МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Кафедра математичного аналізу та статистики

На правах рукопису

БЕСКІД ІЛЛЯ МИКОЛАЙОВИЧ

ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ

Спеціальність: 111 Математика

Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

Кравчук Ольга Мусіївна

Кандидат педагогічних наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № ___________

Засідання кафедри математичного

аналізу та статистики

від _______________ 20__ р.

Завідувач кафедри

доц. Федуник-Яремчук О.В. ________

Луцьк 2024

АНОТАЦІЯ

Бескід І. М. Перетворення координат. Магістерська робота. Луцьк, 2024. 48 с.

У магістерській роботі розглянуто методи та алгоритми перетворення координат у різних координатних системах; детально проаналізовано математичні основи перетворення координат; розглянуто основні типи перетворень.; наведено приклади застосування кожного з них. Робота містить теоретичний огляд окремих систем координат з аналізом їх основних характеристик. Особливу увагу приділено математичним методам перетворення координат, включаючи афінні, прямокутні, полярні та просторові перетворення.

Практичне застосування перетворення координат до розв’язання задач та дослідження функцій, поступальні та обертальні перетворення викладено у додатках

Ключові слова: перетворення координат, системи координат, вектор, точка.

ANNOTATION

Beskid I. M. Transformation of coordinates. Master's thesis. Lutsk, 2024. 48 p.

The master's thesis describes methods and algorithms for transforming coordinates in different coordinate systems; analyses in detail the mathematical foundations of coordinate transformation; considers the main types of transformations; provides examples of the application of each of them. The work contains a theoretical overview of individual coordinate systems with an analysis of their main characteristics. Particular attention is paid to mathematical methods of coordinate transformation, including affine, rectangular, polar and spatial transformations.

Practical application of coordinate transformations to solving problems and studying functions, translational and rotational transformations are presented in the appendices

Keywords: coordinate transformation, coordinate systems, vector, point.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми

Важливістю перетворення координат є його широке застосування не лише в математиці, але й в багатьох інших науках. Зокрема, афінні перетворення застосовуються у машиній графіці, інженерії, полярні широко застосовуються у географії.

Аналітична геометрія, в основі якої лежить координатний метод - визначення положення точок і геометричних об'єктів на площині або в просторі за допомогою системи координат, є підґрунтям коп'ютерної графіки. Тут можливі застосування різних систем координат: афінної, прямокутної декартової, полярної на площині, відповідно й у просторі, крім того, сферичної, циліндричної та інших. Розміщення точки на площині чи у просторі визначається її координатами відносно деякої системи координат. Якщо система координат змінюється, то відповідно змінюються і координати точки. Розміщення деякого геометричного об'єкта можна задати координатами деякої базової точки, що є центром його власної (локальної) системи координат, і кутом повороту цієї системи координат відносно базової системи координат, яка пов'язана з екраном дисплея або аркушем паперу у принтері. Відшукання зв'язку між координатами точок при переході від однієї системи до іншої називається перетворенням координат.

Перехід від однієї системи координат до якоїсь іншої має на меті:

- по-перше, з'ясувати вплив зміни системи координат на рівняння тієї чи іншої лінії;
- по-друге, відшукати таку систему координат, у якій геометричний образ задається рівнянням у найпростішій формі, а отже, й дослідження цього образу буде найзручнішим.

Змінюючи систему координат, природно, змінюються координати точок та рівняння ліній. Якщо нам відомі координати точки в одній системі координат, то постає питання: як знайти координати цієї ж точки в іншій системі координат? Для цього потрібно знати залежність між відповідними координатами точок, тобто формули перетворення координат.

У магістерській роботі подано детальний аналіз різних випадків переходу від однієї системи координат до іншої і дослідження відповідних формул перетворення, що відповідає визначеній меті роботи.

Мета і завдання дослідження

Мета магістерської роботи: дослідження особливостей перетворення координат у різних системах координат.

Для досягнення поставленої мети були визначені наступні *завдання*:

1. Опрацювати методичну та наукову літературу з обраної теми магістерської роботи.
2. Сформулювати задачу перетворення координат та розв'язати її для різних систем координат на площині і у просторі.
3. Підібрати та розглянути задачі на застосування перетворення координат.

Об'єкт дослідження: геометричні перетворення.

Предмет дослідження: різні системи координат та їх перетворення.

Методи дослідження: аналіз наукової літератури з теми дослідження, порівняння, узагальнення.

Структура роботи. Магістерська робота складається із вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків.

Основний зміст роботи. У першому розділі подано основні теоретичні відомості щодо різних систем координат та їх задання. Виконання перетворень над ними, виведення відповідних формул відображено у другому розділі роботи. Третій розділ присвячений дослідженню залежностей між координатами вектора у різних системах координат.

У додатках подано досить цікавий змістовний матеріал стосовно досліджуваної проблеми та аспектів її практичного застосування.

РОЗДІЛ І. СИСТЕМИ КООРДИНАТ

Система координат - це спосіб задання точок простору за допомогою чисел. Кількість чисел, необхідних для однозначного визначення будь-якої точки простору, визначає його вимірність. Обов'язковим елементом системи координат є початок координат, від якого ведеться відлік відстаней. Іншим обов'язковим елементом є одиниця довжини, яка дозволяє знаходити відстані. Всі точки одновимірного простору можна задати при обраному початку координат одним числом. Для двовимірного простору необхідні два числа, для тривимірного – три. Ці числа називаються *координатами* точки.

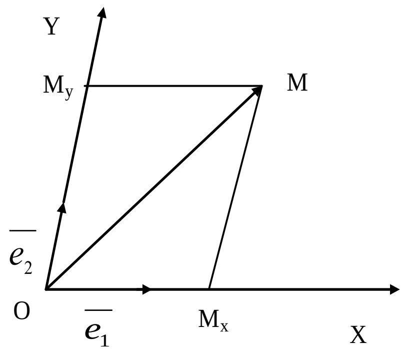
На площині і в тривимірному просторі, системи координат можна задати різними способами. Розв'язуючи ту чи іншу математичну або фізичну задачу методом координат, можна використовувати різні координатні системи, вибираючи ту з них, у якій завдання розв'язується простіше або зручніше в даному конкретному випадку.

Системи координат з елементарної геометрії – це величини, що визначають положення точки на площині і в просторі. На площині положення точки найчастіше визначається відстанями від двох прямих (координатних осей), що перетинаються в одній точці (початку координат) під прямим кутом; одна з координат називається абсцисою, а інша – ординатою. У просторі за системою Декарта положення точки визначається відстанями від трьох координатних площин, що перетинаються в одній точці під прямими кутами одна до одної, або сферичними координатами, де початок координат знаходиться в центрі сфери, або циліндричними чи іншими координатами.

1.1. Афінна система координат

Система координат – це сукупність геометричних об'єктів, які визначають розміщення точки.

Візьмемо на площині будь-яку точку O і відкладемо від неї вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, що утворюють базис у просторі V_2 (мал 1.1).



Мал.1.1

Точку O назвемо *початком координат*, а вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2 -$ *базисними векторами*. Напрямлені прямі, які проходять через початок координат у напрямку векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, назвемо *координатними осями*. При цьому будемо вважати напрями векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ додатними, а протилежні напрями – від'ємними. Вісь координат, на якій напрям задається вектором $\vec{e}_1$, називають віссю *абсцис*, а другу вісь – віссю *ординат* (позначають OX і OY відповідно). Утворена таким чином сукупність геометричних об'єктів називається *афінною системою координат*. Її позначають $O\vec{e}_1, \vec{e}_2$ або OXY.

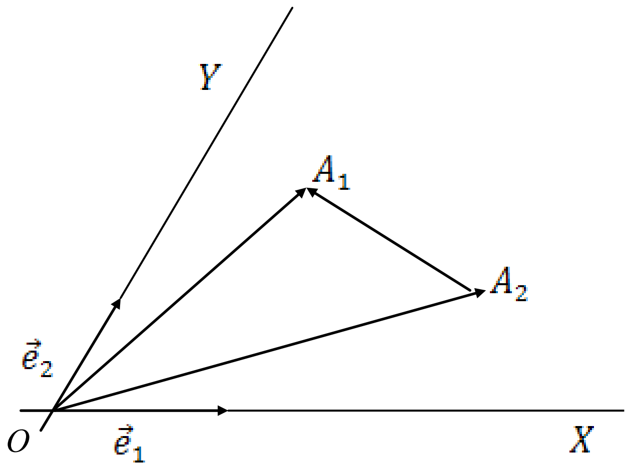
Нехай $M -$ довільна точка площини. Визначимо її розміщення у системі координат. Розглянемо вектор $\overrightarrow{OM}$, який назвемо *радіус-вектором* точки M відносно точки O. Координатами (x, y) вектора $\overrightarrow{OM}$ у базисі $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ називатимемо *координатами точки* M у системі координат $O\vec{e}_1, \vec{e}_2$ і записувати

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2. \tag{1.1}$$

Перша координата x називається *абсцисою точки* M, а друга $y -$ *ординатою*. Позначається: $M(x; y)$.

Ввівши систему координат, ми кожній точці M поставили у відповідність упорядковану пару дійсних чисел. Навпаки, кожній парі дійсних чисел x, y ставиться у відповідність одна і тільки одна точка, координати якої $(x; y)$, для чого досить побудувати вектор $\overrightarrow{OM}$ з координатами $(x; y)$. Таким чином, ввівши систему координат на площині, ми встановили взаємно однозначну відповідність між множиною точок площини і множиною впорядкованих пар дійсних чисел.

Нехай в афінній системі координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ дано дві точки: $A_1(x_1; y_1), A_2(x_2; y_2)$ (мал 1.2).



Мал.1.2

Вияснимо як знайти координати вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ у базисі $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Маємо: $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}$, але $\overrightarrow{OA_1}(x_1; y_1), \overrightarrow{OA_2}(x_2; y_2)$.

Тому за властивістю координат векторів

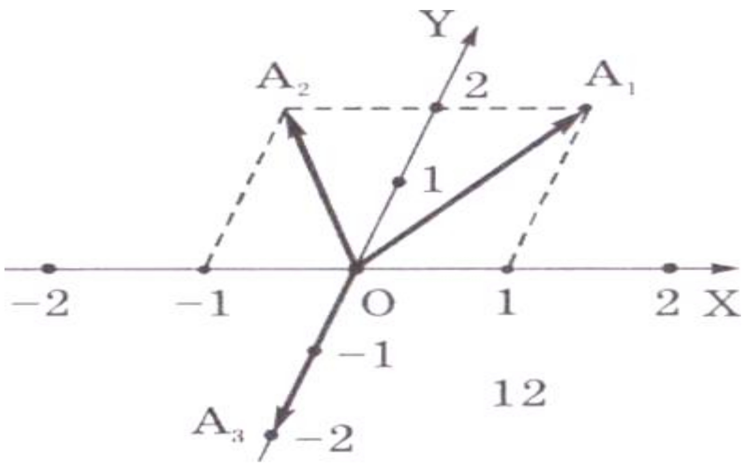
$$\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1; \mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1). \tag{1.2}$$

Отже, щоб знайти координати вектора у заданому базисі, необхідно від координат кінця вектора відняти відповідні координати початку.

Приклад. *Вибрати деяку афінну систему координат* OXY, *побудувати в ній точки* $A_1(1; 2), A_2(-1; 2), A_3(0; -2)$ *і знайти координати вектора* $\overrightarrow{A_2A_3}$ *в цьому координатному базисі* (мал 1.3).

Розв'язання. Щоб побудувати точки з заданими координатами, досить побудувати відповідні їм радіус-вектори $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$.

Координати вектора $\overrightarrow{A_2A_3}$ знаходимо за формулою (1.2):



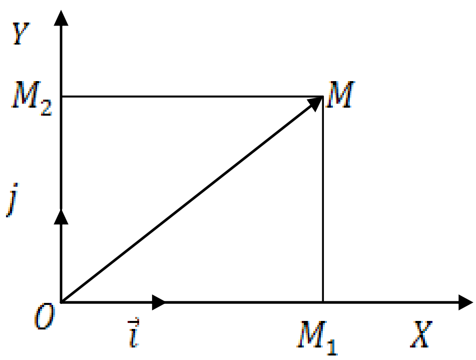
Мал.1.3

$$\overrightarrow{A_2A_3}(0-(-1);-2-2) \text{ або } \overrightarrow{A_2A_3}(1;-4).$$

Відповідь: $\overrightarrow{A_2A_3}(1;-4)$.

1.2. Прямокутна декартова система координат

Система координат називається *прямокутною* (або *прямокутною декартовою*), якщо її координатні вектори одиничні і взаємно перпендикулярні (тобто утворюють ортонормований базис V_2). Позначається $O\vec{\imath}\vec{\jmath}$ (мал. 1.4).



