МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ

ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Кафедра теорії функцій та методики навчання математики

На правах рукопису

Мельничук Дмитро Андрійович

КЛАСИЧНА ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА, ЇЇ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ

Спеціальність: 111 «Математика»

Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

ГЕМБАРСЬКА СВІТЛАНА БОРИСІВНА

Кандидат фізико-математичних наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол №___

Засідання кафедри теорії функцій та

методики навчання математики

від ____________2024р.

Завідувач кафедри

доцент Гембарська С. Б.__________

Луцьк 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Формула Тейлора є одним із основних інструментів у математичному аналізі, що дозволяє апроксимувати функції за допомогою многочленів. Ця формула використовується, щоб наблизити значення функцій, які важко обчислити прямо. Формула Тейлора особливо корисна у фізиці, інженерії, та економіці для моделювання і аналізу складних систем.

Актуальність теми:

Основна увага присвячена узагальненням формули Тейлора розкладу функції в околі однієї точки на випадок кількох точок в евклідовому просторі m змінних, а також на випадок, коли інформація про значення функції та її похідних по нормалі до деякої лінії задана на цій лінії (гладкій або кусково-гладкій).

На практиці такі задачі трапляються при побудові структур розв'язків багатоточкових граничних задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, а також граничних задач для рівнянь з частинними похідними у випадку складних областей. Особливу цінність з точки зору застосувань, являють собою результати, в яких узагальнення формули Тейлора проводиться в класах Н-реалізовних функцій з різними базовими системами Н.

Клас Н-реалізовних функцій включає в себе добре відомий клас spline-функцій, що знайшли широке застосування при розв'язанні ряду важливих теоретичних і практичних задач. Підхід до проблеми наближення за допомогою кусково-Н-реалізовних функцій в ряді випадків має теоретичні і практичні переваги перед наближенням за допомогою аналітичних функцій.

Робота складається з вступу, двох розділів, що поділяються на параграфи, висновків, біографічних відомостей про вчених – авторів основних результатів роботи та списку використаних джерел.

Об’єкт дослідження: класична формула Тейлора. Вона відображує той відомий факт, що поведінка функції $f(P)$ в околі деякої точки P_0 визначається її значеннями і значеннями її похідних у цій точці. Це дозволяє поставити у відповідність функції $f(P)$ деякий поліном $Q_n(P)$, який разом із своїми, загалом, частинними похідними до деякого порядку співпадає з $f(P)$ і її відповідними похідними в точці P_0 і таким чином замінити функцію $f(P)$ в околі P_0 поліномом, який являє собою з точки зору його використання простіший об'єкт.

В принципі, вибір наближаючої функції у вигляді поліномів не є обов'язковим. Вимоги, які пред'являються до цієї функції, пов'язані в основному з простотою виконання обчислювальних та аналітичних операцій. З появою електронних обчислювальних машин (ЕОМ) поняття простоти виконання таких операцій суттєво змінилось. Так, якщо функція $Q_n(P)$ буде взята у вигляді якої-небудь елементарної функції, то обчислювальні операції, навіть операції диференціювання тощо, можуть бути виконані на ЕОМ без значних труднощів.

Мета і завдання дослідження:

Дати відповідь на питання: «Чи не можна шляхом вибору складніших, ніж поліноми, функцій $Q_n(P)$ (в той же час досить простих з точки зору їх реалізації на ЕОМ) одержати такі формули, які б в деякій мірі являли собою узагальнення класичної формули Тейлора?»

Предмет дослідження:

В цій магістерській роботі розглянуто такі узагальнення:

1) Побудова таких функцій $Q_n(P)$, які збігаються з функцією $f(P)$, і похідні яких до деяких порядків збігаються з відповідними похідними функції $f(P)$ на заданій скінченній системі точок $P_1, P_2, \dots, P_n$ простору R^m.

2) Побудова функцій $Q_n(P)$, які збігаються з функцією $f(P)$, і деяка послідовність операторів від $Q_n(P)$ (наприклад, оператори диференціювання по нормалі до заданої поверхні Г в R^m) збігається з цією самою послідовністю операторів від $f(P)$ на поверхні Г.

Зрозуміло, що в цих задачах повинно розв'язуватись питання про побудову залишкових членів.

Легко зауважити, що вибір функції $Q_n(P)$ в другій із названих задач суттєво залежить від виду інформації, яка зберігається в постановці задачі. У першій задачі вхідна інформація являє собою систему чисел (координати точок P_i , значення частини похідних в цих точках), в другій - вона є двоякою. По-перше, це аналітична інформація, по-друге, це геометрична інформація. Природно, що при побудові функції $Q_n(P)$ вся вона повинна переоблятися сумісно, а це, звичайно, обумовлює можливість приведення геометричної інформації до аналітичного виду.

Додаткові труднощі обумовлюються тим, що функція і система операторів від неї задаються, взагалі, на поверхні Г, в той час, як функція $Q_n(P)$ повинна мати сенс в деякій області що, включає Г.

Труднощі, пов'язані з перетворенням геометричної інформації у аналітичний вигляд, можуть бути усунені для широкого класу поверхонь на основі застосування R-функцій, які знайшли широке застосування в ряді областей (в теорії і практиці оптимального розміщення геометричних об'єктів складної форми, при розв'язанні крайових задач для областей складної форми із різними типами граничних умов тощо). У зв'язку з цим у даній магістерській роботі вміщено лише мінімальні дані з теорії R-функцій, необхідні для викладу матеріалу.

Практичне значення:

Матеріал у цій магістерській роботі може бути корисним при побудові наближених розв’язків багатоточкових граничних задач, а також граничних задач для областей складної форми із складними типами граничних умов.

Принципово важливими в нашій магістерській роботі є поняття Н-реалізованої функції і повноти засобів аналітичної геометрії. За допомогою першого поняття, поняття Н-реалізованої функції, визначається та система Н (базових) операцій, якими дозволено користуватись при побудові функції $Q_n(P)$. Поняття ж про алгоритмічну повноту засобів аналітичної геометрії пов'язане з розв'язанням питань про те, яким вимогам повинна задовольняти базова система H для того, щоб множина геометричних об'єктів, які в класі H-реалізованих функцій можуть бути описані, була достатньо широкою.

Методи досліджень:

При написанні магістерської роботи використовувались методи функціонального аналізу, математичного аналізу, засобів повноти аналітичної геометрії.

Розділ 1

ПОВНОТА ЗАСОБІВ НАБЛИЖЕННЯ

1.1 Повнота засобів аналітичної геометрії

Нехай задана система функцій

$$H = \{\varphi_i(x_{i1}, \dots, x_{im_i})\}, i = 1,2, \dots,$$

означених і неперервних всюди в R^{m_i} , яку будемо називати базовою системою функцій. Ця система функцій може бути і скінченною. Деякі з функцій φ_i можуть бути одномісними (функції однієї змінної) або навіть 0-місними (константи). Вважатимемо, що серед цих функцій є щонайменше одна n-місна функцій ($n > 1$).

Введемо індуктивне означення суперпозиції.

Означення. Суперпозицією функцій системи H називаємо:

а) всі базові функції системи H;

б) функції вигляду

$$f\left(g_1(x_{11}, \dots, x_{1m_1}), \dots, g_k(x_{k1}, \dots, x_{km_k})\right),$$

якщо $f(y_1, \dots, y_k), g_i(x_{i1}, \dots, x_{im_i}), i = \overline{1,k}$ – суперпозиції;

в) всі функції, що одержуються з базових шляхом заміни якої-небудь частини символів незалежних змінних довільними іншими символами таких змінних.

Множина всіх суперпозицій повністю визначається базовою системою H. Щоб підкреслити цю обставину, будемо називати суперпозицію H-реалізовними функціями. Множину всіх H-реалізовних функцій позначимо M(H).

Наприклад, множина $M(H_0)$, де

$$H_0 = \{x + y, xy, (-\infty, \infty)\}, \tag{1.1.1}$$

являє собою множину цілих раціональних функцій (поліномів). Наявність в базовій системі інтервалу $(-\infty, \infty)$ Означає, що множина 0-місних функцій включає з нього всі константи інтервалу.

Множина H_1- реалізовних функцій, де

$$H_1 = \{x + y, xy, |x|, (-\infty, \infty)\}, \tag{1.1.2}$$

Очевидно, включає множину H_0- реалізовних функцій. Нижче показано, що множина H_1 -реалізовних функцій являє собою множину кусково-поліноміальних функцій.

Множина H_2- реалізовних функцій, де

$$H_2 = \left\{x + y, xy, \sqrt{x}, x > 0, (-\infty, \infty)\right\} \tag{1.1.3}$$

очевидно, включає множини H_0 і H_1- реалізовних функцій (враховуючи, що $\sqrt{x^2} = |x|$).

Операції «взяття модуля», «добування кореня» тощо легко реалізуються на сучасних ЕОМ. Тобто, з точки зору обчислень множина H_1- реалізовних, проста і зручна.

Множину H_1 - реалізовних функцій можна упорядкувати. Для цього скористаємося тотожностями

$$|x - a||x - b| = (x - a)(x - b) - |x - a|(x - b) + |x - b|(x - a),$$

$$a < b, \tag{1.1.4}$$

$$\big||x| + |y|\big| = |x| + |y| \tag{1.1.5}$$

$$\big|x - |y|\big| = |x - y| + |x + y| - |x| - |y|, \quad x \geq 0, \tag{1.1.6}$$

$$\big|x - |y|\big| = |x| + |y|\,, x < 0.$$

Теорема. Для будь-якої H_1- реалізовної функції $H(x)$, яка належить до класу C^k, знайдуться такі константи $m, n, k_i, a_i (i = \overline{1, n})$, що буде мати місце тотожність

$$H(x) = P_0(x) + \sum_{i=1}^{n} P_i(x)|x - a_i|(x - a_i)^{k_i}, \qquad (1.1.7)$$

де $k_i \geq k$ і хоча б для одного i виконується рівність $k_i = k$.

Доведення цієї теореми стає особливо ясним, якщо врахувати, що будь яка H_1-реалізовна функція $H(x)$ являє собою кусково-поліноміальну функцію, тобто визначається таким чином:

$$H(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{якщо} -\infty < x \leq a_1, \\ f_2(x), & \text{якщо } a_1 \leq x \leq a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ f_n(x), & \text{якщо } a_{n-1} \leq x \leq a_n, \\ f_{n+1}(x), & \text{якщо } a_n \leq x < \infty, \end{cases} \qquad (1.1.8)$$

де $f_i(x), i = \overline{1, n+1}$ – поліноми.

Неважко перевірити, що цю функцію можна записати за допомогою аналітичного виразу

$$H(x) = \frac{1}{2}\left[f_1(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{i+1}(x) - f_i(x)}{x - a_i}|x - a_i| + f_{n+1}(x)\right]. \qquad (1.1.9)$$

Якщо в точці $a_i(i = \overline{1, n})$ функція $H(x)$ k диференційована, то це означає, що різниця $f_{i+1}(x) - f_i(x)$ може бути представлена у вигляді

$$f_{i+1}(x) - f_i(x) = (x - a_i)^{k+1} * 2P_i(x). \qquad (1.1.10)$$

де $P_i(x)$ – деяка відповідна цій різниці функція.

Після підстановки (1.1.10) в (1.1.9) та позначення

$$P_0(x) = \frac{f_1(x) + f_{n+1}(x)}{2}$$

одержимо формулу (1.1.7)

Наслідок: Для будь-якої H_1 - реалізовної функції $H(x)$ знайдуться такі константи m, n і $a_i(= \overline{1, n})$, що буде мати місце тотожність

$$H(x) = P_0(x) + \sum_{i=1}^{n} P_i(x)|x - a_i|, \tag{1.1.11}$$

Де $P_i(x), i = \overline{0, n}$ – поліноми, степінь яких не перевищує m.

На основі цих теорем можна ввести поняття H_1 - реалізовної полінома.

Означення. Функцію вигляду

$$H(x) = P_0(x) + \sum_{k=1}^{n} P_k(x)|x - a_k|,$$

де $P_k(x), k = \overline{0, n}$ – поліноми степеня не вище m, назвемо H_1- реалізовним поліномом степеня (n, m) (скорочено H_1 - поліномом степеня (n, m) і позначимоv$H_{n,m}(x)$).

Очевидно, функції вигляду

$$H_{n,m}(x) = P_0(x) + \sum_{k=1}^{n} q_k(x)(x - a_k)^i|x - a_k|,$$

де $q_k(x)$ - поліноми степеня не вище $m - i$, належатимуть до класу C^i.

Розглянемо питання про алгоритмічну повноту системи базових функцій. Перш ніж ввести це поняття, сформулюємо деякі означення та теореми. Для простоти викладок будемо розглядати простір R^2, хоч всі означення, твердження і висновки зберігають свою силу і в R^m. При цьому поняття площини, поверхні тощо слід замінити поняттями гіперплощини, гіперповерхні тощо.

Означення. Множина L точок площини $x0y$ називається кресленням, якщо існує така означена і неперервна всюди функція $z = f(x, y)$, яка дорівнює нулю в тих і тільки тих точках площини $x0y$, які належать множині L.

Функції $z = f(x, y)$ в просторі xOy відповідає поверхня (S), координати точок якої задовольняють рівнянню $z - f(x, y) = 0$. Згідно даного вище означення, креслення L - це сукупність точок, спільних для поверхні (S) і площини Oxy. Рівняння $f(x, y) = 0$ називатимемо рівнянням креслення L.

Можна довести такі теореми.

Теорема 1. Для того, щоб множина L точок площини була кресленням, необхідно і достатньо, щоб вона була замкненою множиною.

З означення H- реалізованих функцій випливає, що будь-яка з них є всюди означеною та неперервною. Тому кожній H −реалізованій функції $f(x, y)$ можна поставити у відповідність деяке креслення L, рівняння якого $f(x, y) = 0$. Таке креслення називатимемо H −реалізовним і позначатимемо $N(H)$.

Приклад. Множина $N(H_0)$ H_0 − реалізованих креслень, де H_0 – базова система (1.1), є множиною алгебраїчних кривих.

