МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

кафедра теорії функцій та методики навчання математики

На правах рукопису

Жук Владислав Васильович

Формування математичних компетентностей при вивченні ірраціональних рівнянь та нерівностей у закладах загальної середньої освіти

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)
Освітньо-професійна програма: Середня освіта. Математика
Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:
Конет Іван Михайлович
Доктор фізико-математичних наук, професор

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ
Протокол № ___________
Засідання кафедри теорії функцій
та методики навчання математики
від _______________ 20__ р.
Завідувач кафедри
Гембарська С.Б._______

Луцьк 2024

Зміст

Вступ

Сучасні освітні реформи передбачають введення нових підходів до навчання математики у закладах загальної середньої освіти. Математика займає особливе місце серед усіх наук. Вивчення її основ закладається у шкільному курсі. Без математики не може обійтися жодна із наук, жодна галузь людської діяльності і, до того ж, застосування математики повсякчас розширюється. Тепер математичні методи все більше проникають у хімію, біологію, медицину, історію, лінгвістику та інші науки. Тому, нині учням потрібно здобути у школі міцні та ґрунтовні знання, вміння та навички з математики для їх практичного використання у подальшій практичній діяльності.

Однією із фундаментальних тем, що вивчається у шкільному курсі математики є рівняння і нерівності. Вони пронизують весь курс математики у загальноосвітніх навчальних закладах. Найпростіші з них учні розв'язують ще у початкових класах. В основній і старшій школі вивчаються нові, складніші види рівнянь і нерівностей, а саме: лінійні рівняння, лінійні рівняння з двома змінними, рівняння з модулями (7 кл.), квадратні рівняння (8 кл.), рівняння з двома змінними другого степеня (9 кл.), тригонометричні рівняння, ірраціональні рівняння (10 кл.), логарифмічні рівняння, показникові рівняння (11 кл.); лінійні нерівності, квадратичні нерівності (9 кл.), тригонометричні, ірраціональні (10кл.), показникові та логарифмічні нерівності (11 кл.)[23]

Актуальність обраної теми пояснюється тим, що на сучасному етапі суспільного розвитку поняття «ірраціональність» витлумачується по різному і має широке застосування. Цей термін уперше був досліджений у філософському вченні саме при вивченні мислення як прерогативи людського існування. Знання основних теоретичних положень та вміння застосовувати їх при розв'язанні різних типів ірраціональних рівнянь та нерівностей дасть змогу учням аналізувати використаний метод та сприятиме уникненню помилок при розв‘язуванні, формуванню раціональних прийомів розумової праці.

Мета дослідження полягає в тому, щоб подати методичні рекомендації щодо розв’язування ірраціональних рівнянь і нерівностей у шкільному курсі математики, застосовуючи різні прийоми та засоби навчання, як традиційні, так й інноваційні.

При цьому, варто особливо звернути увагу учнів на можливість втрати та появи сторонніх коренів, появу модулів при застосуванні тотожності $\sqrt{(f(x))^2} = |f(x)|$; навчити виконувати перевірку, так як піднесення обох частин рівняння до степеня може привести до появи сторонніх коренів; на доцільність знаходження ОДЗ перед розв’язанням ірраціонального рівняння, оскільки значення невідомого, що не належать ОДЗ, завжди сторонні для даного рівняння, і їх можна відкинути без виконання перевірки.

Необхідно розглянути особливості розв’язування ірраціональних нерівностей виду: $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ та $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$

Учні, які не завжди знають особливості розв’язування ірраціональних рівнянь і нерівностей, не можуть їх правильно розв’язати, допускають помилки.

У магістерській роботі розглядаються різні методи розв’язання ірраціональних рівнянь і нерівностей та систем, їх особливості.

Для виконання магістерського дослідження були визначені **завдання:**

- опрацювати науково-методичну літературу з обраної теми;
- проаналізувати сучасні методичні підходи до вивчення ірраціональних рівнянь та нерівностей у шкільному курсі алгебри;
- підібрати методичний матеріал для найефективнішого вивчення даної теми;

- вибрати найраціональніші способи введення нових понять на перших уроках;
- підібрати приклади для ілюстрації основних методів розв’язання ірраціональних рівнянь і нерівностей;
- розробити методичні рекомендації щодо використання інноваційних технологій при вивченні ірраціональних рівнянь і нерівностей у шкільному курсі алгебри.

Об'єктом дослідження є ірраціональні рівняння і нерівності, а **предметом** – методи і прийоми розв’язування ірраціональних рівнянь і нерівностей у шкільному курсі алгебри.

Наукова новизна і теоретичне значення роботи полягає в тому, що це дослідження спрямоване на поглиблення розуміння суті ірраціональних рівнянь і нерівностей та способів їх розв’язання і може бути джерелом інформації для вчителів математики, студентів при вивченні методики математики та студентів-практикантів.

Магістерська робота має таку **структуру та обсяг**: вступ, три розділи, висновки, список використаної літератури та додатки; обсяг роботи 67 сторінок.

Розділ 1. Теоретичні основи і методичні особливості вивчення теми «Ірраціональні рівняння і нерівності» в курсі алгебри старшої школи

1.1 Історико-філософські аспекти

Відкриття ірраціональності стало поштовхом подальшого розвитку математичних теорій. Термін «раціональне» (число) походить від латиноамериканського слова ratio – відношення, яке у перекладі на грецьку означає «логос». Поняття раціонального числа було введено як відношення двох цілих чисел.

Після виявлення існування несумірних величин піфагорійці мали можливість спробувати розширити поняття числа за рахунок приєднання до раціональних чисел ірраціональних чисел, тобто охарактеризувати несумірні величини числами іншої природи.

Такий підхід, який на сьогодні є достатньо природним і простим, піфагорійці не зуміли реалізувати. Вони пішли іншим шляхом: прийнявши геометричні об'єкти за величини більш загальної природи, ніж дробові і цілі числа, і намагалися будувати всю математику не на арифметичній, а на геометричній основі. За ними послідували більшість давньогрецьких математиків, аж до Архімеда і Аполлонія.

На відміну від раціональних чисел, числа, що виражають відношення несумірних величин, були названі ще в старовину *ірраціональними*, тобто *нераціональними* (по-грецьки «алогос»). Варто зауважити, що спочатку терміни «раціональний» та «ірраціональний» відносилися не до чисел, а до сумірних і, відповідно, несумірних величин, які піфагорійці називали вираженими і невираженими, Теодор Киренський називав симетричними і асиметричними. У V-VI століттях римські автори Капела і Касіодор перекладали ці терміни на латинь словами rationalis і irrationalis [32].

Старогрецькі математики класичної епохи користувалися тільки раціональними числами (вірніше цілими, дробами і додатними). У своїх «Началах» Евклід подає вчення про ірраціональності чисто геометрично. Ймовірно, найпершою ірраціональністю, відкритою старогрецькими математиками, було число π. Можна з упевненістю вважати, що початковим пунктом цього відкриття були спроби знайти загальну міру за допомогою алгоритму поперемінного віднімання, відомого як алгоритм Евкліда. Неабияке значення мав характерний для піфагорійської школи загальний інтерес до теоретикочислових проблем. Багато учених країн Середнього Сходу в своїх працях вживали ірраціональні числа як повноправні об'єкти алгебри. Більш того, коментуючи «Начала» Евкліда і досліджуючи загальну теорію відношення Евдокса, Омар Хайям вже на початку XII ст. теоретично розширює поняття числа до додатного дійсного числа. У тому ж напрямі багато було зроблено найбільшим математиком XIII ст. ат - Туси.

З історичних джерел дізнаємося, що ірраціональні числа виникли в геометрії при вивченні довжин. Геометричне ірраціональне число виражає собою довжину відрізка, несумірного з відрізком одиничної довжини. За легендою, піфагорійці відкрили несумірність деяких геометричних величин, але оскільки це суперечило їхній філософії, цілком побудованій на натуральних числах, вони тримали це відкриття у найсуворішій таємниці і, навіть, покарали на смерть одного з членів свого братства, який (за різними джерелами) перший знайшов або розголосив цей факт.

Термін «ірраціональний» у математичному розумінні вперше застосовував у XIVст. англійський математик Томас Брадвардін (бл.1290—1349). Поняття ірраціонального числа запровадив у 1544 році німецький математик М. Штифель. Але при обґрунтуванні дій над ірраціональними числами, він, як і Евклід, користується відрізками. Італійський математик і філософ Джироламо Кардано (1501—1576) виявив відмінності між числами — цілими, дробовими та ірраціональними, а італійський математик Рафаель Бомбеллі (друга половина XVI ст.) і голландський математик Деза́рг Жерар застосували їх, але не вважали за числа. Тобто, ірраціональні числа не були повноправними. Адже не могли так просто пояснити їх суть як для натурального числа, що дає кількісну характеристику будь-якої скінченної множини, або дробу, який визначає деяку частину різних величин. Не вдавалося знайти прообрази ірраціональних чисел поза геометричними (несумірними) величинами математикам XV—XVI ст. Тому, на той час ірраціональні числа поза геометрією були символами, позбавленими певного окресленого змісту. Будь-який дріб можна виразити цілком точно відношенням двох цілих чисел. Ірраціональне число не можна точно подати скінченною комбінацією раціональних чисел, пов'язаних чотирма арифметичними діями. Ці факти знали математики XV—XVI ст. і майже завжди використовували як аргумент «неповноцінності» поняття ірраціонального числа.

У XVI столітті тогочасна математика у Західній Європі ознаменувалася визначними досягненнями алгебри та арифметики. Зокрема, були введені в ужиток десяткові дроби, а також правила арифметичних дій над ними.

У цей час стали активно використовувати ірраціональні числа Б.Паскаль (1623—1662 рр..), а також І.Барроу (1630—1677 рр.), який був вчителем І.Ньютона (1643—1727 рр.) і викладав у Кембриджському університеті. Він стверджував, що число корінь з двох, можна трактувати виключно як геометричну величину і більше ніяк. Але, в той же час, Р. Декарт (1596—1650 рр.) і Дж. Валліс (1616—1703 рр.) обґрунтовували, що ірраціональні числа можливі і без посилань на геометрію, тобто самі по собі.
Ще у XVI столітті відновилися суперечки з приводу легальності від'ємних чисел, а також комплексних чисел (Декарт їх назвав «уявними»), які виникали при розв'язуванні квадратних рівнянь. Ці числа вважали сумнівними аж до XVIII століття, незважаючи на те, що ними користувалися науковці, у тому числі Л Ейлер (1707—1783). Комплексні числа остаточно отримали визнання у XIX столітті, після їх геометричної інтерпретації.

Саме у XVI столітті італійські математики С. Даль Ферро (1465—1526 рр.), Н. Тарталья (1499—1577 рр.) і Д. Кардано (1501—1576 рр.) змогли знайти загальні розв’язки рівнянь третього та четвертого степеня. Для полегшення сприйняття викладу алгебраїчних міркувань та зручності, точності записів ними були введені символи, багато з яких відомі сьогодні: «+», «–», "=", «>», «<» та інші. Одним з найяскравіших нововведень стало систематичне застосування французьким математиком Ф. Вієтом (1540—1603 рр.) букв для позначення невідомих, а також сталих величин. Це нововведення дозволило знайти Вієту єдиний метод розв’язання рівнянь другого, третього і четвертого степенів. Після цього математики пішли далі, тобто до рівнянь вище четвертого степеня.

П‘єр Ферма (1601–1665) в середині XVII ст. запропонував загальний метод розв‘язування ірраціональних рівнянь, зводячи їх до системи цілих алгебраїчних рівнянь.

Низку своїх результатів, що стосуються числа і виду коренів рівняння, без будь-яких доведень, опублікували Кардано, Ньютон і Декарт. І. Ньютон виявив зв'язок між коренем і дискримінантом квадратного рівняння. Фрідріх Гаусс (1777—1855 рр.) у 1779 році довів так звану основну теорему алгебри, згідно з якою многочлен n-го степеня має рівно n коренів. Основне завдання алгебри - знайти загальний розв’язок алгебраїчного рівняння, яке непокоїло математиків на початку XIX століття, полягає у тому, щоб за допомогою скінченного числа операцій додавання, віднімання, множення, ділення і добування коренів, здійснюваних над коефіцієнтами рівняння, записати загальний розв’язок рівняння.

Молодий норвезький математик Нільс Абель (1802—1829 рр.) довів, що неможливо зробити це для рівнянь вище четвертого степеня. Але є багато рівнянь спеціального виду вище четвертого степеня, які допускають таке розв’язання. Зовсім юний французький математик Е. Галуа (1811—1832 рр.) буквально напередодні своєї дуелі, на якій і загинув, зміг дати заключну відповідь на питання: розв’язки яких саме рівнянь можна виразити через його коефіцієнти за допомогою скінченного числа алгебраїчних операцій.

Використання поняття ірраціонального числа при вимірюванні якісно відмінних величин (сили, швидкості, прискорення, довжини, площі об'єму і т. д.), у механіці й аналізі ще з більшою силою підкреслило необхідність суто арифметичного його обґрунтування. Саме тут особливо чітко виявилась можливість тлумачення поняття числа як відношення.

Після введення Валлісом і Ньютоном поняття границі з'ясувалося, що ірраціональні числа можна розглядати ще як границі послідовностей раціональних чисел. Цим було започатковано один із способів обґрунтування їх арифметики, який був частково розроблений у XVIII ст.

З'ясуванню арифметичної суті і визнанню повноправності поняття ірраціонального числа особливо сприяв розвиток арифметики десяткових дробів. Кожен звичайний дріб і будь-яку алгебраїчну ірраціональність можна подати нескінченним десятковим дробом з будь-якою наперед заданою точністю. У «Трактаті з алгебри» Валліс підкреслював, що добування коренів іноді призводить до нескінченних неперіодичних десяткових дробів. Ці дроби слід розглядати як новий вид чисел, оскільки нескінченний періодичний десятковий дріб є звичайним дробовим числом.

Отже, до початку XVIII ст. чітко виділилися три тлумачення поняття ірраціонального числа (величини):

1) ірраціональне число розглядали як корінь n-го степеня з цілого або дробового числа, коли результат добування кореня не можна виразити «точно» цілим або дробовим числом (найдавніше);

2) ірраціональне число трактували як границю, до якої його раціональні наближення можуть підійти як завгодно близько;

3) це число розглядали як відношення двох однорідних величин, другу з яких взято за одиницю; коли перша величина несумірна з одиницею.

Математики найчастіше обирали перший підхід і говорили не про Ірраціональні числа, а про ірраціональні величини. Тлумачення 2) і 3) ірраціонального числа тривалий час не мали широкого застосування.

З цих причин до кінця XVII ст. геометричні способи обґрунтування арифметики ірраціональних чисел відсувались на задній план. Тільки найпередовіші математики кінця XVII і початку XVIII ст., такі, як Ньютон і Лейбніц, вважали поняття ірраціонального числа об'єктивним, трактували його по-новому і широко застосовували в математиці й природознавстві [29].

У другій половині XVIII ст., у зв'язку із розвитком механіки і математики, Ньютонове означення ірраціонального числа широко впроваджується у математичну літературу. Водночас дуже інтенсивно розвивається й інше тлумачення поняття ірраціонального числа. Так, Ейлер**,** Ламберт та деякі інші вчені встановили, що нескінченний періодичний дріб завжди є раціональним числом. Тому, ірраціональне число - це нескінченний неперіодичний дріб. Ірраціональні числа деякі автори почали трактувати як межі змінних, що набувають раціональних значень. Однак аж до другої половини XIX ст. не було розроблено загальної теорії ірраціональних чисел.

Подальшого ширшого розвитку теорія ірраціональних чисел набула у другій половині XIX ст. у зв'язку з потребами математичного аналізу. У цьому аспекті плідно працювали німецькі математики Ю.Дедекінд (1831—1916), Г. Кантор (1845—1918) і К. Вейєрштрасс (1815—1897) [6].

У сучасних навчальних посібниках основа визначення ірраціонального числа спирається на ідеї ал-Каши, Стевіна і Декарта про вимірювання відрізків і про необмежене наближення до шуканого числа за допомогою нескінченних десяткових дробів. Проте обгрунтуванням властивостей дійсних чисел і повна теорія їх була розроблена лише у XIX ст.

Значення відкриття ірраціональності в математиці важко переоцінити. У математику, мало не вперше, увійшла складна теоретична абстракція, що не має аналога в донауковому загальнолюдському досвіді. Услід за ірраціональністю числа були відкриті багато інших ірраціональностей. Так, Теодор з Кирени (V ст. до н.е.) встановив ірраціональність квадратного кореня з чисел 3,5,6,17, які не є повним квадратом, Теетет (410-369 до н.е.) дав одну з перших класифікацій ірраціональностей. З появою ірраціональностей в старогрецькій математиці виникли серйозні труднощі як в теоретико - числовому, так і в геометричному плані. Поняття «ірраціональність» має широке застосування [1].

У філософському вченні з’ясовується можливість визначення змісту поняття «ірраціональне», однією з головних рис якого є прагнення до універсальності. Ірраціоналізм (лат. irrationalis — несвідоме, нерозумне) — напрям у філософії, що проголошує верховенство почуттєвого начала і робить його основною характеристикою як самого світу, так і світосприйняття, визнаючи дійсність такою, що не може бути вираженою у логічних поняттях. Значення поняття «ірраціональне» розглянуто у гуманітарному знанні, точніше — в психології, в якій під терміном «ірраціональна» розуміють настанову людини, якщо вона породжує її неадекватну поведінку в якомусь конкретному випадку. Розчарування в силі розуму пізнати дійсність було однією з головних причин виникнення ірраціоналізму у мистецтві, що став основою культурного розвитку кінця XIX – початку XX ст. — так, наприклад, ірраціональні засади символізму, романтизму та неоромантизму особливо помітні в поезії, живописі, театральному мистецтві тощо.