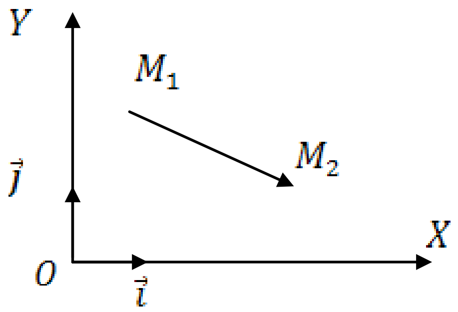
Мал.1.4

Координати точки M у прямокутній системі координат мають простий геометричний зміст: $|x|=OM_x, |y| = OM_y$, де M_x, M_y - проекції точки M на координатні осі.

$$x = \begin{cases} OM_x, \text{якщо } \overrightarrow{OM_x} \uparrow\uparrow \vec{i}, \\ -OM_x, \text{якщо } \overrightarrow{OM_x} \uparrow\downarrow \vec{i}; \end{cases} \quad (1.3)$$

$$y = \begin{cases} OM_y, \text{якщо } \overrightarrow{OM_y} \uparrow\uparrow \vec{j}, \\ -OM_y, \text{якщо } \overrightarrow{OM_y} \uparrow\downarrow \vec{j}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Нехай у прямокутній системі координат точки M_1 і M_2 мають координати $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ (мал.1.5)



Мал. 1.5

Обчислимо відстань між цими точками. Для цього розглянемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Тоді

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = M_1M_2.$$

Отже, відстань між двома точками обчислюється за формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1.5)$$

1.3. Полярна система координат

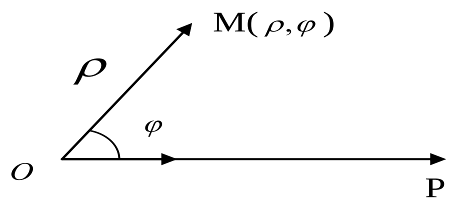
Крім афінної системи координат, у математиці часто використовують так звану полярну систему координат, яка зручна для вивчення перетворень обертання.

Задамо на орієнтованій площині точку O і одиничний вектор $\vec{\imath}$ (мал 1.6).

Пара, яка складається з точки O і вектора $\vec{\imath}$, називається *полярною системою координат на площині*, позначається $O\vec{\imath}$ або $(O;\vec{\imath})$.

Полярна система координат – двовимірна система, у якій кожна точка на площині визначається двома числами – полярним кутом та полярним радіусом.

Розглянемо вісь OP, яка проходить через точку O у напрямку вектора $\vec{\imath}$, який визначаєна цій осі додатний напрям. Точка O називається *полюсом*, а вісь OP – *полярною віссю*.



Мал.1.6

Нехай M – довільна точка площини (мал 1.6).

Позначимо $\rho = OM = |\overrightarrow{OM}|$;

$\varphi = \angle(\vec{\imath};\ \overrightarrow{OM})$ - орієнтований кут.

Числа ρ, φ однозначно визначають розміщення точки на площині. Ці числа називаються *полярними координатами точки* M у полярній системі $O\vec{\imath}$: число ρ називають *полярним радіусом*, а φ – *полярним кутом*. Записуємо $M(\rho;\varphi)$.

Якщо вважати довжину радіус-вектора завжди додатною $0 \le \rho < \infty$, і полярний кут брати в межах $0 < \varphi \le 2\pi$, то кожній точці буде відповідати одна пара чисел $\rho;\varphi$ і навпаки. Винятком є полюс, для якого $\rho = 0$, а φ – довільне.

Розглянута нами полярна система координат має той недолік, що не будь-якій впорядкованій парі дійсних чисел можна поставити у відповідність точку на площині, а саме: цього не можна зробити, якщо перше число від'ємне або друге виходить за межі проміжку $(-\pi;\pi]$. Щоб усунути цей недолік, узагальнимо полярну систему координат так, щоб будь-яка пара дійсних чисел визначала певну точку на площині. Такою полярною системою координат вигідно користуватися при дослідженні рівнянь, що пов'язують ρ і φ, у яких зручніше не вказувати меж для зміни значень ρ і φ.

Якщо промінь *OM* (мал.1.6) отриманий при повороті полярної осі *OP* на найменший додатний кут φ, то це й же промінь можна отримати поворотом *OP* на кут $\varphi + 2k\pi$, де k – будь-яке ціле число. Кут $\varphi + 2k\pi$, де k – ціле число називають *узагальненим полярним кутом* всіх точок променя *OM,* а також точок його продовження за полюс у протилежному напрямку.

Якщо $(\rho; \varphi) -$ довільна пара дійсних чисел, а $O\vec{\imath} -$ полярна система координат, де $\rho \geq 0$, а $-\pi < \varphi \leq \pi$, то цією парою визначена точка із полярними координатами $(\rho; \varphi)$ так, як було показано раніше. Якщо $\varphi \geq \pi$ або $\varphi \leq -\pi$, але при цьому $\rho \geq 0$, то завжди можна знайти таке $-\pi < \varphi_0 \leq \pi$, що $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, де k – деяке дійсне ціле число. Тоді парою (ρ, φ) визначається точка $M(\rho; \varphi_0)$. Якщо ж $\rho < 0$, то парою (ρ, φ) визначається точка, симетрична точці $M'(|\rho|; \varphi)$ відносно полюса O.

Такі координати точки називаються *узагальненими полярними координатами.*

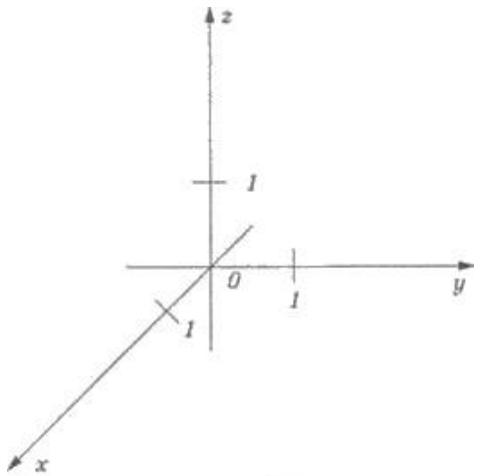
Варто зауважити, що яку б з двох полярних систем координат ми не використовували, то завжди парі чисел r і φ відповідає на площині єдина точка.

1.4. Прямокутна декартова система координат у просторі

Для того, щоб визначити розміщення будь-якої точки у просторі через довільну точку О простору проведемо три попарно перпендикулярні прямі *x*, *y, z* (мал.1.7). На кожній із прямих виберемо додатний напрям, який позначимо стрілочкою та одиницю вимірювання (масштаб). Таким чином задають прямокутну систему координат у просторі. Точку О називають *початком* координат, а прямі з вибраними напрямками *осями* координат (або *координатними осями*). Вісь *x* називають віссю *абсцис*, вісь *y* - віссю *ординат*, вісь *z* - віссю *аплікат*. Початок координат розбиває кожну з осей на дві півосі

- додатну (яку позначають стрілочкою) і від'ємну. Площини, які проходять відповідно через осі координат x і y, y і z, x і z називають *координатними площинами xy, yz, xz*.

У просторовій прямокутній системі координат у кожній точці M простору ставиться у відповідність єдина впорядкована трійка чисел, а кожній впорядкованій трійці чисел - єдина точка простору. Цю трійку чисел називають *координатами точки*. Знаходяться вони аналогічно координатам

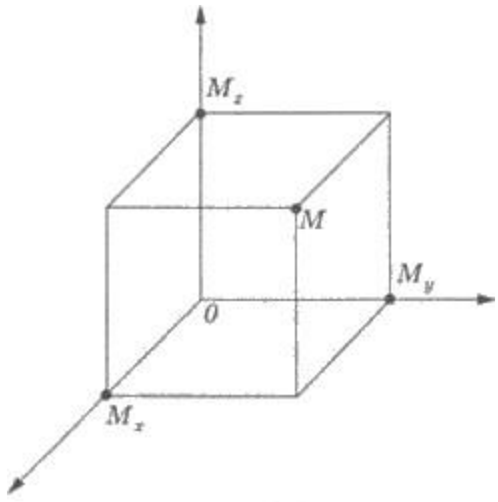


Мал.1.7

точки на площині. Трійка чисел визначається проекціями точки на кожну з координатних осей.

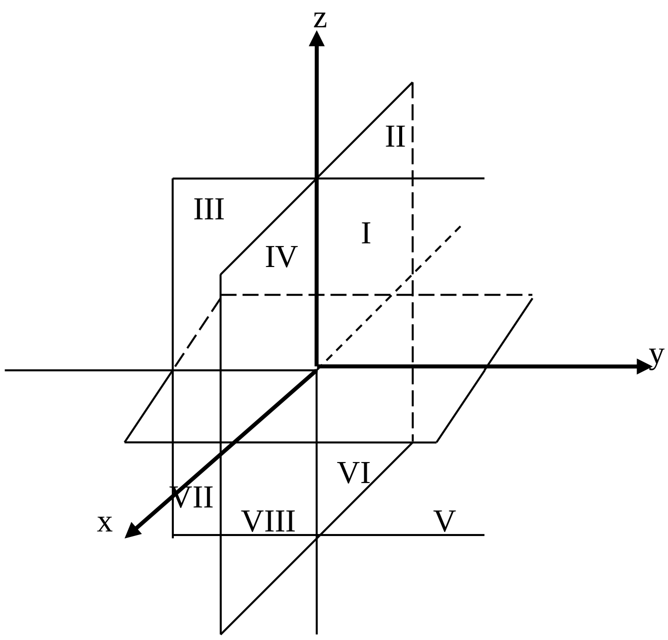
Провівши через точку M площину, перпендикулярну до осі x (мал.1. 8), отримаємо точку M_x перетину її з віссю абсцис. Координатою x точки M (*абсцисою* точки М) називають число, яке дорівнює за абсолютною величиною довжині відрізка OM_x; воно є додатним, якщо точка M_x лежить на додатній півосі x і від'ємним, якщо вона лежить на від'ємній півосі. Якщо ж точка M_x збігається з точкою О, то вважаємо, що абсциса точки М дорівнює нулю.

Провівши площини, перпендикулярні відповідно осям y і z, які перетинають відповідні осі у точках M_y і M_z , знайдемо, аналогічно до координати x точки M координату y точки М (*ординати* точки M) і координату z точки M (*апліката* точки М).



Мал.1.8

Три координатні площини ділять весь простір на вісім частин (мал.1.9), причому точкам кожної частини відповідає певна комбінація знаків координат, що ілюструє таблиця.



Мал.1.9

Таблиця

Октанти координат	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

Якщо точка лежить у площині *xy,* то z = 0. Аналогічно для точок площини *yz* координата $x = 0$, а для точок площини *xz* координата $y = 0$. Якщо точка лежить на координатній осі *x*, то $y = z = 0$. Аналогічно, для точок осі *y* буде $x = z = 0$, а для осі z*:* $x = y = 0$.

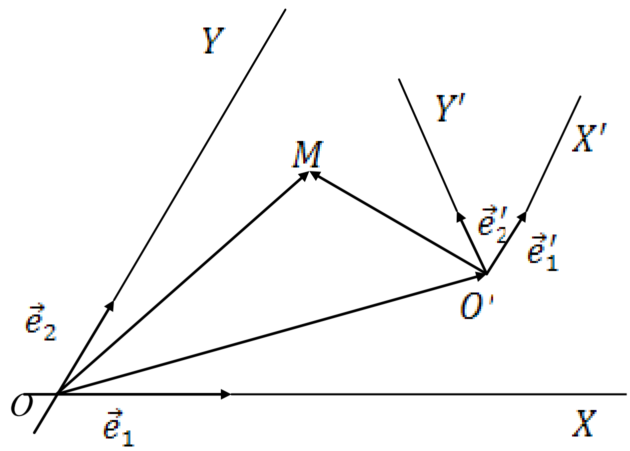
Розглянуті координати для визначення розміщення точки у просторі називають *прямокутними декартовими*.

РОЗДІЛ ІІ. ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ

Розміщення точки на площині визначається двома координатами відносно деякої системи координат. Координати точки зміняться, якщо ми виберемо іншу систему координат. Задача перетворення координат полягає в тому, щоб, знаючи координати точки в одній системі координат, знайти її координати в іншій системі. Задача буде розв'язана, якщо будуть формули, які пов'язують координати довільної точки в обох системах, причому коефіцієнти у цих формулах виражаються через сталі величини, що визначають взаємне розміщення систем.

2.1. Перетворення афінних координат на площині

Нехай на площині задано дві афінні системи координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ і $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ (мал 2.1). Першу назвемо *старою*, а другу – *новою*.



Мал.2.1

Задамо розміщення нової системи координат відносно старої таким чином: нехай базисні вектори $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ і початок координат O' у старій системі мають такі координати: $\vec{e}_1'(c_{11}, c_{21})$, $\vec{e}_2'(c_{12}, c_{22})$, $O'(x_0, y_0)$.

Нехай М – довільна точка площини, яка в старій системі має координати $(x; y)$, а в новій – $(x'; y')$. Поставимо завдання – виразити старі координати точки через нові.