Множині $M(H)$ H -реалізовних функцій можна поставити у відповідність також множину $G(H)$ – реалізованих областей, які визначаються нерівностями вигляду

$$\varphi(x, y) \geq 0, \quad \varphi(x, y) \in M(H) \qquad (1.1.12)$$

Теорема 2. Якщо система H базових функцій вміщує операції множення xy та константу (-1), то $N(H) \subset G(H)$.

Дійсно, нехай $f(x, y)$ – довільна функція, яка належить множині $M(H)$. Тоді функція $\psi(x, y) = -f^2(x, y)$ також належить до $M(H)$, і, отже, область (S), яка визначається нерівністю $\psi(x, y) \geq 0$, належить множині $G(H)$. Але нерівність $\psi(x, y) \equiv -f^2(x, y) \geq 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли $f(x, y) = 0$. Отже, область (S) співпадає з кресленням L, яке визначається рівнянням $f(x, y) = 0$, тобто $L \in G(H)$.

Введемо поняття елемента H-реалізовного креслення.

Означення. Частину L_0 H -реалізовного креслення L назвемо елементом креслення L, або H-елементом, якщо існує така H-реалізовна область (S), що всі точки L_0 належать до (S), а останні точки креслення L не належить до (S).

Будь який елемент креслення (L), що є перетином замкнених множин L та (S), також є замкненою множиною точок, і, отже, може розглядатися як креслення.

Приклад. Базовій системі H_0 відповідають множина $M(H_0)$ поліномів, множина $N(H_0)$ алгебраїчних кривих та множина $G(H_0)$ областей, обмежених алгебраїчними кривими. Будь-яка дуга кривої, відокремлена деякою іншою алгебраїчної кривою (наприклад, еліпсом), є її елементом.

Позначимо через $E(H)$ множину H −елементів.

Означення. H − кресленням будемо називати сукупність скінченного числа H −елементів, або їм конкурентних об'єктів. Множину H −креслень позначимо через $T(H)$.

Всі введені вище множини $M(H), N(H), G(H), T(H), E(H)$ повністю визначаються, якщо задана система Н. Наприклад, в $T(H_0)$ не буде кусків синусоїд.

З'ясуємо, яким умовам повинно відповідати базова система для того, щоб для будь-якого складного креслення можна було вказати алгоритм, по якому за допомогою функції базової системи можна було б побудувати його рівняння.

Означення. Система Н базових функцій називається алгоритмічно повною, якщо $T(H) \subset N(H)$.

Можна показати, що система H_0 базових функцій не задовольняє умови алгоритмічної повноти. Питання про побудову алгоритмічно повних систем буде розглянуте після введення R −функцій.

Сформулюємо поняття повної системи функцій по відношенню до деякої множини M_0.

Означення. Систему базових функцій H назвемо повною по відношенню до множини функцій M_0, якщо

$$M_0 \subset M(H).$$

Нехай далі T − деяка ознака, що ставить у відповідність кожній функції $f \in M_0$ деяку функцію $Tf \in M_0$. Через $T(f)$ позначимо також множину функцій з ознакою T.

Означення. Система H базових функцій називається достатньо повною (за ознакою Т) по відношенню до множини M_0, якщо $M(H) \cap Tf \neq \emptyset$ для довільних $f \in M$.

Приклад 1. Нехай $M_0 = C^1(G)$, де G −деяка область в R^2. Будемо вважати, що функція $u(x, y)$ має ознаку T_ε по відношенню до множини M_0, якщо знайдеться така $f \in M_0$, що $|u - f| < \varepsilon, \left|\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\right| < \varepsilon, \left|\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\right| < \varepsilon$

Відомо, що множина $M(H)$, де

$$H = \{x + y, xy, (-1,1)\},$$

є повною за ознакою T_ε (теорема Вейєрштрасса).

Приклад 2. Нехай

$$H = \left\{\varphi(x_1, x_2), \qquad \varphi \in C^0[K_2], \qquad |\varphi| < 1, \qquad K_2: \{|x_i| < 1\}\right\}$$

і M_0- множина всіх неперервних в K_n функцій $f(x_1, \dots, x_n), |f(P)| \le 1, n \le 2$. Тоді система H є повною по відношенню до M_0. Тобто кожну функцію із M_0 можна представити у вигляді суперпозиції функції базової системи H.

Слід зауважити, що до класу H_1-реалізовних функцій належить також клас spline-функцій. Spline -функції знайшли застосування при розв'язанні ряду важливих проблем (в тому числі при мінімізації функціоналів, при розв'язанні граничних задач тощо). Ми не будемо детально описувати властивості цих функцій. Зауважимо тільки, щоб всі загальні твердження, що стосуються H_1 −реалізованих функцій, можуть бути безпосередньо перенесені на spline-функції.

1.2 R-функції

Введемо таке поняття $R -$ функції, яке суттєво пов'язане з поняттям функцій k −значної логіки. Функції k −значної логіки, зокрема булеві, досить повно вивчені. Для нас достатньо використання R −функцій, що відповідають функціям двозначної логіки. Тому в цьому параграфі наведено лише елементарні відомості про функції двозначної логіки.

Нехай $R' -$ множина всіх дійсних чисел. Розіб'ємо R' на k підмножин $R'_0, R'_1, \dots, R'_{k-1}$. Нехай B_k- множина цілих чисел $0,1,2, \dots, k - 1$. Розглянемо деякий набір чисел із $B_k \left(N_1^{(i)}, \dots, N_n^{(i)}\right)$. Як відомо, існує k^n різних таких наборів, тому індекс і, яким позначено даний набір, буде змінюватись від 1 до k^n.

Поставимо у відповідність наборам $\left(N_1^{(i)},\dots,N_n^{(i)}\right), i=\overline{1,k^n}$ області $T_i(i=\overline{1,k^n}$ в n −вимірному просторі $(x_1,\dots,x_n)$, включивши в області T_i ті точки, координати яких задовольняють умови

$$x_i \in R'_{N_j}(i), h=\overline{1,n} \qquad (1.2.1)$$

Означення. Функція $y=f(x_1,\dots,x_n)$ визначена всюди в просторі R^n , називається R_k-функцією, якщо для будь-якого набору $(N_1^{(i)},\dots,N_n^{(i)}), i=\overline{1,k^n}$ з B_k можна знайти таке число $N_i \in B_k$, що у всіх точках області T_i відповідній i −набору, виконується умова

$$f(x_1,\dots,x_n) \in R'_{N_j} \qquad (1.2.2)$$

Множину R_k −функцій позначимо R_k. З наведеного означення видно, що будь-якій R_k- функції $y=f(x_1,\dots,x_n)$ відповідає деяка функція $Y=F(X_1,\dots,X_n)$ k −значної логіки, яка приймає на наборах $(N_1^{(i)},\dots,N_n^{(i)})$ значення $N_i\left(i=\overline{1,k^n}\right)$.

Теорема 3. Множина R_k функціонально замкнута, тобто суперпозиція R_k-функцій є також R_k-функцією .

Множина R_k при будь-якій розбивці числової осі є незліченною множиною. В той же час множина функцій k −значної логіки, якщо розглядати функції довільного числа аргументів, є зліченною.

Враховуючи те, що кожній функції із R_k відповідає деяка функція k −значної логіки, множину R_k можна розбити на зліченну кількість підмножин, включивши в одну із них всі ті R_k-функції, яким відповідає одна й та сама функція k −значної логіки F. Будемо говорити, що функції утворюють вітку $R(F)$ множини R_k.

Враховуючи замкненість класу R_k −функцій, перейдемо до розгляду питання про повну систему функцій в цьому класі, тобто про таку систему функцій, суперпозицією яких можна було б одержати будь-яку функцію даного класу.

В загальному випадку задача побудови повної системи функцій для множини R_k поки що не вирішена. Але виявляється, що можна знайти таку систему R_k-функцій, суперпозицією яких можна побудувати щонайменше одну $R_k -$ функцію, яка належить будь-якій наперед заданій вітці класу R_k. Такі системи R_k $-$функцій будемо називати достатньо повними.

Теорема 4. Нехай функції $f_i(i = 1,2, \dots, n)$ належать до класу R_k , а $F_i(i = 1,2, \dots, n)$ є відповідними їм функціями k $-$значної логіки. Тоді, яка б не була функція F $k -$значної логіки, що являє собою суперпозицію функцій $F_i(i = 1,2, \dots, n)$, знайдеться принаймні одна відповідна їй R_k $-$функція, що являє собою суперпозицію функцій $f_i(i = 1,2, \dots, n)$.

З цієї теореми випливає, що якщо система $R_k -$ функцій $f_i(i = 1,2, \dots, n)$ відповідає системі $F_i(i = 1,2, \dots, n)$, повній в класі функцій $k -$значної логіки, то вона буде досить повною, тобто з її допомогою можна побудувати R_k-функції з кожної вітки класу R_k.

Далі будемо розглядати R $-$функції, що відповідають покриттю числової осі двома множинами.

В основі двозначної логіки лежить поняття булевої функції з алфавітом із двох елементів. Для одержання двоїчного алфавіту можна використати два будь-яких символи, наприклад, «0» та «1», «неправда» та «істина».

Далі ми будемо розглядати і булеві функції, і функції неперервних аргументів. Умовимось позначати булеві змінні великими латинськими буквами $X, Y, Z, F, \dots$, а неперервні змінні – малими $x, y, z, t, u, \dots$. Букви готичного алфавіту будемо використовувати для позначення множин. У випадку $k = 2$ за множини x_0 та x_1 приймемо $x_0 = (-\infty, 0], x_1 = [0, \infty)$, вважаючи, що число “0” завжди має означений знак “+” або “-“.

Як відомо, існує 16 булевих функцій від двох аргументів. Для всіх них прийняті спеціальні позначення (таблиця 1).

X_1	0	0	1	1	X_1	Змінна X_1
X_2	0	1	0	1	X_2	Змінна X_2
Y_0	0	0	0	0	0	Константа 0
Y_1	0	0	0	1	$X_1 \wedge X_2$	Кон'юнкція
Y_2	0	0	1	0	$\overrightarrow{X_1 \to X_2}$	Від'ємність імплікації
Y_3	0	0	1	1	X_1	Змінна X_1
Y_4	0	1	0	0	$\overrightarrow{X_2 \to X_1}$	Від'ємність імплікації
Y_5	0	1	0	1	X_2	Змінна X_2
Y_6	0	1	1	0	$X_1 \cong X_2$	Від'ємність рівнозначності
Y_7	0	1	1	1	$\overline{\overline{X_1 \vee X_2}}$	Диз'юнкція
Y_8	1	0	0	0	$\overline{X_1 \vee X_2}$	Від'ємність диз'юнкції
Y_9	1	0	0	1	$X_1 \sim X_2$	Рівнозначність
Y_{10}	1	0	1	0	$\overline{X_2}$	Від'ємність
Y_{11}	1	0	1	1	$X_2 \to X_1$	Імплікація
Y_{12}	1	0	0	0	$\overline{X_1}$	Від'ємність
Y_{13}	1	1	0	1	$X_1 \to X_2$	Імплікація
Y_{14}	1	1	1	0	X_1 / X_2	Операція Шеффера
Y_{15}	1	1	1	1	1	Константа 1

Таб.1

Використовуючи правила побудови складних функцій, можна побудувати булеві функції будь-якого числа змінних на основі булевих функцій двох змінних. Нижче наводяться властивості булевих функцій, використання яких полегшить роботу з цими функціями (таблиця 2).

Номер п/п	Властивості булевих функцій	Номер п/п	Властивості булевих функцій
1	$X_1 \wedge X_2 = X_2 \wedge X_1$	11	$X \wedge 0 = 0$
2	$X_1 \vee X_2 = X_2 \vee X_1$	12	$X \vee 1 = X$
3	$X_1 \sim X_2 = X_2 \sim X_1$	13	$X \vee 0 = X$
4	$(X_1 \wedge X_2) \wedge X_3 = X_1 \wedge (X_2 \wedge X_3) = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$	14	$X \vee 1 = 1$
5	$(X_1 \vee X_2) \vee X_3 = X_1 \vee (X_2 \vee X_3) = X_1 \vee X_2 \vee X_3$	15	$\bar{\bar{X}} = X$
6	$(X_1 \sim X_2) \sim X_3 = X_1 \sim (X_2 \sim X_3) = X_1 \sim X_2 \sim X_3$	16	$X \wedge \bar{X} = 0$
7	$X \wedge X = X$	17	$X \vee \bar{X} = 1$
8	$X \vee X = X$	18	$X_1 \wedge X_2 = \overline{X_1 X_2}$
9	$(X_1 \vee X_2) \wedge X_3 = (X_1 \wedge X_3) \vee (X_2 \wedge X_3)$	19	$\overline{X_1 \vee X_2} = \overline{X_1} \wedge \overline{X_2}$
10	$(X_1 \wedge X_2) \vee X_3 = (X_1 \vee X_3) \wedge (X_2 \vee X_3)$		

Таб. 2

Розглянемо основні властивості булевих функцій.

Будь-яку булеву функцію можна представити у вигляді деякої диз'юнкції кон'юнкції. Це означає, що кон'юнкція, диз'юнкція та від'ємність складають повну систему функцій по відношенню до множини всіх булевих функцій. Тобто множина булевих функцій, які можна побудувати за допомогою операцій

$$X_1 \wedge X_2,\ \ X_1 \vee X_2,\ \ \bar{X}$$

є множина всіх булевих функцій.

Повною системою функції є також одна функція-штрих Шефера.

Будь-яка повна система булевих функцій може бути прийнята за основну. Перевага надається тій чи іншій системі в залежності від конкретних умов розглядуваної задачі.

Наведемо ряд прикладів $R-$ функцій, відповідних булевих функціях двох змінних. Зокрема, функції

$$Z_1 = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \propto (x_1, x_2)}\right) \tag{1.2.3}$$

$$Z_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \propto (x_1, x_2)}\right) \tag{1.2.4}$$

при $-1 <\propto (x, y) \leq 1$ є $R-$ функціями. $R-$ функції Z_1 та Z_2 визначені формулами (1.15), (1.16), відповідають булевим функціям $X_1 \wedge X_2$, та $X_1 \vee X_2$.