Остаточного розвитку теорія ірраціональних чисел набула тільки в другій половині XIX ст. у працях німецьких математиків Дедекінда, Кантора і Вейєрштрасса [32].

1.2. Вимоги до вивчення теми

Реформування нинішньої системи освіти у країні відбувається у складних умовах воєнного часу, скероване на відтворення і зміцнення інтелектуального потенціалу нації, інтеграції в світову систему освіти.

Математика має широкі можливості для інтелектуального розвитку особистості: стимулює розвиток основних мисленнєвих процесів, логічного, критичного, дивергентного та просторового мислення, алгоритмічної культури, формує вміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, здатність до рефлексії, побудови інтелектуальних стратегій.

Математика є засобом вивчення не лише природничих, а й багатьох спеціальних, в тому числі, гуманітарних дисциплін. Математичне моделювання допомагає розв'язувати широкий спектр задач різних галузей людської діяльності. Забезпечення належного рівня викладання математики у закладах загальної середньої освіти потребує докладання певних зусиль з виконання вимог, передбачених навчальною програмою з математики.

Програма для організації навчання математики на профільному рівні [24] розроблена на основі Державного стандарту базової і повної середньої освіти з урахуванням особливостей відповідних профілів навчання. У ній чітко визначена мета навчання математики на профільному рівні; забезпечення свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, достатні для вивчення інших шкільних дисциплін та продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями із значною математичною складовою.

Досягнення зазначеної мети забезпечується виконанням таких завдань**:**

- формування в учнів наукового світогляду, уявлень про ідеї та методи математики, її роль у пізнанні дійсності, усвідомлення математичних знань як невід'ємної складової загальної культури людини, необхідної умови повноцінного життя в сучасному суспільстві; стійкої позитивної мотивації до навчання;
- оволодіння учнями мовою математики, системою математичних знань, навичками та уміннями, потрібними у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності, достатніх для успішного оволодіння знаннями інших освітніх галузей і забезпечення мотивації потреби неперервності навчатися

впродовж життя.

- інтелектуальний розвиток особистості – розвиток логічного мислення та інтуїції учнів, просторової уяви, пам'яті, уваги, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури;
- громадянське виховання та формування позитивних рис особистості – ініціативності та творчості, пізнавальної самостійності та інтересу, потреби в самоосвіті, здатності адаптуватися до умов, що змінюються;
- формування життєвих компетентностей учня – позитивних рис характеру (наполегливості, волі, культури думки і поведінки, обґрунтованості суджень, відповідальності за доручену справу тощо);
- формування загальнолюдських духовних цінностей особистості; виховання національної самосвідомості, поваги до національної культури і традицій України.

Змістове наповнення програми реалізує компетентністний підхід до навчання, спрямований на формування системи відповідних знань, навичок, досвіду, здібностей і ставлення, яка дає змогу обґрунтовано робити висновки про застосування математики в реальному житті, визначає готовність випускника школи до успішної діяльності в соціумі [24].

Навчання математики в системі загальної середньої освіти, як і у всій системі математичної освіти в Україні, має спиратись на такі вихідні положення:

- бути цілісною системою формування особистості на основі досягнень математики, психолого-педагогічної науки;
- бути безперервним і забезпечувати наступність між різними ланками ступеневої системи освіти;
- мати розвиваючий характері прикладну спрямованість на всіх ступенях навчання;
- під час організації навчального процесу доцільно надавати переваги методам розвиваючого навчання і сучасним його технологіям;

• у процесі навчання математики і її застосування необхідно використовувати нові інформаційні технології навчання, зокрема на базі персональних комп'ютерів.

Метою вивчення алгебри і початків аналізу в 10-11-х класах є систематичне вивчення функцій засобами алгебри і початків аналізу. Вивчаючи властивості тригонометричних, показникової, логарифмічної, степеневої функцій, учням потрібно навчитися виконувати тотожні перетворення виразів і застосовувати їх до розв'язання відповідних видів рівнянь та нерівностей.

За чинною програмою поняття ірраціонального рівняння і нерівності вводиться у 10 класі при вивченні теми «Степенева функція», на яку відводиться 30 годин.

Основна мета вивчення – ознайомити учнів з поняттям кореня n-го степеня, його властивостями; перетворенням виразів, пов'язаних із степенями. На цій основі ввести поняття ірраціонального рівняння і нерівності та навчити розв'язувати найпростіші із них.

У курсі алгебри і початків аналізу є можливість, крім традиційних засобів навчання, використовувати нові інформаційні технології, зокрема персональні комп'ютери. У результаті вивчення цієї теми учні повинні опанувати такі знання і уміння на рівні обов'язкової підготовки:

- мати уявлення про ірраціональні рівняння і нерівності;
- знати означення ірраціонального рівняння і нерівності;
- уміти розв'язувати найпростіші рівняння і нерівності.

Програма з математики в ЗЗСО побудована так, що при розв'язуванні ірраціональних рівнянь і нерівностей основна увага звертається на конкретні прийоми, способи, алгоритми розв'язання. Тоді всі ірраціональні рівняння і нерівності розв'язуються за допомогою певного методу. Окрім того, розглядаються рівняння і нерівності підвищеної складності, для кожного з яких потрібно відшукати власний спосіб розв'язання.

Підхід, який інтегрує всі типи рівнянь і нерівностей в єдину сукупність, формує в учнів загальні уявлення про проблему розв'язування рівнянь – процес послідовних перетворень. У методичному аспекті даний підхід спонукає вчителя до вироблення нових підходів, методик в організації вивчення відповідного матеріалу шкільного курсу математики.

Під процесом розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей, розуміємо процес їх послідовних перетворень, кінцевим підсумком яких буде розв'язок відповідного рівняння чи нерівності. Варто зауважити, що досить часто у школах не завжди достатньо звертають увагу саме на процес розв'язання, що спрямовує мислення учнів більше в алгоритмічний, ніж у творчий аспект мислення, а це, в свою чергу, сприяє формальному засвоєнню матеріалу, знижує розуміння сутності процесу розв'язання.

Процес розв'язання ірраціонального рівняння і нерівності – це виконання послідовних перетворень над рівнянням і нерівністю за певним алгоритмом з метою відшукання розв'язку.

Таким чином, у процесі навчання розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей вбачають принаймні три взаємопов'язані методичні завдання:

- створення алгоритму розв'язання ірраціональних рівнянь і нерівностей у вигляді низки послідовних перетворень;
- аналіз кожного перетворення з метою виявлення таких, що можуть змінити множину розв'язків;
- вживання «запобіжних» заходів з метою недопущення зміни множини розв'язків нееквівалентним перетворенням.

Процес розв'язання ірраціональних рівнянь і нерівностей вимагає інтеграції знань з різних розділів елементарної математики. Тут потрібні знання: властивостей функцій (області визначення та множини значень, монотонності, періодичності, обмеженості, неперервності), дій (множення, ділення, піднесення до степеня та інших) над різними алгебраїчними виразами тощо. По суті, розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей інтегрує увесь курс алгебри за середню школу.

1.3 Методика вивчення ірраціональних рівнянь та нерівностей

1.3.1 Ірраціональні рівняння

Рівняння – одне із фундаментальних понять математики. Різного типу рівняння є математичними моделями багатьох фізичних процесів, природних явищ, соціальних та економічних взаємозв'язків. Багато задач із різних галузей діяльності людини зводяться до складання і розв'язування рівнянь.

Перш, ніж перейти до вивчення питання про розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей, варто нагадати деякі теоретичні положення про корені *n*-го степеня з курсу алгебри середньої школи.

Коренем n-го степеня (n- натуральне число) з числа **а** називається таке число **х**, n-ий степінь якого дорівнює **а**.

Отже, якщо ***x*** є коренем *n*-го степеня з числа **а**, то $x^n = a$. Корінь *n* -го степеня з числа ***a*** позначають так $\sqrt[n]{a}$, натуральне число *n* називають показником кореня, ***a*** - підкореневим числом. Вираз $\sqrt[n]{a}$ інакше ще називають радикалом *n*-го степеня. Дію знаходження кореня називають добуванням кореня. Нагадаємо, що корінь n-го степеня з будь-якого відмінного від нуля числа має в полі комплексних чисел n різних значень.

Невід'ємне значення кореня *n*-го степеня з невід'ємного числа ***a*** називатимемо арифметичним значенням кореня, або арифметичним коренем. Інакше кажучи, невід'ємне число *x*, *n*-й степінь якого дорівнює ***a*** називатимемо арифметичним коренем *n*-го степеня з числа ***a***. Як відомо, арифметичний корінь будь–якого степеня *n* з будь–якого невід'ємного числа ***a*** існує і до того ж єдиний.

Якщо $a \geq 0$, то в полі дійсних чисел символ $\sqrt[n]{a}$ означає арифметичний корінь *n*-го степеня з числа **a**. Тому під час розв'язування над полем дійсних чисел рівняння виду $x^{2n} = a$ потрібно писати $x = \pm\sqrt[2n]{a}$, а не $x = \sqrt[2n]{a}$.

Теорема 1. *Якщо а та в - невід'ємні, то із співвідношень* $a^n > b^n, a^n = b^n, a^n < b^n$ *випливає справедливість відповідно співвідношень*

$a < b, a = b, a < b$.

Теорема 2. *Значення кореня з невід'ємного числа не зміниться, якщо показник кореня помножити на довільне натуральне число k, а підкореневе число піднести до того самого степеня k, тобто* $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$.

Теорема 3. *Корінь з добутку кількох невід'ємних виразів дорівнює добуткові коренів того самого степеня з кожного із співмножників, тобто*

$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots . a_s} = \sqrt[n]{a_1}\sqrt[n]{a_2} \ldots \sqrt[n]{a_s}$.

Теорема 4. *Корінь з числа від ділення невід'ємного числа а на додатне число в дорівнює частці від ділення коренів того самого степеня з діленого й дільника, тобто* $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Теорема 5. *Щоб піднести корінь з невід'ємного числа до степеня, треба піднести до цього степеня підкореневе число, тобто*

$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$.

Теорема 6. *Добуваючи корінь з кореня, треба перемножити показники коренів, не змінюючи підкореневого числа, тобто* $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Оскільки парний степінь довільного дійсного числа, невід'ємний, то дія добування кореня парного степеня із від'ємного числа у множині дійсних чисел неможлива, і, отже, коли *a* <0, символ $\sqrt[2k]{a}$ у множині дійсних чисел не має змісту.

Корінь парного степеня з будь - якого додатного числа у множині дійсних чисел має два значення. Одне з них є арифметичним значенням кореня, а друге - значення, протилежне арифметичному.

Теорема 7. *Корінь непарного степеня 2k+1 з будь - якого дійсного числа* ***a*** *має у множині дійсних чисел лише одне значення.*

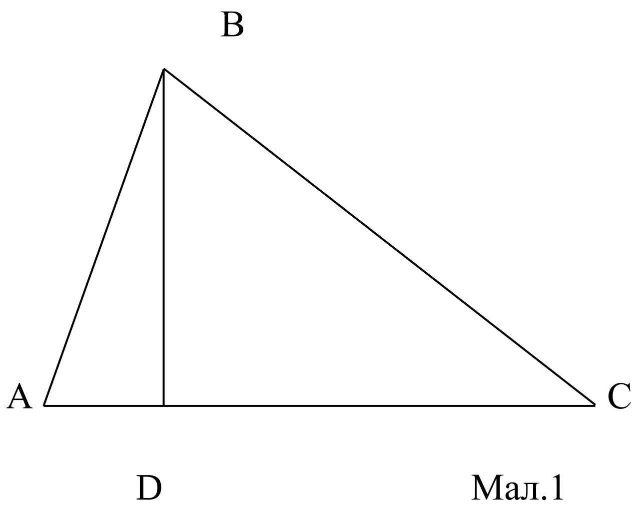
Одним із видів рівнянь є *ірраціональне* рівняння, поняття про яке можна ввести на конкретному прикладі, зокрема, розглядаючи задачу.

У трикутнику ABC: BD перпендикулярна до AC, AD=2 см, DC=5см, AB+BC=9см (мал.1). *Знайти BD.*

*Розв'язання***.** Нехай $BD = x$ см, тоді $AB=\sqrt{x^2+4}$, $BC=\sqrt{x^2+25}$.

За умовою $AB + BC = 9$см, тобто

$\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+25}=9$.



Мал.1

Отримали рівняння, невідоме якого міститься під знаком кореня.

Таке рівняння, у якого невідоме міститься під знаком кореня, називається *ірраціональним* рівнянням. Найпростішими ірраціональними рівняннями є рівняння виду $\sqrt[n]{f(x)}=a$, де f(x) - раціональна функція, a - стале число, $n\geq 2$.

Наприклад, $\sqrt{x-3}=6$; $\sqrt[3]{x+7}=3$.

Корені парного степеня, які входять до ірраціонального рівняння, вважаються арифметичними, а непарного – будь-якими дійсними числами.

Наприклад, корені $\sqrt[4]{x-5} \geq 0$, а $\sqrt[7]{x-3}$ може бути будь-яким дійсним числом.Областю допустимих значень рівняння $\sqrt{x^2-4} = 8$ є $|x| \geq 2$.

Область допустимих значень рівняння $\sqrt{x^2-3} = \sqrt{x-1}$ визначимо із системи нерівностей $\begin{cases} x^2-3 \geq 0, \\ x-1 \geq 0. \end{cases}$

Звідки: $\begin{Bmatrix} x^2 \geq 3 \\ x \geq 1 \end{Bmatrix}$, тобто $x \geq \sqrt{3}$.

1. Якщо n=2k і a<0, то рівняння не має розв'язку	Наприклад, рівняння $\sqrt{x-6} = -3$
2. Якщо n=2k і a≥0, то рівняння має корені	$\sqrt{x-3} = 2$, x=7
3. Якщо n=2k+1 то рівняння $\sqrt[n]{f(x)} = a$ має розв'язки при будь-якому значенні n.	$\sqrt[3]{x-5}$=-2, x=-3

Суть розв'язання ірраціональних рівнянь полягає в тому, щоб звести їх до раціональних рівнянь.

Розглянемо приклади.

1. *Розв'язати рівняння* $\sqrt[4]{x-2} = 2$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до четвертого степеня. Одержимо раціональне рівняння

$x-2=16,$

звідки $x=18.$

Відповідь $x=18.$

2. *Розв'язати рівняння* $\sqrt{x+5} = x-1$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату.

Отримаємо:

$$x + 5 = x^2 - 2x + 1,$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0,$$
$$x_1 = -1; x_2 = 4.$$

Виконаємо перевірку:

а) $x = -1$

$\sqrt{4} = -2, \quad 2 = -2 -$ неправильна рівність, тобто $x = -1$ – сторонній корінь;

б) $x = 4;$

$\sqrt{9} = 4 - 1 \quad 3 = 3.,$

Отже, корінь даного рівняння $x = 4.$

Відповідь: $x = 4.$

Бачимо, що при піднесенні обох частин рівняння до парного степеня, можуть з'являтися сторонні корені, які можна виключити за допомогою перевірки.

Взагалі кажучи, рівняння

$f(x) = \varphi(x)$ та $f^n(x) = \varphi^n(x)$

рівносильні, якщо натуральне число n – непарне або функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ можуть набувати тільки невід'ємних значень.

Якщо ж обидві частини рівняння $f(x) = \varphi(x)$ піднести до парного степеня, одержимо рівняння $f^{2n}(x) = \varphi^{2n}(x)$, яке є наслідком даного. Дійсно, це так:

$$f^{2n}(x) - \varphi^{2n}(x) = 0;$$
$$(f^n(x) - \varphi^n(x))(f^n(x) + \varphi^n(x)) = 0;$$
$$f^n(x) - \varphi^n(x) = 0,$$

$f^n(x) = \varphi^n(x)$ - це дане рівняння, а $f^n(x) = -\varphi^n(x)$ - нове, яке може мати розв'язки, відмінні від коренів даного рівняння.

Пояснюючи цей матеріал, вчитель ставить собі за мету сформувати в учнів поняття ірраціонального рівняння. Тому учням потрібно пояснити суть деяких тверджень:

1) ірраціональне рівняння це таке, яке містить радикал, не є вірним.

(Правильно: невідоме під знаком радикала. Адже рівняння $x+\sqrt{5}=6$ не є

1) ірраціональне рівняння це таке, яке містить радикал, не є вірним. (Правильно: невідоме під знаком радикала. Адже рівняння $x+\sqrt{5}=6$ не є ірраціональним);

2) значення кореня в ірраціональному рівнянні вважається арифметичним, також не є вірним. (Правильно: значення кореня парного степеня).

3) за умови піднесення обох частин ірраціонального рівняння до парного степеня з’являються сторонні корені. (Правильно говорити: можуть з’являтися сторонні корені).

4) рівняння $\sqrt[3]{x-4}=a$ має корені, якщо $a \geq 0$. Дане твердження не є правильним, адже це рівняння має зміст при будь-якому значенні a.

1.3.2 Ірраціональні нерівності

Нерівність, що містить змінну під знаком кореня, називається *ірраціональною*. Інакше кажучи, нерівність називається ірраціональною, якщо в ній, крім дій додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня з натуральним показником, зустрічається також добування кореня з алгебраїчних виразів, які містять невідоме.

