варто вивчати у ході позакласної роботи з математики (гурткової та факультативної роботи) та при підготовці учнів до олімпіад з математики.

З даної теми уже існують деякі методичні розробки, які можна використовувати у шкільній практиці. І.Д. Кирдей запропоновано програму факультативу для 9 класів з поглибленим вивченням математики «Вступ до теорії чисел. Ланцюгові дроби та їх застосування» [19], де передбачено вивчення лінійних та квадратних діофантових рівнянь, а також різних методів їх розв’язування, зокрема застосування теорії подільності та ланцюгових дробів.

Н.А. Танник [35] пропонує матеріали для занять математичного гуртка, який включає ґрунтовний аналіз методів розв’язування діофантових рівнянь, таких як:

– розклад на множники та зведення до систем чи сукупностей ;

– застосування тотожних перетворень;

– порівняння останніх цифр у записах чисел правої та лівої частин рівняння;

– застосування ланцюгових дробів;

– використання десяткового запису чисел;

– метод нескінченного спуску;

– метод параметризації;

– застосування теорії подільності та властивостей конгруенцій.

Автори статті [28] проаналізували різні типи діофантових рівнянь, які зустрічаються на сучасних змаганнях з математики, зокрема на ІІІ етапі Всеукраїнської олімпіади для учнів 9 та 10 класів.

А.О. Кучик [24] пропонує розробку факультативних занять для 7 класу, виданих у формі навчально-методичного посібника ««За лаштунками шкільної математики». До програми даного факультативного курсу включено питання про найпростіші діофантові рівняння та історію їх виникнення.

Аналіз методичної літератури показав, що існують різні підходи до вивчення діофантових рівнянь, проте більшість методистів переконані, що дана тема має розглядатися у ході позакласної роботи як у основній школі (8-9 класи), так і у старшій профільній школі (10-11 клас).

З метою активізації пізнавального інтересу учнів та поглиблення їх знань з алгебри та теорії чисел І.В. Волошинова [13] пропонує вивчати діофантові рівняння у старшій профільній школі на факультативних заняттях, оскільки іноді серед завдань Зовнішнього незалежного оцінювання можна виявити наступне формулювання: «Записати загальну формулу чисел, які при діленні на 5 дають остачу 2, а при діленні на 7 – остачу 5», що зводиться до розв'язування лінійного діофантового рівняння. Автор статті [13] переконана, що вивчення діофантових рівнянь та їх застосовувань при розв'язуванні різноманітних задач прикладного характеру дасть змогу ефективно підготуватися до математичних конкурсів та олімпіад та сприятиме розвитку творчого мислення учнів.

Повністю погоджуємося з І.В. Волошиновою, і вважаємо більш доцільним розглядати діофантові рівняння саме у старшій школі на факультативних заняттях з математики. Це перш за все пов'язано з тим, що вивчення діофантових рівнянь не передбачено навчальною програмою з математики для 10-11 класів, проте ці рівняння посідають важливе місце на різних математичних змаганнях. До того ж, теорія діофантових рівнянь демонструє різні прикладні застосування математичної науки, що сприяє підвищенню інтересу учнів до математики, а також створює міцне підґрунтя для майбутнього вивчення фундаментальних математичних курсів у вищих навчальних закладах.

2.2. Методичні рекомендації щодо вивчення діофантових рівнянь у процесі підготовки старшокласників до олімпіад з математики

Діофантові рівняння часто зустрічаються на різних етапах олімпіад з математики. Теми «Діофантові рівняння» або «Рівняння в цілих числах» дуже часто входять до збірників та посібників для підготовки учнів до олімпіад з математики [15; 20 31; 39]. Знайомити з діофантовими рівняннями учнів можна починаючи з 8 класу. Крім індивідуальних занять з підготовки до олімпіад з математики рекомендуємо для школярів, зацікавлених у вивчення математики, проводити факультативні заняття або курси за вибором, які, на нашу думку, доцільно використовувати у старшій профільній школі.

Як правило, факультативні заняття проводяться для учнів, які зацікавленні у вивченні математики та мають достатній рівень підготовки з даного предмету. Основною метою факультативних занять є розширення та поглиблення знань учнів з окремих тем, зокрема і теми «Діофантові рівняння та їх застосування». На факультативних заняттях для старшокласників доцільно використовувати лекційно-практичну систему навчання, методи проблемного навчання та пропонувати учням творчі чи дослідницькі завдання [8; 32]. Відповідно до Державного стандарту базової середньої освіти [17] основною метою навчання є формування математичної компетентності, розвиток інтересів та здібностей учнів, що є необхідними для самореалізації учнів та їх усвідомленого вибору свого майбутнього життєвого шляху, здобуття професії. Саме ці завдання слід реалізовувати на факультативних заняттях з даної теми.

Щоб вивчення даної теми було якісним необхідно враховувати вікові та психологічні особливості учнів старшої школи. Як зазначають відомі психологи та методисти [10; 23; 29; 33] у цей віковий період підвищується працездатність, витривалість організму, що супроводжується прагненням до активних дій; збільшується швидкість пам'яті, реакції; активно розвивається рефлексія, пізнавальний інтерес то нового. Враховуючи те, що старшокласники стають вже більш самостійними, їм можна пропонувати на самостійне опрацювання деякі питання з теми «Діофантові рівняння» (наприклад, класифікація діофантових рівнянь), учні можуть самостійно розв'язати запропоновані вчителем задачі або розібратися з розв'язуванням фактично нових для них завдань за поданим зразком.

Старшокласник часто проявляє зацікавленість до методологічних проблем математики та історії математики. Саме тому варто учням пропонувати історичні факти щодо виникнення та розвитку теорії діофантових рівнянь або цікаві історичні задачі, оскільки введення елементів історизму на уроках математики виконує важливе виховне, освітнє та розвиваюче значення [7; 21; 22].