Неважко переконатися, що функції $Z_1(x_1, x_2)\varphi_1(x_1, x_2)$ та $Z_2(x_1, x_2)\varphi_2(x_1, x_2)$, де $\varphi_1(x_1, x_2)$ та $\varphi_2(x_1, x_2)$ - довільні додатні функції, являється також R $-$функціями, відповідними кон'юнкції та диз'юнкції. $R-$ функції, відповідні булевій функції «від'ємність», можуть бути одержані з формули

$$Z_3 = -x \cdot \varphi_3(x_1, x_2). \tag{1.2.5}$$

Функції (1.15)-(1.17) називаються відповідно $R-$кон'юнкцією, $R-$диз'юнкцією та $R-$від'ємністю. Для цих функцій введемо наступні позначення:

$$x_1 \wedge_\propto x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \propto (x_1, x_2)}\right) \qquad (1.2.6)$$

$$x_1 \vee_\propto x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \propto (x_1, x_2)}\right) \qquad (1.2.7)$$

$$\bar{x} = -x \qquad (1.2.8)$$

де $-1 <\propto (x_1, x_2) \leq 1$.

$R-$кон'юнкція, $R-$диз'юнкція та $R-$від'ємність становлять досить повну відносно класу R –функцій систему, тому що кон'юнкція, диз'юнкція та від'ємність складають повну систему функцій відносно множини булевих функцій.

Система (1.2.3)-(1.2.8) може бути побудована за допомогою суперпозиції функції

$$\propto_1 (x_1, x_2) = x_1 + x_2, \qquad \propto_2 = (x_1, x_2) = x_1x_2;$$

$$\propto_3 (x_1, x_2) = \sqrt{x} \qquad (x \geq 0) \qquad (1.2.9)$$

Тому ця система, якщо її прийняти за базову при побудові складних функцій, буде достатньо повною по відношенню до множини R –функцій. R –кон'юнкція та $R-$диз'юнкція мають частинні похідні, визначені всюди, за винятком початку координат, де має місце розрив першого роду. Неважко бачити, що функції

$$x_1 \wedge_\propto^{(k)} x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \propto (x_1, x_2)}\right)\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^k, \qquad (1.2.10)$$

$$x_1 \vee_\propto^{(k)} x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \propto (x_1, x_2)}\right)\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^k, \qquad (1.2.11)$$

$$-1 <\propto \leq 1$$

належать до класу C^k і є відповідну R –кон'юнкцією та R –диз'юнкцією.

Теорема 5. Система H_1 базових функцій

$$\varphi_1(x, y) = x + y, \quad \varphi_2(x, y) = xy, \quad \varphi_3(x, y) = x \wedge_\propto y \qquad (1.2.12)$$

алгоритмічно повна.

Очевидно, що якщо до системи (1.2.12) приєднати будь-які всюди означені та неперервні функції, то одержимо також алгоритмічно повні системи. Тобто, якщо $\psi_1(x,y), \psi_2(x,y), \dots, \psi_m(x,y)$ деякі всюди означені та неперервні функції, то система H_2

$$x + y, \qquad xy, \qquad x \wedge_\propto y, \quad \psi_1(x,y), \psi_2(x,y), \dots, \psi_m(x,y) \tag{1.2.13}$$

алгоритмічно повна.

Розглянемо детальніше множину креслень, які відповідають системі (1.2.12) базових функцій.

Через те, що $x \wedge_\propto y$ визначається формулою

$$x \wedge_\propto y = \frac{1}{2}\left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2 \propto xy}\right),$$

будь-яка H_2 −реалізована функція є функцією, в побудові якої беруть участь лише три операції: додавання, множення та добування квадратного кореня. Можна показати, що шляхом еквівалентних перетворень рівняння $f(x,y) = 0,\ f(x,y) \in M(H_1)$, його можна звести до вигляду $f_1(x,y) = 0$, де $f_1(x,y)$ - поліном, тобто виключити з рівняння квадратні корені. Внаслідок еквівалентних перетворень корені рівняння $f(x,y) = 0$ збережуться, але можуть з'явитись і нові. Функція $f_1(x,y)$ є поліном, тому рівнянню $f_1(x,y) = 0$ відповідатиме деяка алгебраїчна крива L_1. Отже, креслення L_1 має рівняння $f(x,y) = 0$, становить частину алгебраїчної кривої L_1.

Додавання операції $x \wedge_\propto y$ не вносить нічого нового в форму елементів креслення, тому що будь-який H_1 −реалізовній функції відповідає креслення, яке складається з елементів алгебраїчних кривих. Таким чином, на операцію $x \wedge_\propto y$ в системі (1.2.12) покладається логічна роль: з її допомогою виконується «розрізання» алгебраїчних кривих на частини, виділення їх елементів.

1.3 Рівняння границь складних областей

Однією з найважливіших задач аналітичної геометрії, яка має застосування в багатьох областях математики, є задача про побудову рівнянь границь складних областей. Крім того, для застосування важливо будувати не тільки функції, які дорівнюють нулю на заданій множині точок, але й такі, що мають означені диференціальні та інтегральні властивості. Повне розв'язання цієї задачі стало можливим тільки на основі методу R −функцій. Нижче для простоти розглянуто двовимірний випадок.

1. При побудові рівнянь границь довільних областей, якщо відомо їх логіка побудови за допомогою областей $D_1, D_2, \dots, D_m$, визначених відповідно нерівностями

$$f_i(x, y) \geq 0 \qquad (i = 1,2, \dots, m)$$

зручно користуватись такими теоремами.

Теорема 6. Нехай D_1 та D_2 – області, визначені нерівностями $f_1(x, y) \geq 0$ та $f_2(x, y) \geq 0$ відповідно. Якщо $z = \varphi(x, y)$ є R −функцією, відповідною кон'юнкції $X_1 \wedge X_2$, то область D, визначена нерівністю

$$\Psi(x, y) \equiv \varphi[f_1(x, y), f_2(x, y)] \geq 0, \tag{1.3.1}$$

є перетином областей D_1 та D_2.

Приклад. Нехай область D_1 - смуга, визначена нерівністю $a^2 - x^2 \geq 0$, а область D_2 - смуга, визначена нерівністю $b^2 - y^2 \geq 0$. Якщо скористатись R −кон'юнкцією $x \wedge_\propto y$ (1.2.3), то нерівність

$$(a^2 - x^2) \wedge_\propto (b^2 - y^2) \geq 0 \tag{1.3.2}$$

визначатиме область прямокутника, обмеженого цими смугами. Рівність в формулі (1.3.2) досягається лише на границі прямокутника, тому

$$(a^2 - x^2) \wedge_\propto (b^2 - y^2) = 0$$

є його рівнянням. Якщо для практичних цілей немає необхідності вимагати диференційованість функції, що знаходиться зліва в цьому рівнянні, то його зручно написати у вигляді ($\propto = 1$)

$$(a^2 - x^2) \wedge_1 (b^2 - y^2) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - x^2 - y^2 - |a^2 - b^2 - x^2 + y^2|) = 0 \tag{1.3.3}$$

Зауваження 1. Неважко бачити, що нерівності $a-|x|\geq 0,\ b-|y|\geq 0$ також визначають ті ж самі смуги. Тому рівняння

$$(a-|x|)\wedge_1(b-|y|)=0 \tag{1.3.4}$$

є також рівнянням розглянутого прямокутника. Якщо скористатися формулою (1.2.3), то рівняння (1.3.4) набуде вигляду

$$(a-|x|)\wedge_1(b-|y|)=\frac{1}{2}\big(a+b-|x|-|y|-\big|a-b+|y|-|x|\big|\big)=0 \tag{1.3.5}$$

Як бачимо, рівняння (1.3.5) має набагато простіший вигляд, ніж рівняння (1.3.3), однак ліва частина його є кусково-аналітичною функцією, що належить класу C.

Зауваження 2. З точки зору практики зручніше вважати операції $\wedge_\propto, \vee_\propto$ елементарними операціями і виконувати дії над ними із врахуванням їх властивостей, аналогічно діям з операціями додавання, множення та іншими, тобто не розписуючи їх. Такий підхід до побудови рівнянь складних кривих особливо зручний при застосуванні ЕОМ, де реалізація тієї чи іншої складної операції може бути запрограмована у вигляді стандартної підпрограми.

Наведена вища теорема узагальнюється на випадок довільного числа областей.

Теорема 7. Якщо області $D_i(i=1,2,\dots,m)$ визначаються відповідно нерівностями $f_i(x,y)\geq 0, i=\overline{1,m}$, то область D, яка являє собою перетин областей $D_i(i=1,2,\dots,m)$, тобто $D=D_1\wedge D_2\wedge D_3\wedge\dots\wedge D_m$ визначається нерівністю

$$\Big(\dots\Big(\big(f_1\wedge_{\propto_1}f_2\big)\wedge_{\propto_3}\dots\wedge_{\propto_{m-2}}f_{m-1}\Big)\Big)\wedge_{\propto_{m-1}}f_m\geq 0, \tag{1.3.6}$$

де $\propto_i(x,y)$ - довільні функції, які задовольняють обмеження $-1<\propto_i(x,y)\leq 1$ і належать до необхідного нам класу диференційованості.

Аналогічні теореми мають місце, коли область D становить об'єднання кількох областей.

Теорема 8. Якщо області $D_i(i=1,2,\dots,m)$ визначаються відповідно нерівностями $f_i(x,y)\geq 0$, а функція $Z=\varphi(u_1,u_2,\dots,u_m)$ є R −функцією, відповідно диз'юнкції $X = X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_n$, то область D, яка становить об'єднання областей D_i визначається нерівністю

$$\varphi(f_1, f_2, \dots, f_m) \geq 0 \tag{1.3.7}$$

Зокрема, нерівність (1.32) можна записати так:

$$\left(\dots\left(\left(f_1 \vee_{\alpha_1} f_2\right) \vee_{\alpha_2} f_3\right) \vee_{\alpha_3} \dots \vee_{\alpha_{m-2}} f_{m-1}\right) \vee_{\alpha_{m-1}} f_m \geq 0 \tag{1.3.8}$$

Використовуючи ці та аналогічні теореми, можна побудувати рівняння границі довільної області D, якщо відома логіка її побудови за допомогою областей $D_i (i = 1,2, \dots, m)$, визначених нерівностями $f_i \geq 0,\ i = \overline{1, m}$. Тобто має місце наступна теорема.

Теорема 9. Нехай булева функція

$$D = F(D_1, \dots, D_m)$$

визначає логіку побудови області D за допомогою областей D_i , заданих відповідно нерівностями $f(x, y) \geq 0$, а функція $Z = \varphi(u_1, u_2, \dots u_m)$ - $R -$функція, відповідна цій булевій функції. Тоді нерівність

$$\varphi(f_1, \dots, f_m) \geq 0 \tag{1.3.9}$$

визначає область D.

Якщо булева функція, область істинності якої обмежена $n-$ кутником, представлена за допомогою операцій кон'юнкції, диз'юнкції та від'ємності, то відповідна їй $R -$функція може бути одержана шляхом формальної заміни в булевій функції символів кон'юнкції, диз'юнкції та від'ємності символами $R -$кон'юнкції, $R -$диз’юнкції та $R -$від'ємності відповідно, а булевих змінних X_i функціями $f_i(x, y)$.

Як приклад розглянемо побудову рівняння фігури, область D якої складена із таких областей:

$$D_1 \colon f_1 \equiv x \geq 0,$$

$$D_2 \colon f_2 \equiv y \geq 0,$$

$$D_3\colon f_3 \equiv c - x \geq 0, \quad b \leq x \leq c,$$

$$D_4\colon f_4 \equiv a - y \geq 0, \quad a \leq y \leq d, \tag{1.3.10}$$

$$D_5\colon f_5 \equiv b - x \geq 0,$$

$$D_6\colon f_6 \equiv d - y \geq 0$$

Булева функція $F(X_1, X_2, \dots, X_6)$, яка визначає логіку побудови області D за допомогою областей D_i матиме вигляд

$$F = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge X_6 \wedge (X_4 \vee X_5) \tag{1.3.11}$$

де

$$X_i(x, y) = \begin{cases} 1, \ \text{якщо} \ (x, y) \in D_i, \\ 0, \ \text{якщо} \ (x, y) \overline{\in} D_i \end{cases} \tag{1.3.12}$$

Враховуючи попередні міркування, з формул (1.3.10)-(1.3.12) одержимо нерівність, яка визначає область D у вигляді

$$\Big(\big(f_1 \wedge_{\propto_2} f_2\big) \wedge_{\propto_2} \big(f_3 \wedge_{\propto_3} f_6\big)\Big) \wedge_{\propto_4} \big(f_4 \vee_{\propto_5} f_5\big) \geq 0 \tag{1.3.13}$$

або

$$\Big(\big(x \wedge_{\propto_1} y\big) \wedge_{\propto_2} (c - x) \wedge_{\propto_3} (d - y)\Big) \wedge_{\propto_4} \Big((a - y) \vee_{\propto_5} (b - x)\Big) \geq 0$$

Слід відзначити, що викладеним вище методом можна будувати рівняння розімкнутих ліній, що важливе значення, наприклад, при розв'язанні задач математичної фізики, особливо змішаних граничних задач. При цьому більшість рівнянь границь складних областей може бути легко побудована з використанням лише R −кон'юнкції та R −від'ємності, але при такому підході одержані формули були б громісткішими. В той же час рівняння одного і того ж самого креслення можна записати нескінченним числом способів, перемножуючи лише одне з відомих рівнянь на різні строго додатні функції. У зв'язку з цим можна сформулювати таку проблему, розв'язання якої в загальному випадку ще не знайдено: серед H − реалізованих функцій, яким відповідає одне і те саме H −реалізоване креслення, знайти «найбільш просту». Зміст, який вкладається в слова «найбільш проста H −реалізована функція», може бути, взагалі кажучи, різним. Можна, наприклад, задати «вартість» виконання базових операцій і вимагати, щоб вартість обчислень за розглядуваною формулою була найменшою.