При розв’язуванні таких нерівностей використовуються як загальні властивості числових нерівностей, так і властивості ірраціональних функцій. Ірраціональна функція з парним показником визначена для всіх значень невідомої змінної, для яких підкореневі вирази (функції) набувають невід'ємних значень, а з непарним показником – для всіх дійсних значень невідомої змінної.

Ірраціональні нерівності містять вирази, записані у радикалах, або за допомогою раціональних степенів.

Проаналізуємо випадки:

1) $\sqrt{f(x)} \geq \varphi(x) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}$$

Розглянемо на прикладах.

Приклад 1. *Розв'язати нерівність* $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$.

Ров'язання. Дана нерівність рівносильна системам нерівностей:

$$\begin{cases} x(x-4) \geq 0; \\ x - 3 < 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x(x-4) \geq 0; \\ x - 3 \geq 0; \\ x^2 - 4x > (x-3)^2 \end{cases}$$

Звідки $x \leq 0$ або $\begin{cases} x \geq 4, \\ 2x - 9 > 0; \end{cases}$ >>>

тобто $x \in (-\infty; 0] \cup [4.5; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; 0] \cup [4.5; +\infty)$.

2) $\sqrt{f(x)} \leq \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0; \\ \varphi(x) \geq 0; \\ f(x) \leq (\varphi(x))^2 \end{cases}$

Приклад 2. *Розв'язати нерівність* $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq (x-3)^2$.

Ров'язання . Перенесемо вираз із правої частини нерівності у ліву

$(x-3)\sqrt{x^2+4} - (x-3)^2 \leq 0$.

Тоді $(x-3)(\sqrt{x^2+4} - (x-3)) \leq 0$

Звідси

$$\begin{cases} x \le 3, \\ \sqrt{x^2+4} \ge x-3; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x \ge 3, \\ \sqrt{x^2+4} \le x-3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \le 3; \\ x^2+4 \ge (x-3)^2 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x \ge 3; \\ x^2+4 \le (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \le 3; \\ 6x \ge 5 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x \ge 3; \\ 6x \le 5. \end{cases}$$

Звідси отримаємо, що $\frac{5}{6} \le x \le 3.$.

Відповідь: $x \in (\frac{5}{6};3).$

РОЗДІЛ 2. Технологія розробки методів і методик розв`язування ірраціональних рівнянь і нерівностей

2.1 Аналіз навчальних підручників з алгебри для 10 класу профільного рівня

У підручнику з алгебри (профільний рівень) для 10 класу (А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір.) [21] ірраціональні рівняння та нерівності вивчаються у темі «Степенева функція». На початку повторюються основні фундаментальні поняття: область визначення функції, корінь рівняння, сторонні корені, рівносильні рівняння, подається ілюстрація на діаграмі Ейлера належність коренів рівняння області визначення рівняння. На конкретному прикладі вводиться поняття ірраціонального рівняння. Учнів спочатку знайомлять із розв’язуванням найпростіших ірраціональних рівнянь, до складу яких входять корені, як правило другого і третього степенів, що ґрунтуються на піднесенні обох частин рівняння до одного й того самого степеня. Основна мета при розв’язуванні таких рівнянь – звести ірраціональне рівняння до алгебраїчного методом перетворень, які дають можливість позбутися коренів. У наступному пункті розширюють арсенал прийомів розв’язування ірраціональних рівнянь. Після цього розглядають теореми, за допомогою яких розв’язують основні типи ірраціональних нерівностей.

Автори підручника «Алгебра і початки аналізу» (профільний рівень) для 10 класу закладів загальної середньої освіти О. Істер та О.Єргіна [18], узагальнюючи властивості функцій $y=\sqrt{x}$ та $y = \sqrt[3]{x}$, встановлюють властивості функції $y = \sqrt[n]{x}$, на основі яких виконують завдання по відшуканню області визначення функцій та розв’язання найпростіших ірраціональних рівнянь. Подається схема, у якій систематизовано відомості про розв’язки рівняння $y = \sqrt[n]{x}$. Розглядають способи розв’язання ірраціональних рівнянь, які містять декілька квадратних коренів. На конкретних прикладах ілюструють застосування різних підходів розв’язання таких рівнянь, їх переваги та недоліки. Розглядають також розв’язання ірраціональних рівнянь методом заміни змінної, а також рівняння з параметрами. По цьому розглядають деякі види ірраціональних нерівностей та методи їх розв’язування.

У підручнику з алгебри (профільний рівень) для 10 класу закладів загальної середньої освіти Неліна Є.П. [26] ірраціональні рівняння вивчають в основному матеріалі розділу «Степенева функція», а у додатковому – застосування властивостей функцій до розв’язування рівнянь; ірраціональні нерівності; розв’язування ірраціональних рівнянь та нерівності з параметрами.

У кожному із вказаних вище підручників розглядаються найпростіші ірраціональні рівняння, які зводяться до раціональних, а також способи та прийоми розв’язання інших типів ірраціональних рівнянь і нерівностей.

При розв’язуванні ірраціональних рівнянь треба знати, що:

- у рівнянні корені парного степеня є арифметичними, тобто значення кореня невід’ємне, крім цього підкореневий вираз є додатним;

- усі корені непарного степеня визначені для будь-якого підкореневого виразу, причому значення кореня має той самий знак, що й підкореневий вираз.

Отже, розв’язання ірраціональних рівнянь варто починати із знаходження області визначення рівняння, якщо в нього входять корені парного степеня.

Область визначення ірраціонального рівняння – це множина всіх дійсних чисел x, при яких водночас мають зміст вирази, що входять до рівняння. Корені рівняння, які не задовольняють вихідне рівняння, називаються *сторонніми* коренями. Для того, щоб виключити отримані в результаті нерівносильних перетворень сторонні корені, треба виконати перевірку розв’язків.

Проаналізуємо основні методи та прийоми розв'язування ірраціональних рівнянь.

2.2 Методи розв'язування ірраціональних рівнянь

2.2.1 Метод піднесення обох частин рівняння до степеня

Одним із основних методів є метод піднесення обох частин до степеня з таким самим показником, як і показник радикала у рівнянні**.**

Розглянемо приклад:

1. *Розв'язати рівняння* $\sqrt{3x^2+x+11}=2x+1.$

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$3x^2+x+11=4x^2+4x+1,$$

$$x^2+3x-10=0.$$

Звідки: $x_1=2, \quad x_2=-5.$

(Перевіркою встановлюємо, що -5 – сторонній корінь, а число 2 є розв'язком даного рівняння).

*Відповідь***:** x=2

2. *Розв'язати рівняння* $\sqrt[5]{x^2-6}=\sqrt[5]{x}.$

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до п'ятого степеня.

Отримаємо рівносильне рівняння:

$(\sqrt[5]{x^2-6})^5=(\sqrt[5]{x})^5;$

$x^2-6=x, \;\; x^2-x-6=0.$

Звідси x_1 =-2, x_2 =3.

Відповідь: -2; 3.

3. *Розв'язати рівняння* $\sqrt{2x-15}-\sqrt{x+16}=-1.$

Розв'язання. Відокремимо один радикал

$\sqrt{2x-15}=\sqrt{x+16}-1.$

Піднесемо обидві частини до квадрату:

$2x - 15 = x + 16 - 2\sqrt{x+16} + 1.$

Зведемо подібні доданки і знову відокремимо радикал:

$32 - x = 2\sqrt{x+16}.$

Тепер піднесемо до квадрату обидві частини рівняння:

$x^2 - 64x + 1024 = 4x + 64,$

$x^2 - 68x + 960 = 0,$

$x_1 = 48, \quad x_2 = 20.$

Перевірка показує, що $x_1 = 48$ - сторонній корінь.

Відповідь: x=20

Розв'язуючи ірраціональні рівняння, ми переходимо від даних рівнянь до рівнянь-наслідків. Можна використати спосіб рівносильних перетворень, опираючись на наступні твердження.

Рівняння $\sqrt{f(x)} = \sqrt{\varphi(x)}$ рівносильне системі

$\begin{cases} f(x) = \varphi(x); \\ f(x) \ge 0; \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) = \varphi(x); \\ \varphi(x) \ge 0. \end{cases}$

Рівняння $\sqrt{f(x)} = \varphi(x)$ рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = \varphi^2(x); \\ \varphi(x) \ge 0. \end{cases}$$

Розглянемо для прикладу рівняння $\sqrt{15 - 3x} - 1 = x.$

Розв'язання. Виконаємо перетворення:

$$\sqrt{15-3x} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 15 - 3x = (x+1)^2; \\ x + 1 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x - 14 = 0; \\ x \ge -1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -7; \\ x = 2; \end{array} \right. \\ x \ge -1. \end{cases}$$

З даної системи можна зробити висновок, що коренем рівняння є $x = 2$.

Відповідь: $x = 2$.

Запишемо *алгоритм* розв'язання ірраціональних рівнянь *методом піднесення обох частин рівняння до степеня:*

1. Відокремити один радикал, тобто в одній частині рівняння лишити вибраний радикал, решту членів рівняння перенести в іншу частину.

2. Обидві частини рівняння піднести до степеня, показник якого дорівнює показникові відокремленого радикала.

3. Якщо в результаті піднесення до степеня залишились вирази під знаком кореня, то дію відокремлення радикала і піднесення до степеня потрібно повторювати до тих пір, доки не отримаємо раціональне рівняння.

4. Розв'язати отримане раціональне рівняння.

5. Виконати перевірку.

6. Записати відповідь.

2.2.2 Розв'язування рівнянь методом введення нової змінної

Часто під час розв'язування ірраціональних рівнянь доцільно ввести нову змінну. Це полегшує розв'язування рівняння.

Розглянемо приклади:

1. *Розв'язати рівняння* $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[6]{x-2}=2.$

Розв'язання. Нехай $\sqrt[6]{x-2}=t, t\geq 0$, тоді $t^2-t-2=0,$

Звідки

$t_1=-1$ (не задовольняє умову $t\geq 0$), $t_2=2.$

Повертаємося до заміни:

$\sqrt[6]{x-2}\neq -1, \sqrt[6]{x-2}=2,$

$x-2=64, x=66.$

Отримали

$x=66$.

Відповідь: $x=66.$

2. *Розв'язати рівняння* $2\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2-2x+9}=1.$

Розв'язання. Нехай $\sqrt{x^2-2x+4}=y, y\geq 0$, тоді

$x^2-2x+4=y^2$, а $x^2-2x+9=y^2+5$.

Маємо: $2y-\sqrt{y^2+5}=1$,

звідки

$$\sqrt{y^2+5}=2y-1;$$
$$y^2+5=4y^2-4y+1;$$
$$3y^2-4y-4=0;$$

$y_1=2,\quad y_2=-\dfrac{2}{3}$ (не задовольняє умову $y\ge 0$).

Враховуючи заміну, маємо:

$$x^2-2x+4=4;$$
$$x_1=0,\quad x_2=2.$$

Відповідь: 0;2**.**

3. *Розв'язати рівняння*

$$\sqrt[3]{(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})^{\mathbf{2}}}\ +\ \sqrt[3]{(\mathbf{6}-\boldsymbol{x})^{\mathbf{2}}}\ -\ \sqrt[3]{(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})(\mathbf{6}-\boldsymbol{x})}\ =\mathbf{3}$$

Розв'язання. Введемо заміну $\sqrt[3]{x+3}$ = a та $\sqrt[3]{6-x}$ = b. Тоді

$$\begin{cases} a^2+b^2-\text{ab}=3 \\ a^3+b^3=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2-ab=3; \\ (a+b)(a^2+b^2-ab)=9 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (a+b)^2-3ab=3; \\ (a+b)=3 \end{cases};\quad \begin{cases} ab=2; \\ a+b=3 \end{cases};$$

Звідси

$$\begin{cases} a=1, \\ b=2 \end{cases}\ \text{або}\ \begin{cases} a=2, \\ b=1 \end{cases}.$$

Повертаємося до вихідних змінних:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+3}=1, \\ \sqrt[3]{6-x}=2 \end{cases}\quad \text{або}\quad \begin{cases} \sqrt[3]{x+3}=2, \\ \sqrt[3]{6-x}=1 \end{cases}$$

Отримуємо $\left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 5 \end{array}\right.$.

Відповідь: -2; 5**.**

Складаємо алгоритм розв’язання ірраціональних рівнянь методом введення нової змінної:

1. Ввести допоміжну змінну.
2. Подати вирази, що містяться в рівнянні через нову змінну.
3. Розв’язати отримане рівняння.
4. Підставити знайдене значення змінної.
5. Розв’язати рівняння, одержане на попередньому кроці.
6. Виконати перевірку.
7. Записати відповідь.

2.2.3 Зведення до системи раціональних рівнянь

Часто, розв’язуючи ірраціональні рівняння, доцільно ввести не одну, а кілька нових змінних. Тоді дане рівняння зведеться до системи раціональних рівнянь.

Розглянемо приклад.

1. *Розв’язати рівняння* $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x-3} = 0.$

Розв’язання. Нехай $\sqrt[3]{x+1} = u$, а $\sqrt{x-3} = v.$ Тоді $x+1 = u^3, x-3 = v^2.$

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} u - v = 0; \\ u^3 - v^2 = 4; \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} u = v; \\ u^3 - v^2 - 4 = 0; \end{cases}$

або $\begin{cases} u = v; \\ (v-2)(v^2 + v + 2) = 0; \end{cases}$

Тоді $v = 2, u = 2, \sqrt[3]{x+1} = 2, x = 7.$

Рівняння $v^2 + v + 2 = 0$ коренів не має.

Відповідь: x=7.

Алгоритм розв’язання ірраціональних рівнянь способом зведення до системи раціональних рівнянь:

1. Вводимо нові змінні.
2. Складаємо систему раціональних рівнянь з новими змінними.
3. Розв’язуємо її.
4. Знайдені значення змінних підставляємо у вирази, якими вони позначені.
5. Розв’язуємо отримані рівняння.
6. Записуємо відповідь

Для прикладу розв’яжемо таке рівняння $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-4} = 11$, користуючись алгоритмом.

Нехай $\sqrt{x+7} = u, \sqrt{x-4} = v$, тоді $x + 7 = u^2$, $x - 4 = v^2$.

Отримуємо: $\begin{cases} u + v = 11; \\ u^2 - v^2 = 11, \end{cases}$ $\begin{cases} u + v = 11; \\ u - v = 1; \end{cases}$

$2u = 12, u = 6,$

$\sqrt{x+7} = 6,$

$x + 7 = 36,$

$x = 29.$

Перевірка:

$\sqrt{29+7} + \sqrt{29-4} = 6 + 5 = 11.$

Відповідь: *x*=29.

2.2.4 Спосіб виділення повного квадрату

Цим способом розв’язують такі ірраціональні рівняння, у яких підкореневий вираз можна подати у вигляді повного квадрата.

Наприклад, рівняння:

1. $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}=1.$

Розв'язання. Бачимо, що $x-1+2\sqrt{x-2}=\left(\sqrt{x-2}+1\right)^2$, а

$x-1-2\sqrt{x-2}=\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2$.

Тому дане рівняння набуде вигляду:

$\left(\sqrt{x-2}+1\right)^2-\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2=1$, звідки

$\left|\sqrt{x-2}+1\right|-\left|\sqrt{x-2}-1\right|=1.$

Очевидно, що $\sqrt{x-2}+1>0$, тому

$\left|\sqrt{x-2}+1\right|=\sqrt{x-2}+1.$

Знайдемо, при яких значеннях вираз $\sqrt{x-2}-1$ рівний нулю:

$\sqrt{x-2}=1, x-2=1, x=3.$

Щоб розкрити модуль у виразі $\left|\sqrt{x-2}-1\right|$, розглянемо такі випадки:

а) $x\geq 3: \sqrt{x-2}+1-\sqrt{x-2}+1=1,$

$2\neq 1.$

При $x\geq 3$ рівняння коренів не має.

б) $2\leq x<3: \quad \sqrt{x-2}+1+\sqrt{x-2}-1=1,$

$2\sqrt{x-2}=1, \sqrt{x-2}=\dfrac{1}{2},$

$x-2=0.25; x=2.25.$

Відповідь: x=2,25.

2. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=3.$

Розв'язання. Очевидно, що $\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=3;$

$\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=3.$

Нехай $\sqrt{x-1}=t$,тоді $|t+1|+|t-1|=3.$

Очевидно, t+1>0, тоді

$t+1+|t-1|=3,$

$|t-1|+t=2.$

1) $t\geq 1: t-1+t=2$

$2t = 3$

$t_1 = 1.5,$

$\sqrt{x-1} = 1.5,$

$x - 1 = 2.25,$

$x = 3.25$

2) $0 < t < 1: -t + 1 + t = 2,$

$1 \neq 2$.

Отже, якщо $t < 1$, то рівняння коренів не має.

Відповідь: x = 3,25.

2.2.5 Застосування властивостей функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь

Перш, ніж розв'язувати ірраціональні рівняння, іноді доцільно спочатку знайти область допустимих значень функції, які входять до його складу, або множину значень цих функцій дослідити на монотонність чи обмеженість. З урахуванням певної із властивостей рівняння розв'язуємо простіше, ніж загальним методом.

Розглянемо такого типу рівняння.

1. *Розв'язати рівняння* $\sqrt{x^2-9} + \sqrt{9-x^2} + \sqrt[5]{x^2+23} = 2.$

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень даного рівняння:

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0; \\ 9 - x^2 \geq 0, \end{cases}$$ звідки

$$\begin{cases} |x| \geq 3; \\ |x| \leq 3. \end{cases}$$

Значить, $|x| = 3$.

Перевіримо, чи є числа 3 і -3 коренями даного рівняння

$\sqrt{9-9} + \sqrt{9-9} + \sqrt[5]{9+23} = 2.$

Звідси 2=2.