Маємо $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}. \quad (2.1)$$

Але $$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2;$$

$$\overrightarrow{OO'} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2;$$

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{e}_1' + y'\vec{e}_2'.$$

Оскільки $\vec{e}_1' = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2$,

$$\overrightarrow{O'M} = (c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2) \cdot x' + (c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2) \cdot y' =$$

$$= (c_{11}x' + c_{12}y') \cdot \vec{e}_1 + (c_{21}x' + c_{22}y') \cdot \vec{e}_2.$$

Тоді рівність (2.1) запишеться так:

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + (c_{11}x' + c_{12}y') \cdot \vec{e}_1 + (c_{21}x' + c_{22}y') \cdot \vec{e}_2,$$

звідки

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + x_0, \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + y_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

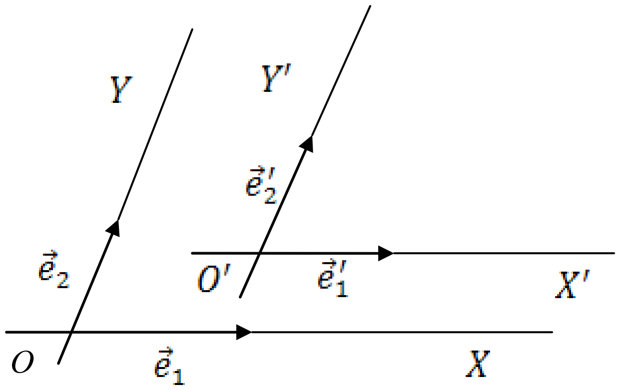
Формули (2.2) називають *формулами перетворення афінних координат*.

Матриця $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, складена з коефіцієнтів при x', y', називається *матрицею перетворення системи координат*; вона збігається з матрицею переходу від базису $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ $(\vec{e}_1'; \vec{e}_2')$. Оскільки вектори $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ не колінеарні, то визначник цієї матриці

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Розглянемо два окремі випадки перетворення афінної системи координат.

1. *Паралельне перенесення системи координат* (мал..2.2).



Мал.2.2

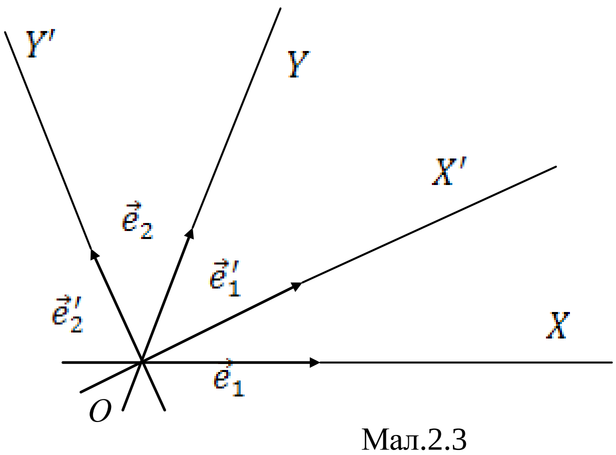
Оскільки у цьому випадку

$\vec{e}_1' = \vec{e}_1, \vec{e}_2' = \vec{e}_2,\ c_{11} = 1, c_{21} = 0, c_{12} = 0, c_{22} = 1,$

то формули (2.2) запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

2. Перетворення системи координат без зміни початку координат (мал..2.3).



Мал.2.3

Системи координат мають спільний початок і відрізняються базисними векторами, тому $x_0 = y_0 = 0$, і, отже, формули перетворення мають вигляд:

$$\begin{matrix} x = c_{11}x' + c_{12}y', \\ y = c_{21}x' + c_{22}y'. \end{matrix} \tag{2.4}$$

Розглянемо приклади застосування цих формул при розв’язанні задач.

1. *Записати формули перетворення афінної системи координат на площині, якщо координати нового початку* O' *і нових базисних векторів* $\vec{e}_1{}'$ *і* $\vec{e}_2{}'$ *у старій системі такі:* $O'(3;-1), \vec{e}_1{}'(-4;3), \vec{e}_2{}'(0;5)$.

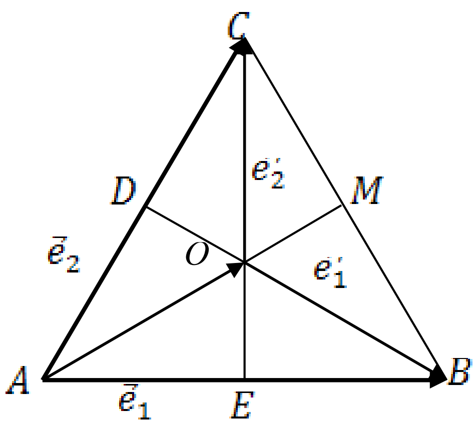
Розв'язання. За умовою задачі $x_0 = 3, y_0 = -1,\ c_{11} = -4, c_{21} = 3,$ $c_{12} = 0, c_{22} = 5$. Підставимо у формули (2.2), матимемо:

$$x = -4x' + 3,$$
$$y = 3x' + 5y' - 1.$$

Відповідь: $x = -4x' + 3,\ y = 3x' + 5y' - 1.$

2. *У трикутнику* ABC *проведено медіани* BD і CE, *які перетинаються в точці* O. *Записати формули перетворення координат при переході від афінної системи координат* $A, \vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$, *до афінної системи* $O, \vec{e}_1{}' = \overrightarrow{OB},\ \vec{e}_2{}' = \overrightarrow{OC}$.

Розв'язання. Знайдемо координати нового початку і нових базисних векторів у старій системі (мал 2.4):



Мал.2.4

$\overrightarrow{OA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2.$

Отже, $O\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} =$

$= \vec{e}_1 - \dfrac{1}{3}\vec{e}_1 - \dfrac{1}{3}\vec{e}_2 = \dfrac{2}{3}\vec{e}_1 - \dfrac{1}{3}\vec{e}_2.$

Звідки, $\vec{e}_1{}'\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OC} = \vec{e}_2 - \frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 = -\frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2.$$

Отже, $\vec{e}_2{}'\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Використавши формули

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + x_0, \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + y_0, \end{cases}$$

матимемо:

$$x = \frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' + \frac{1}{3},$$

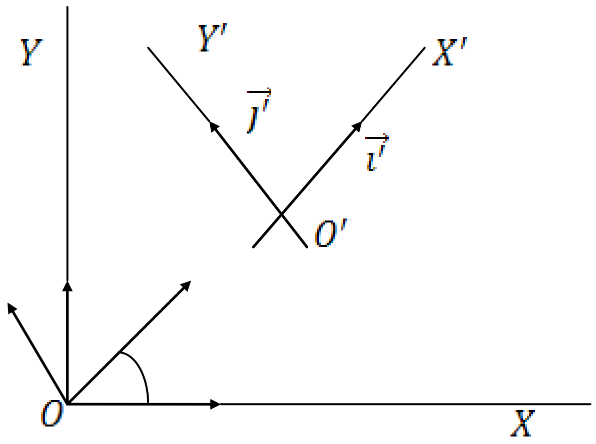
$$y = -\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}.$$

Відповідь:$x = \frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' + \frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}.$

2.2. Перетворення прямокутних координат

Розглянемо два окремі випадки перетворення прямокутних координат.

2.2.1. Системи координат однаково орієнтовані (мал. 2.5)



Мал.2.5

Розміщення нової системи координат відносно старої можна задати координатами нового початку $O'(x_0, y_0)$ у старій системі і кутом повороту осі Ox: $\alpha = \angle(\vec{i}, \vec{i'})$.

Тоді $\vec{i'}(\cos\alpha ; \sin\alpha)$;

$$\vec{j'}(\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)),$$

тобто $\vec{j'}(-\sin\alpha, \cos\alpha)$.

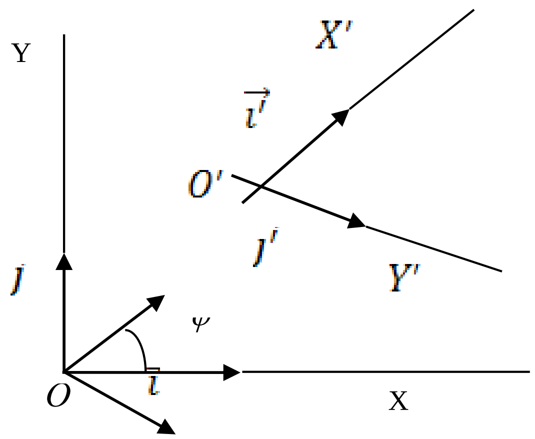
Підставимо відповідні значення коефіцієнтів у формули (2.2). Отримаємо:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Визначник матриці переходу від однієї системи координат до іншої дорівнює 1:

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1;$$

2.2.2. Системи координат протилежно орієнтовані (мал.2.6)



Мал.2.6

Нехай $O'(x_0, y_0), \alpha = \angle(\vec{\imath}, \vec{\imath'})$.

Тоді $\vec{\imath'}(\cos\alpha; \sin\alpha)$,

$$\vec{\jmath'} = \left(\overline{\cos(\vec{\imath}, \vec{\jmath'}); \sin(\vec{\imath}, \vec{\jmath'})}\right) == \left(\overline{\cos\left((\vec{\imath}, \vec{\imath'}) + (\vec{\imath}, \vec{\jmath'})\right); \sin\left((\vec{\imath}, \vec{\imath'}) + (\vec{\imath}, \vec{\jmath'})\right)}\right) =$$

$$= \left(\overline{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right); \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}\right) = \overline{(\sin\alpha; -\cos\alpha)}.$$

і формули перетворення матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha + x_0, \\ y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha + y_0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Тут визначник матриці переходу дорівнює – 1:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -1.$$

Формули (2.13) і (2.14) можна об’єднати:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - \varepsilon y'\sin\alpha + x_0, \\ y = x'\sin\alpha + \varepsilon y'\cos\alpha + y_0. \end{cases} \tag{2.15}$$

де $\varepsilon = 1$, якщо системи координат $O\vec{\imath}\vec{\jmath}$ і $O'\vec{\imath'}\vec{\jmath'}$ однаково орієнтовані, і $\varepsilon = -1$, якщо ці системи протилежно орієнтовані.

Часткові випадки перетворення прямокутних координат:

1. Паралельне перенесення системи координат

Оскільки у цьому випадку базисні вектори не змінюються, то формули (2.3) запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases}$$

2. Перетворення системи координат без зміни початку координат

Так як координати початку координат не змінюються, то формули (2.4) наберуть вигляду:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - \varepsilon y'\sin\alpha\,, \\ y = x'\sin\alpha + \varepsilon y'\cos\alpha\,. \end{cases} \tag{2.16}$$

Приклади

1. *Записати формули перетворення прямокутних систем координат різних орієнтацій $O\vec{\imath}\vec{\jmath}$ і $O'\vec{\imath'}\vec{\jmath'}$, якщо $\angle(\vec{\imath},\vec{\imath'}) = 30^\circ$, $O'(0,-2)$.*

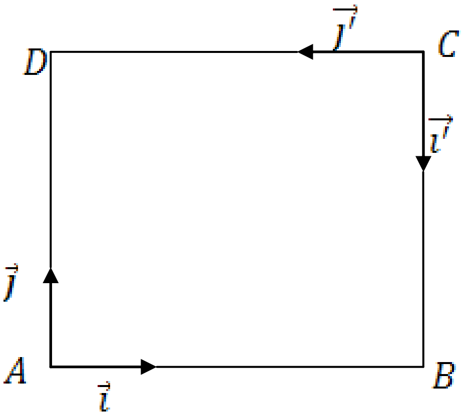
Розв’язання: Використаємо формули (2.14):

$$x = x'\cos 30^\circ + y'\sin 30^\circ + 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y',$$

$$y = x'\sin 30^\circ - y'\cos 30^\circ - 2 = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' - 2.$$

Відповідь: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y', y = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' - 2.$

2. *Дано квадрат $ABCD$ із стороною a. Напрямлені прямі AB і CD є осями координат старої системи (AB – перша вісь, AD – друга), а CD і CB - осі нової* *системи* $(CD-$ *перша,* CB *- друга). Записати формули перетворення прямокутних декартових систем координат.*



Мал. 2.7

Розв'язання. Сторона квадрата дорівнює a, тому координати нового початку $C(a;a)$, $\angle(\vec{\imath},\vec{\imath'})$=$180^\circ$, орієнтація не змінюється (мал 2.7).