Оскільки старшокласники самостійно бачать взаємозв’язки між елементами та можуть аналізувати інформацію, то вчителю можна не повідомляти завчасно готовий алгоритм розв’язування рівняння, а пропонувати учням побудувати його самостійно. Інтерес до творчого наукового пошуку може бути спрямований на самостійне знаходження учнями цікавих історичних фактів з даної теми, на розв’язування нестандартних задач, а також виконання науково-дослідницьких проектів. Зауважимо, що старшокласники вміють уже узагальнювати знання про методи та способи розв’язування діофантових рівнянь. Для кращого засвоєння теми рекомендуємо на заняттях факультативу розв’язувати прикладні задачі на застосування діофантових рівнянь.

Як показує практика, діофантові рівняння не залишать байдужими до себе тих школярів, які насправді цікавиться математикою. Зауважимо, що для учнів загальноосвітніх закладів освіти варто демонструвати доступний апарат розв’язання деяких діофантових рівнянь. Для підвищення інтересу школярів необхідно на перших заняттях використовувати історичну довідку про діофантові рівняння. З метою формування позитивної мотивації учнів до вивчення цієї теми пропонуємо розглядати прості задачі прикладного характеру. Наприклад, як розміняти 2 гривні за допомогою монет номіналом 10 та 50 копійок. Фактично, задача зводиться до розв’язування діофантого рівняння $10x+50y=200$ або $x+5y=20$, де x – кількість монет номіналом 10 коп., а у – кількість монет номіналом 50 коп. Одним із розв’язків рівняння є пара чисел (5, 3). Слід надати можливість учням самостійно визначити й інші розв’язки даного рівняння. З метою актуалізації опорних знань учнів доцільно повторити теми, що тісно пов’язані з діофантовими рівняннями, зокрема важливі питання теорії подільності.

О.М. Вороний [16] зазначає, що саме діофантові рівняння та задачі, які зводяться до розв’язування діофантових рівнянь досить часто пропонуються на різних математичних змаганнях: олімпіадах, турнірах, фестивалях; а також при написанні контрольних робіт учасниками Малої академії наук. Причому, О.М. Вороний переконаний, що успішне та ефективне розв’язання завдань з діофантовими рівняннями, зазвичай, не потребує деякої додаткової інформації, проте вимагає від школярів міцних знань зі шкільної математики, наявності розвиненого логічного мислення та вмінь використовувати власні набуті знання при вирішенні нестандартних ситуацій. В той же час, учням корисно знати та володіти деякими основними методами розв’язування діофантових рівнянь, зокрема методом локалізації та перебору, розкладання на множники та методом спуску, а також графічним методом.

Готуючи учнів до олімпіади необхідно їх познайомити з різними типами діофантових рівнянь та методами їх розв’язування. Кожен метод розв’язання слід супроводжувати як теоретичним обґрунтуванням, так і відповідними прикладами вже розв’язаних рівнянь. Пропонуючи в подальшому завдання для самостійного розв’язання доцільно, щоб учні самі підібрали той метод, що є найбільш раціональним.

О.М. Вороний [14; 15] рекомендує при розв’язуванні діофантових рівнянь враховуючи наступні прийоми:

1) розв’язувати рівняння відносно однієї змінної, а іншу вважати цілою;

2) використати розклад лівої частини на множники за умови, що права його частина є цілим числом та перейти в результаті до сукупності систем простіших рівнянь;

3) враховуючи особливості конкретного діофантового рівняння локалізувати множину, що містить розв’язки, а потім визначити їх використовуючи безпосередню перевірку.

Якщо ж у завданні вимагається довести, що діофантове рівняння не має цілих розв’язків, то у ході розв’язання необхідно виявити деяку суперечність з відомим математичним фактом [14]. Зокрема, рівняння не буде мати розв’язків у цілих числах, якщо виконується хоча б одна з таких умов: при діленні лівої і правої частини на деяке ціле число одержують різні остачі; одна з частин рівняння – повний квадрат (куб), а інша такою не є [37].

На факультативних заняттях доречно провести аналіз та запропонувати учням розв'язати завдання з діофантовими рівняннями, що зустрічалися на олімпіадах з математики. Важливо виявити певні закономірності щодо того, які діофантові рівняння найчастіше зустрічаються в олімпіадах, які методи розв'язування більш раціонально використовувати та інше.

Важливою умовою ефективної підготовки до математичних олімпіад є надання учням творчої самостійності. Не виключено, що школярі можуть пропонувати свої способи та прийоми розв'язування діофантових рівнянь.

Вчитель математики, що готує учнів до олімпіад повинен вміти вчасно виявити, які саме здібності можна розвиватися у даного учня, що буває занадто складно зробити на уроці з математики через завантаженість різноманітнітним навчальним матеріалом на вивчення якого відводиться невелика кількість годин. У ході розв'язування учнями діофантових рівнянь учителю слід звертати увагу на такі риси в учнів як обов'язковість, старанність, зацікавленість учнів цією темою. При цьому основна задача учителя полягає в тому, щоб вчасно створити ситуацію успіху, тим самим вплинути на формування і розвиток інтересу до вивчення теми «Діофантові рівняння». Варто уважно стежити за настроєм учнів під час занять у ході розв'язування завдань, щоб школярі не втратила віри в свої сили – це приведе не лише до формування інтересу до предмету математики та розвитку творчих та математичних здібностей учнів, але й допоможе їм у майбутньому успішно взяти участь в олімпіадах з математики чи інших математичних змаганнях.