Отже, x_1=-3, x_2=3.

Відповідь: -3, 3.

2. *Розв'язати рівняння* $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=2$.

Розв'язання У лівій частині рівняння маємо зростаючу функцію, а в правій частині стале число. Тому дане рівняння має не більше, ніж один корінь. Область допустимих значень рівняння: $x \geq 2$. При найменшому значенні x з області допустимих значень ($x=2$) функція, яка у лівій частині рівняння, набуває значення 4, а у правій 2. Ліва і права частина рівняння не мають спільних елементів. Рівняння розв'язку не має.

2.2.6 Штучні способи розв'язування ірраціональних рівнянь

Іноді, під час розв'язування ірраціональних рівнянь неможливо скористатися методами, які є стандартними. Тоді на допомогу приходять штучні способи. Вони не підлягають певному алгоритмові. Все залежить від конкретного завдання та міркувань того, хто його розв'язує.

Розглянемо приклади.

1. *Розв'язати рівняння* $y^2-2y\sqrt{5}+x-6\sqrt{x}+14=0$.

*Розв'язання***.** Сам запис рівняння підказує можливість подати його у вигляді $a^2+b^2=0$.

Насправді**,** $y^2-2y\sqrt{5}+5+x-6\sqrt{x}+9=0$, це

$(y-\sqrt{5})^2+(\sqrt{x}-3)^2=0$.

А така рівність можлива тоді і лише тоді, коли $y-\sqrt{5}=0$ та $\sqrt{x}-3=0$, тобто $y=\sqrt{5},\ x=9$.

Відповідь: (9, $\sqrt{5}$).

2. *Розв'язати рівняння* $\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{x+4y-1}{\sqrt{17}}$.

*Розв'язання***.** Запишемо дане рівняння у вигляді

$\sqrt{17}\sqrt{x^2+y^2}=x+4y-1$.

Нехай $\vec{a}(1,4), \vec{b}(x,y)$, тоді будемо мати

$|\vec{a}| = \sqrt{17}$, $|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$

Очевидно, x+4y>x+4y+1.

Відомо, що $|\vec{a}||\vec{b}| \geq \vec{a}\vec{b}$.

Отже, $\sqrt{17}\sqrt{x^2 + y^2} \geq x + 4y > x + 4y - 1.$

Оскільки $\sqrt{17}\sqrt{x^2 + y^2} > x + 4y - 1$, то дане рівняння коренів не має.

3. *Розв'язати рівняння* $\sqrt{x^2 - x + 9} - \sqrt{x^2 - x + 1} = 2$.

Дане рівняння можна розв'язати методом піднесення до степеня або іншим стандартним способом. Спробуємо його розв'язати нестандартно, штучним способом. Помножимо обидві частини рівняння на вираз, який спряжений лівій частині рівняння. Будемо мати:

$$(\sqrt{x^2 - x + 9} - \sqrt{x^2 - x + 1})(\sqrt{x^2 - x + 9} + \sqrt{x^2 - x + 1}) =$$
$$= 2(\sqrt{x^2 - x + 9} + \sqrt{x^2 - x + 1}).$$

Тоді, відокремивши один з радикалів рівняння та виконавши необхідні перетворення, отримаємо:

$$\sqrt{x^2 - x + 9} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 4;$$
$$2\sqrt{x^2 - x + 9} = 6,$$
$$\sqrt{x^2 - x + 9} = 3,$$
$$x^2 - x + 9 = 9,$$
$$x(x - 1) = 0,$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

Відповідь: 0; 1.

2.3. Методи розв'язування ірраціональних нерівностей

Основними методами розв'язування ірраціональних нерівностей є метод піднесення до степеня та метод введення нової змінної (підстановка). Ці методи розв'язування нерівностей зводять до розв'язування раціональних нерівностей або системи раціональних нерівностей. Нерівності з парним показником доцільно розв'язувати методом рівносильних перетворень на множині області визначення. Для цього спочатку знаходять область визначення нерівності, звужуючи цим ту область, у якій міститься розв’язок нерівності. Після виконання певної послідовності рівносильних на області визначення перетворень переходять до заключної нерівності (розв’язування системи чи сукупності систем).

2.3.1 Метод піднесення до степеня

Якщо обидві частини нерівності піднести до непарного степеня, то завжди отримаємо нерівність, яка рівносильна даній. Якщо ж обидві частини нерівності піднести до парного степеня, то нова нерівність рівносильна даній лише у випадку, коли обидві частини даної нерівності є невід’ємними.

Приклад 1**.** *Розв’язати нерівність* $\sqrt{x-5} < 1$.

Розв’язання. Знайдемо область допустимих значень даної функції:

$x - 5 \geq 0,$

$x \geq 5.$

Отже, $x \in [5;+\infty)$.

Обидві частини даної нерівності невід’ємні, тому піднесемо їх до квадрату:

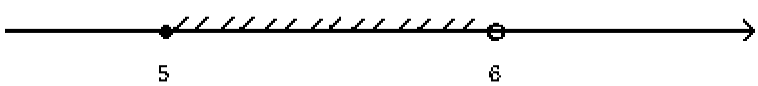
$x - 5 < 1,$

$x - 6 < 0,$

$x < 6.$

Отже, $x \in (-\infty;6)$.

Враховуючи область допустимих значень, маємо, що $x \in [5;6)$.



Відповідь: $x \in [5;6)$.

Приклад 2. *Розв'язати нерівність* $\sqrt{-x}(x+1)>0$.

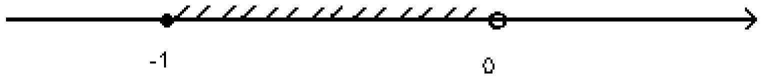
Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень змінної *x*:

$-x \geq 0,$

$x < 0,$

Отже, $x \in (-\infty;0]$. Оскільки $\sqrt{-x} \geq 0$ та $x=0$ не є розв'язком даної нерівності, то розділивши обидві частини нерівності на $\sqrt{-x}$ отримаємо $(x+1)>0$.

Отже, $x \in (-1;0)$



Відповідь: $x \in (-1;0)$.

Приклад 3. *Розв'язати нерівність* $\sqrt{x+61} < x+5$.

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень змінної *x*:

$x+61 \geq 0,$

$x \geq -61.$

Отже, $x \in [-61;+\infty)$.

Якщо $x \in [-5;+\infty)$, то обидві частини нерівності є невід'ємними. Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату:

$x+61 < x^2+10x+25,$

$-x^2-9x+36<0;$

$(x-3)(x+12)>0,$

Отже, $x \in (-\infty;-12) \cup (3;\infty)$

Враховуючи область допустимих значень та обмеження $x \in [-5;+\infty)$, маємо:

$x \in (3;+\infty)$.

Якщо $x \in (-\infty;-5]$, то нерівність не має розв'язків.

Відповідь: $(3;+\infty)$.

2.3.2 Метод введення нової змінної

При розв'язанні ірраціональних нерівностей, досить часто, корисно проводити заміну радикала (або виразу у ньому) іншою змінною.

Приклад 4. *Розв'язати нерівність*

$$\frac{6x}{x-2} + \sqrt{\frac{12x}{x-2}} - 2\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} > 0,$$

Розв'язання. Ввівши заміну та виконавши необхідні перетворення, отримаємо:

$$\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} = z \geq 0.$$

$$\begin{cases} z \geq 0, \\ \frac{z^4}{2} - z^2 - 2z > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \geq 0, \\ z^4 - 2z^2 - 4z > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \geq 0, \\ z(z-2)(z^2 + 2z + 2) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z > 2 \Rightarrow \frac{12x}{x-2} > 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{x-2} - 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{3x - 4x + 8}{x-2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-8}{x-2} < 0 \Rightarrow x \in (2;8).$$

Відповідь: *x є* (2;8).

2.3.3 Узагальнений метод інтервалів

При вивченні ірраціональних нерівностей та методів їх розв'язання доцільно використовувати узагальнений метод інтервалів.

Розв'язками нерівності $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) можуть бути тільки числа, що входять в область визначення функції $y = f(x)$. Розв'язком нерівності $f(x) > 0$ є ті інтервали області визначення функції $y = f(x)$, на яких функція додатна. Будь-яка функція може змінювати свій знак тільки в точках, де розривається графік функції, або в нулях.

Отже, щоб розв'язати нерівність $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$), треба:

1) Знайти область визначення функції $y = f(x)$. При цьому також виділяються точки, в яких розривається графік функції.

2) Знайти нулі функції, розв'язавши рівняння $f(x) = 0$.

3) На координатній прямій позначити нулі функції, які розбивають область визначення на інтервали.

4) На кожному із цих інтервалів функція зберігає знак і його можна визначити за значенням функції у довільній точці цього інтервалу.

5) Записати відповідь (вибрати інтервали, де функція має відповідний даній нерівності знак).

Розв'язання нерівності таким чином називається розв'язанням нерівності *методом інтервалів*.

Приклад 5. *Розв'язати нерівність*

$\sqrt{(x+2)(x-5)} - 8 + x < 0.$

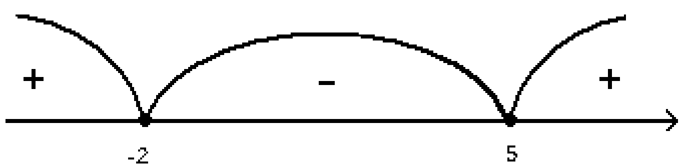
Розв'язання. Введемо функцію $y = \sqrt{(x+2)(x-5)} - 8 + x$

і знайдемо значення *x*, при яких $y < 0$.

Для цього:

1) Знайдемо область визначення функції $(x+2)(x-5) \geq 0.$

$D(y) = (-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$



2) Знайдемо нулі функції

$$\sqrt{(x+2)(x-5)}-8+x=0,$$

$$\sqrt{(x+2)(x-5)}=8-x,$$

$$(x+2)(x-5)=64-16x+x^2;$$

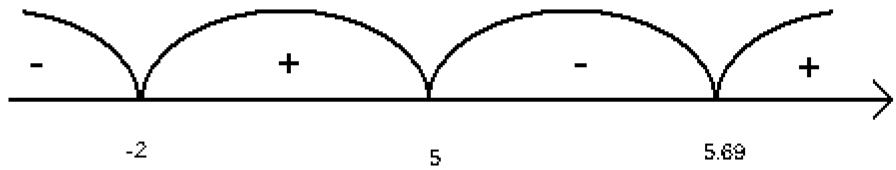
$$x^2-3x-10=64-16x+x^2;$$

$$13x=74,$$

$$x=5\frac{9}{13}$$

або $5\frac{9}{13}\approx 5.69$.

3) Наносимо нулі функції на область визначення функції:



Знаходимо знак на кожному із трьох інтервалів, на які вони розбивають область визначення функції нулями функції:

$$f(-3)=\sqrt{(-3+2)(-3-5)}-8-3=\sqrt{8}-8-3<0$$

$$f(5.5)=\sqrt{(5.5+2)(5.5-5)}-8+5.5<0$$

$$f(6)=\sqrt{(6+2)(6-5)}-8+6=\sqrt{8}-2>0.$$

Відповідь: $x\in(-\infty;-2]\cup\left[5;5\frac{9}{13}\right)$.

2.3.4 Метод виділення повного квадрата в підкореневому виразі

Приклад 6**.** *Розв'язати нерівність*

$$\sqrt{10+x+6\sqrt{1+x}}+\sqrt{5-x+2\sqrt{4-x}}\geq 7$$

Розв'язання. Уважно розглянемо дану нерівність, щоб знайти якісь її особливості, які могли б допомогти при розв'язанні. Такі особливості дійсно є, це

$$10+x+6\sqrt{1+x}=9+2*3\sqrt{1+x}+(1+x)=(3+\sqrt{1+x})^2$$

$$5-x+2\sqrt{4-x}=1+2\sqrt{4-x}+(4-x)=(1+\sqrt{4-x})^2$$

Знайдемо ОДЗ даної нерівності:

$$\begin{cases} 1+x\geq 0, \\ 4-x\geq 0, \\ 10+x+6\sqrt{1+x}\geq 0, \\ 5-x+2\sqrt{4-x}\geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1, \\ x\leq 4. \end{cases} \Rightarrow [-1;4]$$

На проміжку $[-1;4]$ третя і четверта нерівності системи справедливі.

Отже, ОДЗ $x\in[-1;4]$

Запишемо дану нерівність так $(3+\sqrt{1+x})^2+(1+\sqrt{4-x})^2\geq 7$.

Звідси $\left|3+\sqrt{1+x}\right|+\left|1+\sqrt{4-x}\right|\geq 7$.

Але $\left|3+\sqrt{1+x}\right|>0$ і $\left|1+\sqrt{4-x}\right|>0$, тому отримаємо : $3+\sqrt{1+x}+1+\geq 7$ або $\sqrt{1+x}\geq 3-\sqrt{4-x}$.

В ОДЗ права частина нерівності завжди додатна, тому піднесемо до квадрата обидві частини нерівності і отримаємо: $3\sqrt{4-x}\geq 6-x$.

Розв'язок цієї нерівності $x\in[0;4]$. Цей проміжок належить ОДЗ.

Відповідь: $x\in[0;4]$.

Приклад 7**.** *Розв'язати нерівність* $\sqrt{2-x}+\sqrt{8x-5}\geq\sqrt{x-2}$

*Розв'язання***.** Знайдемо ОДЗ заданої нерівності: $\begin{cases} 2-x\geq 0, \\ 8x-5\geq 0, \\ x-2\geq 0. \end{cases}$

Звідси отримаємо, що ОДЗ нерівності x=2 - єдина точка. Підстановкою переконаємось ,що x=2 є розв'язком даної нерівності

Відповідь: x=2.

2.4 Системи ірраціональних рівнянь

Після того, як учні навчаться впевнено розв'язувати ірраціональні рівняння, можна перейти до вивчення систем таких рівнянь. Почати пояснення можна із конкретних прикладів.

Приклад 1. *Розв'язати систему ірраціональних рівнянь*

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2; \end{cases}$$

Розв'язання. Тут вже можна нагадати способи розв'язання систем раціональних рівнянь та використовувати їх. Зокрема, у даному випадку, додавши почленно ліві і праві частини рівнянь, одержимо $2\sqrt{x} = 6$, звідси $\sqrt{x = 3}$, $x = 9$. Віднявши почленно ліві і праві частини рівняння, одержимо $2\sqrt{y} = 2$, $\sqrt{y = 1}$, $y = 1$.

Відповідь: (9;1).

Основна мета вчителя – сформувати в учнів поняття системи ірраціональних рівнянь, ознайомити зі способами їх розв'язання.

Щоб розв'язати систему ірраціональних рівнянь, потрібно, як правило, звільнитися від ірраціональності. При цьому застосовують методи, які використовувалися при розв'язуванні ірраціональних рівнянь.

Приклад 2. *Розв'язати систему ірраціональних рівнянь*

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x + y} = 20, \\ x^2 + y^2 = 136; \end{cases}$$

Розв'язання. Введемо нову змінну:

$$z = \sqrt{x + y}.$$

Тоді $x + y = z^2$ і перше рівняння системи матиме вигляд:

$$z^2 + z - 20 = 0$$

$$z_1 = -5, \quad z_2 = 4.$$

Вираз $\sqrt{x + y} = -5$ не має змісту. З рівності $\sqrt{x + y} = 4$ знаходимо $x + y = 16$. Визначимо з цього рівняння x і підставимо в друге рівняння системи:

$x = 16 - y,$

$(16 - y)^2 + y^2 = 136,$

$256 - 32y + y^2 + y^2 = 136,$

$2y^2 - 32y + 120 = 0,$

$y^2 - 16y + 60 = 0,$

$y_1 = 6; \quad y_2 = 10.$

Для отриманих значень *y,* визначимо відповідні значення x:

$x_1 = 16 - y_1$; x_1=10;

$x_2 = 16 - y_2$; x_2=6.

Відповідь: (10;6), (6;10).

Приклад 3. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} \sqrt{3 - \sqrt{3x^2 + y^4}} - y = 0, \\ x + \sqrt{y^2 + 3} - 3 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Розв'язання. Відокремивши радикали, запишемо систему так

$$\begin{cases} \sqrt{3 - \sqrt{3x^2 + y^4}} = y, \\ \sqrt{y^2 + 3} = 3 - x. \end{cases} \qquad (2)$$

Піднісши обидві частини першого рівняння до квадрата, будемо мати $3 - \sqrt{3x^2 + y^4} = y^2$

Звідси $\sqrt{3x^2 + y^4} = 3 - y^2$ (3)

І, отже: $3 - y^2 \geq 0, \quad y^2 \leq 3$.

Обидві частини рівняння (3) також піднесемо до квадрата. Отримаємо $3x^2 + y^4 = 9 - 6y^2 + y^4$.

Звідси: $x^2 + 2y^2 - 3 = 0$ (4)

Аналогічно з другого рівняння системи (2) отримаємо

$x^2 - 6x - y^2 + 6 = 0$ (5)

До рівняння (4) додамо почленно рівняння (5), домножене на 2. Будемо мати $3x^2 - 12x + 9 = 0$

Звідси $x^2 - 4x + 3 = 0$

$x_1 = 1, \quad x_2 = 3$

Із співвідношення $x^2 + 2y^2 = 3$ знаходимо, що коли x=1, то $y^2 = 1$ і тому $y = \sqrt{1} = 1$, бо при розв'язуванні ірраціональних рівнянь у множині дійсних чисел під коренем парного степеня з невід'ємного числа ми розуміємо арифметичний корінь.