За формулами (2.13):

$$\begin{cases} x = -x' + a, \\ y = -y' + a. \end{cases}$$

2.2.3. Механічне тлумачення формул перетворення координат

Візьмемо деяку точку *М*, яка незмінно пов'язана з новою системою *ХОУ*, і сумістимо цю систему координат із старою системою хоу. Тоді точка М' (що, зайняла місце точки *М*) матиме відносно старої системи координати *X* і *У*. Отже, ми матимемо дві точки *М'* і *М*, координати яких *X, У* та *х, у* відносно однієї і тієї ж старої системи пов'язані формулами

$$\begin{cases} x = X\,cos\alpha - Y\,sin\alpha\ + a, \\ y = X\sin a + \cos a\ + b \end{cases} \qquad (2.17)$$

Щоб перевести точку *М'* в точку *М*, очевидно, потрібно спочатку повернути її радіус-вектор *ОМ* на кут α навколо точки *О*, а потім перенести її паралельно осі О*х* на відстань *a* і паралельно осі Оу на відстань b.

Таким чином, формули (2.17), відносно однієї декартової системи координат, пов'язують між собою координати двох точок *М'* (*Х, У*) і *М*(*х.у*), з яких друга отримується з першої точки за допомогою розглянутого перетворення.

Очевидно, формули

$$\begin{cases} x = X + a, \\ y = Y + b \end{cases}$$

виражають лише паралельне перенесення, а формули

$$\begin{cases} x = X\, cos\alpha - Y\, sin\alpha, \\ y = X \sin a + \cos a \end{cases}$$

лише поворот.

Приклад 1. *Дано рівняння* $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 7 = 0$. *Виконати перетворення так, щоб рівняння не містило членів першого степеня.*

Розв'язання. Перенесемо початок координат у точку $(a,\ b)$, поки довільну. Формули перетворення мають вигляд:

$$x = X + a, y = Y + b.$$

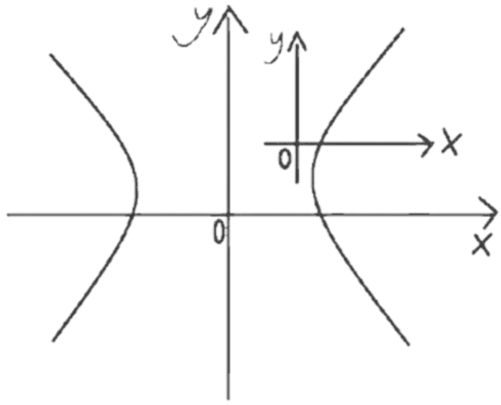
Підставляючи у дане рівняння замість x та y їхні вирази через X та $У$, отримаємо: $(X + a)^2 - (Y + b)^2 + 2(X + a) - 4(Y + b) - 7 = 0$.

Розкриваємо дужки та зводимо подібні члени:

$$X^2 - Y^2 + 2(a + 1)X - 2(b + 2)Y + a^2 - b^2 + 2a - 4b - 7 = 0.$$

Так як a і b довільні, то виберемо їх так, щоб не стало членів з Х і У. Для цього потрібно покласти

$$a + 1 = 0, b + 2 = 0.$$



Мал.2.8

Звідки a = -1, b = -2. Підставивши ці значення у перетворене рівняння, отримаємо: $X^2 - Y^2 - 4 = 0.$

Очевидно, це рівняння задає гіперболу

$$\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{4} = 1,$$

для якої нові осі координат є осями симетрії (мал. 2.8).

Отже, отримане рівняння задає цю ж гіперболу відносно старих осей.

Приклад 2. *Дано рівняння* $\mathrm{x}^3 + \mathrm{xy} + y^2 - 10$. *Виконати перетворення його так, щоб воно не містило члена з добутком координат* xy.

Розв'язання. Повернемо систему координат на кут, поки довільний, за формулами:

$$x = X\,cos\alpha - Y\,sin\alpha\,,$$
$$y = X\sin a + Y\cos a.$$

Підставляючи у дане рівняння замість x і y їхні вирази через X і Y, отримаємо:

$$(X\cos a \;\; - \; Y\sin a)^2 + (X\cos a \; - Y\sin a)(X\sin a + Y\cos a) +$$
$$+(X\sin a + Y\cos a)^2 - 1 = 0$$

Розкриваємо дужки та зводимо подібні члени:

$X^2(\cos^2 a + \sin a \cos a + \sin^2 a) + XY(\cos^2 a \sin^2 a) + Y^2(\sin^2 a -$
$\sin a \cos a + \cos^2 a) - 1 = 0.$ (2.18)

Оскільки кут a довільний, то виберемо його так, щоб не стало члена з добутком $XУ$. Для цього потрібно покласти:

$$\cos^2 a - \sin^2 a = 0, \text{ або } tg^2 a = 1,$$

звідки

$$\text{tg}a = \pm 1.$$

Візьмемо одне із значень tg a, наприклад tg a = -1. Отримане рівняння (2.18) розділимо на $\cos^2 a$, щоб його коефіцієнти виразити через tg$a$. Матимемо:

$X^2(1 + tg\, a + tg^2 a) + Y^2(tg^2 a - tg a + 1) - \frac{1}{\cos^2 a} = 0$, або, зауваживши, що

$$\frac{1}{\cos^2 a} = \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\cos^2 a} = tg^2 a + 1$$

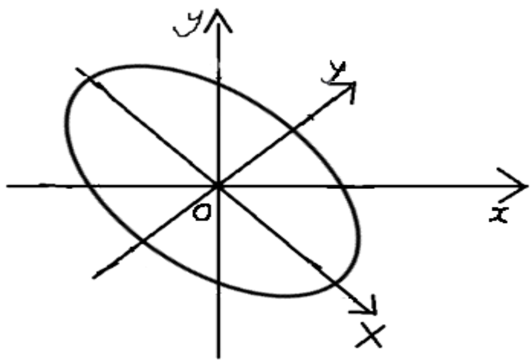
і замінюючи tg a на -1, остаточно отримаємо

$$X^2 + 3Y^2 = 2.$$

Це рівняння задає еліпс

$$\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{\frac{2}{3}} = 1,$$

для якого нові осі координат є осями симетрії.



Мал.2.9

Рівняння осі OX (вісь симетрії еліпса), як прямої, що проходить через початок координат з кутовим коефіцієнтом k = -1, має вигляд y = -*x*. Побудувавши нові осі, ми можемо зобразити еліпс (мал. 2.9).

Отже, дане рівняння задає той самий еліпс відносно старої системи координат.

Приклад 3. *Дано рівняння* $x^2 - xy + y^2 - 2x + 4y = 0$. *Виконати таке перетворення його, щоб воно не містило ні членів першого степеня, ні члена з* добутком xy.

Розв'язання. Щоб були відсутні члени першого степеня, перенесемо початок координат у точку $O(a, b)$, поки що довільну. Формули такого перетворення мають вигляд:

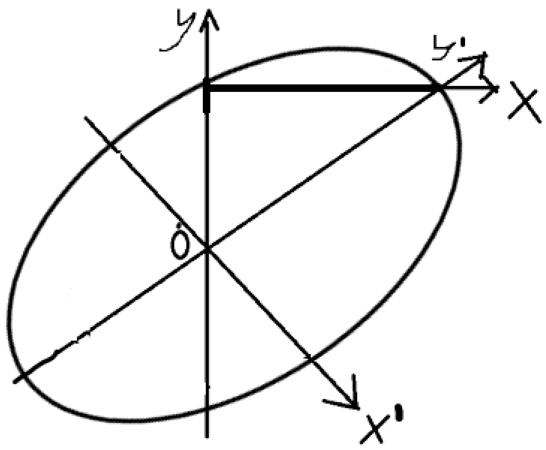
$$x = X + a,\ y = Y + b.$$

Підставляючи ці значення x і y в дане рівняння, отримаємо:

$$\mathrm{X}'^2(1 - tg\,\mathrm{a} + tg^2\mathrm{a}) + Y'^2(tg^2 a + tg\mathrm{a} + 1) - 4(tg^2 a + 1) = 0\,,$$

або

$$3\mathrm{X}'^2 + Y'^2 - 4 \cdot 2 = 0, \text{ тобто } 3X'^2 + Y'^2 = 8.$$



Мал.2.10

Отримане рівняння задає еліпс

$$\frac{X'^2}{\frac{8}{3}} + \frac{Y'^2}{8} = 1,$$

для якого нові осі координат $O'X'$ та $O'Y'$ є осями симетрії. Рівняння осі O'X' (осі симетрії) як прямої, що проходить через точку O' (0,-2), з кутовим коефіцієнтом к=-1, буде y + 2=- (x - 0), або x+y+2=0.

Щоб зобразити еліпс, потрібно спочатку побудувати нові осі (симетрії еліпса). І тому будуємо точку O' (0, -2) і пряму $O'X'$ за рівнянням x+y+2=0 (мал.2.10). Вочевидь, це рівняння задає еліпс відносно старих осей *xOy*.

2.2.4. Перетворення координат за рівняннями нових координатних осей

Нехай відносно деякої декартової системи координат *xOy* дані рівняння двох взаємно перпендикулярних прямих

$$Ax + By + C = 0 \tag{2.19}$$

та

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \tag{2.20}$$

які приймаються за нові осі. Щоб скласти формули перетворення координат, немає необхідності визначати синус і косинус кута повороту і координати нового початку. Дійсно, приймаючи пряму (2.19) за вісь $O'X$ покладаємо, що рівняння (2.19) має бути еквівалентним рівнянню $Y = 0$ (рівняння осі абсцис у новій системі координат).

Таким чином, $Ax + By + C$ та Y можуть відрізнятися лише сталим множником, тобто

$$Y=\lambda(Ax+By+C) \tag{2.21}$$

Щоб знайти величину множника λ, зауважимо, що, за формулами (2.17), коефіцієнти при x і y, рівні λA і λB, визначають синус і косинус кута між додатними напрямками осей $O'X$ і Ox, тому сума їх квадратів дорівнює 1, тобто $\lambda^2A^2 + \lambda^2B^2 = 1$, звідки

$$\lambda^2(A^2 + B^2) = 1$$

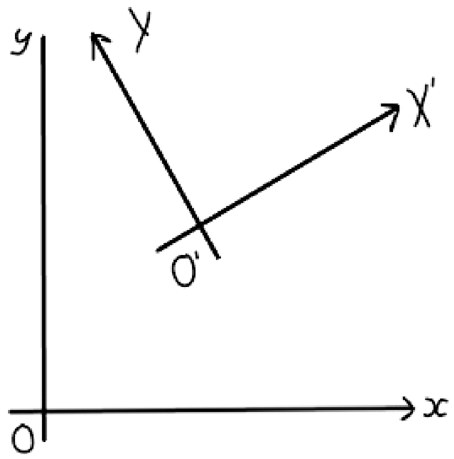
або

$$\lambda^2 = \frac{1}{(A^2+B^2)} \quad \text{і} \quad \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$$

Підставляючи знайдене значення у вираз (2.21), отримаємо:

$$Y = \pm\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{2.22}$$

Ця формула (2.22) дає вираз нової ординати Y через старі координати x і y, причому вибір знака визначає собою додатний напрям осі O'у'.



Мал.2.11

Аналогічно, приймаючи пряму (2.20) за вісь ОУ, знайдемо:

$$X = \pm\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} \qquad (2.23)$$

Вибір знака у формулі (2.23) визначається вибором додатного напрямку на осі $O'X$ (мал.2.11). Формули (2.22) та (2.23) визначають залежність нових координат X і У від старих координат x і y.

Зауваження. Формули (2.22) та (2.23) можна отримати інакше, враховуючи, що $У$ та X є відповідно відстанями точки М (х, у) до прямих ліній, що задаються рівняннями (2.19) і (2.20).

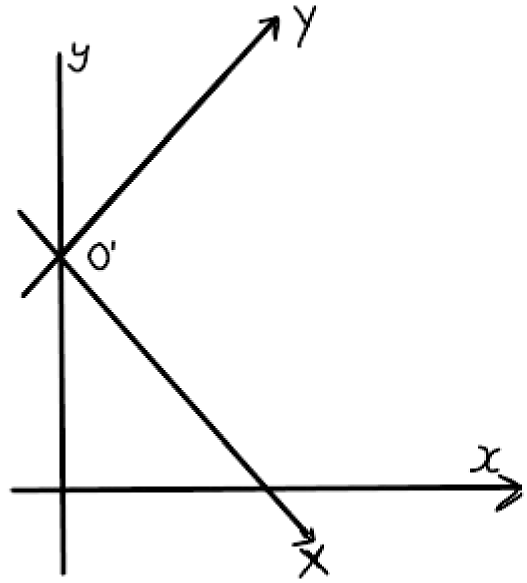
Щоб виразити старі координати через нові, потрібно розв'язати системурівнянь (2.22) і (2.23) відносно x та y.

Приклад. Знайти формули перетворення координат, якщо за нові осі прийнято дві прямі: $x+y - 1 = 0$, $x-y+1=0$.

Приймаючи першу пряму за вісь $O'X$, другу за вісь $O'У$, маємо:

$$X = \pm\frac{x-y+1}{\sqrt{2}} \quad Y = \pm\frac{x+y-1}{\sqrt{2}}$$

Нові осі координат будуємо за їх рівняннями: $x+y-1=0$ *і* $x-y+1=0$. Що ж до вибору додатних напрямів нових осей, то вони визначаються після фіксування знаків у формулах для X та Y. Наприклад, за такого вибору знаків: $X = \frac{x-y+1}{\sqrt{2}}$, $Y = -\frac{x+y-1}{\sqrt{2}}$, додатні напрями нових осей будуть такими, як показано на мал.2.12.