2.3. Розробка програми факультативу з теми «Діофантові рівняння та їх застосування» (10 клас)

Пояснювальна записка

Запропонована програма дозволяє старшокласникам дізнатися про цікаві і незвичайні питання математики, які виходять за рамки шкільної програми та розширюють загальне уявлення про теорію чисел, зокрема новий тип рівнянь – діофантові рівняння. Зміст програми включає математичні завдання різного рівня складності, що сприяє підвищенню навчальної мотивації, розвитку творчого мислення та інтелекту учнів.

Робота факультативу спрямована на підготовку учнів до участі у математичних змаганнях. У курсі містяться творчі завдання, вирішення яких розвиває в учнів уміння аргументовано вступати друг з одним в дискусію і відстоювати свою точку зору.

Програму створено відповідно до вікових особливостей та можливостей школярів.

Програма факультативного курсу розрахована на 16 годин. Заняття проводяться один раз на тиждень. Тривалість кожного заняття не перевищує 40 хвилин.

Назва програми: «Діофантові рівняння та їх застосування».

Клас: 10 (з поглибленим вивченням математики).

Мета і завдання:

– розвивати пізнавальний інтерес учнів та формувати позитивну мотивацію до вивчення алгебри;

– навчити учнів аналізувати новий матеріал та робити висновки;

– розвивати науковий світогляд учнів, знайомити їх з актуальними питаннями математичної науки у теорії подільності;

– навчити учнів працювати з дослідницькими завданнями та демонструвати результати своєї роботи;

– сприяти реалізації прикладної спрямованості під час вивчення діофантових рівнянь.

Основні принципи програми

Актуальність. Створення умов, що спонукають учнів до навчання математики, сприяють розвитку їх інтелектуального та творчого потенціалу.

Доступність та науковість. Матеріал, що подається вчителем має бути доступним для сприйняття його старшокласниками, причому науковість має бути невтрачена.

Практична спрямованість. Зміст навчального матеріалу, що пропонується на заняттях факультативу може бути використаний у подальшому навчанні, а розв'язування цікавих завдань допоможе тим школярам, які приймають участь у шкільних і обласних олімпіадах чи математичних конкурсах.

Системність. Курс побудований за принципом від простого до складного.

Забезпечення мотивації. Вивчення матеріалу, що пропонується розглядати у процесі роботи факультативу сприяє розвитку інтересу до математики.

Очікувані результати:

– набуття базових знань з теорії діофантових рівнянь;

– стимулювати учнів до оволодіння навичками дослідницької діяльності у ході роботи над проектами;

– розвивати творчі здібності учнів;

– показати учням взаємозв'язок математики з іншими науками;

– навчити самостійно знаходити та критично аналізувати інформацію за даною тематикою.

Основні види діяльності учнів:

– розв'язування завдань з теми «Діофантові рівняння»;

– пошук інформації з історії виникнення діофантових рівнянь;

– розгляд науково-популярної літератури за даною темою;

– індивідуальна робота учнів;

– робота в парах, в групах;

– виконання творчих та дослідницьких завдань.

Таблиця 2.1.

Розподіл навчального часу

№ з/п	Тема	Кількість годин
1.	З історії виникнення діофантових рівнянь	1

2.	Поняття діофантового рівняння, класифікація рівнянь	1
3.	Лінійні діофантові рівняння та методи їх розв'язання	4
4.	Діофантові рівняння вищих степенів та методи їх розв'язування	3
5.	Діофантові рівняння у математичних змаганнях	2
6.	Різноманітні застосування діофантових рівнянь	3
7.	Захист творчої роботи	2
	Всього	16

Таблиця 2.2.

Зміст навчального матеріалу та

вимоги до навчальних досягнень учнів

№ з/п	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
1.	**З історії виникнення діофантових рівнянь**. Діофант та його рівняння. Велика теорема Ферма. Сучасні дослідження теорії діофантових рівнянь.	Учень (учениця): *орієнтується* у історичних питаннях щодо розвитку теорії діофанових рівнянь; *наводить* приклади застосувань діофантових рівнянь; *здійснює пошук та аналізує* інформацію з історії математики.
2.	**Поняття діофантового рівняння, класифікація рівнянь.** Загальне означення діофантового рівняння. Види діофантових рівнянь.	Учень (учениця): *знає* означення діофантового рівняння; *наводить* приклади діофантових рівнянь; *знає* різні класифікації діофантових рівнянь.
3.	**Лінійні діофантові рівняння та методи їх розв'язання.** Поняття лінійного діофантового рівняння. Конгруенції та їх властивості. Алгоритм Евкліда. Ланцюгові дроби. Основні та спеціальні методи розв'язування лінійних діофантових рівнянь.	Учень (учениця): *володіє* поняттям лінійного діофантового рівняння; *знає* необхідні відомості з теорії подільності (алгоритм Евкліда, конгруенції, ланцюгові дроби); *вміє* застосовувати різні методи до розв'язування лінійних діофантових рівнянь.
4.	**Діофантові рівняння вищих степенів та методи їх розв'язування**. Діофантові рівняння другого та третього степенів. Основні та спеціальні методи їх розв'язування.	Учень (учениця): *наводить* приклади діофантових рівнянь вищих порядків, зокрема другого та третього порядків; *вміє* застосовувати різні методи до розв'язування діофантових рівнянь вищих степенів
5.	**Діофантові рівняння у математичних змаганнях.** Діофантові рівняння у олімпіадній математиці.	Учень (учениця): *знає* спеціальні методи розв'язування діофантових рівнянь;

		вміє аналізувати рівняння та підбирати або пропонувати можливий спосіб його розв'язування.
6.	**Різноманітні застосування діофантових рівнянь.** Розв'язування прикладних задач з математики, природознавства та економіки на застосування діофантових рівнянь.	Учень (учениця): *аналізує* умову прикладної задачі та *пропонує (створює)* відповідну математичну модель – діофантове рівняння; *вміє* аналізувати одержані математичні результати та інтерпретувати розв'язок.
7.	**Захист творчої роботи «Цікаві задачі з теорії діофантових рівнянь».**	Учень (учениця): *вміє* знаходити потрібну інформацію про застосування діофантових рівнянь та доповідати її перед іншими учнями; *самостійно підбирає та розв'язує* прикладні та історичні задачі з теорії діофантових рівнянь.