При розв'язанні цього питання корисно врахувати таке. Нехай деяка область D побудована за допомогою областей $D_i(i = \overline{1,m})$. При перетині областей D_i з'являються часткові області D^k, кожній з яких поставимо у відповідність набір m з двоїчних змінних $(X_1^k, X_2^k, \dots, X_m^k)$. Будь-яка булева функція $D = F(X_1, X_2, \dots, X_m)$ матиме своєю областю істинності деяку область D_F. Але область істинності булевої функції може складати і пусту множину. Наприклад, булева функція $F = X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_n$ має своєю областю істинності пусту множину, якщо області D_i не перетинаються. Більш того, при заданому розташуванні областей D_i може бути кілька булевих функцій від змінних X_i, які мають областю істинності пусту множину. Це означає, що не будь-якому набору $\left(X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \dots, X_m^{(k)}\right)$ відповідає конкретна область D, яка визначається не пустою множиною точок. Тобто при встановленні взаємно однозначної відповідності між частковими областями і наборами $\left(X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \dots, X_m^{(k)}\right)$, взагалі кажучи, не будуть вичерпані всі набори m двоїчних змінних (кількість всіх наборів 2^m).

Теорема 10. Нехай М-множина замкнених кривих, а дві довільні криві цієї множини мають найбільшу кількість точок перетину, яка не перевищує k . Тоді максимальна кількість часткових областей, на якій площині розділяється кривими множини M, які попарно перетинаються, визначається так:

$$N_1(m) = \frac{k}{2}(m-1)(m+2) \tag{1.3.14}$$

Теорема 11. Нехай Н - множина незамкнених кривих, кожні дві з яких мають найбільше число перетинів, яке не перевищує k . Тоді максимальна кількість часткових областей, на які площина розділиться m кривими з множини М, що попарно перетинаються, визначається як

$$N_2(n) = \frac{k}{2}(n-1)n + n + 1 \tag{1.3.15}$$

Наприклад, у випадку, коли кривими з множини М є прямі (k = 1) або параболи (k=4), одержуємо відповідно

$$N_2(m) = \frac{m(m+1)}{2} + 1,$$

$$N_2(m) = 2m^2 - m + 1$$

Формули (1.3.14) та (1.3.15) дають можливість зробити зисновок, що максимальна кількість часткових областей, які одержуються при перетині областей D_i, якщо вони обмежені кривими, що задовольняють умови теорем 10 та 11 при m достатньо великому, значно менша кількості можливих наборів m двоїчних, яка дорівнює 2^m. Тобто

$$\lim_{m\to\infty} \frac{N_1(m)}{2^m} = \lim_{m\to\infty} \frac{N_2(m)}{2^m} = 0 \tag{1.3.16}$$

На практиці при побудові булевих функцій, що визначають логіку побудови заданої області D за допомогою областей $D_i(i = \overline{1,m})$, при великому m булева функція $F(X_1, X_2, \ldots X_m)$ має складний вигляд. В той же час практика показує, що навіть порівняно складні креслення можуть бути представлені відносно простими формулами.

Співвідношення (1.3.16) до деякої міри пояснює причину цього явища: при досить великому m неминуче з'являється велика кількість наборів, для яких функція $F(X_1, X_2, \ldots X_m)$ не визначена (тобто одному й тому самому кресленню можна поставити у відповідність не одну булеву функцію $F(X_1, X_2, \ldots X_m)$, а цілу множину їх; вони співпадають на деякій множині наборів і відрізняються на інших).

Звідси випливає, що задача відшукання мінімальної диз'юнктивно-нормальної форми, яка відповідає даному кресленню, при великих m повинна розв'язуватись з урахуваннями граничного співвідношення (1.3.16).

Надалі нам нам будуть потрібні функції $\omega(P) \in C^k$, які задовольняють такі умови:

$$\omega(P) = 0, \text{ якщо } p \in \Gamma, \tag{1.3.17}$$

$$\omega(P) > 0, \text{ якщо } p \in D, \tag{1.3.18}$$

$$\frac{\partial \omega(P)}{\partial n} = 1, \quad \text{якщо } p \in \Gamma, \tag{1.3.19}$$

де Г - поверхня, яка обмежує область D; $\vec{n}$— вектор внутрішньої нормалі до поверхні Г (мається на увазі, що умова (1.3.19) виконується лише в точках, де контур Г гладкий).

Рівняння $\omega(P) = 0$, в якому функція $\omega(P)$ задовольняє умови (1.3.17) - (1.3.19), називатимемо нормованим рівнянням поверхні Г, яке належить до класу C^k.

Розглянемо деякі алгоритми побудови такої функції.

Теорема 12. Нехай функція $\omega_1(P) \in c^{k+1}$ задовольняє умови (1.3.17), (1.3.18) і, крім того, умову

$$\frac{\partial \omega_1(P)}{\partial v} \neq 0, \quad \text{якщо } P \in \Gamma, \tag{1.3.20}$$

Тоді функція

$$\omega(P) = \frac{\omega_1(P)}{\sqrt{\omega_1^2 + |grad\ \omega_1|^2}} \tag{1.3.21}$$

задовольняє умови (1.3.17) - (1.3.19) і належить до класу C^k.

В справедливості цієї теореми неважко переконатись при безпосередній перевірці.

Слід зауважити, що використання цієї теореми на практиці часто виявляється недоцільним через громіздкість формули (1.3.21), особливо це відчувається у випадку складних функцій $\omega(P)$.

Теорема 13. Нехай області D_i визначаються відповідно нерівностями

$$f_i(P) \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \quad P \in (D_i)$$

такими, що $\frac{\partial f_i(P')}{\partial n_i} = 1$, якщо $P' \in \Gamma_i$, а області (Q_1) $і$ (Q_2) визначаються предикатами $Q_1 = \wedge_{i=1}^{m} X_i$, $Q_2 = \vee_{i=1}^{m} X_i$.

Тоді функції

$$\omega_1(P) = \bigwedge_{i=1}^{n} {}_{\propto_i}^{*} f_i(P) = (\dots \left(f_1(P) \wedge_{\propto_1}^{*} f_2(P)\right) \wedge_{\propto_2}^{*} \dots \wedge_{\propto_{m-1}}^{*} f_m(P),$$

$$\omega_2(P) = \bigvee_{i=1}^{m} {}_{\propto_i}^{*} f_1(P) = \left(\dots \left(f_1(P) \vee_{\propto_1}^{*} f_2(P)\right) \vee_{\propto_2}^{*} \dots \vee_{\propto_{m-2}}^{*} f_{m-1}\right) \vee_{\propto_{m-1}}^{*} f_m,$$

Де позначено

$$\frac{2}{1+\propto} x \wedge_{\propto} y = x \wedge_{\propto}^{*} y = \frac{1}{1+\propto}\left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2 \propto xy}\right),$$

$$\frac{2}{1+\propto} x \vee_{\propto} y = x \vee_{\propto}^{*} y = \frac{1}{1+\propto}\left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2 \propto xy}\right), \qquad (1.3.23)$$

задовольняють, відповідно, умови

$$\omega_i(P) = 0, \text{ якщо } P \in \Gamma_i,$$

$$\omega_i(P) > 0, \text{ якщо } P \in Q_i, \qquad (1.3.24)$$

$$\frac{\partial \omega_i(P)}{\partial n_i} = 1, \qquad \text{якщо } P \in \Gamma_i,$$

де Γ_i $і$ n_i - поверхні границь та напрямки внутрішніх нормалей до відповідних поверхонь.

Доведення цього факту легко проводиться методом математичної індукції, якщо виходити з таких рівнянь:

$$\frac{\partial \omega_1(P)}{\partial l} = \frac{\partial f_i(P)}{\partial l}, \quad P \in \left\{f_i = 0, f_j > 0, j \neq i, i = 1,2, \dots, n\right\}$$

$$\frac{\partial \omega_2(P)}{\partial l} = \frac{\partial f_i(P)}{\partial l}, \quad P \in \{f_i = 0, f_j < 0, j \neq i, j = 1,2, \dots, m\} \qquad (1.3.25)$$

де l - будь-який напрямок.

За допомогою R—операцій $\wedge_\propto, \vee_\propto$, можна будувати функції $\omega(P)$, які мають властивості (1.3.25) на граничних елементах $f_i = 0$ практично будь-якої області, тому задовільнення умови (1.3.24) можна робити за рахунок нормування вхідних рівнянь $f_i = 0$, що на практиці звичайно виконується. Наприклад, якщо області $f_i \geq 0$ обмежені гіперплощинами

$$f_i = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \geq 0,$$

то для виконання умови

$$\frac{\partial f_i(P)}{\partial n_i} = 1, \quad P \in (f_i = 0)$$

досить функцію f_i, помножити на константу

$$\mu = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} a_i \cos{(x_i, n_j)}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} a_1^2}} \qquad (1.3.25')$$

Якщо ж області $f_i \geq 0$ обмежені гіперсферами

$$f_i \equiv r^2 - \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \geq 0,$$

то нормовані функції $f_i^*(P)$ можна взяти у вигляді

$$f_i^* = \frac{1}{2r} f_i \qquad (1.3.26)$$

Тут вважається, що нормаль

$$n = n\left(\frac{-x_1}{\sqrt{\sum_i x_i^2}}, \frac{-x_2}{\sqrt{\sum_i x_i^2}}, \dots, \frac{-x_m}{\sqrt{\sum_i x_i^2}}\right)$$

Можна f_i , прийняти у вигляді $r - \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2,}$, якщо в точці (0,0, .., 0) не вимагається диференційовність.

Якщо ми маємо нормоване рівняння границі заданої області (1.42)- (1.44), яке належить до класу C^k, то можна побудувати функцію $\omega(P)$,, яка задовольняє такі умови:

$$\omega(P) = 0,\ \ P \in \Gamma,$$

$$\omega(P) > 0,\ \ \mathrm{P} \in (D) \qquad (1.3.27)$$

$$\frac{\partial^s \omega(P)}{\partial n^s} = \delta_{1s}, \qquad P \in \Gamma, \qquad s = 1,2, \dots, k$$

$$\delta_{1s} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \ \ s = 1 \\ 0, & \text{якщо} \ \ s \neq 1 \end{cases}$$

Рівняння

$$\omega(P) = 0, \quad P \in L \qquad (1.3.28)$$

називається нормальним рівнянням креслення L, якщо для довільної точки P' виконується рівність

$$\omega(P') = \rho\big(P', (L)\big) \qquad (1.3.29)$$

Функція $\omega(P)$ називається нормальною функцією креслення L.

Неважко побачити, що для областей, обмеженних гладкими поверхнями, нормальна функція креслення задовольняє умови (1.3.27)

1.4 Класична формула Тейлора

Нехай задана послідовність чисел $y_s, s = 0,1,2,\dots,n-1$. Треба побудувати H_0 −реалізовну функцію (многочлен) Q (x) найнижчого степеня, яка б задовольняла умови

$$\frac{d^s Q(a)}{dx^s} = y_s, \quad s = \overline{0, n-1}, \tag{1.4.1}$$

де a - фіксована точка. Можна показати, що умови (1.4.1) однозначно визначають шуканий многочлен, степінь якого буде $n-1$. При безпосередній перевірці легко переконатися в тому, що $Q(x) = P_{n-1}(x)$ може бути представлена у вигляді

$$P_{n-1}(x) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{y_s}{s!}(x-a)^s \tag{1.4.2}$$

Наближення функцій із заданих класів за допомогою H_0 −реалізовних функцій є однією з центральних задач теорії наближення функцій.

Розглянемо функцію $f(x)$, означену на інтервалі [a, b], яка має на ньому неперервні похідні до $(n-1)$-го порядку включно і кусково-неперервну похідну порядку n. Тобто функція $f(x)$ належить до класу $W^{(n)}(M; a, b)$ з деякою постійною M [1].

Формулу

$$f(x) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{f^{(s)}(a)}{s!}(x-a)^s + R_n(x), \tag{1.4.3}$$

де $R_n(x)$ - залишковий член, прийнято називати формулою Тейлора розкладу функції f (x) в околі точки x = a.

Відомий ряд виразів для залишкового члена в формулі Тейлора. Їх доведення зводиться до побудови деякої допоміжної функції від допоміжного аргумента, для якої можна застосувати відомі в аналізі теореми про середнє.

Наприклад, для функції

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{f^{(s)}(a+(x-a)t)}{s!}(x-a)^s(1-t)^s - R(1-t)^P, \qquad (1.4.4)$$

де p −довільне число, маємо

$$\varphi\,(0) \;=\; 0, \varphi\,(1) \;=\; 0$$

Застосовуючи теорему Лагранжа

$$\varphi\,(1) = \;\varphi\,(0) = \;\varphi'(\theta), \qquad 0 < \theta < 1$$

Одержимо

$$\frac{f^{(n)}(a+(x-a)\theta)}{(n-1)!}(x-a)^n(1-\theta)^{n-1} - R_n(x)p(1-\theta)^{p-1} = 0 \qquad (1.4.5)$$

Звідси одержуємо шуканий вираз для залишкового члена:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)(x-a)^n}{(n-1)!\,p}(1-\theta)^{n-p}, \qquad (1.4.6)$$

$$\xi = a + (x-a)\theta$$

В залежності від конкретного вибору p одержуємо залишкові члени у різних формах. Для знаходження залишкового члена функції $f(x)$ використаємо метод послідовного застосування інтегрування по частинах:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt$$

$$= \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t)|_{t=a}^{t=x}$$

$$+ \frac{1}{(n-2)!}\int_a^x (x-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t)dt = -\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

$$+ \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-2)}(t)|_{t=a}^{t=x} + \frac{1}{(n-3)!}\int_a^x (x-t)^{n-3} f^{(n-2)}(t)dt =$$

$$-\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) - \frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-2)}(a) - \cdots - f(a) + f(x)$$

Звідси дістаємо, що для всякої функції $f(x)$ класу $W^{(n)}(M; a, b)$ справедлива формула Тейлора

$$f(x) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{f^s(a)}{s!}(x-a)^s + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt \qquad (1.4.7)$$

із залишковим членом

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt$$

в інтегральній формі.