Якщо x=3, то $y^2 = -3$. Отже, дійсних значень **у** не існує.

Звідси випливає, що тільки пара значень x=1, y=1 може бути розв'язком системи (1). Безпосередньою перевіркою переконуємося у правильності висновку.

Отже, задана система рівнянь у множині дійсних чисел має тільки один розв'язок x=1, y=1.

Відповідь: x=1, y=1.

Приклад 4 . *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{6x}} = \dfrac{5}{2}, \\ xy - x - y = 0; \end{cases}$$

Розв'язання. Введемо заміну: нехай $\sqrt{\dfrac{6x}{x+y}} = z.$

Тоді із першого рівняння системи запишемо:

$z + \dfrac{1}{z} = \dfrac{5}{2}$, звідки $z_1 = 2, \quad z_2 = \dfrac{1}{2}.$

Якщо $z = 2$, то маємо:

$\sqrt{\dfrac{6x}{x+y}} = 2$, або $\dfrac{6x}{x+y} = 4,$ звідки

$$6x = 4x + 4y,$$
$$x = 2y.$$

Підставимо знайдене значення x у друге рівняння системи. Будемо мати:

$2y^2-3y=0;$

$y(2y-3)=0,$

$y_1=\dfrac{3}{2}, \quad y_2=0.$

Значення $y_2=0$ не входить в область допустимих значень змінних. Якщо $y_1=\dfrac{3}{2}$, то $x_1=3.$

Аналогічно для $z_2=\dfrac{1}{2}$ будемо мати:

$x_2=\dfrac{24}{23}, y=24.$

Відповідь: $(3;\dfrac{3}{2}), (\dfrac{24}{23};24).$

Приклад 5. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ \sqrt{xy}=6;\end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $\sqrt{x}=a, \sqrt{y}=b$, тоді $a\geq 0, b\geq 0$.

Система набирає вигляду:

$$\begin{cases}a+b=5,\\ ab=6;\end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases}b=5-a;\\ a(5-a)=6;\end{cases}$$

або

$$\begin{cases}b=5-a,\\ a^2-5a+6=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}b=5-a,\\ (a-2)(a-3)=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1=2,\\ b_1=3;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x_1}=2,\\ \sqrt{y_1}=3;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=4,\\ y_1=9;\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_2=3,\\ b_2=2;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x_2}=3,\\ \sqrt{y_2}=2;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_2=9,\\ y_2=4;\end{cases}$$

Відповідь: (4, 9), (9, 4).

Приклад 6. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{y-3}=5,\\ x+y=37.\end{cases}$$

Розв'язання. Введемо позначення $\sqrt[3]{x+1}=p,$ $\sqrt[3]{y-3}=q,$ тоді $x+1=p^3,$ $y-3=q^3.$

Додаючи почленно ці рівняння, матимемо:

$x+y-2=p^3+q^3$, або $x+y=2+p^3+q^3$.

З другого рівняння системи маємо: $37=2+p^3+q^3$, або $p^3+q^3=35$.

Візьмемо до уваги тотожність

$(p+q)^3=p^3+q^3+3pq(p+q)$ і підставимо замість p^3+q^3 і $p+q$ їх значення, а саме: $p^3+q^3=35,$ $p+q=5.$

Отже, $5^3=35+3pq\cdot 5;$ $15pq=90;$ $pq=6.$

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}p+q=5;\\ pq=6,\end{cases}$$

Звідки $p_1=2,$ $q_1=3,$ $p_2=3,$ $q_2=2.$

Повернемось до невідомих x і y:

$\sqrt[3]{x+1}=2,$ $x+1=8;$,

$\sqrt[3]{y-3}=3,$ $y-3=27;$

$\sqrt[3]{x+1}=3,$ $x+1=27;$

$\sqrt[3]{y-3}=2,$ $y-3=8.$

Отримаємо дві системи рівнянь:

$$\begin{cases}x+1=8,\\ y-3=27;\end{cases}, \quad \text{та} \quad \begin{cases}x+1=27,\\ y-3=8.\end{cases}$$

Розв'язками першої системи є $x=7,$ $y=30,$

а другої $x=26,$ $y=11.$

Відповідь: (7;30), (26;11).

РОЗДІЛ 3. Експериментальні дослідження щодо навчання розв`язуванню ірраціональних рівнянь та нерівностей різних рівнів складності

3.1 Розв’язання ірраціональних рівнянь з точки зору аналітичної геометрії

***Приклад* 1.** *Розв’язати рівняння:*

$$\sqrt{x+7}-x-1=0. \qquad (1)$$

*Розв’язання***.** Звичайне алгебраїчне розв’язання буде таким:

$x+7=(x+1)^2,$

або $$x^2+x-6=0.$$

Це квадратне рівняння має корені: $x_1=2, x_2=-3.$

Перший корінь $x_1=2$ задовольняє дане ірраціональне рівняння, а другий корінь його не задовольняє і є стороннім.

Розглянемо геометричний зміст отриманих результатів. Запишемо дане рівняння у вигляді $\sqrt{x+7}=x+1$

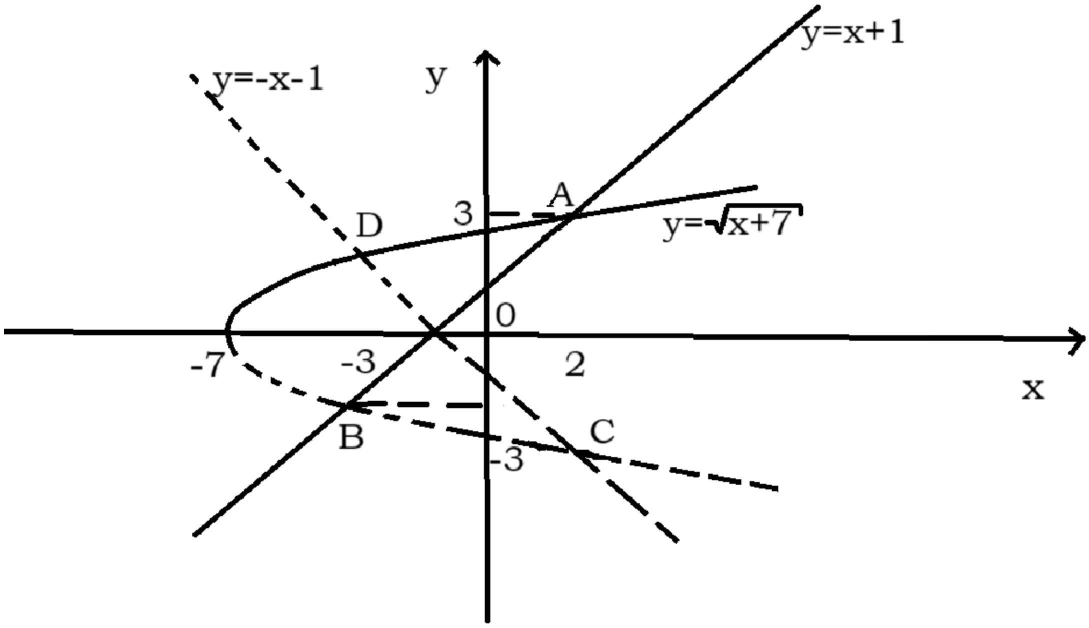
і розглянемо рівняння двох кривих:

$$y=\sqrt{x+7} \qquad (a)$$

та $$y=x+1\ . \qquad (b)$$

Розв’язком даного рівняння будуть абсциси точок перетину даних кривих. З’ясуємо, що це за криві. Перша крива - це «верхня половина» параболи: $$y^2=x+7, \qquad (2)$$

рівняння якої було отримане піднесенням до квадрату обох частин вказаного вище рівняння (a). Друге рівняння визначає пряму $y = x + 1$ (мал.18).



Мал.18

Верхня частина параболи і дана пряма мають лише одну точку перетину A(2;3). Абсциса цієї точки і є коренем даного ірраціонального рівняння (так як рівняння (1) при $x = 2$ перетворюється в тотожність).

Що ж відбувається в результаті піднесення до квадрату обох частин ірраціонального рівняння? Замість «пів параболи» (a) перейдемо до розгляду «цілої параболи» (2), а замість прямої (b) перейдемо до розгляду пари прямих:

$y^2 = (x+1)^2$, (3)

або $y = x + 1$ та $y = -x - 1$ (прямі AB і CD).

Абсциси точок перетину двох кривих (2) і (3) і дають корені піднесеного до квадрата ірраціонального рівняння (мал.18), на якому пунктиром позначені криві, або частини кривих, отриманих у результаті піднесення обох частин ірраціонального рівняння до квадрата: нижня частина параболи і нова пряма $y = -(x+1)$). На малюнку видно, що маємо три нові точки перетину: точку B (з абсцисою $x_2 = -3$) перетину прямої з нижньою віткою параболи та точки *C* і *D* перетину нової прямої з параболою.

Але точка *D* симетрична з точкою *B*, а точка *C* симетрична з точкою *A* (відносно осі Ox). Звідси, абсциси в точок *A* і *D* та відповідно у точок *B* і *C* однакові. Тому можемо не брати до уваги двох з них, наприклад точок *C* і *D*, так як тут цікавлять не нові точки, а їх абсциси. В результаті можемо сказати, що піднесення обох частин ірраціонального рівняння до квадрату привело до появи нової точки *B* перетину початкової прямої (b) з утвореною частиною параболи $y = -\sqrt{x+7}$, тобто призвело до появи нового, зайвого кореня в даному рівнянні, що є абсцисою $x_2 = -3$ точки *B*, яка не задовольняє початкове ірраціональне рівняння.

Приклад 2. *Розв'язати рівняння* $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-3}$.

Розв'язання. Підносячи обидві частини рівняння до квадрату, отримаємо $x+1 = 2x-3$.

Звідси $x = 4$.

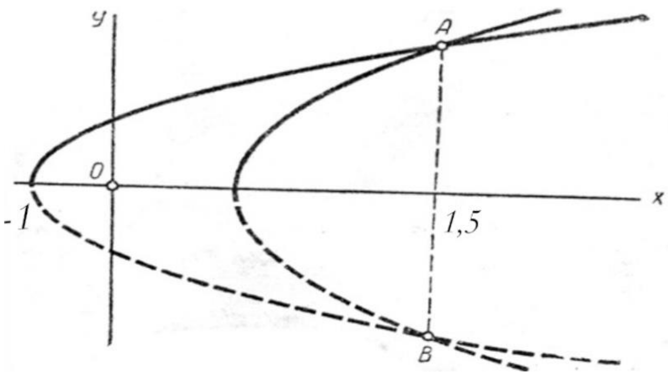
Цей корінь задовольняє ірраціональне рівняння. Ми не отримали зайвого кореня. Розглянемо геометричний зміст цього результату. Запишемо рівняння відповідних кривих:

$y = +\sqrt{x+1}$ і $y = +\sqrt{2x-3}$.

Розв'язками даного ірраціонального рівняння будуть абсциси точок перетину кривих. Ці криві будуть верхніми пів параболами (мал.19). Вони перетинаються в одній точці A з абсцисою, рівною 4. Після піднесення обох частин рівняння до квадрату маємо справу, мовою геометрії кажучи, з відшуканням абсцис точок перетину «цілих» парабол:

$$y^2 = x+1,$$
$$y^2 = 2x-3.$$

Вони перетинаються у двох точках A і B, симетричних відносно осі Оx і тому мають одну і ту ж абсцису $x = 4$. Отже, нових коренів (нових абсцис точок перетину парабол) при піднесенні обох частин ірраціонального рівняння до квадрату не появилося.



Мал.19

***Приклад* 3.** *Розв'язати рівняння* $\sqrt{1-x} = \sqrt{3-2x}$.

*Розв'язання***.** Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату. Будемо мати $1 - x = 3 - 2x$,

звідки $x = 2$.

Підставляючи значення $x = 2$ у рівняння, отримаємо:

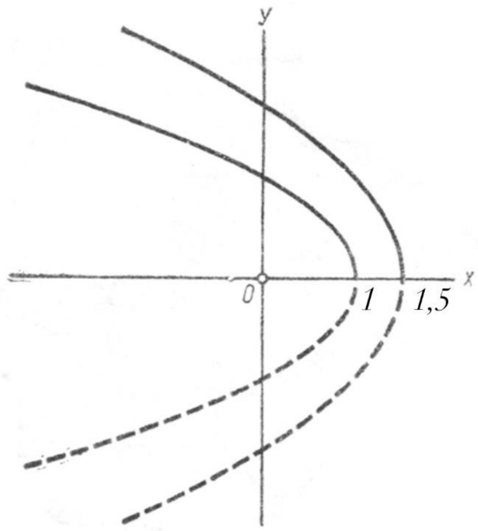
$\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$.

Це свідчить, що дане рівняння не має розв'язків, так як вираз $\sqrt{-1}$ не має змісту у множині дійсних чисел. Розглянемо геометричний зміст цього результату. Криві $y = \sqrt{1-x}$ та $y = \sqrt{3-2x}$ є верхніми частинами парабол (мал.20). Вже з малюнка видно, що вони не перетинаються (при $x = 2$ маємо $y = \sqrt{-1}$, тобто ордината точки перетину уявна, точок перетину немає). Після піднесення обох частин ірраціонального рівняння до квадрату, будемо мати справу з кривими:

$y^2 = 1 - x$ та $y^2 = 3 - 2x$,

але і ці «повні» параболи також не перетинаються, так як при $x = 2$ рівняння $y^2 = -1$ визначає уявне значення y.

Отже, ні півпараболи, ні «повні» параболи не перетинаються. Дане ірраціональне рівняння розв'язків не має.



Мал.20

Тут, як і в попередніх випадках, геометричний аналіз задачі дозволяє наочно виявити розв'язки рівняння, або переконатися, що їх не існує.

Така різносторонність, такий підхід до розв'язання з різних точок зору – алгебраїчної та геометричної – дозволяє найбільш глибоко дослідити питання, яке вивчається.

3.2 Методичні рекомендації щодо розв'язування завдань підвищеної складності

3.2.1 Застосування теореми Вейерштрасса

Розглянемо ірраціональні рівняння, для розв'язування яких використовується *теорема Вейерштрасса*:

Якщо послідовність монотонна та обмежена, то вона має границю.

Доведемо, що послідовність

$$(a_n), \text{де } a_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}, a > 0$$

збігається та обчислимо її границю.

Очевидно, що $\sqrt{a} < \sqrt{a + \sqrt{a}} < \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}} < \cdots$, тобто послідовність чисел $\sqrt{a}, \sqrt{a + \sqrt{a}}, \ldots$ зростає.

Покажемо, що вона обмежена:

$a_n^2 = a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}} = a + a_{n-1} < a + a_n.$

З нерівності $a_n^2 - a_n - a < 0$ (враховуючи що $a > 0$ і $a_n > 0$) маємо: $a_n < \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, тобто послідовність обмежена.

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$. Тоді і $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = x$. Здійснивши граничний перехід у рівності $a_n^2 = a + a_{n-1}$, дістанемо: $x^2 = a + x$. Звідси $x = \frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$. Оскільки границя зростаючої послідовності з додатними членами не може бути від'ємним числом, то $x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

***Приклад* 1.** $\sqrt{x + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}} = x.$

Т запишемо його у вигляді: $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}} = x^2 - x.$

Ще раз піднесемо обидві частини рівняння до квадрату і використаємо теорему Вейерштрасса:

$$2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2} + \cdots}} = (x^2 - x)^2.$$

Оскільки $2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=x^2-x$, то рівняння матиме вигляд $(x^2-x)^2-(x^2-x)=2$. Розв'яжемо дане рівняння як квадратне відносно (x^2-x). Тоді будемо мати:

$$x^2-x=2 \text{ або } x^2-x=-1$$

Друге рівняння не має дійсних коренів, а для першого маємо:

$$x^2-x-2=0,$$

$$x_1=2, x_2=-1.$$

Корінь -1 не задовольняє дане рівняння.

Відповідь: x=2.

***Приклад* 2.** *Розв'язати рівняння* $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+2}}}=2.$

*Розв'язання***.** Замість числа 2, що під коренем, підставимо його значення (ліва частина рівняння), будемо мати:

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+2}}}}}}=2.$$

Продовжуючи необмежено цей процес, отримаємо ряд, який містить нескінченну кількість членів:

$$x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}=4, \text{ де } \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}}=2.$$

Використовуючи теорему Вейерштрасса, матимемо:

$$x+2=4$$

$$x=2.$$

Відповідь: x=2.

3.2.2 Однорідні рівняння та рівняння, що зводяться до них

Рівняння виду

$a_0 f^n(x) + a_1 f^{n-1}(x) g(x) + \cdots + a_{n-1} f(x) g^{n-1}(x) + a_n g^n(x) = 0,$ де $n > 1$ −натуральне число, $a_0 \neq 0, f(x)$ *і* $g(x)$ - деякі функції, називають *однорідними* відносно функцій $f(x)$ *і* $g(x)$.

***Приклад* 1.** *Розв'язати рівняння* $\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x-3}}{\sqrt[4]{(2x-1)(x-3)}} = \frac{8}{3}$.

*Розв'язання***.** Поділимо почленно чисельник на знаменник, дістанемо:

$$\sqrt[4]{\frac{2x-1}{2x-3}} - \sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x-1}} = \frac{8}{3}.$$

Введемо заміну $\sqrt[4]{\frac{2x-1}{2x-3}} = y, y \geq 0$.

Тоді $y - \frac{1}{y} = \frac{8}{3}$, або $y^2 - \frac{8}{3}y - 1 = 0$,

або $3y^2 - 8y - 3 = 0$.

Звідси $y_1 = 3, y_2 = -\frac{1}{3}$.