Список рекомендованої літератури

1. Барвінюк Р.Л., Козлова О.М. Готуємося до математичних олімпіад та конкурсів разом. Черкаси, 2013. 96 с.

2. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики. Харків: Основа, 2008. 255 с.

3. Вороний О.М. Діофантові рівняння для юних математиків. *Наукові записки. Серія: Проблеми методики фізико-математичної та технологічної освіти*. 2017. Том 3, № 12. С. 11-18.

4. Конфорович А.І. Колумби математики. Київ: Радянська школа, 1982. 223 с.

5. Кучик А.О. За лаштунками шкільної математики. Факультативні заняття. Костопіль, 2018. 140 с.

6. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник. Друге видання, доповнене. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. 400 с.

7. Федак І.В. Розв'язування задач підвищеної складності з математики. Спеціальний курс: Навчальний посібник. Івано-Франківськ, 2010. 100 с.

8. Чемерис М.І. Діофантові рівняння та методи їх розв’язання. Житомир, 2012. 23 с.

9. Чемерис М.І. Діофантові рівняння та методи їх розв'язування. *Математика. Шкільний світ*, 2013. № 19. С. 8–18.

10. Ясінський В.А. Олімпіадні задачі з теорії чисел. Практикум із розв’язування. Київ: Шкільний світ, 2011. 128 с.

2.4. Приклади факультативних занять з теорії діофантових рівнянь

2.4.1. Конспект факультативного занять на тему «Методи розв’язування лінійних діофантових рівнянь»

Наведемо приклад організації та проведення факультативного заняття для учнів 10 класу на тему «Методи розв’язування лінійних діофантових рівнянь».

Мета заняття: ***навчальна:*** повторити поняття «лінійне діофантове рівняння», розглянути на прикладах різні методи розв’язування лінійних діофантових рівнянь.

розвивальна: розвивати уміння аналізувати, довготривалу пам’ять та логічне мислення старшокласників;

виховна: виховувати уважність та самостійність.

Обладнання: дошка, кольорова крейда, дидактичні матеріали, проектор, ноутбук, презентація.

Хід заняття

І. Організаційний етап.

Привітання, перевірка присутніх, перевірка готовності учнів до заняття.

ІІ. Актуалізація і корекція опорних знань, умінь і навичок. Спочатку вчитель ставить запитання учням: Які рівняння називаються діофантовими? Наведіть приклади діофантових рівнянь. Які типи діофантових рівнянь ви знаєте? Що таке «лінійне діофанове рівняння»? Наведіть приклади лінійних діофантових рівнянь.

Потім, учням пропонується усно знайти (підібрати) деякі окремі розв'язки, представлених на слайді діофантових рівнянь: $5x-3y=4$ відповідь: $(-1;-3)$, $4x+6y=8$ відповідь: $(-4;4)$.

Ми помітили, що для одержання розв'язку лінійного діофантового рівняння необхідно знайти деякий його частинний розв'язок $x=x_0,\ y=y_0$, який іноді вдається знайти методом підбору. Проте у більшості випадків користуються іншими методами, розглянемо їх.

III. Повідомлення теми, цілей та завдань уроку. Отже, метою заняття є засвоїти основні методи розв'язування лінійних діофантових рівнянь та навчатися їх застосовувати на практиці.

IV. Формування знань, умінь та навичок.

При розв'язуванні діофантових рівнянь користуються теоремою: *Нехай задане діофантове рівняння* $ax+by=c$, *в якому* $(a,b)=1$, *и нехай* $x=x_0,\ y=y_0$ *– деякий розв'язок цього рівняння. Тоді множина всіх розв'язків заданого рівняння матиме вигляд:* $x=x_0-bt,\ y=y_0+at$ *для будь-якого* $t\in N$.

Найчастіше лінійні діофантові рівняння розв'язують відносно однієї змінної, а іншу вважати цілою, розглянемо цей спосіб на прикладі.

Приклад 1. Знайти всі цілі розв'язки рівняння $15x-7y=13$ [14].

Розв'язання.

Виразимо у даному рівнянні змінну y через x:

$$15x-7y=13\Rightarrow 7y=15x-13\Rightarrow 7y=14x-14+x+1\Rightarrow y=2x-2+\frac{x+1}{7}.$$

З останньої рівності робимо висновок, що y буде цілим числом якщо $(x+1)\vdots 7$ або $x-1=7n$, де $n\in Z$.

Оскільки $x = 7n - 1$, то $y = 2\left(7n - 1\right) - 2 + \dfrac{7n - 1 + 1}{7} = 14n - 2 - 2 + n = 15n - 4$.

Отже, розв'язками заданого рівняння є $x = 7n - 1$, $y = 15n - 4$, де $n \in Z$.

Відповідь: $x = 7n - 1$, $y = 15n - 4$, де $n \in Z$.

На попередніх заняттях ми з вами знайомились з алгоритмом Евкліда, застосовуємо цей алгоритм до розв'язування наступного рівняння.

Приклад 2. Розв'язати діофантове рівняння $147x - 25y = 14$.

Розв'язання.