Якщо ввести функцію

$$K_{r-1}(U) = \frac{|U|^{r-2}U + |U|^{r-1}}{2}$$

то залишковий член можна записати у вигляді:

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b K_{n-1}(x-t) f^{(n)}(t)dt \qquad (1.4.8)$$

Слід зауважити, що із формули (1.4.8) можна при певних обмеженнях дістати залишковий член у формах Коші та ін. Питання про залишкові члени наближення функцій Н-реалізовними функціями розглядалось в працях Е. Я. Ремеза , Хаусхолдера та ін.

Заслуговує на увагу узагальнення формули Тейлора в формі Петерсона, алгоритм одержання якої має також самостійне значення.

Частинний випадок формули Тейлора, коли $a = 0$, прийнято називати рядом Маклорена:

$$P_{n-1}(x) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{y^{(s)}(0)}{s!} x^s.$$

В працях Мікеладзе важливе застосування знайшла формула, яку називають узагальненою формулою Маклорена. Ця формула має вигляд

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f_{(0)}^{(i)} \frac{x^i}{i!} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=0}^{n_j-1} A_{js} \frac{\left(x-x_j\right)^s}{s!} + R_n(f;x), \qquad (1.4.9)$$

де

$$A_{js} = f^{(s)}\left(x_j+0\right) - f^{(s)}\left(x_j-0\right), \quad j = \overline{1,k}, \quad s = \overline{0, n_j - 1}\,;$$

$$R_n = (f;x) = \int_0^x f^{(n)}\,(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

Формула (1.4.9) дає наближення функції $f(x)$, для якої відомі стрибки 1-го роду функції і похідних в кількох точках інтервалу $[0,x]$. Доводиться ця формула шляхом інтегрування частинами:

$$\int_0^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

$$= \int_0^{x_1} f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt + \sum_{i=1}^{k-1}\int_{x_j}^{x_j+1} f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

$$+ \int_{x_k}^{x} f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

$$= f^{(n-1)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\bigg|_0^{x_1-0} + \sum_{j=1}^{k-1} f^{(n-1)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\bigg|_{x_j+0}^{x_{j+1}-0}$$

$$+ f^{(n-1)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\bigg|_{x_k+0}^{x} + \int_0^x f^{(n-1)}(t)\frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!}dt$$

$$= -f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{j=1}^{k} A_{j_1(n-1)}\frac{\left(x-x_j\right)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$+ \int_0^x f^{(n-1)}(t)\ \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!}dt.$$

Повторно застосовуючи одержану формулу для інтегралу

$$\int_\delta^x f^{(n-1)}(t)\frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!}dt,$$

дістанемо

$$\int_0^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt = -\sum_{i=0}^{n-1} f_{(0)}^{(i)}\frac{x^i}{i!} - \sum_{i=1}^{k}\sum_{s=0}^{n-1} A_{js}\frac{\left(x-x_j\right)^s}{s!} + f(x)$$

Підставивши цю рівність в формулу (1.4.9), дістанемо тотожність

$$f(x) \equiv f(x).$$

Формула (2.9) успішно використовувалась Мікеладзе для розв'язання диференціальних рівнянь, праві частини яких мають розриви 1-роду на заданій сукупності точок x_i. Хоча ця формула і не дає розв'язання задачі, що поставлена на початку цього параграфу, але вона є безпосереднім узагальненням формули Маклорена.

Розділ 2

ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНЬ ФОРМУЛИ ТЕЙЛОРА ПРИ НАБЛИЖЕНОМУ РОЗВЯЗАННІ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1 Поняття структури

Деякі узагальнення формули Тейлора можуть бути з успіхом використані при наближенні функції із певних класів. Наближення, яке виникає при цьому, взагалі кажучи, не є рівномірним. Але, незважаючи на це, багатоточкові узагальнення формули Тейлора, а також інші її узагальнення мають ряд переваг при розв'язанні деяких прикладних задач. До цих задач відносяться, насамперед, крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь (багатоточкові крайові задачі) і систем диференціальних рівнянь в частинних похідних у випадку складних граничних умов і складної області інтегрування. Ці переваги особливо відчутні при використанні аналітичних методів розв'язання граничних задач, в яких виникає необхідність побудови структур розв'язку крайової задачі, яка б точно задовольняла задані граничні умови.

Досвід використання структур для ряду прикладних задач привів до необхідності більш широкого погляду на поняття структури.

Нижче дамо основні визначення, пов'язані з формулюванням граничної задачі та її структури, а також розглянуто ряд питань, тісно пов'язаних з труднощами, що виникають при побудові структур та їх використання. Нехай в m-вимірному просторі R^m задана деяка область $\Omega \subset R_m$, обмежена границею Γ_n , що являє собою об'єднання ряду поверхонь Γ_i: $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$, $\Gamma_i^* -$ граничні, а також внутрішні по відношенню до Ω поверхні вимірів, не більших m, та множин нескінченно віддалених точок.

Нехай u відображає область Ω на простір U $(u: \Omega \to U), f - \Omega$ на F $(f: \Omega \to F), \varphi_i - \Gamma_i$ на Φ_i $(\varphi_i: \Gamma_i \to \Phi_i)$, $\varphi_i^* - \Gamma_i^*$ на Φ_i^* $(\varphi_i^*: \Gamma_i^* \to \Phi_i^*)$, $A: U \to F$, $L_i: U \to \Phi_i$, $L_j^*: U \to \Phi_j^*$.

Нехай виконуються умови

$$Au = f \text{ в } \Omega, \tag{2.1.1}$$

$$L_i u = \varphi_i \text{ на } \Gamma_i, \quad i = \overline{1, n} \tag{2.1.2}$$

$$L_j^* u = \varphi_j^* \text{ на } \Gamma_j^*, \quad j = \overline{1, g}. \tag{2.1.3}$$

Ці умови визначають граничну задачу. Зауважимо, що оператори A, L_i, L_i^* можуть мати досить загальну природу (диференціальні, інтегральні, інтегро -диференціальні оператори тощо). В багатоточкових граничних задачах умови (2.1.3) називаються також додатковими.

Граничні задачі для областей, границя яких має кутові точки, ребра та інші особливості, а також граничні задачі з крайовими умовами, що мають різний характер на різних ділянках границі (змішані граничні задачі) потребують уважного ставлення до умов виду (2.1.2), (2.1.3). В таких задачах оператори L_i, L_i^* можуть бути не визначеними в особливих точках границі, і якщо в цьому випадку розв'язок граничної задачі не задовольняє деяких додаткових умов, то він може бути не єдиним. При розв'язанні зовнішніх граничних задач до "спеціальних" додаткових умов (2.1.3) відносять умови, які повинен задовольняти шуканий розв'язок на нескінченності (наприклад умови випромінювання в задачах дифракції).

Компоненти A, U, f, L_i, φ_i, L_i^*, φ_i^* будемо називати аналітичними компонентами граничної задачі, а Ω, Γ, Γ_i, Γ_i^* - геометричними. У випадках коли, шуканою компонентою задачі є компонента u, маємо пряму граничну задачу. У всіх останніх випадках маємо обернену граничну задачу. До обернених граничних задач можна віднести задачу про вдавлювання нахиленого штампа у пружний напівпростір. У цій задачі невідомими є u, а також лінія контакту штампу з напівпростором (тобто невідома одна з геометричних компонент) Сюди відносять також задачу обтікання тіл (невідомими знову ж таки є U і поверхні рідини, що утворюється внаслідок відриву рідини від тіла, що обтікається; зате відомі граничні умови на цій поверхні).

Нехай $P_1, P_2, \ldots P_s$ - відомі компоненти граничної задачі; $g_1, g_2, \ldots, g_r$ - невідомі компоненти; $\mathfrak{M}$ - деяка множина.

Означення 1. Формула

$$g_i = B_i(P_1, P_2, \ldots P_s, \Phi), \quad \Phi \in \mathfrak{M} \tag{2.1.4}$$

де B_j - відображення множини $\mathfrak{M}$ на множину Φ_j, визначає структуру розв'язку граничної задачі на $\mathfrak{M}$, що враховує граничну умову $L_j u = \varphi_j$, якщо вона задовольняється при підстановці в неї (2.1.4).

Означення 2. Структура називається повною на множині Φ_j, якщо існує елемент $\Phi_T \in \mathfrak{M}$, такий, що для невідомих компонент одержимо точні значення

$$g_j^T = B_j(P_1, P_2, \ldots, P_s, \Phi_T), \quad j = \overline{1, r} \tag{2.1.5}$$

Означення 3. Структура називається повною в сенсі системи метрик $\rho_j(u, v)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\Phi_\varepsilon \in \mathfrak{M}$, що

$$\rho_j\left[g_j^T, B_j(p_1, p_2, \ldots, p_s, \Phi_\varepsilon)\right] < \varepsilon, \quad j = \overline{1, r}. \tag{2.1.6}$$

Означення 4. Структура, побудована на множині $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$, називається структурою кращої якості, ніж на $\mathfrak{M}$ (якщо, звичайно, обидві структури, побудовані на множинах $\mathfrak{M}_1$ і $\mathfrak{M}_2$ повні).

Зауважимо, що кожний метод, яким користуються при розв'язанні граничної задачі, повинен зводити інформацію про аналітичні геометричні компоненти граничної задачі до одного виду. Крім того , якщо зважити на те, що якість структури тим краща, чим вужча множина $\mathfrak{M}$, то при побудові структури бажано по можливості врахувати також всю додаткову інформацію про розглядувану граничну задачу.

У випадку, коли оператори L_i та L_j є диференціальними операторами з коефіцієнтами, що залежить загалом від вигляду Γ_i та Γ_i^* приведення інформації про геометричні компоненти Ω, Γ, Γ_i, Γ_j, а також умови (2.1.2), (2.1.3) до аналітичного виду з успіхом може бути реалізована за допомогою диференціальних операторів D_k та T_k, що дають можливість продовжувати граничні умови, задані на Г, в середину області Ω, а також методу R- функцій, який дозволяє на аналітичному рівні описувати геометричні об'єкти довільної форми.

В той час як завдяки методові R- функції та деяких викладених вище міркувань питання про побудову структури на деяких множинах $\mathfrak{M}$ досить широкого класу граничних задач можна вважати у принципі розв'язаним, питання про побудову структури на досить вузьких множинах $\mathfrak{M}$ залишається у ряді випадків нерозв'язаним. Це пов'язано перш за все з труднощами одержання додаткової до (2.1.1)-(2.1.3) інформації про граничну задачу. Крім того, якщо нам навіть і відомі деякі додаткові дані про поведінку шуканого розв'язку (наприклад, поведінка в околі кутових точок тощо), то її ефективне використання при побудові структури також нелегка справа. В наступному параграфі пропонується побудова структури розв'язку багатоточкових граничних задач для систем диференціальних рівнянь з розривними правими частинами. Ця структура має ту особливість, що дозволяє не тільки точно задовольнити всі граничні умови задачі, але й врахувати поведінку шуканих функцій в особливих точках інтервалу інтегрування (точки розриву відповідних похідних тощо).

Структури, побудовані згідно з цією методикою, не тільки задовольняють всі граничні умови задачі, але, крім того, мають розриви відповідних похідних на задній сукупності ліній. Чисельні результати, одержані шляхом використання таких структур, при розв'язанні граничних задач Діріхле та Неймана для кусково-однорідних середовищ підтверджують їх значну ефективність.

Приведемо структури деяких граничних задач для областей складної форми.

1. Задача Діріхле для еліптичного рівняння другого порядку в частинних похідних:

$$\sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f, \tag{2.1.7}$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{2.1.8}$$

Структуру розв'язку цієї задачі можна вибрати у вигляді

$$U = \omega(P)\Phi(P), \tag{2.1.9}$$

де функція $\omega(P)$

$$\omega(P)|_{\Gamma} = 0$$

$$\omega(P) > 0, \qquad P \in G \tag{2.1.10}$$

$$|\nabla\omega(P)|_{\Gamma} \neq 0,$$

$\Phi(P)$- деяка неперервна функція.

Ця структура повна в значенні метрики

$$\rho(u, v) = \min_{P \in \Omega} |u(P) - v(P)| \tag{2.1.11}$$

2. Задача Неймана для рівняння (2.1.7):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial v}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{2.1.5}$$

де $v -$ нормаль до Г. Структуру розв'язку цієї задачі можна взяти у вигляді

$$u = \phi(P) - \omega(P)D \cdot \Phi(P) + \omega^2\psi(P), \tag{2.1.13}$$

де

$$\omega(P)|_{\Gamma} = 0$$

$$\omega(P) > 0, \qquad P \in G \tag{2.1.14}$$

$$\left.\frac{\partial \omega}{\partial v}\right|_{\Gamma} = 1;$$

Ф(Р) і $\psi(P)$ −деякі функції.

Розглянемо граничну задачу для рівняння Пуассона

$$\Delta U = -1 \qquad (2.1.15)$$

в області, обмеженій додатними півосями координат, і колом $1 - x^2 - y^2 = 0$ при таких граничних умовах:

$$U = 0 \text{ при } \mathrm{x} = 0, y = 0, \qquad (2.1.16),$$

$$\frac{\partial U}{\partial v} = 1 \text{ при } 1 - x^2 - y^2 = 0, \qquad (2.1.17)$$

v −внутрішня нормаль до границі.

Структурою розв'язку, що враховує умови (2.17), є, наприклад, формула

$$U = \Phi + \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2) \cdot \left(x\frac{\partial \Phi}{\partial x} + y\frac{\partial \Phi}{\partial y} + 1\right), \qquad (2.1.18)$$

а структурою, що враховує граничну умову (2.16), формула

$$U = xy\,\Phi \qquad (2.1.19)$$

де Φ – довільна неперервна в $\bar{G}$ функція.

Іншим варіантом таких структур є формули

$$U = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2) + (1 - x^2 - y^2)^2\Phi \qquad (2.1.20)$$

$$U = x^2y^2\Phi \qquad (2.1.21)$$

відповідно.

Означення 5. Загальною структурою розв'язку граничної задачі (2.1.1) – (2.1.3) на множині $\mathfrak{M}$ називається така структура (2.1.4), яка при будь-якому виборі $\Phi \in \mathfrak{M}$ задовольняє всі умови (2.1.2), (2.1.3).