Мал.2.12

Дійсно, за умови *x=y=0* маємо:

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}; Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

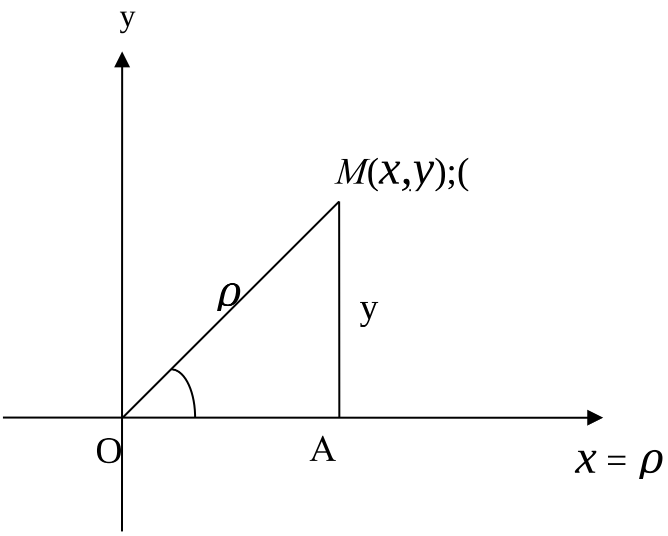
тобто старий початок координат повинен мати додатну абсцису та від'ємну ординату у новій системі координат.

2.3. Зв'язок між полярними та прямокутними декартовими координатами

Часто при розв'язанні практичних завдань треба вміти переходити від полярної до прямокутної декартової системи координат і навпаки. Знайдемо зв'язок між полярними та прямокутними декартовими координатами.

Виберемо прямокутну декартову систему так, що полюс полярної системи координат знаходиться у початку прямокутної системи координат, а додатна піввісь Ox збігається з полярною віссю ρ, вісь Oy перпендикулярна до осі Ox (мал.2.13.).

Нехай точка M має відповідно декартові координати (x,y) і (ρ, φ) – полярні відносно цих систем координат.



Мал. 2.13

З трикутника ОАМ:

$$x = \rho\cos\varphi\,, y = \rho\sin\varphi \tag{2.13}$$

Отже, якщо відомі полярні координати точки M, то за допомогою формул (2.13) можемо знайти декартові.

Навпаки, нехай відомі x і y, тоді очевидно $x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi$, тобто $x^2 + y^2 = \rho^2$. Значить, $\rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

З першої рівності $\cos\varphi = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$

з другої $\sin\varphi = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$

звідки $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$.

Отже, від декартових координат до полярних переходимо за формулами

$\rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$; $\sin\varphi = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$; $\cos\varphi = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ (2.14)

Як видно із формули $\rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ для визначення ρ стоять два знаки: плюс і мінус, що відповідає узагальненню системи полярних координат, потім і в формулах для визначення $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ перед коренем стоять два знаки. Два знаки в формулі для визначення ρ з'явилися тому, що ρ знаходиться із формули $\rho^2 = x^2 + y^2$. Якщо ρ може бути тільки величина додатна або нуль, то $\rho = +\sqrt{x^2 + y^2}$. Якщо ж ρ, має місце в узагальненій системі полярних координат, то може бути і величиною від'ємною, то із $\rho^2 = x^2 + y^2$ випливає, що $\rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Приклади

1. *Знайти прямокутні координати точки А, полярні координати якої* $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$.

Розв'язання. За формулами переходу

$$x = \rho\cos\varphi\,, y = \rho\sin\varphi$$

отримаємо

$$x = 3\cos\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},\ \ x = \sqrt{3},$$

$$y = 2\sin\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1,\ \ y = 1.$$

Отже, координати точки *А*: $x = \sqrt{3}, y = 1$

Відповідь: $\mathrm{A}(\sqrt{3};1)$.

2. *У прямокутній декартовій системі координат дано точку* $M(3;-3)$. *Знайти її полярні координати, якщо задані системи координат узгоджені.*

Розв'язання. За формулами (2.14)

$$\rho = \sqrt{(3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2};$$

$$\sin\varphi = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}};\ \cos\varphi = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

Відповідь: $M\left(3\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$.

3. *Дано рівняння кола* $x^2 + y^2 = a^2$ *записати його у полярних координатах.*

Розв'язання. Замінивши *x та y* за формулами (2.13) отримаємо

$$a^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi$$

або $a^2 = \rho^2$.

Звідки $a = \rho$

Відповідь: $\rho = a$.

3. *Дано рівняння* $\rho = 2a\cos\varphi$. *Записати його у декартових координатах.*

Розв'язання. Використавши формули $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

Отримаємо $x^2 + y^2 = 2ax$ або $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, тобто $(x-a)^2 + y^2 = a^2$.

Це рівняння кола, радіус якого a, з центром в точці $(a; 0)$. Значить, дане рівняння задає теж саме коло в полярних координатах, до того ж, полюс лежить на колі, а полярна вісь спрямована по діаметру.

Відповідь: $(x-a)^2 + y^2 = a^2$

РОЗДІЛ ІІІ. ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ У ТРИВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

3.1. Залежність між координатами вектора у двох різних афінних базисах

Нехай $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ і $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ - два різні афінні базиси простору, а $\vec{p}$ – довільний вектор, який має координати p_1, p_2, p_3 в базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ і p_1', p_2', p_3' в базисі $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$. Для зручності подальшого викладу базис $\overrightarrow{\mathrm{e}_1}, \overrightarrow{\mathrm{e}_2}, \overrightarrow{\mathrm{e}_3}$ назвемо старим або початковим, а $\overrightarrow{\mathrm{e}_1'}, \overrightarrow{\mathrm{e}_2'}, \overrightarrow{\mathrm{e}_3'}$ новим. Припустимо, що вектори нового базису задані своїми координатами в старому базисі:

$$\overrightarrow{e_1'}\{c_{11}, c_{21}, c_{31}\},\ \overrightarrow{e_2'}\{c_{12}, c_{22}, c_{32}\}, \overrightarrow{e_3'}\{c_{13}, c_{23}, c_{33}\}. \tag{3.1}$$

За визначення координат вектора запишемо, що

$$\vec{p} = p_1\overrightarrow{e_1} + p_2\overrightarrow{e_2} + p_3\overrightarrow{e_3} = \sum p_i\overrightarrow{e_i} \tag{3.2}$$

і

$$\vec{p} = p_1'\overrightarrow{e_1'} + p_2'\overrightarrow{e_2'} + p_3'\overrightarrow{e_3'} = \sum p_i'\overrightarrow{e_i'}.$$

Згідно з (3.1) вектори $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ виражаються через вектори $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ наступним чином:

$$\overrightarrow{e_1'} = \sum c_{j1}\overrightarrow{e_j}, \qquad \overrightarrow{e_2'} = \sum c_{j2}\overrightarrow{e_j} \qquad, \overrightarrow{e_3'} = \sum c_{j3}\overrightarrow{e_j}$$

або

$$\overrightarrow{e_i'} = \textstyle\sum_j c_{ji}\overrightarrow{e_j}, \text{ де i = 1, 2, 3.}$$

Підставивши ці значення у рівність для p, отримаємо:

$$p = \textstyle\sum_{i,j} \overrightarrow{p_i'} c_{ji}\overrightarrow{e_j}. \tag{3.3}$$

Із співвідношень (3.2) і (3.3) в силу теореми про єдиність розкладу вектора за базисними векторами отримаємо:

$$p_1 = \sum \overrightarrow{p_i'}c_{1i}, \qquad p_2 = \sum \overrightarrow{p_i'}c_{2i}, \qquad p_3 = \sum \overrightarrow{p_i'}c_{3i}$$

або в розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} p_1 = c_{11}\overrightarrow{p_1'} + c_{12}\overrightarrow{p_2'} + c_{13}\overrightarrow{p_3'}, \\ p_2 = c_{21}\overrightarrow{p_1'} + c_{22}\overrightarrow{p_2'} + c_{23}\overrightarrow{p_3'}, \\ p_3 = c_{31}\overrightarrow{p_1'} + c_{32}\overrightarrow{p_2'} + c_{33}\overrightarrow{p_3'}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Ці співвідношення називаються формулами перетворення координат вектора. У скороченому запису вони мають вигляд:

$$p_i = \sum_\alpha c_{i\alpha}\overrightarrow{p_\alpha'},\ i = 1, 2, 3. \quad (3.4')$$

Як бачимо, координати вектора $\vec{p}$ у базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ виражаються через координати того ж вектора у базисі $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ за допомогою системи лінійних функцій. Коефіцієнтам при p_1' відповідають числа c_{11}, c_{21}, c_{31}, які є координатами вектора $\overrightarrow{e_1'}$ в початковому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$; в свою чергу коефіцієнтам при p_2' відповідають координати вектора $\overrightarrow{e_2'}$ і при p_3' - координати вектора $\overrightarrow{e_3'}$.

Так, як вектори $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ не колінеарні, то

$$|c_{ij}| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.5)$$

Ми довели теорему.

Теорема 1: *Нехай* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ *і* $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ *- два довільних афінних базиси, при чому вектори* $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ *задані в базисі* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ *координатами* (3.1). *Якщо* p_1, p_2, p_3 *і* p_1', p_2', p_3' *є координати вектора* $\vec{p}$ *в базисах* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ *і* $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ *відповідно, то* p_1, p_2, p_3 *виражаються через* p_1', p_2', p_3' *за допомогою співвідношення* (3.4).

Доведення. У силу (3.5) система (3.4) завжди визначена відносно p_1', p_2', p_3':

$$\begin{cases} p_1' = \widetilde{c_{11}}\, p_1 + \widetilde{c_{12}} p_2 + \widetilde{c_{13}} p_3, \\ p_2' = \widetilde{c_{21}} p_1 + \widetilde{c_{22}} p_2 + \widetilde{c_{23}} p_3, \\ p_3' = \widetilde{c_{31}} p_1 + \widetilde{c_{32}} p_2 + \widetilde{c_{33}} p_3 \end{cases} \quad (3.6)$$

або в скороченому записі

$$p_i' = \sum \widetilde{c_{\iota\alpha}}\, p_\alpha.$$

Матриці

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{pmatrix} \widetilde{c_{11}} & \widetilde{c_{12}} & \widetilde{c_{13}} \\ \widetilde{c_{21}} & \widetilde{c_{22}} & \widetilde{c_{23}} \\ \widetilde{c_{31}} & \widetilde{c_{32}} & \widetilde{c_{33}} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

є взаємно оберненими. Це означає, що їх елементи задовольняють співвідношення:

$$\sum c_{i\alpha} \widetilde{c_{\alpha J}} = \delta_{ij}\text{ , де i, j = 1, 2, 3.}$$

Тут δ_{ij} = 1, якщо i = j, і $\delta_{ij} = 0$, якщо i$\neq j$. У розгорнутому вигляді ці співвідношення мають вигляд:

$$\begin{cases} c_{11}\widetilde{c_{11}} + c_{12}\widetilde{c_{21}} + c_{13}\widetilde{c_{31}} = 1, \\ c_{11}\widetilde{c_{12}} + c_{12}\widetilde{c_{22}} + c_{13}\widetilde{c_{32}} = 0, \\ c_{11}\widetilde{c_{13}} + c_{12}\widetilde{c_{23}} + c_{13}\widetilde{c_{33}} = 0, \\ c_{21}\widetilde{c_{11}} + c_{22}\widetilde{c_{21}} + c_{23}\widetilde{c_{31}} = 0, \\ c_{21}\widetilde{c_{12}} + c_{22}\widetilde{c_{22}} + c_{23}\widetilde{c_{32}} = 1, \\ c_{21}\widetilde{c_{13}} + c_{22}\widetilde{c_{23}} + c_{23}\widetilde{c_{33}} = 0, \\ c_{31}\widetilde{c_{11}} + c_{32}\widetilde{c_{21}} + c_{33}\widetilde{c_{31}} = 0, \\ c_{31}\widetilde{c_{12}} + c_{32}\widetilde{c_{22}} + c_{33}\widetilde{c_{32}} = 0, \\ c_{31}\widetilde{c_{13}} + c_{32}\widetilde{c_{23}} + c_{33}\widetilde{c_{33}} = 1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Розглянемо для прикладу:

Написати формули перетворення координат векторів, якщо нові базисні вектори в старому базисі мають координати:

$$\overrightarrow{e_1'}\{2, -1,\ 3\}, \overrightarrow{e_2'}\{1, 0, 2\}, \overrightarrow{e_3'}\{3, -2, 2\}.$$

Розв'язання. Підставимо координати нових базисних векторів у формулу (3.4). Отримаємо:

$$p_1 = 2p_1' + p_2' + 3p_3',$$

$$p_2 = -p_1' - 2p_3',$$

$$p_3 = 3p_1' + 2p_2' + 2p_3'.$$

Тут виражені старі координати векторів через нові. Записавши ці співвідношення відносно p_1', p_2', p_3', отримаємо вираження нових координат через старі:

$$p_1' = -2p_1 - 2p_2 + p_3,$$

$$p_2' = 2p_1 + \frac{5}{2}p_2 - \frac{1}{2}p_3,$$

$$p_3' = p_1 + \frac{1}{2}p_2 - \frac{1}{2}p_3.$$

Якщо, наприклад, вектор $\vec{p}$ в старому базисі має координати (3; -4; 2), то, підставивши значення в останнє співвідношення, отримаємо координати вектора $\vec{p}$ в новому базисі (4; -5; 0) .