Для знаходження деякого частинного розв'язку даного рівняння скористаємося алгоритмом Евкліда:

$$
\begin{array}{l}
147 \;\lfloor 25 \\
\underline{125} \;\; 5 \\
25 \;\lfloor 22 \\
\underline{22} \;\; 1 \\
22 \;\lfloor 3 \\
\underline{21} \;\; 7 \\
1
\end{array}
$$

Оскільки $1 = 22 - 3 \cdot 7 = 22 - \left(25 - 22\right) \cdot 7 = \left(147 - 25 \cdot 5\right) \cdot 8 - 25 \cdot 7 = 147 \cdot 8 - 25 \cdot 47$, то $14 = 14 \cdot \left(147 \cdot 8 - 25 \cdot 47\right) = 147 \cdot 112 - 25 \cdot 658$, а отже, пара чисел $112,\ 658$ є одним з часткових розв'язків рівняння. Тоді, загальний розв'язок заданого діофантового рівняння буде мати вигляд: $x = 112 + 25t,\ y = 658 + 147t$, де $t \in N$.

Відповідь: $x = 112 + 25t,\ y = 658 + 147t$, де $t \in N$.

Іноді користуються графічним методом.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $3x + 2y = 5$ [27].

Розв'язання.

Виражаємо змінну y через x: $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$. Очевидно, що $(1;1)$ є цілим розв’язком рівняння. Побудуємо графік функції $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$ (рис. 2.2).

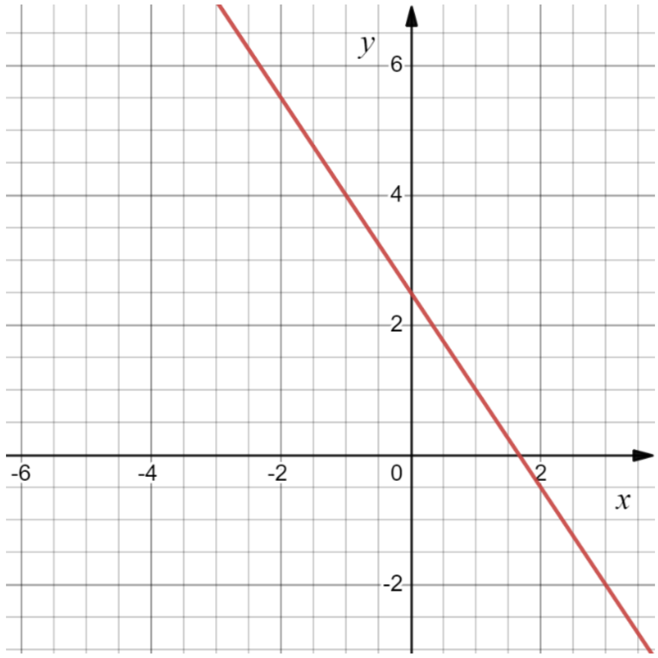

Рис. 2.2. Графік функції $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$

Тоді, враховуючи, що $x_0=1$ та $y_0=1$ отримаємо загальний розв’язок заданого рівняння: $x=1+2k$, $y=1-3k$, де $k\in N$.

Відповідь: $x=1+2k$, $y=1-3k$, де $k\in N$.

Давайте спробуємо сформулювати алгоритм графічного методу розв’язування лінійних діофантових рівнянь. *Учні, користуючись розв’язаним завданням, намагаються виділити та назвати основні етапи алгоритму.*

Розглянемо застосування ланцюгових дробів при розв’язуванні діофантових рівнянь, причому відомо, що загальний розв`язок лінійного діофантового рівняння $ax+by=c$, де $(a,b)=1$, можна подати у вигляді: $\begin{cases} x=(-1)^{n-1}cQ_{n-1}+bt, \\ y=(-1)^{n}cP_{n-1}-at, \end{cases}$, де $t\in Z$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $108x+84y=60$ [9].

Розв'язання.

Так як найбільший спільний дільник коефіцієнтів при змінних $d=12$ і $c=60⋮12$, то поділимо обидві частини рівняння на 12.

Одержимо рівняння $9x+7y=5$, де $(a,b)=(9,7)=1$.

Запишемо розклад дробу $\frac{9}{7}$ у ланцюговий:

$$\frac{9}{7}=1+\frac{2}{7}=1+\frac{1}{\frac{7}{2}}=1+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}.$$

Підхідними дробами даного ланцюгового дробу є 1, $\frac{4}{3}$ та $\frac{9}{7}$.

Обираємо передостанній підхідний дріб $\frac{P_1}{Q_1}=\frac{4}{3}$ та використовуємо наступні формули: $x=(-1)^{n-1}cQ_{n-1}+bt$, $y=(-1)^{n}cP_{n-1}-at$.

Тоді, загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$x=(-1)^{2-1}5\cdot 3+7t=-15+7t,\quad y=(-1)^{2}5\cdot 4-9t=20-9t, \text{ де } t\in N.$$

Відповідь: $x=-15+7t$, $y=20-9t$, де $t\in N$.

Зауважимо, що є й інші методи розв'язування лінійних діофантових рівнянь, які використовуються при розв'язуванні завдань олімпіадного змісту розглянемо на наступному занятті.

V. Підсумок заняття.

Вчитель задає учням наступні запитання:

1) Яку тему ми сьогодні розглядали на уроці?

2) Що найбільше запам'яталося на цьому уроці?

3) Який з методів був найскладнішим для застосування при розв'язуванні лінійних діофантових рівнянь?

2.4.2. Конспект факультативного занять на тему «Застосування діофантових рівнянь у природничих науках»

Мета заняття: ***навчальна:*** розглянути основні застосування похідної до розв'язування прикладних задач з природознавства, розв'язати задачі з даної теми.