Наприклад, загальною структурою розв'язку граничної задачі (2.1.15) – (2.1.17) є формула

$$U = xy\Phi_1 - \frac{x^2y^2(1 - x^2 - y^2)}{1 - (x^2 - y^2)}\left[\frac{\partial(x\Phi_1)}{\partial x} + \frac{\partial(y\Phi_1)}{\partial y} + 1\right] + x^2y^2(1 - x^2 - y^2)\Phi_2 \qquad (2.1.22)$$

де Ф = (Ф, Ф₂) — пара неперервних в $\bar{G}$ функцій. Тобто, множина $\mathfrak{M}$ є прямим добутком $C(\bar{G}) \times C(\bar{G})$, де $C(\bar{G})$ — множина функцій. неперервних в $G \cup \Gamma$. С функцій.

Слід зауважити, що при побудові структур граничних задач заданих велику увагу слід приділяти тому, щоб при задовільненні заданих умов не «нав'язати» структурі деяких додаткових умов. Наприклад, третя з умов (2.1.10), взагалі кажучи, істотна для задачі (2.1.7), (2.1.8), бо в противному разі буде виконуватись не умова (2.1.8), але й умова (2.1.12).

Структури (2.1.18), (2.1.19) є прикладами нових структур розв’язку задачі (2.1.15)-(2.1.17). Повною є, напевно, і структура (2.1.22). В той же час структури (2.1.20), (2.1.21) є неповними. Дійсно, структура (2.1.20) неповна, бо при будь-якому виборі функції $\Phi \in C(\bar{G})$ на дузі $1 - x^2 - y^2 = 0$ буде виконуватись не тільки умова (2.1.17), але й умовна $U = 0$, яку точний розв’язок не задовольняє. Аналогічні міркування відносяться і до структури (2.1.21).

На практиці умови (2.1.2), (2.1.3) часто можна подати у вигляді

$$Lu|_{\Gamma} \equiv \frac{\partial^k u}{\partial n^k} + \sum_{j=0}^{k-1} a_j \frac{\partial^j}{\partial n^j}\left(\sum_{s=1}^{k_j} b_{js} \frac{\partial^s u}{\partial \tau^s}\right) = \varphi|_{\Gamma}, \qquad (2.1.23)$$

де $(n, \tau) -$ система координат, природно пов’язаних з границею Г області G ($n -$нормаль до Г, $\tau -$дотична до Г); $a_j, b_{js}, \varphi -$ задані на Г функції.

Для того, щоб граничну умову виду (2.1.23) можна було продовжити в середину області G , при умові, що a_j, b_{js}, φ визначені всюди і достатнє число разів диференційовні в G, проводимо формальну заміну операторів $\frac{\partial^j}{\partial n^j}$ на оператори

$$D_j = \sum_{i=0}^{j} C_j^i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^i \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^{j-i} \frac{\partial^j}{\partial x^j \partial y^{j-i}}, \qquad (2.1.23')$$

а операторів $\frac{\partial^s}{\partial \tau^s}$ на оператори

$$T_s = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i C_s^i \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^i \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^{s-i} \frac{\partial^s}{\partial x^i \partial y^{s-i}}.$$

Тобто умову (2.1.23) замінимо на рівняння

$$D_k U + \sum_{j=0}^{k-1} a_i D_j \left(\sum_{s=0}^{k_j} b_{js} T_s U \right) = \varphi + \omega\psi, \qquad (2.1.25)$$

де ψ - довільна обмежена функція, яка вже має сенс всюди в G і на Г перетворюється в умову (2.1.23).

Будемо шукати функцію U у вигляді

$$U = \Phi_0 + \omega^k(P)\Phi_1, \qquad (2.1.26)$$

де Φ_0, Φ_1 – невизначені функції; $\omega\ (P)|_\Gamma = 0$; $\frac{\partial^s \omega}{\partial n^s}|_\Gamma = \delta_{s1},\ \ s = \overline{1, n}.$

Очевидно, заміна однієї невідомої функції U двома невідомими дає додаткову свободу при їх виборі.

Крім того, функція ψ в рівнянні (2.1.25) також вносить деяку невизначеність при задовільнені граничних умов. Спробуємо вибрати функцію Φ_1 , так, щоб задовольнити рівняння (2.1.25). Зауважимо, що внаслідок властивостей функції $\omega(P)$ маємо

$$D_k \omega^k = k! + 0\ (\omega),$$

$$D_j \omega^k = 0(\omega) \qquad (j < k). \qquad (2.1.27)$$

Враховуючи це і підставляючи (2.1.26) в (2.1.25), дістанемо

$$D_k \Phi_0 + \sum_{j=0}^{k-1} a_j D_{k-i} \left(\sum_{s=0}^{k_j} b_{js} T_s \Phi_0 \right) + k!\, \Phi_1 + 0(\omega) = \varphi + \omega\psi. \qquad (2.1.28)$$

Враховуючи, що $0(\omega) = \omega\psi_1$, і вводячи позначення $\psi_2 = \psi - \psi_1$, із (2.1.28) одержимо

$$\Phi_1 = -\frac{1}{k!}\left[D_k\Phi_0 + \sum_{j=0}^{k-1} a_j D_{k-j}\left(\sum_{s=0}^{k_j} b_{js} T_s \Phi_0\right) - \varphi - \omega\psi_2\right]. \qquad (2.1.29)$$

Тобто, якщо функцію U шукати у вигляді

$$U = \Phi_0 - \frac{\omega^k}{k!}\left[D_k\Phi_0 + \sum_{j=0}^{k-1} a_j D_{k-j}\left(\sum_{s=0}^{k_j} b_{js} T_s \Phi_0\right) - \varphi - \omega\psi_2\right], \qquad (2.1.30)$$

то при будь-якому виборі означених і достатнє число разів диференційовних функцій Φ_0 та Φ_2 вираз (2.1.30) буде задовольняти умову (2.1.23). Тобто формулу (2.1.30) можна розглядати як структуру, що враховує цю граничну умову.

Довільність у виборі функцій Φ_0 та ψ_2 в цій структурі може бути використана для того, щоб задовольнити інші граничні умови (якщо вони є) і диференціальне рівняння задачі.

2.2 Розв'язання багатоточкових граничних задач для систем диференціальних рівнянь з розривними правими частинами

Задача створення ефективних алгоритмів побудови розв'язків крайових задач для систем диференціальних рівнянь, праві частини яких можуть бути розривними на інтервалі інтегрування, належить до однієї з проблемних задач. Труднощі, що виникають при розв'язанні цієї задачі, пов'язані з необхідністю побудови функцій, що не тільки задовольняють граничні умови задачі, але й відповідні похідні яких мають розриви у заданих точках інтервалу інтегрування. Розв’язання цієї задачі присвячено ряд праць. Праці Ш. Є. Мікеладзе, пов'язані з використанням узагальнення формули Маклорена, дозволяють зводити вказану задачу до розв'язання інтегральних рівнянь.

Для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь з неперервними правими частинами використані сплайн-функції (H_1 −реалізовані функції) з постійною $n-$ ю похідною на кожному з інтервалів, на які розбивається інтервал інтегрування; при цьому вони належать до класу C^n, тобто сплайн-функції одержуються як окремий випадок звичайного H_1-реалізованого узагальнення полінома Ерміта.

Для розв'язання граничної задачі з правою частиною, яка має розриви 1-го роду у двох внутрішніх точках проміжку інтегрування, застосовано метод заміни її дельта-подібною функцією , що дає можливість використовувати відомі чисельні методи.

У даному параграфі на основі багатоточкових H_1 −реалізовних формул Тейлора пропонується алгоритм побудови структур розв'язків вказаних вище систем диференціальних рівнянь. Нехай задана система лінійних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами

$$\frac{dy(x)}{dx} = Ay(x) + B, \tag{2.2.1}$$

$$y = \begin{Bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_k(x) \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_k(x) \end{Bmatrix},$$

$$A = \{a_{ij}(x)\}_{ij=\overline{1,k}}$$

при таких граничних умовах:

$$\sum_{i=1} \beta_{ij}(C_\mu)y_i(C_\mu) = \gamma_j, \quad \mu \in \{1,2,\dots,v\}, j = \overline{1,k.} \tag{2.2.2}$$

Точки C_i (i = $\overline{1,\text{v}}$) належать до інтервалу інтегрування $[C_1, C_\text{v}]$, β_{ij} (x) — відомі коефіцієнти. Якщо v > 2, то для такої v-точкової граничної задачі умови, що задаються в граничних точках C_1 та C_v називаються граничними, а умови, які задаються в середніх точках інтервалу інтегрування $C_2, C_3, \dots, C_{v-1}$ називаються додатковими.

Нехай далі коефіцієнти a_{ij}(x) та b_i(x) задовольняють такі умови:

$$a_{ij}(x) \in C^{g_i - i}[C_1, C_v], \;\; j = \overline{1,k}, \;\; b_i(x) \epsilon C^{g_i - 1}[C_i, C_r], \;\; g_i \geq 0$$

H - задана базова система функцій

$$\alpha_{ij}(x) \in \mathfrak{M}_{[\delta_r, \delta_{r+1}]}(H), r = \overline{1, v_1 - 1} \tag{2.2.3}$$

Умовимось вважати $C^{-1}[C_1, C_v]$ класом розривних на $[C_1, C_v]$ функцій.

Причому знайдеться хоча б одне таке j таке, що будуть виконуватись співвідношення

$$\alpha_{ij}^{(g_i+1)}(\delta_r + 0) - \alpha_{ij}^{(g_i+1)}(\delta_r - 0) = \gamma_{ir} \neq 0$$

$$b_i^{(g_i-1)}(\delta_r + 0) - b_i^{(g_i+1)}(\delta_r - 0) = \gamma_{i,v_1+1} \qquad (2.2.4)$$

де $\delta_1, \delta_{2,} \dots, \delta_v$ – задана сукупність точок, належних до проміжку інтегрування.

Із умов (2.2.3), (2.2.4) безпосередньо випливає, що $y_i(x)$ є функціями, $\widetilde{H}$ – реалізовними на інтервалі $[C_1, C_v]$. У звязку з цим при побудові структури розв’язку задачі бажано задовольними не тільки умови (2.2.2), але й умови (2.2.4).

Будемо шукати структуру розвязку поставленої задачі у вигляді H_1-реалізовного многочлена

$$y_i(x) = \sum_{r=1}^{v_i} P_{ri}\,(x) \cdot |x - \delta_r| + P_{0i}^{(x)}, \qquad i = \overline{1, k} \qquad (2.2.5)$$

де поліноми $P_{ri}(x)$ степеня $\beta_{ri} \geq g_i$ задовольняють умови

$$P_{ri}^{(s)}(\delta_r) = 0, \qquad S = \overline{0, g_\iota} \qquad (2.2.6)$$

а функції $y_i(x)$ задовольняють умови (2.2.2).

Побудова функцій $P_{ri}(x)$ проводитиметься згідно формули

$$P_{ri}(x) = \frac{E_{r+1,i}(x) - E_{r,i}(x)}{2(x - \delta_r)}, \qquad P_{oi} = \frac{E_{0,i} + E_{v,i}}{2} \qquad (2.2.7)$$

де $E_{r,i}(x)$ -інтерполяційний многочлена Ерміта на проміжку $[\delta_r, \delta_{r+1}]$, що здовольняє в точках $\delta_r \leq c_\mu \leq \delta_{r+1}$ відповідні умови (2.2.2) і в точках δ_r та δ_{r+1} співпадає разом із своїми похідними із значеннями поліномів $E_{r-1}(x)$ і $E_{r+1}(x)$ та їх відповідних похідних у цих точках до порядків $g_{r,i}$ та $g_{r+1,i}$.

Формули для $y_i(x)$ (2.2.5) суттєво спрощуються, якщо точки C_i співпадають з точками δ_i, і умови (2.2.2) мають вигляд

$$y_i(\delta_\mu) = y_{i\mu}$$

Таким чином, структура розвязків багатоточкової граничної задачі (2.2.1), (2.2.2) подана у формі (2.2.5), буде задовольняти тільки умови задачі (2.2.1), (2.2.2), але й додаткові умови

$$\frac{d^{g_i} y_i(\delta_r + 0)}{dx^{g_i}} - \frac{d^{g_i} y_i(\delta_r - 0)}{dx^{g_i}} \neq 0$$

Отже, вибрана структура буде мати, крім того, ще й довільне число невідомих параметрів. Ці довільні коефіцієнти визначаються із умови найкращого задовільнення системи (2.2.1). Для цього можна використати, наприклад, метод найменших квадратів.

Тобто невідомі коефіцієнти в структурі розв'язку задачі (2.2.1), (2.2.2) будемо шукати, виходячи із умови мінімуму функціоналу

$$J = \sum_{i=1}^{k} \int_{c_1}^{c_v} k_i^2(x) \left[\frac{dy_i(x)}{dx} - \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(x) y_j(x) - b_i(x) \right]^2 dx$$

де $k_i^2(x)$-деякі вагові функції

Якщо в (2.2.9) замість $y_i(x)$ підставити вирази (2.2.5) , то для знаходження невідомих коефіцієнтів $a_i(i = \overline{1, N})$дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial J(a_1, \dots, a_N)}{\partial a_j} = 0, j = \overline{1, N} \qquad (2.2.10)$$

Слід зауважити, що матриця системи (2.2.10) є блочно-діагональною, а методика подання розв'язків багатоточкових граничних задач за допомогою H_1-реалізовних функцій ефективна не тільки випадку систем з розривними правими частинами.