3.2. Залежність між координатами вектора відносно двох різних ортонормованих базисів

Формули перетворення (3.4) застосовуються також і в тому випадку, коли старий і новий базиси є прямокутними декартовими. В такому випадку коефіцієнти c_{ij}, крім умови (3.5), задовольняють ряд додаткових співвідношень. Отримаємо ці співвідношення. Нехай $\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_3}$ і $\overrightarrow{g_1'}, \overrightarrow{g_2'}, \overrightarrow{g_3'}$ - два прямокутні декартові базиси, при чому

$$\overrightarrow{g_1'}\{c_{11}, c_{21}, c_{31}\}, \overrightarrow{g_2'}\{c_{12}, c_{22}, c_{32}\}, \overrightarrow{g_3'}\{c_{13}, c_{23}, c_{33}\}.$$

Звідси слідує, що

$$\begin{cases} \overrightarrow{g_1'} = c_{11}\overrightarrow{g_1} + c_{12}\overrightarrow{g_2} + c_{31}\overrightarrow{g_3}, \\ \overrightarrow{g_2'} = c_{12}\overrightarrow{g_1} + c_{22}\overrightarrow{g_2} + c_{32}\overrightarrow{g_3}, \\ \overrightarrow{g_3'} = c_{13}\overrightarrow{g_1} + c_{23}\overrightarrow{g_2} + c_{33}\overrightarrow{g_3}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Якщо позначити координати векторів $\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_3}$ у системі $\overrightarrow{g_1'}, \overrightarrow{g_2'}, \overrightarrow{g_3'}$ через $\overrightarrow{g_1}\{\widetilde{c_{11}}, \widetilde{c_{21}}, \widetilde{c_{31}}\}, \overrightarrow{g_2}\{\widetilde{c_{12}}, \widetilde{c_{22}}, \widetilde{c_{32}}\}, \overrightarrow{g_3}\{\widetilde{c_{13}}, \widetilde{c_{23}}, \widetilde{c_{33}}\}$, то

$$\begin{cases} \overrightarrow{g_1} = \widetilde{c_{11}}\overrightarrow{g_1'} + \widetilde{c_{21}}\overrightarrow{g_2'} + \widetilde{c_{31}}\overrightarrow{g_3'}, \\ \overrightarrow{g_2} = \widetilde{c_{12}}\overrightarrow{g_1'} + \widetilde{c_{22}}\overrightarrow{g_2'} + \widetilde{c_{32}}\overrightarrow{g_3'}, \\ \overrightarrow{g_3} = \widetilde{c_{13}}\overrightarrow{g_1'} + \widetilde{c_{23}}\overrightarrow{g_2'} + \widetilde{c_{33}}\overrightarrow{g_3'}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Помноживши кожне із співвідношень (3.9) послідовно на $\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_3}$ і враховуючи, що базис $\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_3}$ прямокутний декартовий, отримаємо:

$$\overrightarrow{g_1'}\overrightarrow{g_1} = c_{11}, \quad \overrightarrow{g_1'}\overrightarrow{g_2} = c_{21}, \quad \overrightarrow{g_1'}\overrightarrow{g_3} = c_{31},$$

$$\overrightarrow{g_2'}\overrightarrow{g_1} = c_{12}, \quad \overrightarrow{g_2'}\overrightarrow{g_2} = c_{22}, \quad \overrightarrow{g_2'}\overrightarrow{g_2} = c_{32},$$

$$\overrightarrow{g_3'}\overrightarrow{g_3} = c_{13}, \quad \overrightarrow{g_3'}\overrightarrow{g_3} = c_{23}, \quad \overrightarrow{g_3'}\overrightarrow{g_3} = c_{33}.$$

Виконуючи аналогічно такі ж перетворення із співвідношенням (3.10), отримаємо:

$$\overrightarrow{g_1}\overrightarrow{g_1'} = \widetilde{c_{11}},\ \ \overrightarrow{g_2}\overrightarrow{g_1'} = \widetilde{c_{21}},\ \ \overrightarrow{g_3}\overrightarrow{g_1'} = \widetilde{c_{31}},$$

$$\overrightarrow{g_1}\overrightarrow{g_2'} = \widetilde{c_{12}},\ \ \overrightarrow{g_2}\overrightarrow{g_2'} = \widetilde{c_{22}},\ \ \overrightarrow{g_3}\overrightarrow{g_2'} = \widetilde{c_{32}},$$

$$\overrightarrow{g_1}\overrightarrow{g_3'} = \widetilde{c_{13}},\ \ \overrightarrow{g_2}\overrightarrow{g_3'} = \widetilde{c_{23}},\ \ \overrightarrow{g_3}\overrightarrow{g_3'} = \widetilde{c_{33}}.$$

Порівнюючи отримані співвідношення і враховуючи, що скалярний добуток не залежить від порядку співмножників, отримаємо:

$$c_{11} = \widetilde{c_{11}},\ \ c_{21} = \widetilde{c_{21}},\ \ c_{31} = \widetilde{c_{31}},$$

$$c_{12} = \widetilde{c_{12}},\ \ c_{22} = \widetilde{c_{22}},\ \ c_{32} = \widetilde{c_{23}},$$

$$c_{13} = \widetilde{c_{31}},\ \ c_{23} = \widetilde{c_{32}},\ \ c_{33} = \widetilde{c_{33}}.$$

Таким чином, співвідношення (3.10) набирають вигляду:

$$\begin{cases} \overrightarrow{g_1} = c_{11}\overrightarrow{g_1'} + c_{12}\overrightarrow{g_2'} + c_{13}\overrightarrow{g_3'}, \\ \overrightarrow{g_2} = c_{21}\overrightarrow{g_1'} + c_{22}\overrightarrow{g_2'} + c_{23}\overrightarrow{g_3'}, \\ \overrightarrow{g_3} = c_{31}\overrightarrow{g_1'} + c_{32}\overrightarrow{g_2'} + c_{33}\overrightarrow{g_3'}. \end{cases} \tag{3.10′}$$

Враховуючи, що вектори $\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_3}$ і $\overrightarrow{g_1'}, \overrightarrow{g_2'}, \overrightarrow{g_3'}$ є одиничними і взаємно перпендикулярними, ми із співвідношень (3.9) і $(3.\,10')$ отримаємо:

$$\begin{cases} c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 = 1,\ \ c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{32} = 0, \\ c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 = 1,\ \ c_{11}c_{13} + c_{21}c_{21} + c_{31}c_{33} = 0, \\ c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 = 1,\ \ c_{11}c_{13} + c_{21}c_{23} + c_{31}c_{33} = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2 = 1, \\ c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2 = 1, \\ c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 = 1, \\ c_{11}c_{21} + c_{12}c_{23} + c_{13}c_{23} = 0, \\ c_{11}c_{31} + c_{12}c_{32} + c_{13}c_{33} = 0, \\ c_{21}c_{31} + c_{22}c_{32} + c_{23}c_{33} = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Отже, якщо старий і новий базиси є прямокутними декартовими, то у формулах перетворення (3.4) коефіцієнти задовольняють співвідношення (3.11) і (3.12). З цими співвідношеннями легше працювати, якщо ввести в розгляд матрицю, складену із коефіцієнтів системи (3.4)

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Співвідношення (3.11) і (3.12) означають, що сума квадратів елементів будь-якого рядка і стовпця рівна одиниці, а сума добутків відповідних елементів різних рядків або стовпців рівна нулю матриця елементи якої задовольняють ці співвідношення, називається *ортогональною матрицею.* Наприклад, матриця

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

є ортогональною. Дійсно, сума квадратів елементів будь-якого рядка або стовпця цієї матриці рівна одиниці, а сума добутків відповідних елементів різних рядків або стовпців рівна нулю.

Наприклад, для першого і третього рядка маємо:

$$0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Таким чином, можемо сформулювати наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай $\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_3}$ і $\overrightarrow{g_1'}, \overrightarrow{g_2'}, \overrightarrow{g_3'}$ - два прямокутних декартових базиси, при чому вектори $\overrightarrow{g_1'}, \overrightarrow{g_2'}, \overrightarrow{g_3'}$ задані в базисі $\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_3}$ своїми координатами:*

$$\overrightarrow{g_1'}\{c_{11}, c_{21}, c_{31}\}, \overrightarrow{g_2'}\{c_{12}, c_{22}, c_{32}\}, \overrightarrow{g_3'}\{c_{13}, c_{23}, c_{33}\}.$$

Якщо p_1, p_2, p_3 і *p_1', p_2', p_3' є координати вектора $\vec{p}$ відповідно в базисах $\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_3}$ і $\overrightarrow{g_1'}, \overrightarrow{g_2'}, \overrightarrow{g_3'}$, то p_1, p_2, p_3 виражаються через p_1', p_2', p_3' за допомогою співвідношень* (3.4), *де матриця* (3.13) *ортогональна.*

Наприклад:

Нехай $ABCDA'B'C'D'$- деякий куб, сторона якого рівна одиниці. Написати формули перетворення координат векторів, якщо $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ - старий базис, а $\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{C'D'}$ - новий.

Розв'язання. Нові базисні вектори $\overrightarrow{g_1'} = \overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{g_2'} = \overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{g_3'} = \overrightarrow{C'D'}$ мають в початковому базисі наступні координати:

$$\overrightarrow{g_1'}\{0, 0, -1\}, \overrightarrow{g_2'}\{0, -1, 0\}, \overrightarrow{g_3'}\{-1, 0, 0\}.$$

Таким чином, формули (3.4) у даному випадку матимуть вигляд:

$$p_1 = -p_3', p_2 = -p_2', p_3 = -p_1'.$$

Відповідь: $p_1 = -p_3', p_2 = -p_2', p_3 = -p_1'$.

3.3. Перетворення тривимірних координат точок

Нехай $O\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ та $O'\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ - дві афінні системи координат у просторі, а M - довільна точка, яка має координати (x_1, x_2, x_3) в системі $O\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ та (x_1', x_2', x_3') у системі $O'\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$. Встановимо залежність між x_1, x_2, x_3 і x_1', x_2', x_3'.

Припустимо, що новий початок і нові координатні вектори в початковій системі $O\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ мають координати:

$$\overrightarrow{e_1'}\{c_{11}, c_{21}, c_{31}\}, \overrightarrow{e_2'}\{c_{12}, c_{22}, c_{32}\}, \overrightarrow{e_3'}\{c_{13}, c_{23}, c_{33}\}, O'(a_1, a_2, a_3). \qquad (3.14)$$

Якщо $r = \overrightarrow{OM}$ – радіус-вектор точки M у старій системі координат, а $r' = \overrightarrow{O'M}$ - радіус-вектор тієї ж точки у новій системі, то розглядаючи трикутник $OO'M$ і застосовуючи до нього правило трикутника для додваання векторів отримаємо:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}, \text{ або } r = r' + \overrightarrow{OO'}. \qquad (3.15)$$

Так як координати точки співпадають з координатами її радіус-вектора, то в системі $O\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ вектори $\vec{r}$ і $\overline{OO'}$ мають координати: $r\{x_1, x_2, x_3\}$, $OO'\{a_1, a_2, a_3\}$. Якщо вектор $\overrightarrow{r'}$ в системі $O\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ має координати $\{y_1, y_2, y_3\}$, то із співвідношень (3.15) отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + a_1, \\ x_2 = y_2 + a_2, \\ x_3 = y_3 + a_3. \end{cases} \qquad (3.16)$$

Координати вектора $\overrightarrow{r'}$ у новій системі співпадають з координатами точки М у системі $O'\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$, $\overrightarrow{r'}\{x_1', x_2', x_3'\}$. Але вище було встановлено, що координати вектора у старому і новому базисах пов'язані співвідношеннями (3.4), тому

$$y_1 = \sum c_{1a}x_a', \ \ y_2 = \sum c_{2a}x_a', y_3 = \sum c_{3a}x_a'.$$

Підставивши знайдені значення y_1, y_2, y_3 в формулу (3.16), отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + c_{13}x_3' + a_1, \\ x_2 = c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + c_{23}x_3' + a_2, \\ x_3 = c_{31}x_1' + c_{32}x_2' + c_{33}x_3' + a_3 \end{cases} \qquad (3.17)$$