розвивальна: розвивати пізнавальну активність учнів; формувати стійкий інтерес до математики;

виховна: виховувати зосередженість, вміння працювати у малих групах.

Обладнання: дошка, кольорова крейда, проектор, ноутбук, презентація.

Хід заняття

І. Організаційний етап.

Привітання, перевірка присутніх, перевірка готовності учнів до заняття.

ІІ. Актуалізація і корекція опорних знань, умінь і навичок. У ході вирішення тих чи інших життєвих ситуацій, дослідження явищ природи, вивчення процесів тощо постає необхідність у розв'язуванні так званих прикладних задач, при розв'язуванні яких потрібно здійснювати перехід від реальної ситуації до її математичного опису, або будувати її математичну модель. Математичними моделями деяких явищ та процесів дійсності, що описані в умові задачі можуть бути діофантові рівняння.

До діофантових рівнянь досить часто приводять задачі прикладного змісту, зокрема зустрічаються стародавні текстові задачі різних епох та націй, розв'язки яких є цілими або натуральними числами.

Розглянемо старовинну задачу на складання діофантового рівняння.

Задача 1. Дванадцять людей несуть 12 хлібин. Відомо, що кожен чоловік несе по 2 хлібини, жінка – половину хлібини, а кожна дитина – всього четвертинку хліба. Скільки було чоловіків, жінок та дітей.

Розв'язання.

Нехай x – кількість чоловіків, а y – кількість жінок.

Оскільки всього було 12 людей, то дітей відповідно $12-(x+y)$.

Тоді, керуючись умовою задачі, всі разом люди несли $2x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}(12-x-y)$ хлібин, тобто шукане діофантове рівняння матиме вигляд:

$$2x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}(12-x-y)=12.$$

Одержане рівняння після відповідних тотожних перетворень запишеться наступним чином:

$$7x+y=36.$$

Зауважимо, що діофантові рівняння отримані у результаті складання математичної моделі до прикладних задач потрібно розв'язувати на множині натуральних чисел.

Вчитель формує з учнів класу малі групи та пропонує розв'язати одержане діофантове рівняння будь-яким із раніше вивчених методів.

ІІІ. Повідомлення теми, цілей та завдань уроку. На цьому занятті ми познайомимося з застосуваннями діофантових рівнянь у природничий науках.

IV. Формування знань, умінь та навичок.

Діофантові рівняння можна одержувати при розв'язуванні задач з фізики, зокрема механіки. Розв'яжемо одну із таких задач.

Задача 2. По дорозі довжиною 2 км між пунктами *А* і *Б* курсують два автобуси. Досягнувши одного з пунктів, кожен із автобусів негайно розвертається і без зупинки прямує до іншого пункту призначення. Відомо, що швидкість першого автобуса 51 км/год, а другого – 42 км/год. Визначити, скільки разів за 8 годин руху автобуси зустрінуться у пункті *Б*.

Розв'язання.

Позначимо через x – кількість разів зустрічі автобусів у пункті *Б* за 8 годин руху. Будемо вважати, що перший автобус стартує з пункту *А*, тому він проходить шлях, що дорівнює $S_1 = 2 + 4(x-1)$. Другий автобус виїжджає з пункту *Б*, тому проходить шлях до зустрічі $S_2 = 4(x-1)$.

Тоді час, за який перший автобус x разів зустрінеться з другим у пункті *Б* дорівнює $t_1 = \dfrac{2+4(x-1)}{51}$, а відповідно час другого автобуса $t_2 = \dfrac{4(x-1)}{42}$.

За умовою задачі автобуси зустрінуться у пункті *Б*, тобто справедливою буде рівність: $t_1 = t_2 \Rightarrow \dfrac{2+4(x-1)}{51} = \dfrac{4(y-1)}{42} \Rightarrow \dfrac{2x-1}{17} = \dfrac{y-1}{7} \Rightarrow 14x - 17y = -10$.

Отримали діофантове рівняння $14x - 17y = -10$, частинним розв'язком якого є $x_0 = 9$ та $y_0 = 8$. Тоді, загальний розв'язок рівняння матиме вигляд:

$$x = 9 + 17n, \; y = 8 + 14n.$$

Тоді, $t_1 = \dfrac{2+4(9+17n-1)}{51} = \dfrac{2+4n}{3}$, а кількість зустрічей автобусів у пункті *Б* за 8 годин визначається нерівністю: $\dfrac{2+4n}{3} \le 8 \Rightarrow n \le \dfrac{11}{2}$, де $n \in Z_+$, тобто $n = 0,1,2,3,4,5$. А це означає, що за 8 годин автобуси зустрінуться 6 разів.

Діофантові рівняння також застосовуються у прикладних задачах з біології та хімії. Розв'яжемо відповідні задачі.

Задача 3. Відомо, що середні маси рисі, лисиці та вовка дорівнюють 18 кг, 30 кг та 45 кг відповідно. Нехай важається, що всі ці хижаки, починаючи з одномісячного віку, коли їх маси дорівнювали 0,6 кг, 1 кг та 1,4 кг відповідно, живляться виключно зайцями (середня маса 2 кг). Знайдіть, яка кількість хижаків кожного із цих 3-х видів мешкає в цьому ареалі, якщо щойно всі вони досягли своєї середньої маси і разом протягом деякого періоду з'їли 2134 зайця.

Розв'язання

За умовою задачі до досягнення середньої маси:

1) рисі необхідно набрати 18 – 0,6 =17,4 кг;

2) лисиці необхідно набрати 30 – 1 =29 кг;

3) вовку необхідно набрати 45 – 1,4 =43,6 кг.