Якщо ж для розв'язання системи (2.2.1), (2.2.2) ми використаємо метод Рітца, то при запропонованій методиці побудови структури одержимо варіаційно-різницевий метод розв'язання граничних задач. Наприклад, для системи рівнянь другого порядку

$$-\frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{dy}{dx}\right) + Q(x)y = f(x) \qquad (2.2.11)$$

$$y(C_1) = y(C_v) = 0$$

$$P(x) = \left\| P_{jk}(x) \right\|_{j,k=1}^{j,k=s}; \qquad Q(x) = \| g_{ik}(x) \|_{j,k=1}^{j,k=s}$$

$$y = \left(y_1(x), \dots, y_s(x)\right), f = \left(f_1(x), \dots, f_s(x)\right) \qquad (2.2.12)$$

Якщо матриці $P(x)$ і $Q(x)$ симетричні, причому на сегменті $[C_1, C_v]$ матриця $P(x)$ додатно визначена, а матриця Q – невід’ємна, то задача (2.2.11), (2.2.12) рівносильна до задачі про мінімуму функціоналу

$$J = \int_{C_1}^{C_v} \left\{ \sum_{j,k=1}^{s} \left[P_{jk} \cdot \frac{dy_j}{dx} \cdot \frac{dy_k}{dx} + g_{jk} y_j y_k \right] - 2 \sum_{k=1}^{s} f_k y_k \right\} dx$$

Тому, підставляючи в (2.2.5) формулу (2.2.13), одержимо систему співвідношень варіаційно-різницевого методу. Наприклад, якщо $s = 1, p = 1$

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x), \qquad 0 < x < 1 \qquad (2.2.14)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

$$y_n(x) = \sum_{k=o}^{n} a_k \left| x - \frac{n-k}{n} \right| \qquad (2.2.15)$$

то дістаємо систему, використану для цього прикладу С. Г, Міхліним. Зауважимо, що таким чином одержуємо звичайну різницеву систему

$$-\frac{y(x_j-1)-2y(x_j)+y(x_j+1)}{h^2}=f(x), \qquad j=1,2,\ldots,n \tag{2.2.16}$$

Слід зауважити, що у випадку досить гладких розв'язків багатоточкової задачі структуру їх можна брати у вигляді звичайних поліномів Ерміта, або H_0-реалізовних узагальнень формули Тейлора. Правда, в цьому випадку формули для знаходження коефіцієнтів будуть, взагалі кажучи, більш громіздкі.

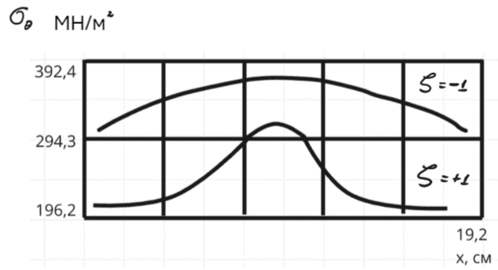
Приклад. Розглянемо симетричну деформацію циліндричної оболонки середньої товщини в системі ортогональних криволінійних координат x, θ, z . Додатний напрямок координати z співпадає із напрямком зовнішньої нормалі. Товщина оболонки h, радіус серединної поверхні R. Сили, що діють на оболонку, симетричні відносно осі. Тому напружений стан оболонки також буде симетричним по відношенню до вісі циліндра. Він характеризується компонентами напружень σ_x (вздовж меридіана), σ_x (в окружному напрямку), σ_x (в напрямку нормалі), τ_{xz} (дотичне напруження). Оболонка знаходиться в умовах стаціонарного температурного поля.

Наближена теорія циліндричних оболонок середньої товщини з кінцевими розмірами будувалась на основі застосування «напівоберненого» методу Сен-Венана розв'язання задач теорії пружності з використанням представлень величин у вигляді розкладу за поліномами Лежандра. Задача звелась до розв'язання послідовності двоточкових граничних задач для системи чотирьох диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами $\beta_1(x)$ та $\beta_4(x)$, що залежать від навантаження на оболонку:

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dx}=\alpha_{12}M_x+\alpha_{13}W_0+\beta_1(x) \\ \dfrac{dM_x}{dx}=\alpha_{21}Q \\ \dfrac{dW_0}{dx}=\alpha_{31}Q+\alpha_{34}\varphi \\ \dfrac{d\varphi}{dx}=\alpha_{42}M_x+\alpha_{43}W_0+\beta_4(x) \end{cases} \tag{2.2.17}$$

з граничними умовами

$$Q(x) = M_x(x) = 0 \qquad \text{при } x = 0, l \tag{2.2.18}$$



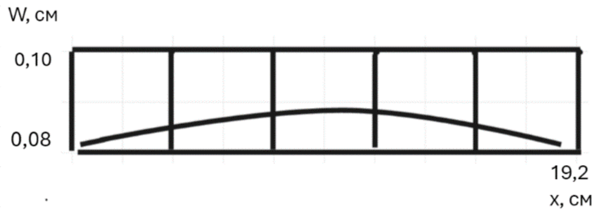


Рис. 1 Рис. 2

Наближений розв'язок цієї системи знаходився у вигляді (2.2.5). Для прикладу візьмемо циліндр, що обертається із кутовою швидкістю $n = 14000\ \ 1/\text{хв}$, на зовнішній поверхні якого задано ступінчате навантаження при температурі $t = 550^o C$($\propto_{12}= -0{,}10827$; $\propto_{13}= 1{,}18684$; $\propto_{21}= 5{,}5714$; $\propto_{31}= 3{,}3389$; $\propto_{34}= -1{,}0000$; $\propto_{42}= 2{,}0067$; $\propto_{43}= 0{,}60322$; $\beta_1 = -1{,}2070$; $P_2(x) - 15301$; $\beta_4 = -0{,}43889$; $P_2(x) - 7482{,}9$).

В таблиці наведено значення коефіцієнтів C_{ij} для цього випадку.

На рис. 3 приведено розподілення окружних напружень G_θ на зовнішній ($\zeta = 1$) і внутрішній ($\zeta = -1$) поверхнях циліндричної оболонки, а на рис. 2 радіальних зміщень серединної поверхні W_0.

Розрахунок циліндра середньої товщини з постійним навантаженням: $g = 98{,}1\frac{\text{мн}}{\text{м}^2}; n = 6000\frac{\text{об}}{\text{хв}}$ ($r_3 = 5$ см); $r_{\text{вн}} = 3{,}5$; $t^o = 550^o$; $\alpha_{12} = -0{,}03144$; $\alpha_{13} = 1{,}0197$; $\alpha_{21} = 17{,}000$; $\alpha_{31} = 3{,}2064$; $\alpha_{34} = -1$; $\alpha_{42} = 5{,}1413$; $\alpha = 0{,}53449$; $\beta_1 = -15702$; $\beta_4 = -838{,}1$.

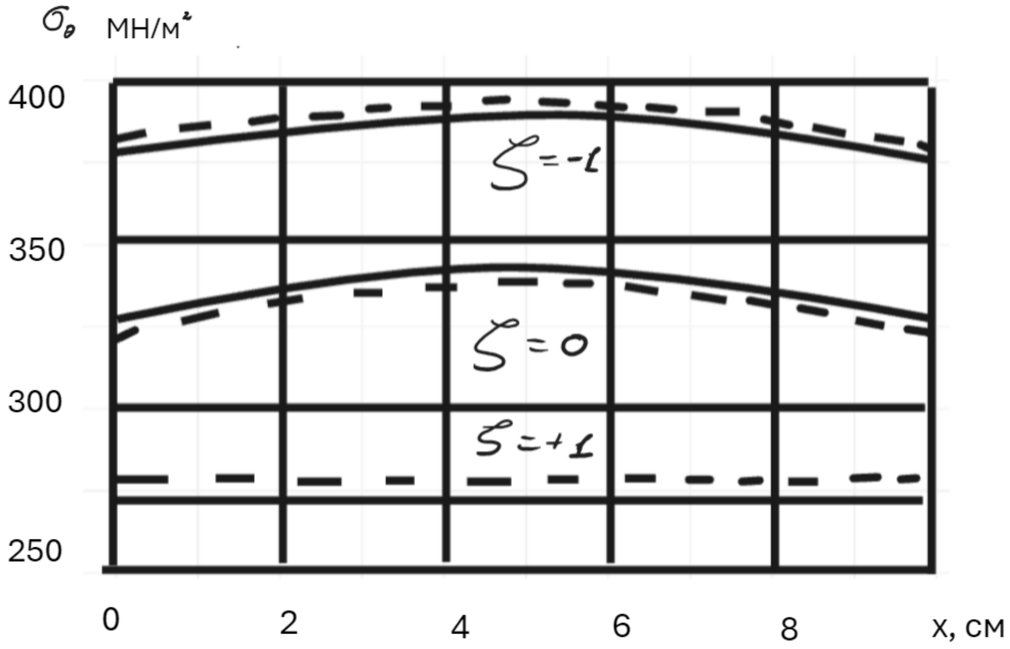


Рис. 3

j\i	1	2	3	4
1	0	+56,609	-115,97	+92,961
2	0	19,937	-36,732	-74,446
3	12978	13253	13253	13319
4	-543,46	-281,12	-294,17	-86,347
j\i	5	6	7	8
1	-111,38	+158,29	-91,737	0
2	-90,504	-26,585	+53,428	0
3	13409	13455	13406	12963
4	-162,42	+223,67	+147,21	+600,08

Таб. 3

Одержані результати порівнювались з відповідними результатами, знайденими за допомогою звичайного відшукування розв'язків у вигляді степеневих рядів. В таблиці 4 наведено значення коефіцієнтів C_{ij}.

На рис. 3 показано розподіл окружних напружень σ_θ на зовнішній $(\zeta = 1)$, серединній $(\zeta = 0)$ і внутрішній $(\zeta = -1)$ поверхнях. Суцільною лінією позначено розв'язок, одержаний запропонованим методом, пунктирною - методом «степеневих рядів».

j\i	1	2	3	4
1	0	-3,1625	-1,4826	-0,36589
2	0	-17,522	-30,465	-35,092
3	15379	15391	15395	15396
4	-64,056	-25,491	-7,4140	-1,4079
j\i	5	6	7	8
1	+0,36589	+1,4826	+3,1625	0
2	-35,092	-30,465	-17,522	0
3	15396	15395	15391	15379
4	+1,4079	+7,4140	+25,491	+64,056

Таб. 4

2.3 Варіаційно-різницевий метод для граничних задач з частинними похідними.

Попередній параграф був присвячений питанням побудови структур розв'язків багатоточкових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Із означення структури випливає, що вона може залежати від однієї або кількох довільних функцій, які використовуються для кращого задовільнення диференціального рівняння або їх системи. Для знаходження цих функцій за допомогою варіаційних методів звичайно подають їх у вигляді

$$\Phi_n(P) = \sum_{j=1}^{n} C_j \varphi_{\mathrm{j}}(P), \tag{2.3.1}$$

а невідомі постійні $C_j(j = \overline{1, n})$ знаходяться із умови мінімуму відповідного функціоналу.

В останні роки значного поширення набули варіаційно-різницеві методи, тісно пов'язані з методом скінченних елементів. Аналіз досліджень, присвячених варіаційно-різницевому методу, показує, що:

а) задовільнення граничних умов у цьому методі проводиться загалом наближено - в дискретній сукупності точок, що умовно вважаються за границю області інтегрування;

б) при побудові варіаційно-різницевих схем в основному використовується розбиття на криволінійні трикутники та чотирикутники; загальної методики їх побудови при розбитті області інтегрування на довільні підобласті немає.

Якщо вираз (2.3.1) забезпечує представлення функції $\Phi_n(P)$ у вигляді кусково-Н-реалізовних функцій, то одержана таким чином структура буде давати для знаходження невідомих коефіцієнтів блочно-діагональну систему алгебраїчних рівнянь. Слід зауважити, що у цьому випадку досягається повне задовільнення граничних умов (тобто в кожній точці границі), на відміну від варіаційно-різницевого методу, який задовольняє граничні умови тільки на деякій сукупності дискретних точок, які приймаються за границю.

Нижче пропонується загальний метод побудови варіаційно-різницевих схем, які задовольняють граничні умови на всій границі області Г, а не на її дискретному аналогові. Цей метод оснований на використанні кусково-Н-реалізовних наближень функцій

Нехай область G розбита на області $G_i(1 = \overline{1, P})$ так, що

$$\bigcup_i G_i \supset G.$$

Означення. Будь-яку функцію, що є Н-реалізовною в кожній із областей G_i, будемо називати кусково-Н-реалізовною.

При розв'язанні прикладних задач особливо цікавим є випадок, коли кусково-Н-реалізовна функція належить до класу $C^n(\bar{G})$ (n- деяке натуральне число).

Будемо розглядати такі покриття області G областями G_i, в яких кожна точка P області G_i є внутрішньою точкою хоча б для однієї з областей G_i і виконується (2.32). Нехай $\{G_i\}$ таке покриття. Нехай також кожна із областей G_i, обмежених гладкою границею Γ_i, визначається нерівністю

$$\omega_i(P) \geq 0, \qquad i = \overline{1,p}, \tag{2.3.2}$$

де $\omega_i(P) \in C^{n'}(\overline{G_i})$ $(n' > n)$

Нехай функція $h_i(P)$ задовольняє умови

$$\begin{cases} h_i(P) \in C^n(G), \\ \infty > h_i(P) > 0, \quad P \in G_i, \\ h_i(P) \equiv 0, \quad P \in \overline{G_i} \\ h_i(P) \in \mathfrak{M}_{G_i}(H') \end{cases}$$

H' −деяка базова система функцій і виконується тотожність

$$\sum_{i=1}^{p} h_i(Q) \equiv 1, \quad Q \in G. \tag{2.3.4}$$

Якщо ця тотожність не виконується, то можна ввести до розгляду функції

$$h_i^*(Q) = \frac{h_i(Q)}{\sum_{j=1}^{p} h_j(Q)}, \qquad i = \overline{1,p} \tag{2.3.5}$$

Будемо розглядати функції

$$h_i(P)Q_i(P) \in \mathfrak{M}_{G_i}(H),$$

де

$$Q_i(P) \in \mathfrak{M}_{G_i}(H''); \qquad H = H' \cup H''.$$

Очевидно, що якщо $H \supset H_0, \;\; H_0 = \{x + y, \; xy, \; (-\infty, \infty)\}$, то

$$\sum_{i=1}^{p} h_i(P)Q_i(P) \in \mathfrak{M}_{gi}(H), \tag{2.3.5}$$

де g_i −частинні області, що одержуються в результаті всіх можливих перетинів областей G_i.