або у скороченому записі

$$x_i = \sum c_{ia}x_a' + a_i. \qquad (3.17')$$

Формула (3.17) називається *формулою перетворення координат* точок у просторі. У цих формулах, так само як і в формулах (3.4), коефіцієнти при x_1', x_2', x_3' є відповідно координатами векторів $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$. Вільними членами є координати нового початку в початковій системі. Так як вектори $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ не компланарні, то $|c_{ij}| \neq 0$, тому рівняння (3.17) розв'язані відносно x_1', x_2', x_3':

$$\begin{cases} x_1' = \widetilde{c_{11}}x_1 + \widetilde{c_{12}}x_2 + \widetilde{c_{13}}x_3 + \widetilde{a_1}, \\ x_2' = \widetilde{c_{21}}x_1 + \widetilde{c_{22}}x_2 + \widetilde{c_{23}}x_3 + \widetilde{a_2}, \\ x_3' = \widetilde{c_{31}}x_1 + \widetilde{c_{32}}x_2 + \widetilde{c_{33}}x_3 + \widetilde{a_3}. \end{cases} \qquad (3.18)$$

або в скороченому записі:

$$x_i' = \sum \widetilde{c_{\iota a}}\, x_i + \widetilde{a}_\iota. \qquad (3.18')$$

Матриці

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{pmatrix} \widetilde{c_{11}} & \widetilde{c_{12}} & \widetilde{c_{13}} \\ \widetilde{c_{21}} & \widetilde{c_{22}} & \widetilde{c_{23}} \\ \widetilde{c_{31}} & \widetilde{c_{32}} & \widetilde{c_{33}} \end{pmatrix}$$

є взаємно оберненими. Це означає, що їх елементи задовольняють співвідношення (3.8). Таким чином доведена наступна теорема:

Нехай $O\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ і $O'\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ - афінні системи координат, при чому точка O' і вектори $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ задані в системі $O\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ своїми координатами

(3.14). *Якщо* x_1, x_2, x_3 *і* x_1', x_2', x_3' *є координатами точки M простору відносно систем* $O\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ *і* $O'\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$, *то* x_1, x_2, x_3 *виражаються через* x_1', x_2', x_3' *за допомогою співвідношень* (3.17).

Зауважимо, що визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Дійсно, безпосередньо перевіряється рівністю

$$(\overrightarrow{e_x}\overrightarrow{e_y}\overrightarrow{e_z}) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} (\overrightarrow{e_{x'}}\overrightarrow{e_{y'}}\overrightarrow{e_{z'}}).$$

Так, як $(\overrightarrow{e_x}\overrightarrow{e_y}\overrightarrow{e_z}) \neq 0$, то $\Delta \neq 0$.

Для всіх систем координат $O'x'y'z'$, які можуть бути переведені одна в одну, визначник Δ має один і той же знак. Дійсно, так як, $(\overrightarrow{e_x}\overrightarrow{e_y}\overrightarrow{e_z})$ відмінне від нуля, то Δ відмінне від нуля. Крім того, Δ змінюється так, що не може набувати значень різних знаків.

Систему формул (2.6) за умови, що $\Delta \neq 0$, завжди можна тлумачити як перехід від деякої системи координат $O'x'y'z'$ до системи координат *Oxyz*, початок якої знаходиться в точці (x_0', y_0', z_0'), а базисні вектори виражаються через базисні вектори системи $O'x'y'z'$ за формулами (2.1).

Якщо обидві системи координат *Oxyz* і $O'x'y'z'$ прямокутні, то коефіцієнти формул (2.6) задовольняють умови ортогональності

$$\begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1, & \alpha_{11}\,\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{23} = 0, \\ \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 = 1, & \alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{22}\alpha_{32} + \alpha_{23}\alpha_{33} = 0, \\ \alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1, & \alpha_{31}\alpha_{11} + \alpha_{32}\alpha_{12} + \alpha_{33}\alpha_{13} = 0, \end{cases} \qquad (2.8)$$

які отримуються при використанні формул (2.7) і співвідношень ортогональності базисів

$$e_x^2 = e_y^2 = e_z^2 = 1, \qquad e_x e_y = e_y e_z = e_z e_x = 0,$$

$$e_x^2 = e_y^2 = e_z^2 = 1, \qquad e_{x\prime} e_{y\prime} = e_{y\prime} e_{z\prime} = e_{z\prime} e_{x'} = 0.$$

Обернені формули до (2.7), якщо виконуються умови (2.8), завжди можна подати як перехід від деякої прямокутної системи координат $O'x'y'z'$ до прямокутної системи координат *Oxyz*, початок якої знаходиться в точці $(x_0'; y_0'; z_0')$, а базисні вектори задаються формулами (2.6). В силу умов (2.8) базисні вектори $\overrightarrow{\mathrm{e_x}}, \overrightarrow{\mathrm{e_y}}, \overrightarrow{\mathrm{e_z}}$ одиничні і попарно перпендикулярні.

Зауважимо, що у випадку прямокутних декартових координат *xyz* і $x'y'z'$ маємо $\Delta = \pm 1$, причому $\Delta = +1$, якщо від однієї системи координат можна в результаті руху перейти до другої. Якщо ж це не можна зробити рухом без дзеркального відображення, то $\Delta = -1$.

Розглянемо приклади**.**

1. *Написати формули перетворення координат точок в просторі, якщо дані координати нових координатних векторів і нового початку в старій системі* $O'\{-1,0,2\}$:

$$\overrightarrow{e_1'}\{3,-1,4\}, \overrightarrow{e_2'}\{0,-2,1\}, \overrightarrow{e_3'}\{3,-5,5\}.$$

Розв'язання: Підставивши координати нового початку і нових координатних векторів в формули (17), отримаємо:

$$x_1 = 3x_1' + 3x_3' - 1,$$
$$x_2 = -x_1' - 2x_2' - 5x_3',$$
$$x_3 = 4x_1' + x_2' + 5x_3' + 2.$$

Звідси, розв'язавши ці співвідношення відносно x_1', x_2', x_3', отримаємо вираження нових координат через старі:

$$x_1' = -\frac{5}{6}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - \frac{17}{6},$$
$$x_2' = -\frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 - \frac{13}{2},$$
$$x_3' = \frac{7}{6}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 + \frac{19}{6}.$$

Відповідь:$x_1' = -\frac{5}{6}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - \frac{17}{6}$, $x_2' = -\frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 - \frac{13}{2}$, $x_3' = \frac{7}{6}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 + \frac{19}{6}$.

2. *Нехай OABC – довільний тетраедр. Написати формули перетворення координат точок при переході від координатної системи* $O\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, *де* $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{OC}$, *до системи* $O'\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$,
де $O' = A, \overrightarrow{e_1'} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{e_2'} = \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{e_3'} = \overrightarrow{AC}$.

Розв'язання. Визначимо координати нового початку і нових координатних векторів у старій системі координат. Так як $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OA}$, то точка A має координати A(1, 0, 0). З іншого боку,

$$\overrightarrow{e_1'} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1},\ \ \overrightarrow{e_2'} = \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{e_1},$$

$$\overrightarrow{e_3'} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1}.$$

Звідси випливає, що

$$\overrightarrow{e_1'}\{-1, 1, 0\}, \overrightarrow{e_2'}\{-1, 0, 0\}, \overrightarrow{e_3'}\{-1, 0, 1\}.$$

Підставивши координати точки A і векторів $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ у співвідношення (3.17), ми отримаємо формули перетворення координат точок:

$$x_1 = -x_1' - x_2' - x_3' + 1, x_2 = x_1', x_3 = x_3'.$$

Відповідь: $x_1 = -x_1' - x_2' - x_3' + 1, x_2 = x_1', x_3 = x_3'$.

3.4. Окремі випадки перетворення афінних координат

Якщо при переході від системи $O\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до системи $O'\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ вектори $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ не міняються, тобто $\overrightarrow{e_1'} = \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2'} = \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3'} = \overrightarrow{e_3}$, то таке перетворення називається *перенесенням початку координат.* В даному випадку вектори $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ мають координати $\overrightarrow{e_1'}\{1, 0, 0\}, \overrightarrow{e_2'}\{0, 1, 0\}, \overrightarrow{e_3'}\{0, 0, 1\}$; тому формула (3.17) набуває вигляду:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + a_1, \\ x_2 = x_2' + a_2, \\ x_3 = x_3' + a_3. \end{cases} \tag{3.19}$$

Ці вирази називаються формулами перетворення координат при перенесенні початку координат. Зауважимо, що при перенесені початку координат, всі точки змінюють свої координати.

Приклад. *Написати формули перетворення координат точок при перенесенні початку в точку* O (2, -3, 4).

Розв'язання. Підставивши координати точки O' в формули (3.19), отримаємо: $x_1 = x_1' + 2, x_2 = x_2' - 3, x_3 = x_3' + 4$.

Якщо при переході від системи $O\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ до другої системи $O'\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ початок координат не змінюється, тобто $O \equiv O'$, то таке перетворення називається *афінним поворотом системи координат.* Необхідно відмітити, що при афінному повороті кути між координатними векторами і довжини векторів, взагалі кажучи, змінюються. Координати точки O' при афінному повороті рівні (0, 0, 0); тому співвідношення (3.17) набуває вигляду:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + c_{13}x_3', \\ x_2 = c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + c_{23}x_3', \\ x_3 = c_{31}x_1' + c_{32}x_2' + c_{33}x_3'. \end{cases} \tag{3.20}$$

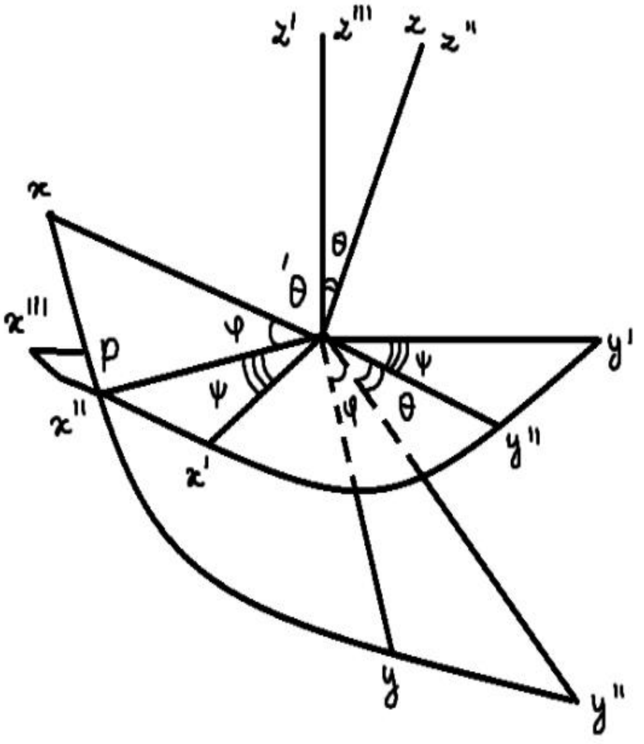
Ці формули називаються *формулами перетворення при афінному повороті.*

3.5. Формули Ейлера

Формулами перетворення координат доводиться користуватись при застосуванні методу координат. Найбільш загальним випадком є той, коли змінюється і початок координат, і напрям осей координат. Таке перетворення може складатися з двох: а) перенесення початку координат; б) зміна напрямку осей координат.

Розглянемо формули перетворення осей координат, які відкрив Ейлер.

Нехай маємо дві системи координат xyz та $x'y'z'$ (мал.3.1) із спільним початком О. Розглянемо площини xy і $x'y'$. Нехай вони перетинаються по прямій ОР. Проведемо з точки О перпендикуляри до ОР в площинах oxy та $x'y'$: нехай вони будуть Oy''і Oy''.Щоб систему xyz перевести в положення $x'y'z'$, нам доведеться виконати три повороти навколо трьох різних напрямів.



Мал.3.1

По-перше, повертаємо систему xyz навколо осі z так, щоб вісь x співпала з лінією перетину площин xy і $x'y'$, тобто з лінією ОР; тоді система займе положення $x''y''z''$(вважаючи ОР за вісь x'' і Oz за вісь z''). Кут цього повороту, тобто кут між віссю x та лінією перетину площин xy і $x'y'$, позначимо через φ, зауважимо, що додатний напрям цього повороту (поворот проти годинникової стрілки) є напрям від осі x до осі y.

По-друге, повертаємо систему $x''y''z''$ навколо осі x''(ОР) так, щоб вісь z'' співпала з віссю z'; при цьому площина $x''y''$(xy) співпадає з площиною $x'y'$, і система з положення $x''y''z''$ перейде в положення $x'''y'''z'''$(вважаючи x''

за x''' і z' за z'''). Кут цього повороту, тобто кут між осями z і z', позначимо через θ, зауваживши, що додатний напрям цього повороту є напрям від осі y''до осі z''. Очевидно, що θ буде також двогранним кутом між площинами *xy* та $x'y'$.