Це означає, що, враховуючи правило екологічної піраміди (на кожен трофічний рівень переходить не більше ніж 10 % енергії), рисі, лисиці та вовку для досягнення ними їх середньої маси необхідно з'їсти 174:2=87; 290:2=145 і 436:2=218 зайців відповідно.

Позначимо за x, y та z шукані кількості рисів, лисиць та вовків відповідно. Тоді маємо рівняння:

$$87x+145y+218z=2134$$

Оскільки змінні x, y та z можуть бути лише цілими невідємними числами, то отримане рівняння є діофантовим. Знайдемо його загальний роззв'язок.

$$87x+145y-2134\equiv 0\pmod{218}$$
$$87x\equiv(-145+218\cdot 2)y+2134-218\cdot 8\equiv 291y+390\pmod{218}\,|:3$$
$$29x\equiv 97y+130\pmod{218}$$
$$29x\equiv(97+218\cdot 9)y+130+218\equiv 2059y+348\pmod{218}\,|:29$$
$$x\equiv 71y+12\pmod{218}$$

Позначаючи $y=k_1\in Z$, отримуємо $x=71k_1+12+218k_2, k_2\in Z$. Тоді підставляючи отримані значення в рівняння матимемо:

$$87(71k_1+12+218k_2)+145k_1+218z=2134$$

$$87(71k_1+12+218k_2)+145k_1+218z=2134$$
$$218z=3178-6322k_1-87\cdot 218k_2$$
$$z=5-29k_1-87k_2.$$

Наклавши відповідні обмеження на отриманий розв'язок $71k_1 + 12 + 218k_2 \geq 0$, $k_1 \geq 0$, $5 - 29k_1 - 87k_2 \geq 0$, $145k_1 \leq 2134$, отримаємо 2 набори значень (x, y, z): (2, 6, 5) і (7, 3, 5).

Отже, в ареалі мешкає 2 рисі, 6 лисиць та 5 вовків, або 7 рисів, 3 лисиці та 5 вовків.

Задача 4. Є 5 літрів 5-відсоткового, 7 літрів 7-відсоткового та 7 літрів 15-відсоткового розчинів кислоти. Скільки літрів кожного розчину потрібно долити в резервуар, у якому вже міститься 1 літр води, щоб отримати 13 літрів 8-відсоткового розчину кислоти?

Розв'язання

Нехай x, y та z шукані об'єми розчинів. Тоді об'єми кислоти у їх складі будуть дорівнювати $0{,}05x$, $0{,}07y$ та $0{,}15z$ відповідно. Частка ж кислоти в даному резервуарі після додавання цих розчинів буде дорівнювати:

$$\frac{0{,}05x + 0{,}07y + 0{,}15z}{1 + x + y + z}.$$

Тоді матимемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{0{,}05x + 0{,}07y + 0{,}15z}{1 + x + y + z} = 0{,}08, \\ 1 + x + y + z = 13 \end{cases},$$

або

$$\begin{cases} 7z - 3x - y = 8, \\ x + y + z = 12 \end{cases}.$$

Очевидно ця система має безліч розв'язків. Знайдемо її цілочисельні розв'язки, враховуючи відповідні обмеження з умови задачі:

$0 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 6,\ 0 \leq z \leq 5.$

$$\begin{cases} 7z - 3x - y = 8, \\ -2x + 8z = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7z - 3x - y = 8, \\ x = 4z - 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7z - 3(4z - 10) - y = 8, \\ x = 4z - 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 22 - 5z, \\ x = 4z - 10. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \le 4z - 10 \le 5, \\ 0 \le 22 - 5z \le 8, \\ 0 \le z \le 7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2,5 \le z \le 3,75, \\ 2,8 \le z \le 4,4, \\ 0 \le z \le 7; \end{cases} \Rightarrow z = 3 \Rightarrow \begin{cases} y = 7, \\ x = 2. \end{cases}$$

Таким чином, для отримання 13 літрів 8-відсоткового розчину кислоти потрібно долити в резервуар 2 літра 5-відсоткового розчину, 7 літрів 7-відсоткового розчину та 3 літра 15-відсоткового розчину кислоти.

V. Підсумок заняття.

Вчитель пропонує учням продовжити речення: «На сьогоднішньому занятті ми навчилися …» (*рефлексія*).

Висновки

Діофантові рівняння є важливою темою сучасної теорії чисел. В історичному плані це досить давня математична проблема, яка цікавила математиків довгий час. На сьогоднішній день актуальним є відкриття різноманітних застосувань відомих математичних теорій

У магістерській роботі нами було представлено необхідні відомості з теорії діофантових рівнянь та надано методичні рекомендації щодо їх вивчення у шкільному курсі математики.

Виконаний аналіз навчальних програм та шкільних підручників показав, що завдання з діофантовими рівняннями зустрічаються у 8 класі з поглибленим вивченням математики.

У ході дослідження виявилося, що діофантові рівняння посідають важливе місце на різних етапах олімпіад з математики. Саме тому, доцільно розглядати діофантові рівняння на факультативних заняттях з математики, які також мають передбачати підготовку учнів до участі у математичних змаганнях.

Найбільше уваги у даному дослідженні приділено аналізу методичних особливостей вивчення діофантових рівнянь. У роботі представлена розробка програми факультативного курсу з теми «Діофантові рівняння та їх застосування» для 10 класу (з поглибленим вивченням математики). А також наведені приклади самостійно розроблених факультативних занять на тему «Методи розв’язування лінійних діофантових рівнянь» та «Застосування діофантових рівнянь у природничих науках»

Список використаних джерел

1. Anbuselvi R., Sivasankari J. Usage of the Applications of Diophantine Equations in Chemistry and Computer Science in the Real World Problem. URL: http://www.joics.org/gallery/ics-3831.pdf (дата звернення: 19.10.2024).