Другий корінь не задовольняє умову $y \geq 0$. Повертаємось до заміни:

$$\sqrt[4]{\frac{2x-1}{2x-3}} = 3,$$

$$\frac{2x-1}{2x-3} = 81,$$

$$2x - 1 = 162x - 243,$$

$$x = \frac{121}{80}, x = 1\frac{41}{80}.$$

Відповідь: $x = 1\frac{41}{80}$.

***Приклад* 2.** *Розв'язати рівняння* $\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}} + \sqrt[3]{\frac{x+3}{x-2}} = \frac{10}{3}$.

*Розв'язання***.** Запишемо праву частину рівняння у вигляді суми $3 + \frac{1}{3}$, будемо мати сукупність двох рівнянь:

$$\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}} = 3; \ \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}} = \frac{1}{3}.$$

Розв'язуючи ці рівняння, отримаємо:

$$x_1 = -\frac{83}{26}, x_2 = \frac{57}{26}.$$

Відповідь: $-\frac{83}{26}, \frac{57}{26}$.

Французький математик Н. Шюке (1445-1500) у праці «Наука про число» сформулював правила розв'язування ірраціональних рівнянь. Книга Н. Шюке вийшла друком лише у 1848 році.

3.2.3 Метод похідної пропорції

Нехай два різні алгебраїчні дроби утворюють пропорцію $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, де a, b, c, d многочлени відносно $x, y, \dots, z,$ зокрема $b \neq 0, d \neq 0$.

Теорема. *Якщо задана пропорція* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $b \neq 0, d \neq 0$, *то справджуються рівності:*

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \qquad (1)$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \qquad (2)$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \qquad (3)$$

які називають похідними пропорціями.

*Доведення****.*** За умовою $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, тоді $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$, звідки $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, тобто ми отримали першу рівність з даної теореми.

Із пропорції $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ матимемо:

$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$, звідки $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

Тобто і друга пропорція доведена.

Поділимо пропорцію (1) на (2), матимемо:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

Теорему доведено.

Приклад. *Розв'язати рівняння*

$$\frac{2x^2 - x - 2 + x\sqrt{x^2 - x - 2}}{2x^2 - x - 2 - x\sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{19}{7}.$$

*Розв'язання***.** Складемо похідну пропорцію (3).

$$\frac{4x^2 - 2x - 4}{2x\sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{26}{12};$$

$$\frac{2x^2 - x - 2}{2x\sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{13}{12}.$$

Запишемо отримане рівняння у вигляді:

$$\frac{\sqrt{(x^2 - x - 2)^2 + x^2}}{2x\sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{13}{12}.$$

Ще раз складемо пропорцію (3), матимемо:

$$\frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)^2}{(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)^2} = 25,$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - x - 2} + x}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x} = \pm 5.$$

Розв'яжемо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{x^2 - x - 2} + x}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x} = 5, \\ \dfrac{\sqrt{x^2 - x - 2} + x}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x} = -5. \end{array}\right.$$

У кожному з цих випадків ще раз складемо похідну пропорцію (3). Матимемо:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2\sqrt{x^2 - x - 2}}{2x} = \dfrac{6}{4}, \\ \dfrac{2\sqrt{x^2 - x - 2}}{2x} = \dfrac{-6}{-4}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2} = \dfrac{9}{4}, \\ \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2} = \dfrac{4}{9}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 5x^2 + 4x + 8 = 0, \\ 5x^2 - 9x - 18 = 0. \end{array}\right.$$

Перше рівняння сукупності не має дійсних корені.

З другого рівняння будемо мати: $x_1 = 3, x_2 = -1.2$.

Перевіркою встановлюємо, що $x_2 = -1.2$ не задовольняє рівняння.

Відповідь: x=3.

3.3 Роль інформаційних технологій для організації навчально-пізнавальної діяльності учня

3.3.1 Використання ІКТ при навчанні математики

В умовах сучасної національної системи освіти зростає роль інформаційно-комунікаційних технологій. Одним із перспективних напрямів інформатизації шкільної математичної освіти є використання в навчальному процесі програмних засобів навчання, зокрема систем динамічної математики і програм для роботи з графіками функцій, геометричними фігурами.

Інноваційно-інвестиційний характер функціонування і розвитку СО базується на основних положеннях національної стратегії розвитку освіти в Україні на 2012-2021 роки, на широкому і всебічному використанні в усіх підсистемах СО методів і засобів інформатики, інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) – провідних технологій інформаційного суспільства і майбутнього, насправді недалекого суспільства знань. У національній стратегії розвитку освіти в Україні визначено, що «Пріоритетом розвитку освіти є впровадження ІКТ, що забезпечують удосконалення навчально-виховного процесу, доступність та ефективність освіти, підготовку молодого покоління до життєдіяльності в інформаційному суспільстві».[25].

Важливим завданням шкільної освіти є подання логічно структурованого матеріалу з елементами графічного представлення для швидкого сприйняття та опрацювання учнями необхідної інформації.

Візуалізація навчальної інформації, комп'ютерне моделювання досліджуваних об'єктів, організація «математичного експерименту» для аналізу та дослідження математичних закономірностей чи властивостей об’єктів має велике значення для сприйняття та засвоєння учнями нового матеріалу. Із середини 90-х років минулого століття в Україні почали активно використовувати ІКТ при навчанні математики.

Науковець М. Жалдак зауважує, що можна виділити два типи педагогічних програмних засобів (ППЗ): ППЗ, розраховані на зменшення часу спілкування учня і вчителя або й на навчання зовсім без вчителя, та ППЗ, розраховані на якомога інтенсивніше спілкування учнів і вчителя за рахунок ефективного використання засобів ІКТ і звільнення учнів від необхідності витрачати значний час на виконання технічних, рутинних операцій, коли вони практично не спілкуються з учителем. Вивільнений час міг би бути використаний на постановку проблем, з’ясування разом з учителем сутності досліджуваних процесів і явищ, розробку відповідних інформаційних моделей, встановлення причинно-наслідкових зв’язків і закономірностей, порівняння різноманітних проявів закономірностей, їх аналіз і синтез узагальнюючих висновків, абстрагування від окремих несуттєвих фактів та ознак тощо. Це має важливе значення як для фундаменталізації знань, так і для надання результатам навчання прикладного, практично значущого характеру [16].

Для супроводу навчального матеріалу можна ефективно використовувати інструментальні засоби, такі, як GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D, DG, Advanced Grapher та KmPlot. Для розв’язування задач з параметрами ефективно застосовувати програму GRAN-1, що сприяє полегшенню засвоєнню матеріалу. Динамічні моделі об’єктів, створених у середовищі ППЗ GRAN- 2D, є потужними засобами освоєння геометричної дійсності, вдало доповнюють арсенал традиційних засобів навчання математики, геометрії. Проте з багатьох причин використання цих програм у загальноосвітніх навчальних закладах не набуло системного характеру.

Можливості використання комп’ютера для супроводу навчання математики в середніх навчальних закладах широкі. За допомогою комп’ютера можна розв’язувати різного роду задачі з алгебри і початків аналізу, геометрії, елементів статистики, що зводяться до відшукання розв’язків рівнянь і нерівностей та їх систем, дослідження функцій, обчислення визначених інтегралів, статистичного опрацювання експериментальних даних та ін. [15].

Важливе місце серед ІКТ посідають мобільні навчальні середовища, надаючи певні «свободи» учням, учителям, організаторам освіти щодо здійснення ними навчальної та організаційної діяльності, системи відкритої освіти водночас є системами керованими, створення і використання яких підпорядковане цілям освіти на певних етапах її розвитку. Відкрите навчальне середовище лише допомагає реалізувати основні принципи відкритої освіти.

Швидкий розвиток ІКТ, поширення нових методичних систем навчання створюють умови для необмеженого (повного, швидкого, точного, будь-коли і будь-де, з мінімальними зусиллями та ін.) доступу всіх суб’єктів навчання до електронних інформаційних освітніх ресурсів (ЕОР). Цей процес набуває все більших масштабів та інтенсивності, а його результати переконують, що для ІКТ не існує альтернативи в сучасному світі [5].

3.2.4 Розв’язування ірраціональних рівнянь та нерівностей за допомогою програми GeoGebra

Створення інформаційного навчального середовища, яке б відповідало новим вимогам якості освіти, зберігало традиційні методи навчання та використовувало нові прогресивні методи, є важливою складовою організації навчальної діяльності учнів.

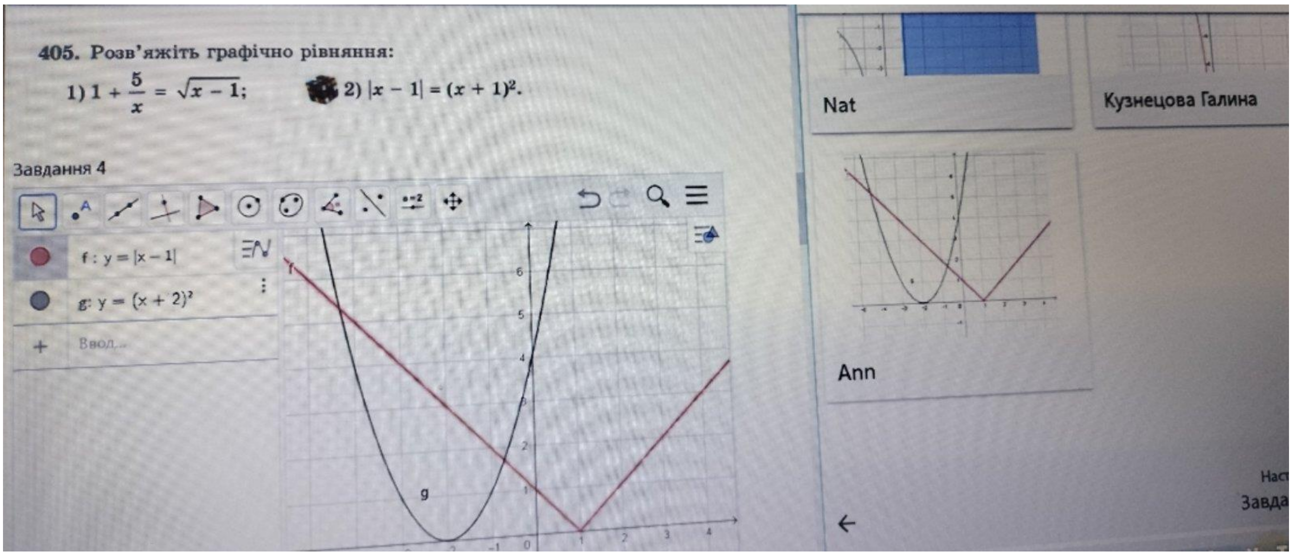
Серед існуючих математичних пакетів важливе місце посідає безкоштовна програма GeoGebra. Програма написана Маркусом Хохенвартером мовою Java, працює у великій кількості операційних систем. Перекладена на 39 мов. Програма багатопрофільна. Вона може будувати графіки функцій та плоскі фігури на полотні 2D, об'ємні фігури та їх комбінації на полотні 3D та розв'язувати достатньо широкий клас задач. Вагомим аргументом щодо впровадження системи GeoGebra в процес навчання математики є вільне поширення програмного продукту. Програма GeoGebra може використовуватися як засіб візуалізації досліджуваних математичних об'єктів, функцій, виразів, ілюстрації побудови розв'язків; може виступати середовищем для моделювання та дослідження властивостей математичних об'єктів; використовуватися як інструментально-вимірювальний комплекс, що надає користувачеві набір спеціалізованих інструментів для створення і перетворення об'єкта, а також вимірювання його заданих параметрів.

Використання системи GeoGebra сприяє візуалізації об'єкта дослідження, демонстрації його властивостей; оформленню навчального матеріалу ілюстраціями (статичними і динамічними зображеннями, графіками, схемами, таблицями), у тому числі різного педагогічного призначення (для формування інтересу учнів до теми пропонованого заняття, візуального супроводу або пояснення виконуваних виразів, демонстрації прикладів застосування здобутих знань у житті) [14]

GeoGebra є середовищем розробки та дослідження, яким дуже зручно користуватися при графічному розв'язуванні рівнянь, зокрема ірраціональних.

На основі аналізу програми з математики можна зробити певні висновки. У 7 класі детально розглядається тема «Лінійне рівняння з двома змінними та його графік» розв'язуються рівняння та системи з двома змінними, проводяться чіткі паралелі між рівняннями з двома змінними та рівняннями лінійних функцій. Тут вчаться будувати графіки цих рівнянь, використовують графіки для розв'язування рівнянь. Проте далі, до 10 класу, ця тема з програми і з підручників майже зникає. І лише в 10 класі з'являється як один із методів розв'язування рівнянь з використанням властивостей функцій. Вже в 11 класі більш детально розглядається розв'язування рівнянь з використанням властивостей функцій.

Варто зауважити, що однією із найскладніших тем для сприйняття та виконання практичних завдань, а також у процесі підготовки до ЗНО є функції. Труднощі викликають і складні рівняння. Тому, очевидно, було б добре поєднати ці дві теми і розглядати їх одразу з 7 класу впродовж вивчення різних функцій, впродовж всього вивчення різних рівнянь. Саме цьому може допомогти застосування GeoGebra

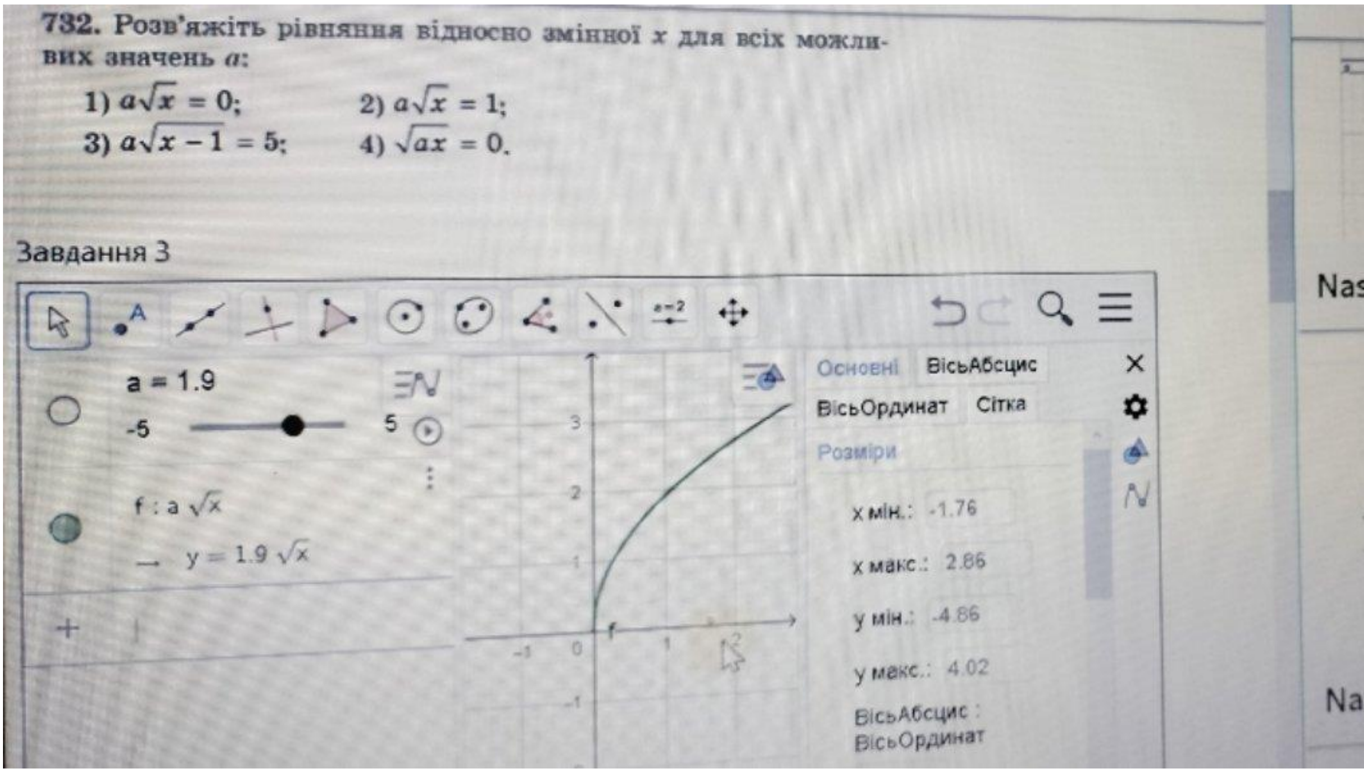


.

На зображенні проілюстровано як можна використовувати властивості функції, GeoGebra та можливості побудови і рівняння впродовж всього курсу вивчення математики.

Рівняння з параметрами завжди сприймаються учнями як найскладніші. Адже тут потрібно розглянути різні можливі випадки, залежно від значень параметра; дослідити, коли рівняння має розв’язки, коли не має зовсім, коли їх безліч. Проте за допомогою GeoGebra їх розв’язання значно спрощується, стає зрозумілішим, наочним. За допомогою повзунка, ми можемо візуалізувати кожен випадок.

Наприклад, при розв’язанні рівняння $a\sqrt{x} = 0$ відносно змінної x для всіх можливих значень a, дуже зручно пояснити учням різні можливі випадки за допомогою GeoGebra. Надаючи різних значень параметру a, учні мають змогу проаналізувати отримані результати у візуальному супроводі, краще зрозуміти та усвідомити залежність розв’язків рівняння від значень параметра.



Розглянемо ще приклад завдання з параметром.