Крім того, якщо $Q_i(P) \in C^n(\bar{G})$, то сума (2.3.5) є в G кусково-Н-реалізовною функцією, належною до класу $C^n(\bar{G})$.

Нехай функції $h_i(P)$, крім умов (2.3.3), задовольняють також умови

$$h_i(P) = 1, P \in G_i^*, \qquad G_i^* \subset G_i \tag{2.3.6}$$

причому G_i^* не мають спільних точок з границею Γ_i області G_i.

Нехай в кожній із областей G_i якимсь чином введена місцева система координат, для якої система функцій

$$\{\varphi_{si}(P)\}, \qquad s = 0,1,2,\ldots \tag{2.3.7}$$

утворює повну ортогональну систему. Тоді функції

$$F_n(P) = \sum_{i=1}^{p} h_i(P) \sum_{s=0}^{n} C_{si}\varphi_{si}(P), \qquad n = 0,1,\ldots \tag{2.3.8}$$

де C_{si}- деякі постійні, утворюють множину ортогональних функцій на областях g_i^*, що одержуються при перетині областей G_i^*. Внаслідок цього при відповідному виборі областей G_i^* можна добитись того, щоб система $\{F_i(P)\}$ була «близькою до ортогональної», тобто

$$\int_G F_n(P)F_k(P)dP = \varepsilon_{n,k} \tag{2.3.9}$$

з досить малими числами $\varepsilon_{n,k}$. В той самий час система функцій $\{F_n(P)\}$, очевидно, повна в класі $C^n(G)$. А якщо узагальнені поліноми $\sum_{s=0}^{n} C_{si}\varphi_{si}(P)$ є відрізком рядів Тейлора розкладу деякої функції $f(P) \in C^n(G)$ в околі точки $P_i \in g_i^*$, то функції

$$F_n(P) = \sum_{i=1}^{p} h_i(P) \sum_{s=0}^{n} \frac{d^2 f(P;P_i)}{s!} \qquad (2.3.10)$$

будуть зберігати властивість багатоточкової формули Тейлора:

$$\frac{\partial^s F_n(P_i)}{\partial^{s_1} x_1 \dots \partial x^s m} = \frac{\partial^s f(P_i)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_m^{s_m}}, \quad \sum_{j=1}^{m} s_j = s\,, \quad s = 0,1,\dots,n. \qquad (2.3.11)$$

Таким чином, функції

$$\propto_n (P) = \sum_{i=1}^{p} h_i(P) \sum_{s=0}^{n} C_{si}\varphi_{si}(P) \qquad (2.3.12)$$

належать до класу кусково-Н-реалізовних функцій неперервними в G $n-$ми частинними похідними, причому вигляді (2.3.12) можуть бути одержані як багатоточкові формули Тейлора, так і «близькі до ортогональних» функції.

На особливу увагу заслуговує випадок, коли функції $Q_i(P)$ подані у вигляді

$$Q_i(P) = \sum_{s=0}^{n} C_{si}\varphi_{si}(P),$$

де $\{\varphi_{si}(P)\}$ - повна послідовність функцій в G_i^*, що є розв'язками відповідного диференціального рівняння граничної задачі.

У цьому випадку, як неважко побачити, функції

$$L_n(P) = \sum_{i=1}^{p} h_i(P) \sum_{s=0}^{n} C_{si}\varphi_{si}(P)$$

будуть точно задовольняти задане диференціальне рівняння граничної задачі в кожній із областей G_i^*. При такому виборі функцій $L_n(P)$ варіаційно-різницеву схему можна спростити за рахунок того, що із області G_1, по якій треба проводити мінімізацію функціоналу Рітца, автоматично виключаються підобласті G_n^*, бо на них функціонал дорівнює нулю. Цей підхід має перспективу ще й у тому розумінні, що не впливає на можливість точного задовільнення всіх граничних умов задачі, з одного боку, і зменшує, взагалі кажучи, витрати сил при інтегруванні, з другого.

Побудова функцій $h_i(P)$, що задовольняють умови (2.3.3), (2.3.4), (2.3.6), легко виконується за допомогою функції

$$\eta(x)=\frac{1}{2}\left[g_n(x)\frac{|x|}{x}+\left(1-g_n(x)\right)\frac{|x-1|}{x-1}+1\right]. \tag{2.3.13}$$

Тобто, вважаючи, що

$$\eta(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ g_n(x), & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1\le x\end{cases} \tag{2.3.14}$$

маємо

$$h_i(P)=\eta\left(\frac{\omega_i(P)}{\varepsilon_i}\right)=\begin{cases}0, & \omega(P)\le 0,\\ g_n\left(\frac{\omega_i(P)}{\varepsilon_i}\right), & 0\le\omega_i(P)\le\varepsilon_i,\\ 1, & \varepsilon_i\le\omega_i(P)<\infty.\end{cases} \tag{2.3.15}$$

У випадку, коли $\varepsilon_i=\max\omega_i(P)=\omega_i(P_i),\ P_i\in G_i$, причому із (2.3.15) дістаємо такі властивості для $h_i(P)$:

$$h_i(P)=\begin{cases}0, & P\,\overline{\in}\,G_i\\ g_n\left(\frac{\omega_i(P)}{\varepsilon_i}\right), & 0\le\omega_i(P)\le\varepsilon_i,\\ 1, & P=P_i\end{cases}$$

Крім того,

$$\frac{\partial^s h_i(P_i)}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_m^{s_m}}=0,\quad s=0,1,\dots,n \tag{2.3.16}$$

Тобто при такому виборі функції $h_i(P)$ площадка, на якій $h_i(P)$ дорівнює одиниці, перетворюється в одну точку P_i.

Випадок, коли випуклі області G_i , обмежені кусково-гладкими границями $\gamma_j\left(j = \overline{1,k}\right)$ з рівняннями $f_{ji}(P) \geq 0$, зводиться до побудови функцій $h_i(P)$ у вигляді

$$h_i(P) = \prod_{j=1}^{k_i} \eta\left(\frac{f_{ji}(P)}{\varepsilon_{ji}}\right) \quad \text{при деяких } \varepsilon_{ji} \tag{2.3.17}$$

Формула (2.61) за рахунок відповідного вибору функцій

$$Q_{in}(P) = \sum_{s}^{n} C_{is}\varphi_{si}(P)$$

відносно і, для яких через область G_i, проходить частина границі Г області G, має точно задовольняти граничні умови на Г (а не тільки на деякій дискретній сукупності точок, що вважаються за аналог Г відомих варіаційно-різницевих схемах).

ВИСНОВКИ

Формула Тейлора є невід'ємною складовою сучасної математики, що дозволяє ефективно вирішувати задачі моделювання та обчислень у різних сферах науки та техніки. Формула Тейлора є потужним інструментом для наближення функцій за допомогою многочленів, що дозволяє ефективніше аналізувати їх поведінку поблизу визначеної точки. Чим більше членів ряду Тейлора враховано, тим точніше апроксимація. Однак точність також залежить від радіуса збіжності ряду. Формула Тейлора знаходить широке застосування в чисельному аналізі, фізиці, економіці та інженерії для розв'язання задач, де точні обчислення ускладнені. Зокрема, її використовують у моделюванні руху, прогнозуванні економічних процесів та розробці алгоритмів для обчислень.

Завдяки використанню многочленів Тейлора складні функції можна перетворити на простіші, що значно полегшує інтегрування, диференціювання та інші математичні операції.

Для коректного застосування формули Тейлора потрібно враховувати умови збіжності та враховувати похибку, яка зростає зі збільшенням відстані від точки розкладу.

Отже, в даній магістерській роботі викладені основні поняття і принципи застосування формули Тейлора. У першому розділі розглянуто поняття суперпозиції, Н-реалізовного креслення, R-функції, класичну формулу Тейлора і її узагальнення.

У другому розділі розглянуто основні застосування формули Тейлора, розв'язання багатоточкових граничних задач для диференціальних рівнянь з розривними правими частинами і варіаційно-різницевий метод для граничних задач з частинними похідними

СПИСОК ВИКОРИСТОНИХ ДЖЕРЕЛ

1.Анікеєнко, О.М., Литвин, О.М., Рвачов, В.Л., Сафонов, М.О. Про формулу розкладу в околі кута. ДАН, 1972.

2. Браун, Дж., Чьорчілл, Р. Комплексний аналіз та його застосування. McGraw-Hill Education, 2014.
3. Cowling, V.F. On a class of Taylor series. Bull. Am. Math. Soc., 1947.
4. Frame, J.S. Math. Monthly. April, 1945.
5. Крейзіг, Е. Вища математика для інженерів та науковців (Advanced Engineering Mathematics). 10-те вид. John Wiley & Sons, 2011.
6. Литвин, О.М., Рвачов, В.Л. Про двоточкову формулу Тейлора. ДАН, 1967.
7. Литвин, О.М. Про залишковий член у формулі В.Л. Рвачова. ДАН, 1970.
8. Ракова, Л.В., Рвачов, В.Л. Власні коливання пластин складної форми. ДАН, 1970.
9. Рвачов, В.Л., Учішвілі, Л.А. Розрахунок вільно опертих пластинок методом R-функцій. ДАН, 1968.
10. Ремез, Є.Я. Про функціонали, що анулюються на заданій множині узагальнених многочленів. Збірник праць Інституту математики, 1939.
11. Стюарт, Дж. Calculus: Early Transcendentals. 8-ме вид. Cengage Learning, 2015.
12. Тополянський, Д.Б. Про один вибір координатних функцій у прямих методах знаходження власних чисел та власних функцій. ДАН, 1966.
13. Шенк, Дж. Чисельний аналіз (Introduction to Numerical Analysis). 3-тє вид. Springer, 2010.
14. Шкіль, М.І., Колесник, Т.В., Котлова, В.М. Вища математика. Київ: Либідь, 2010.

Анотація

Мельничук Д. А. Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування. *Магістерська робота*. Луцьк. 2024. 62с.

Висвітлено поняття Н-реалізованої функції, R-функцій, повноти засобів аналітичної геометрії, питання побудови структур розв’язків багатоточкових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Наведено класичну формулу Тейлора, основні застосування формули Тейлора.

Отримані результати можуть знайти застосування при подальшому дослідженні формули Тейлора.

Магістерська робота містить 62 сторінки, список використаної літератури налічує 14 джерел.

Ключові слова: суперпозиція, Н-реалізовне креслення, R-функція, класична формула Тейлора.

Annotation

Melnychuk D. A. Classic Taylor Formula, its Generalizations and Applications. *Master's Thesis*. Lutsk, 2024. 62p.

The concept of an H-realized function, R-functions are highlighted, completeness of the means of analytic geometry are presented, the concept and the construction of solution structures for multipoint problems for ordinary differential equations is discussed. The classical Taylor formula is provided and main applications of the Taylor formula are presented.

Obtained results can be applied in further research on the Taylor formula.

The master's thesis contains 62 pages, with a list of references including 14 sources.

Keywords: superposition, H-realized drawing, R-function, classical Taylor formula.

Додатки

Біографічні відомості про вчених – авторів основних результатів роботи

Брук Тейлор

Брук Тейлор (Brook Taylor, 1685–1731) — англійський математик, який зробив вагомий внесок у розвиток аналізу та диференціального числення. Народився 18 серпня 1685 року в Едмонтоні, поблизу Лондона, у заможній родині.

Отримав освіту в Сент-Джонс-коледжі Кембриджського університету, де захопився математикою та філософією. У 1708 році Тейлор вперше опублікував свої роботи з математичного аналізу, а у 1715 році представив своє головне відкриття — формулу Тейлора, яка стала одним із фундаментальних інструментів у математичному аналізі.

Формула Тейлора дозволяє розкладати функції у степеневий ряд, що знаходить застосування у фізиці, інженерії та багатьох інших науках. Хоча його сучасники не одразу оцінили відкриття, згодом ця формула стала основою для подальшого розвитку математики.

Крім математики, Тейлор цікавився мистецтвом, музикою та філософією. Він був членом Королівського товариства (з 1712 року) і працював над вирішенням проблем механіки та гідростатики. Помер 29 грудня 1731 року у Лондоні. Його наукова спадщина значною мірою вплинула на розвиток сучасної науки.

Георг Франц Лоренц Діріхле

Георг Франц Лоренц Діріхле (German: Georg Franz Lorenz Dirichlet) був німецьким математиком, відомим своїми внесками в теорію чисел, функціональну аналіз та математичну фізику. Він народився 13 лютого 1805 року в Дюссельдорфі, Німеччина, і помер 5 июля 1859 року в Берліні.

Діріхле отримав освіту в Гейдельберзькому університеті, де вивчав математику та фізику. Він був відомий своїми роботами над теорією чисел, зокрема розв'язком проблеми Діріхле, яка стосується розподілу простих чисел. Він також розробив теорію Діріхле, яка використовується в математичному аналізі.

Діріхле працював в університетах Гейдельберга та Берліна, де він викладав і проводив дослідження. Він був близьким другом і співпрацівником з іншими відомими математиками, такими як Карл Вейерштрасс і Петер Густав Лежен-Діріхле.

Його внесок у математику залишається важливим і сьогодні, і його роботи продовжують впливати на сучасні дослідження в цій галузі.

Колін Маклорен

Колін Маклорен (1698–1746) — шотландський математик, відомий своїм внеском у розвиток математичного аналізу. Народився в Кілмодану, Шотландія, і вивчав математику в Університеті Глазго, який закінчив у віці лише 14 років. Пізніше він став професором математики в Університеті Абердина, а згодом в Единбурзькому університеті.

Маклорен спеціалізувався на теорії чисел, диференціальному й інтегральному численні, геометрії та фізиці. Його ім'я увічнене в ряді Маклорена, особливому випадку розкладу Тейлора для функцій, де точка розкладу дорівнює нулю.

Колін також працював над проблемами гравітації, стійкості небесних тіл і формою Землі. Окрім математичних досліджень, він брав участь у розробці оборонних споруд під час якобітського повстання 1745 року. Помер у віці 48 років через хворобу, що загострилася після важкого періоду евакуаці