2. Andreescu T., Andrica D. Quadratic Diophantine Equations (Foreword by Preda Mihailescu). Developments in Mathematics, vol. 40. Springer Science+Business Media, New York, 2015, 224 p.

3. Andreescu T., Cucurezeanu I., Andrica D. An Introduction to Diophantine Equations. A Problem-Based Approach. Birkhäuser, 2010. 358 p.

4. Cohen H. Number Theory. Volume I: Tools and Diophantine Equations. Graduate Texts in Mathematics. Springer Science +Business Media, LLC, 2007, 673 p.

5. Алгебра і теорія чисел. Практикум. Частина 2. / С.Т. Завало та інші. Київ: Вища школа, 1986. 264 с.

6. Барвінюк Р.Л., Козлова О.М. Готуємося до математичних олімпіад та конкурсів разом. Черкаси, 2013. 96 с.

7. Бевз В.Г. Історія математики. Харків: Вид. гр. «Основа», 2006. 176 с.

8. Бевз Г.П. Методика викладання математики: навч. посібник. Київ: Вища школа, 1989. 367 с.

9. Біланич Є. Використання ланцюгових дробів при вивченні діофантових рівнянь в шкільному курсі математики. *Матеріали конференцій Молодіжної наукової ліги*. Грудень 2020, С. 63-65.

10. Білоус О.В. Вікова психологія: Навчальний посібник. Чернігів: Чернігівський національний педагогічний університет імені Т.Г. Шевченка, 2015. 108 с.

11. Бородін О.І. Теорія чисел. Київ: Вища школа. 1970. 275 с.

12. Валах В.Я. Подорож у світ цілих чисел. Київ: Радянська школа, 1978. 102 с.

13. Волошинова І.В. Методичні особливості вивчення діофантових рівнянь та їхніх систем у профільній школі. Наукові записки молодих учених. 2018. № 2. URL: https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1490/0 (дата звернення: 18.10.2024).

14. Ворожбіян Н. Діафантові рівняння на олімпіадах. *Студентські наукову записки*. Випуск 1. Кіровоград, 2008. С. 21-24.

15. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики. Харків: Основа, 2008. 255 с.

16. Вороний О.М. Діофантові рівняння для юних математиків. *Наукові записки. Серія: Проблеми методики фізико-математичної та технологічної освіти*. 2017. Том 3, № 12. С. 11-18.

17. Державний стандарт базової середньої освіти, затверджений постановою Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 р. № 898.

18. Збірник задач з теорії чисел. [Навчальний посібник для студентів фізико-математичного факультету] За редакцією І.О. Рокіцького, Вінниця, 2003 140 с.

19. Збірник програм для допрофільної підготовки та профільного навчання. Частина І. Допрофільна підготовка. / Упоряд. Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна. Харків: Ранок, 2011. 384 с.

20. ІІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики. LXXIV Київська олімпіада юних математиків. Київ, 2019. 14 с.

21. Коновалова В.В. Історія діофантових рівнянь. *Наукові записки молодих учених,* 2018. №1. URL: https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1414/pdf (дата звернення: 20.10.2024).

22. Конфорович А.І. Колумби математики. Київ: Радянська школа, 1982. 223 с.

23. Кутішенко В.П. Вікова та педагогічна психологія (курс лекцій). 2-ге вид.: Навч. посіб. Київ: Центр учбової літератури, 2010. 128 с.

24. Кучик А.О. За лаштунками шкільної математики. Факультативні заняття. Костопіль, 2018. 140 с.

25. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 8 кл. з поглибленим вивченням математики. Харків: Гімназія, 2016. 384 с.

26. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів: наказ Міністерства освіти і науки від 07.06.2017 р. № 804.

27. Негода С. Способи розв’язування лінійних рівнянь в цілих числах. 19 лютого 2017 року. URL: http://teoria0432.blogspot.com/2017/02/blog-post_99.html (дата звернення: 15.10.2024).

28. Опр М, Драганюк С. Рівняння в цілих числах у олімпіадній математиці. *Фізико-математична освіта*, 2024. Том 39. № 3. С. 68-74.

29. Організація навчання математики у старшій профільній школі: монографія / за ред. Н. А. Тарасенкової. Черкаси: Видавець ФОП Гордієнко, 2017. 216 с.

30. Працьовитий М.В., Василенко Н.М., Лисенко І.М. Доцільність вивчення теми «Діофантові рівняння» в курсі «Вступ до спеціальності математика». *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова. Серія 3: Фізика і математика у вищій і середній школі*. 2011. Вип. 8. С. 151-161.

31. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник. Друге видання, доповнене. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. 400 с.

32. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: підручник для студентів математичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів. Київ: Вища школа, 2006. 512 с.

33. Слєпкань З.І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. 240 с.

34. Стрельченко А.Й., Стрельченко Н.Н. Цілі числа. Харків: Основа, 2015. 155 с.

35. Танник Н.А. Діофантові рівняння. Матеріали до занять гуртка. Математика в школах України. 2007. №31 (187). С. 27-30.

36. Федак І.В. Розв’язування задач підвищеної складності з математики. Спеціальний курс: Навчальний посібник. Івано-Франківськ, 2010. 100 с.

37. Чемерис М.І. Діофантові рівняння та методи їх розв’язання. Житомир, 2012. 23 с.

38. Чемерис М.І. Діофантові рівняння та методи їх розв'язування. *Математика. Шкільний світ*, 2013. № 19. С. 8–18.

39. Ясінський В.А. Олімпіадні задачі з теорії чисел. Практикум із розв’язування. Київ: Шкільний світ, 2011. 128 с.