Знайти всі значення параметра a, *при яких множиною розв'язків нерівності*

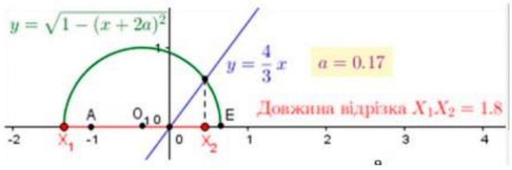
$$\sqrt{1-(x+2a)^2} \geq \frac{4}{3}x$$

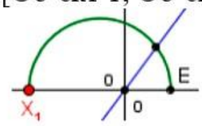
буде відрізок довжиною $\frac{9}{5}$.

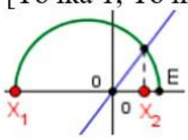
У таблиці подаємо порівняльний аналіз схеми традиційного розв'язання нерівності за допомогою математики та її розв'язання за допомогою GeoGebra. Маємо можливість проаналізувати розв'язання нерівності за допомогою двох різних методичних прийомів, виявити їх переваги та недоліки. Переконуємося у тому, що саме візуалізація навчальної інформації, комп'ютерне моделювання досліджуваних ірраціональних рівнянь та нерівностей, організація «математичного експерименту» для аналізу та дослідження їх математичних закономірностей чи властивостей має велике значення для сприйняття та засвоєння учнями нового матеріалу.

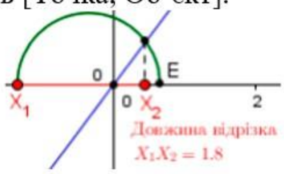
Схема розв'язання нерівності та аналізу розв'язку

<table>
<tr><th>Дослідження за допомогою математики</th><th>Дослідження за допомогою системи GeoGebra</th></tr>
<tr><td>Для розв'язання нерівності необхідно побудувати два графіки функцій $y=\sqrt{1-(x+2a)^2}$ (півколо з радіусом, рівним 1, центр якого рухається по осі абсцис) та $y=\frac{4}{3}x$ (пряма, яка зростає і проходить через початок координат). Розв'язок нерівності буде існувати тоді, коли точки півкола будуть знаходитися вище відповідних точок прямої.


</td>
<td>На полотні розмістити повзунок a.
Після цього побудувати півколо $y=\sqrt{1-(x+2a)^2}$ та пряму $y=\frac{4}{3}x$.

Знайти точку перетину двох функцій та перетин функцій з віссю OX:
Перетин [Об'єкт 1, Об'єкт 2].


Провести перпендикуляр до осі OX з точки перетину двох функцій.
Перпендикулярна пряма [Point, Line].
Побудувати відрізок X_1X_2.
Відрізок [Точка 1, Точка2].


Знайти довжину відрізка X_1X_2.
Відстань [Точка, Об'єкт].

</td></tr>
</table>

Висновки

У магістерській роботі досліджуються проблеми методики викладання ірраціональних рівнянь та нерівностей в шкільному курсі математики. Визначено певні методичні рекомендації щодо вивчення даної теми: проводити пропедевтичну роботу, підводити учнів до інтуїтивного розуміння суті ірраціонального рівняння та нерівності, і на основі цього вводити означення та основні терміни. Полегшенню сприйняття та засвоєння матеріалу сприяють завдання і вправи, розв’язуючи які, учні вчаться самостійно робити висновки, знаходити раціональні способи розв’язання, узагальнювати, систематизувати свої знання. Саме цьому сприяють динамічні навчальні програми з математики, серед яких розглянута нами GeoGebra.

Автором проаналізовано функціональні можливості системи динамічної математики з точки зору інноваційності та перспектив її використання в освітньому процесі. Розглянуто можливість організації емпіричного дослідження властивостей математичних об’єктів. Наведено окремі приклади застосування програми динамічного математичного моделювання GeoGebra до деяких типів завдань та методичні особливості використання інтерактивного математичного середовища. Проаналізовано, що в процесі навчання математики система GeoGebra використовується як засіб для візуалізації досліджуваних математичних об’єктів, виразів, ілюстрації методів побудови; як середовище для моделювання та «математичного експерименту» для виявлення властивостей досліджуваних об'єктів; як інструментально-обчислювальний комплекс. Підтверджено важливість впровадження теорії розв’язування дослідницьких задач з використанням інформаційно-комунікаційних технологій, що сприятиме зацікавленню учнів процесом навчання, розвитку дослідницької діяльності школярів, підвищенню їх розумової активності.

Список використаних джерел

1. Бевз Г.П. Методика викладання математики. К.: Вища школа, 1989 .

2. Бевз Г.П. Нерівності . Математика в школі.2009. № 1 – 2. С. 23 – 27.

3. Белешко Д.Т. Розв'язуємо ірраціональні рівняння та нерівності. Навч. пос. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. 80с.

4. Бень Н. Компетентність і компетенції в результатах. Відкритий урок: розробки, технології, досвід. 2012. № 2. С. 26-31.

5. Биков В.Ю. Упровадження інформаційно-комунікаційних технологій в освіті – імператив її модернізації. Національна доповідь розвитку освіти України, 2011. – С. 118-124.

6. Боремчук М.М. Використання мультимедійних засобів у сучасній освіті . Електрон. дані. – 2012. Електронний ресурс: Режим доступу: http://intkonf.org/boremchuk-mm-vikoristannya-multimediynih-zasobiv-u-suchasniy-osviti/

7. О.І.Бородін. Історія розвитку поняття про число і системи числення. Вид-во: Радянська школа, 1968. 87с.

8. Булинко Г. Основні способи розв'язування ірраціональних рівнянь: підготовка до ДПА і ЗНО. Математика. Шкільний світ. 2014. № 23. С.18 – 23.

9. Горошко, Ю. В., & Вінниченко Є. Ф. (2008). Розв'язування задач з параметрами за допомогою програми «GRAN-1». Математика в школі, 7–8(84). 25-28.

10. Гече Ф.Е. Збірник конкурсних тестових завдань з математики. – Ужгород: В-во «Shark», 2015. – 238с.

11. Григор'єв А.М. Ірраціональні рівняння. Квант.1972 . № 1. С.46-49.

12. Електронні засоби навчання . Розроблено Компанією СМІТ за фінансової підтримки Міністерства освіти і науки України в рамках Державної програми «Інформаційні та комунікаційні технології в освіті і науці» в 2007–2008 рр. Електронний ресурс: Режим доступу: http://www.eleamingpto.gov.ua.

13. Єгоров Г. Ірраціональні рівняння. Математика. Перше вересня. 2002. № 5. С.9-13.

14. Єгоров Г. Ірраціональні нерівності. Математика. Перше вересня. 2002. №15. С.13-14.
15. Жалдак М.І., Лапінський М.І., Шут М.І. Комп`ютерно-орієнтовані засоби навчання математики, фізики, інформатики: посібник для вчителів. Київ: НПУім. М. П. Драгоманова, 2004. 182 с.
16. Жалдак М. І., Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф. Математика з комп`ютером: посібник для вчителів. Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2015. 280 с.
17. Жалдак, М. І. (2011). Система підготовки вчителя до використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчальному процесі. Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 2: Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання, 11, 3-15.
18. О.Істер, О.Єргіна Алгебра і початки аналізу:(проф. рівень): підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти. Київ:Генеза. 2018. 448с.
19. Кушнір, В. А., & Ріжняк, Р. Я. (2009). Технологія дослідження математичних функцій засобами комп'ютерного моделювання.
20. Луциків І. Інноваційна взаємодія як метод активізації інноваційної діяльності Електронний ресурс: Режим доступу: http://elartu.tntu.edu.ua/bitstream/lib/21167/2/SEIED_2017_Lucykiv_IInnovation_interactionas_50- 53.pdf.
21. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглибл. рівні, проф рівень: підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти. Х.:Гімназія. 2018. 512с.
22. Мультимедійні технології навчання. Електронний ресурс: Режим доступу: https://sites.google.com/site/ikttatzn9050678/home/multimedijni-tehnologiie-navcanna.

24. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. Електронний ресурс: Режим доступу: https://www.google.com/search?q=%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%B

25. Національна стратегія розвитку освіти в Україні на 2012-2021 роки. Директор школи, ліцею, гімназії. 2011. №6. С. 25-43.

26. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підручник. Київ: Ранок, 2018. 328 с.

27. Ракута, В.М. (2010). Програми для роботи з функціями та графіками. Комп'ютер у школі та сім'ї, 7(87), 29-33.

28. Ренчківська В.В. Ірраціональні рівняння та нерівності, методи їх розв'язування. Методичний посібник . Електронний ресурс: Режим доступу: https://vseosvita.ua/library/metodicnij-posibnik-irracionalni-rivnanna-ta-nerivnosti-metodi-ih-rozvazuvanna-207737.html

29. Розвиток поняття про число. Електронний ресурс: Режим доступу: https://formula.co.ua/blog/rozvytok-ponyattya-pro-irratsionalni-chysla- v-zahidnij-evropi/

30. Сисоєва С.О., Баловсяк Н.В. Інформаційна компетентність фахівця: Теорія та практика формування. Навч.-метод. посіб. Чернівці : Технодрук, 2006. 208 с.

31. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. Закладів. Київ: Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.

32. Хохлова Л.Г., Хома-Могильська С.Г. Ірраціональні рівняння і нерівності: Навч.посіб..Тернопіль: Тайп. 2018. 72с

33. Шкіль І., Колесник Т. В., Хмара Т. М. Алгебра і початки аналізу. Підручник для учнів 10-11 класів з поглибл. вивч. математики в середніх закладах освіти.К.: Освіта. 2001. 327с.

Додаток А Біографічні відомості вчених

Карл Теодор Вільгельм Веєрштрасс

(нім. *Karl Theodor Wilhelm Weierstraß*) — німецький математик.

Народився 31 жовтня 1815 року в Остенфельді. Вивчав юридичні науки у Бонні та математичні в Мюнстері. Професор Берлінського університету (з 1856). Дослідження Веєрштрасса присвячені математичному аналізу, теорії функцій, варіаційному численню, диференціальній геометрії й лінійній алгебрі. Веєрштрасс розробив систему логічного обґрунтування математичного аналізу на основі побудованої ним теорії дійсних чисел.

У 1889році Веєрштрасс дуже захворів.

Помер 19 лютого 1897 року.

Ім'я Веєрштрасса носить математичний інститут у Берліні.

Міхаель Штифель

(нім. *Michael Stifel*, бл. 1487, Есслінгені-на-Неккарі -19квітня 1567, Єна)

Німецький математик, один з винахідників логарифмів, активний діяч протестантської реформації.

Штіфель зробив помітний внесок у розвиток алгебри. У його головній праці *Arithmetica integra* (Нюрнберг, 1544) він дав змістовну теорію від'ємних чисел, піднесення до степеня, різних прогресій та інших послідовностей. Штіфель уперше використав поняття «корінь» та «показник степеня» (лат. *exponens*), причому детально аналізував і цілі, і дробові показники. Опублікував правило утворення біноміальних коефіцієнтів та склав їх таблиці до 18-го степеня. Штіфель переробив (фактично написав заново) книгу алгебраїста (*коссіста*) Крістофа Рудольфа, і використані там сучасні позначення арифметичних операцій з цього моменту вкоренилися у математиці (1553).

Франсуа́ Віє́т

Французький математик, що запровадив сучасну систему нотації в алгебрі.

Народився 1540 року на півдні Франції у невеликому містечку Фонтене-ле-Конт провінції Пуату.

Головною пристрастю Вієта була математика. Він грунтовно вивчив твори класиків: Архімеда й Діофанта; найближчих попередників Кардано, Бомпеллі, Стевіна та інших. Вієта вони не лише захоплювали, у них він бачив велику ваду, яка полягала в складності розуміння через словесну символіку. Це заважало записувати, і, отже, вивчати в загальному вигляді алгебраїчні рівняння або якісь алгебраїчні вирази. Вієт довів можливість абстрагуватися від конкретних об’єктів та виконувати дії над числами, ввівши алгебраїчні символи (ще мало схожі на наші) та, оперуючи якими, можна отримати результат, що допоможе розв'язати задачу в загальному вигляді. Це поклало початок докорінним змінам у розвитку алгебри: стало можливим символьне обчислення. Не випадково, що за це Вієта називають «батьком» алгебри, основоположником літерної символіки.

Особливо пишався Вієт відомою теоремою про залежність між коренями квадратного рівняння та його коефіцієнтами.

14 лютого 1603 року Вієт, який визнавася людиною великого розуму і розсудливості, один з найвченіших математиків століття, помер у Парижі.

Джон Валліс, точніше — **Волліс**

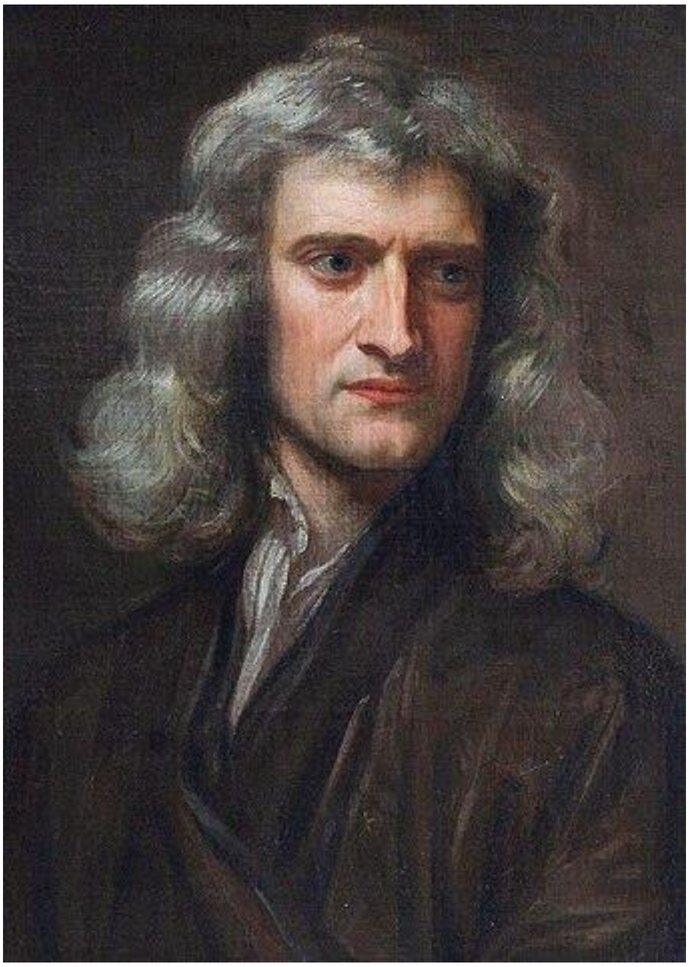
(англ. *John Wallis*; 23 листопада (3 грудня) 1616 — 28 жовтня (8 листопада) 1703)

Англійський математик XVII століття. Валліс отримав значні результати у математичному аналізі, геометрії, тригонометрії, теорії чисел.

У 1655 Валліс видав великий трактат «Арифметика нескінченного» (лат. *Arithmetica Infinitorum sive Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaque Difficiliora Matheseos Problemata*), де ввів придуманий ним символ нескінченності. У книзі він сформулював строге визначення межі змінної величини, продовжив багато ідей Декарта, вперше ввів від'ємні абсциси, обчислив суми нескінченних рядів — власне інтегральні суми, хоча поняття інтеграла тоді ще не було.

Він творчо переробив досягнення алгебри від Вієта до Декарта. У1685 році опублікував значно доповнений «Трактат з алгебри», який історики розцінюють як алгебраїчну енциклопедію свого часу. Трактат містив, серед іншого, докладну теорію логарифмів, розкладання бінома, наближені обчислення, а також геометричну інтерпретацію комплексних чисел, що залишилася непоміченою сучасниками.

Праці Валліса справили велике враження на молодого Ньютона.



Ісаа́к Нью́то́н[

(англ. *Sir Isaac Newton* **(сер Айзек Ньютон**)

(4січня 1643, Вулсторп, Лінкольншир, Королівство Англія — 31 березня 1727, Лондон)

Англійський науковець, який заклав основи сучасного природознавства, творець класичної фізики та один із засновників числення нескінченно малих. Ньютон був серед початківців числення нескінченно малих, і в останні роки свого життя вів суперечку з Лейбніцом за пріоритет у цій сфері. Його математичні дослідження почалися із узагальнення біному на випадок раціональних показників, що привело його до числових рядів.

Ньютону належить також ідея використання похідних для знаходження кореня нелінійного рівняння, чим зробив внесок у чисельний аналіз. Запропонований ним метод називають методом дотичних або методом Ньютона.

Додаток Б

Розробка уроку на тему: ***Розв'язування ірраціональних рівнянь***

(10 клас, профільний рівень)

Формування компетентностей:

предметна компетентність: удосконалити вміння розв'язувати ірраціональні рівняння; ознайомити з основними методами розв'язування ірраціональних рівнянь;

ключові компетентності:

- **спілкування державною мовою** – коректно вживати в мовленні математичну термінологію;
- **уміння вчитися впродовж життя** – визначати мету навчальної діяльності, відбирати й застосовувати потрібні знання та способи діяльності для досягнення цієї мети;
- **ініціативність і підприємливість** – генерувати нові ідеї, використовувати критерії раціональності, ефективності та точності з метою вибору найкращого рішення;

Форма проведення уроку: Урок-практикум.

Тип уроку: Урок комплексного застосування знань, умінь, навичок учнів.

Література

1. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., ЯкірМ.С. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглибл. рівні, проф рівень: підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти. Х.:Гімназія. 2018. 512с.

2. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підручник. Київ: Ранок, 2018. 328 с.

3. Математика. Комплексна підготовка до ЗНО і ДПА / Уклад.: А.М. Капіносов та ін. Тернопіль: Підручники і посібники, 2018. 512 с.

Інтернет ресурси:

1. https://naurok.com.ua/metodichni-materiali-do-zanyattya-na-temu-rozv-yazuvannya-irracionalnih-rivnyan-277196.html
2. http://www. *interneturok.ru/ru/school/algebra/**10**-klass*
3. http://roippo.org.ua/upload/iblock/0eb/pos_bnik-po-dosv_du-ostrovets-_2_.pdf

ЗМІСТ І ХІД ЗАНЯТТЯ

№ ел.з.	Елементи уроку, питання, форми, методи навчання та засоби забезпечення уроку	Доповненн зміни, зауваженн
I.	**Організаційна частина** 1. Створення робочої атмосфери. 2. Організація уваги учнів. 3. Перевірка підготовки учнів до уроку.	
II.	**Актуалізація опорних знань** З'ясування незрозумілих питань домашнього завдання. 1. Бліц - опитування «Крок до зірок» (фронтальна форма) Під час вивчення нового матеріалу нам потрібні будуть опорні знання. Ваше завдання - показати ці знання. Проведемо «Бліц – опитування». • ***Що таке рівняння?*** (рівність зі змінною)	

	• ***Що означає розв'язати рівняння?*** (*знайти усі його корені або довести, що їх немає*) • ***Що називають коренем рівняння з однією змінною?*** (*значення змінної, яке перетворює це рівняння на правильну рівність*) • ***Скільки коренів може мати рівняння?*** (*один або декілька, безліч, взагалі не мати)* • ***Як перевірити чи є дане число коренем?*** (*підставити замість змінної в початкове рівняння*) • ***Які види рівнянь ви вмієте розв'язувати?***(*лінійні, квадратні, раціональні*) • ***Які рівняння називають рівносильними?*** (*якщо вони мають одні і ті ж самі корені*) • ***Яке рівняння називають рівнянням - наслідком?*** (*якщо кожен корінь першого рівняння є коренем другого, то друге рівняння є наслідком 1*) • ***Що таке область допустимих значень рівняння?****(спільна область визначення для функцій, які стоять у лівій і правій частинах рівняння)* • ***Що називають квадратним коренем із числа а?*** (*таке число b, квадрат якого =а*) • ***Що називають кубічним коренем із числа а?*** (*таке число b, куб якого = а*) • ***Що називають коренем n-го степеня?*** *(таке число b, n-ний степінь якого = а)* • ***Що називають підкореневим виразом?*** *(вираз, який стоїть під коренем)* • ***Яка різниця між ірраціональним виразом та ірраціональним числом?***	

	• ***При яких значеннях а має зміст вираз*** $\sqrt[2n+1]{a}$ ***?*** *(при всіх значеннях)* • ***При яких значеннях а має зміст вираз*** $\sqrt[2n]{a}$ ***?*** *(*$a \geq 0$*)* 2. <u>Розв'язування вправ.</u> Піднесіть до степеня 1) $(\sqrt{12})^2$; 2) $(\sqrt[5]{-243})^5$; 3) $(\sqrt[5]{2x-3})^5$; 4) $(\sqrt{x+4})^2$. Знайдіть область визначення функції 1. $y = \sqrt{x-8}$; 2. $y = \frac{14}{\sqrt{5+x}}$; 3) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+4}$.	
III.	**Мотивація навчальної діяльності студентів** Вам вже відомо, що розв'язування багатьох практичних задач в житті людини зводиться до складання математичної моделі цієї задачі і її розв'язання за допомогою рівнянь різного типу. Сьогодні на занятті ми з вами ознайомимося із основними методами розв'язування ірраціональних рівнянь. Ця тема актуальна, оскільки ірраціональні рівняння часто зустрічаються в завданнях ЗНО.	
IV.	**Оголошення теми, мети та плану заняття** Озвучується вчителем, запис на дошці. Девіз заняття. *Не кажи: «Не вмію», а кажи «Навчуся».*	

V. Вивчення навчального матеріалу. Удосконалення знань і вмінь

1. Означення ірраціонального рівняння

Означення. Рівняння, що містять невідоме під знаком кореня, називаються **ірраціональними.**

Наприклад, $\sqrt[3]{x+14} = 3$; $\sqrt{2x-8} = \sqrt{x-2}$; $\sqrt{x-1} = 2 - x$.

Розв'язування ірраціональних рівнянь ґрунтується на зведенні їх за допомогою деяких перетворень до раціонального рівняння. Як правило, підносять обидві частини ірраціонального рівняння до одного і того самого степеня (інколи декілька разів).

2. Основні методи розв’язування ірраціональних рівнянь:

- метод піднесення обох частин рівняння до степеня;
- метод введення нової змінної змінної.

3. Усні вправи:

Вкажіть, які рівняння є раціональними?

1) $\sqrt[5]{y-6} = -8$;

2) $\sqrt{x-12} = 8$;

3) $\sqrt{5}x - 3 = 9$;

4) $\sqrt{x-6} = 8 - x$;

5) $\sqrt{2}y^2 - y\sqrt[3]{27} = 3$;

6) $\sqrt{x+2} - \sqrt{4-x} = 5$.

<table>
<tr><td>VI.</td><td>
Формування вмінь та навиків
1. Завдання ЗНО
Завдання 1.1-1.3 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.
1.1. Вказати рівняння, яке не має коренів:
<table>
<tr><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr>
<tr><td>$\sqrt[3]{x+1}=-2$</td><td>$\sqrt{x+1}=-2$</td><td>$\sqrt{x+4}+\sqrt{x}=2$</td><td>$\sqrt{x+1}=0$</td><td>$-\sqrt{x+1}=-\sqrt{x}$</td></tr>
</table>
1.2. Сума коренів рівняння $x-6=\sqrt{3-x}$ дорівнює:
<table>
<tr><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr>
<tr><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>рівняння не має коренів</td></tr>
</table>
1.3. Вказати проміжок , якому належить більший корінь рівняння $\sqrt[3]{x^2-28}=2$.
<table>
<tr><td>А</td><td>Б</td><td>В</td><td>Г</td><td>Д</td></tr>
<tr><td>(- 6; - 3)</td><td>(- 3; 0)</td><td>(0; 3)</td><td>(3; 7)</td><td>інша відповідь</td></tr>
</table>
2. Інтерактивна вправа «Склади вислів».
<u>«За допомогою рівнянь і теорем, ми багато розв’яжемо проблем»</u>
</td><td></td></tr>
</table>

VII.	**Узагальнення та систематизація знань учнів** 1. *Інтерактивна гра «Незакінчене речення»* • Ірраціональними називаються рівняння, в яких змінна міститься … • Виявити сторонні корені в ірраціональному рівнянні можна, якщо … • При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня, отримаємо … • При піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня, отримаємо … • На уроці ми розглянули такі основні методи розв'язування ірраціональних рівнянь: … 2. *Експрес – перевірка «Графічний диктант»*	
VIII.	**Підведення підсумків. Мотивація та виставлення балів** 1. *Підведення підсумків заняття* На уроці ми вивчили означення ірраціонального рівняння. Познайомились з методами розв'язування ірраціональних рівнянь. Систематизували знання правил утворення рівносильних рівнянь. З'ясували випадки, коли необхідно обов'язково перевіряти одержані розв'язки підстановкою у дане рівняння. Розглянули приклади розв'язування найпростіших ірраціональних рівнянь. Набули навичок і вмінь розв'язувати ірраціональні рівняння різними способами. 2. *Рефлексія*.	

	3. *Оголошення балів*.	
IX.	**Домашнє завдання** 1. [3] – п.12, впр. 6-10. 2. Розв'язати завдання № 32,34, 40. 3.Творче завдання (проєкт).	

Додаток В

Використання інтерактивних інструментів при вивченні ірраціональних рівнянь та нерівностей (10 клас, профільний рівень**)**

Структура уроку на тему «Ірраціональні рівняння і нерівності»

Навчальне завдання уроку: Закріплення основних способів розв'язання ірраціональних рівнянь та нерівностей.

Корекційно-розвивальне завдання уроку:Розвивати навички використання математичних інструментів для перевірки правильності розв'язків.

Виховне завдання уроку: Виховувати в учнів цікавість до використання інтерактивних інструментів (GeoGebra) при розв'язанні ірраціональних рівнянь та нерівностей.

Обладнання:

- Комп'ютери або планшети з доступом до інтернету.
- Програмне забезпечення GeoGebra або доступ до його вебверсії.
- Проєктор або інтерактивна дошка.

Хід уроку

1. **Організаційний момент (**5 хвилини**)**
   - Привітання.
   - Перевірка готовності до уроку.
   - Ознайомлення з темою уроку та формулювання завдань.
2. **Актуалізація опорних знань (**10 хвилин**)**
   - Бесіда про типи рівнянь, які учні вже вивчали.
   - Повторення типів ірраціональних рівнянь і нерівностей та способів їх розв’язання.
   - Обговорення необхідності обмеження області визначення таких рівнянь (коли значення підкореневого виразу мають бути невід'ємними).

Завдання:

- Записати приклад ірраціонального рівняння на дошці:

$$\sqrt{x-3}+2=7$$

- З’ясувати, якого значення може набувати змінна x, і розв’язати рівняння.

- Повторення загального підходу до розв'язування ірраціональних рівнянь:
  1. Обмеження області визначення.

2. Піднесення обох частин рівняння до квадрату для позбавлення знаків коренів.
3. Перевірка отриманих розв’язків рівняння.

Приклад розв'язання рівняння:

$$\sqrt{2x-7} = x-5$$

Послідовність дій:

- Обмеження: $2x-7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3.5$ та $x-5 \geq 0$, тобто $x \geq 5$. Якщо $x-5 < 0$, то рівняння коренів не має.
- Піднесення до квадрату обох частин рівняння, якщо $x-5 \geq 0$:

$2x-7=(x-5)^2$

- Розв'язання квадратного рівняння:

$$2x-7=x^2-10x+25.$$

Звідси $x^2-12x+32=0.$

За теоремою Вієта $x_1 = 4, x_2 = 8.$

розв'язання ірраціональних рівнянь та нерівностей.

- Перевірка отриманих коренів рівняння.

Виявляємо, що перший корінь є стороннім, оскільки $x_1 = 4$ не задовольняє умову $x \geq 5$. Отже, рівняння має один корінь $x = 8$.

4. **Практична робота з GeoGebra (**15 хвилин**)**

1. **Підготовка учнів до роботи з GeoGebra (**5 хвилин**)**
   - Учні завантажують програму GeoGebra на свої пристрої (або відкривають вебверсію GeoGebra Online).

- Учитель коротко пояснює основні функції: як будувати графіки функцій, як використовувати інструмент для пошуку точок перетину графіків.

2. Застосування GeoGebra до розв'язання ірраціональних рівнянь

(5 хвилин)

1) Для вище розглянутого рівняння $\sqrt{2x-7} = x - 5$

Крок 1: Побудова графіків функцій

- Відкрийте GeoGebra.
- У рядку введення введіть функції:
  - Перша функція: f(x)= $\sqrt{2x-7}$.
  - Друга функція: g(x)=x−5.

Як це зробити:

- У нижній частині вікна GeoGebra знайдіть рядок **введення**.
- Введіть функцію f(x)= $\sqrt{2x-7}$ і натисніть **Enter**. У системі координат з’явиться крива для цієї функції.
- Аналогічно **введіть** другу функцію g(x)=x−5 і натисніть **Enter**. Отримаємо пряму.

Крок 2: Відшукання точок перетину графіків

- Тепер потрібно знайти точки перетину двох графіків.
- Виберіть інструмент **Перетин двох об'єктів** (у меню інструментів у верхній частині екрана).
- Клацніть на обох графіках. Програма GeoGebra автоматично знайде точку перетину і виведе її координати.

Крок 3: Аналіз результату

- Координати точки перетину визначають розв'язок рівняння $\sqrt{2x-7} = x-5$. Значення абсциси x цієї точки є коренем рівняння, а ординати y — значенням функції в цій точці.
- Якщо є кілька точок перетину, учні можуть проаналізувати їх і вибрати лише ті, що відповідають області визначення.

Для даного рівняння $\sqrt{2x-7} = x-5$:

- Область визначення задається умовою $2x-7 \geq 0$, звідки, $x \geq 3.5$ та $x - 5 \geq 0$, звідки $x \geq 5$.
- Графічний метод дозволяє перевірити, чи відповідає знайдений розв'язок цій умові.
- Наприклад, якщо точка перетину має абсцису $x=4$, учні бачать, що вона не належить допустимій області.

2) **Використання GeoGebra для розв'язання ірраціональних нерівностей (**5 хвилин**)**

Учитель пояснює, як за допомогою графіків можна розв'язувати ірраціональні нерівності.

Приклад нерівності: $\sqrt{x+3} \leq 2x-1$

Крок 1: Побудова графіків

Учні будують графіки функцій $f(x)=\sqrt{x+3}$ та $g(x)=2x-1$.

Крок 2: Відшукання області, де f(x)≤g(x)

- Точки перетину графіків визначають, де значення функцій рівні.

- Учні аналізують, у яких частинах області визначення нерівності графік функція f(x) знаходиться **нижче** графіка g(x). Це і буде частина, де нерівність виконується.

3. Закріплення матеріалу (10 хвилин)

- Розв'язання кількох завдань з підручника (індивідуальна робота).
- Окремі учні презентують свої розв'язання перед класом, використовуючи GeoGebra для пояснень.

Учитель визначає кілька завдань:

  - Побудувати графіки функцій для заданих ірраціональних рівнянь та відповідних нерівностей.
  - Знайти точки перетину і порівняти розв'язки з аналітичними.
  - Перевірити правильність результатів, використовуючи графічний метод.

Учням пропонується рівняння для самостійної роботи з GeoGebra. Наприклад, рівняння типу:

$\sqrt{2x+5} = x - 1$, або $\sqrt{x-2} = 3x + 4$.

Завдання для учнів:

1.Побудувати графіки функцій для кожного рівняння.

2. Знайти точки перетину графіків і порівняти розв'язки з аналітичними.

3. Проаналізувати розв'язки на відповідність області визначення.

Учням також пропонується знайти розв'язок *нерівності* графічно та записати відповідь.

Наприклад, $\sqrt{3x-1} \geq \frac{1}{2}x - 2$.

- Перевірити правильність розв’язання за допомогою GeoGebra.

Учні працюють у GeoGebra індивідуально або в парах, і вчитель допомагає їм при виникненні труднощів.

4. Підсумки уроку (3 хвилини**)**

- Обговорення результатів уроку.
- Повторення основних етапів розв'язання ірраціональних рівнянь та нерівностей.
- Оцінювання роботи учнів на уроці.

5. **Домашнє завдання (**2 хвилини)

Розв'язати декілька ірраціональних рівнянь та нерівностей самостійно (диференційовані завдання) та перевірити їх графічно за допомогою GeoGebra.

Цей урок не лише полегшує вивчення ірраціональних рівнянь та способів їх розв’язання, але й допомагає освоїти сучасні цифрові інструменти, які є корисними у математичному аналізі. GeoGebra — це потужний інструмент для візуалізації математичних понять, і він може бути надзвичайно корисним під час вивчення ірраціональних рівнянь та нерівностей.

Використання GeoGebra на уроці має певні переваги:

1. **Візуалізація**: Учні можуть бачити, як виглядають функції на графіку, і легко знаходити розв'язки рівнянь та нерівностей.
2. **Графічний метод перевірки**: Навіть, якщо учні допускають помилки в аналітичному розв'язанні, вони можуть побачити правильний результат графічно.

3. **Інтерактивність**: Учні активно залучені в процес і мають можливість самостійно перевіряти свої розв'язки.
4. **Розвиток математичного мислення**: Використання графіків допомагає учням краще розуміти зв'язки між функціями та їх областями визначення.

GeoGebra робить процес навчання математики більш захоплюючим і доступним для учнів.

АНОТАЦІЯ

Жук В. В. Формування математичних компетентностей при вивченні ірраціональних рівнянь та нерівностей у закладах загальної середньої освіти. *Магістерська робота*. Луцьк. 2024. 68с.

Магістерська робота присвячена вивченню теми «Ірраціональні рівняння і нерівності» та навчанню розв’язування задач підвищеної складності.

У першому розділі магістерської роботи розглядаються теоретичні основи значення ірраціональних рівнянь і нерівностей, їх практичне застосування. Другий розділ присвячений розробці методів та методик розв’язання ірраціональних рівнянь і нерівностей. Третій – навчанню по розв’язуванню задач підвищеної складності, вивченню програми GeoGebra**.**

Робота містить 3 розділи, 25 підрозділів, список джерел із 33 найменувань.

Ключові слова: ірраціональні рівняння, ірраціональні нерівності, GeoGebra, методи розв’язування задач.

ANNOTATION

Zhuk V. V. Formation of mathematical competences in the study of irrational equations and inequalities in institutions of general secondary education**.** Master's thesis. Lutsk, 2024. 68 p.

The master's thesis is devoted to the study of the topic «Irrational equations and inequalities» and the study of learning to solve problems of increased complexity.

The first chapter of the master's thesis is devoted to the study of the theoretical part of the meaning of irrational equations and inequalities and their practical application. The second chapter is devoted to the development of methods and techniques for solving irrational equations and inequalities. The third chapter is about training in solving problems of increased complexity, learning the GeoGebra program.

The master's thesis consists of 3 sections, 25 subsections, list of references of 33 titles.

Keywords: irrational equations, irrational inequalities, GeoGebra, methods of problem solving.