Нарешті, систему $x'''y'''z'''$ повертаємо навколо осі $z'''(z')$ так, щоб вісь x''' співпала з віссю x'; при цьому вісь y''' співпадає з віссю y', і система займає положення $x'y'z'$. Кут цього повороту, тобто кут між осями x''' і x', позначимо через Ψ, зауважимо, що додатний напрям цього повороту є напрямом від осі x''' до осі y''' .

Отже, завдяки трьом послідовним поворотам навколо трьох осей *Oz, Op* і Oz' ми звели систему *xyz* до співпадання із системою $x'y'z'$.

Перейдемо тепер до виведення формул перетворення координат. Задача полягає у тому, щоб виразити старі координати *x, y, z* довільної точки M через її нові координати x', y',z'. Спочатку ми перейдемо від старої системи *xyz* до системи $x''y''z''$, отриманої після першого повороту. Так як перший поворот був здійснений навколо осі *z,* то вісь *z* залишається нерухомою; тому координата *z* не зміниться, а перетворенню підпадають тільки *x* і *y,* і питання зводиться до перетворення на площині *xy*. Формули для *x* та *y* ми напишемо, якщо згадаємо перетворення координат на площинні:

$$x = x''cos\varphi - y''sin\varphi\ ,\ \ y = x''sin\varphi + y''cos\varphi,\ \ \ z = z'' \tag{2.9}$$

У формулах (2.9) ми записали, що z=z'', так як в обох розглядуваних системах координат *z* буде одне і те ж саме. Тоді, від системи $x''y''z''$ ми переходимо до системи $x'''y'''z'''$, яка отримується з попередньої після другого повороту. Цей поворот здійснюється навколо осі $x''(OP)$; тому координата x'' залишається незмінною, перетворенню підлягають лише y''і z'':

$$x''=x'''\ ,\ y'' = y'''cos\theta - z'''sin\theta\ ,\ \ z'' = y'''sin\theta + z'''cos\theta \tag{2.10}$$

Нарешті, від системи $x'''y'''z'''$ переходимо до системи $x'y'z'$, яка отримується від попередньої після третього повороту. Цей поворот здійснюється навколо осі z''', і тому маємо:

$$x''' = x'cos\Psi\text{-}y''sin\Psi\ ,\ \ y''' = x'sin\Psi + y'cos\Psi,\ \ z'''=z' \qquad (2.11)$$

Щоб отримати остаточні формули, потрібно виключити з формул (2.9), (2.10) і (2.11) допоміжні координати $x'',\ y'', z''$ і x''', y''', z'''.

З цією метою, формули (2.11) підставимо у формули (2.10). Отримаємо:

$$x'' = x'cos\Psi\text{-}y''sin\Psi,$$

$$y'' = x'cos\theta\sin\Psi + y'cos\theta sin\theta\text{-}z'sin\theta\ , \qquad (2.12)$$

$$z'' = x'sin\theta\sin\Psi + y'cos\Psi sin\theta + z'cos\theta\ ,$$

Таким чином, виключили $x''',\ y''', z'''$. Щоб виключити x'', y'', z'', підставимо отриманні щойно формули (2.12) у формули (2.9) і отримаємо:

$$x = x'cos\Psi cos\varphi - y'cos\varphi sin\Psi - x'sin\varphi sin\Psi\ cos\theta - y'sin\varphi cos\Psi cos\theta + z'sin\varphi sin\theta,$$

$$y = x'sin\Psi cos\varphi - y'sin\varphi sin\Psi + x'scos\varphi sin\Psi\ cos\theta + y'cos\varphi cos\Psi cos\theta - z'cos\varphi sin\theta,$$

$$z = x'sin\theta\sin\Psi + y'cos\Psi sin\theta + z'cos\theta\ .$$

Виносячи в цих формулах спільними множниками координати $x,' y', z'$, остаточно отримаємо:

$$x = x'(cos\Psi cos\varphi - sin\varphi sin\Psi\ cos\theta) + y'(-cos\varphi sin\Psi - sin\varphi cos\Psi cos\theta) + z'sin\varphi sin\theta,$$

$$y = x'(sin\Psi cos\varphi + x'scos\varphi sin\Psi\ cos\theta) + y'(-sin\varphi sin\Psi + cos\varphi cos\Psi cos) - z'cos\varphi sin\theta,$$

$$z = x'sin\theta\sin\Psi + y'cos\Psi sin\theta + z'cos\theta.$$

Ці формули називають *формулами Ейлера.*

3.6. Зв'язок між координатами точок у різних прямокутних декартових системах координат у просторі

Формули перетворення координат точок (3.17) і (3.18) застосовуються також і в тому випадку, коли стара і нова системи координат прямокутні декартові. У такому випадку матриці перетворень (3.7) мають бути ортогональними, тобто мають задовольняти умови (3.11) і (3.12).

Формули перетворення координат точок для часткових випадків (перенесення початку і повороту системи) нічим не відрізняються від існуючих часткових випадків перетворення загальної афінної системи координат. Таким чином, при паралельному переносі прямокутної декартової системи координат формули перетворення мають вигляд (3.19), а при повороті прямокутної декартової системи координат формули перетворення співпадають з формулами (3.20) з різницею лише, що матриці перетворення в даному випадку будуть ортогональними.

3.7. Обернена задача

Сформулюємо обернену задачу: нехай дана афінна система координат $O\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ і система рівнянь (3.17) з визначником, відмінним від нуля. Чи існує така нова афінна система координат $O'\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ при переході до якої формули перетворення координат точок мають вигляд (3.17)?

Переконаємося у тому, що така система $O'\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ існує. Для цього достатньо в якості початкової точки цієї системи взяти $O'(a_1, a_2, a_3)$ і за базисні вектори $\overrightarrow{e_1'}\{c_{11}, c_{21}, c_{31}\}, \overrightarrow{e_2'}\{c_{12}, c_{22}, c_{32}\}, \overrightarrow{e_3'}\{c_{13}, c_{23}, c_{33}\}$, де числа $a_1, a_2, a_3, c_{11}, c_{21}, \dots, c_{33}$ взяти із рівняння (3.17). В силу умови $\left|c_{ij}\right| \neq 0$ вектори $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ не компланарні, тому вони визначають новий базис. Можна побачити, що формули переходу від системи координат Oe_1, e_2, e_3 до системи $O'\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ співпадають з формулами (3.17). Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема 4. *Якщо дана афінна система координат* $O\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ *і система лінійних рівнянь* (3.17) *з визначником, відмінним від нуля, то існує система координат* $O'\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ *при переході до якої рівняння* (3.17) *є формулами* *перетворення точок. Нова система координат визначається співвідношенням* (3.14).

Аналогічна теорема має місце для прямокутної декартової системи координат.

Теорема 5. *Якщо дана прямокутна декартова система координат* $O\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_3}$ *і система лінійних рівнянь* (3.17), *коефіцієнти якої при* x_1', x_2', x_3' *утворюють ортогональну матрицю, то існує прямокутна декартова система координат* $O'\overrightarrow{g_1'}\overrightarrow{g_2'}\overrightarrow{g_3'}$, *при переході до якої співвідношення* (3.17) *є формулами перетворення координат:*

$$O'(a_1, a_2, a_3), \overrightarrow{g_1'}\{c_{11}, c_{21}, c_{31}\}, \overrightarrow{g_2'}\{c_{12}, c_{22}, c_{32}\}, \overrightarrow{g_3'}\{c_{13}, c_{23}, c_{33}\}.$$

Приклад.

Чи є співвідношення

$$x = \qquad 2y' + 2z' - 6,$$
$$y = 2x' - y' + 2z' + 1,$$
$$z = 3x' + y' + 4z' - 3.$$

формулами перетворення координат точок? Якщо є то знайти координати нового початку і координати нових базисних векторів $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$.

Розв'язання. Дані формули є формулами перетворення координат точок, так як

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Нова система координат у даному випадку визначається так:
$O'(-6, 1, -3), e_1'\{0, 2, 3\}, e_2'\{2, -1, 1\}, e_3'\{2,2, 4\}$.

Відповідь: $O'(-6, 1, -3), e_1'\{0, 2, 3\}, e_2'\{2, -1, 1\}, e_3'\{2,2, 4\}$.

ВИСНОВКИ

Перетворення координат знаходить широке застосування у розв’язанні багатьох практичних задач. Це досить потужний засіб, оволодіння яким дає змогу набагато легше (у певних випадках) розв’язувати геометричні задачі без використання різних теорем.

У магістерській роботі розглядаються різні випадки переходу від однієї системи координат до іншої і досліджуються формули відповідних перетворень, їх прикладне значення. Полярна система координат широко застосовується не лише в геометрії, а й в механіці, математичному аналізі та інших галузях.

Перетворення координат вивчається в аналітичній геометрії. Предметом аналітичної геометрії є вивчення властивостей фігур, а одним із методів є метод перетворення координат, за допомогою якого реалізовується застосування алгебри у геометрії до вивчення фігур та їх властивостей.

У додатках подається досить важливий матеріал про застосування перетворення координат до розв’язання задач та дослідження функцій, який буде корисним для всіх, хто займатиметься питаннями перетворення координат у різних галузях знань.

Список використаної літератури

1. Боровик В.Н., Зайченко І.В., Мурач М.М., Яковець В.П. Геометричні перетворення площини. Навч. посіб. Суми: ВТД Університетська книга. 2003. 504 с.

2. Боровик В. Н., Яковець В.П., Зайченко І.В. Геометричні перетворення площини. Ч. 1. Основні поняття про відображення фігур. Симетрія відносно точки. Симетрія відносно прямої: навч. посіб. для студ. фіз.-мат. ф-ту. Ніжин: НДПУ, 2001. 208 с.

3. Боровик В.Н., Яковець В.П., Зайченко І.В. Геометричні перетворення площини. Ч. 2. Поворот площини навколо точки. Паралельне перенесення: навч. посіб. для студ. фіз.-мат. ф-ту. Ніжин: НДПУ, 2002. 242 с.

4. Боровик В.Н., Яковець В.П., Зайченко І.В. Подібність і гомотетія. Інверсія: навч. посіб. для студ. фіз.-мат. ф-ту. Ніжин: НДПУ, 2002. 277 с.

5. Боровик В.Н., Яковець В.П., Зайченко І.В. Геометричні перетворення площини: навч. посіб. для студ. фіз.-мат. ф-тів ВПНЗ. Суми: Унів. кн., 2003. 504 с.

6. Ващук Ф.Г. Перетворення декартових прямокутних координат на площині. Спрощення рівнянь кривих другого порядку. Практикум з вищої математики: навч. посіб. для ВНЗ Ч.1 Елементи алгебри та аналітичної геометрії. Ужгород, 2005.С. 208–213.

7. Геометричні перетворення і симетрія: Природа симетрії і симетрія природи. К.: Рад. шк., 1987.180 с.

8. Координатний метод перетворення координат. Електронний ресурс: Режим доступу: https://studfile.net/preview/5462036/page:6/

9. Методичні вказівки до самостійної роботи для студентів з курсу «Аналітична геометрія та лінійна алгебра». Електронний ресурс: Режим доступу: https://matan.kpi.ua/public/files/mulyk_mvsr-agla-plain-transforms.pdf

10. Методика розв’язування планіметричних задач методом геометричних перетворень. Електронний ресурс: Режим доступу: http://repository.rshu.edu.ua/id/eprint/13351/1

11. Основи тривимірної графіки. Перетворення тривимірних координат. Повороти. Електронний ресурс: Режим доступу: https://studfile.net/preview/5462036/page:13/

12. Перетворення координат. Електронний ресурс: Режим доступу: https://studfile.net/preview/5775083/page:14/

13. Перетворення між полярними та прямокутними координатами. Електронний ресурс: Режим доступу: http://surl.li/mukiga

14. Тривимірні перетворення координат. Електронний ресурс: Режим доступу: https://elib.lntu.edu.ua/sites/default/files/elib_upload/%D1%84%D0%B5%D0%B4%D1%96%D0%BA%202/page43.html

15. Яковець В.П. Аналітична геометрія: навч. посіб. Суми, 2004. С. 175–178.

16. Яковець В.П. Перетворення афінної системи координат. Перетворення прямокутної системи координат. Аналітична геометрія: навч. посіб. Суми, 2004. С. 66–71.

17. Перетворення координат. Електронний ресурс: Режим доступу: https://ukrayinska.libretexts.org

Додатки

Додаток А

Рене Декарт

Рене Декарт народився 31 березня 1596 року у місті Лав (тепер Декарт), департамент Ендр і Лаура (Франція). Він отримав від батька невеликий спадок, який дозволив йому присвятити своє життя науці та мандрівкам. З 1604 по 1612 роки Декарт навчався в єзуїтському коледжі Генріха Великого в Ла-Флеші, де отримав грунтовну гуманітарну та математичну освіту. Через слабке здоров'я директор коледжу звільнив Декарта від відвідування ранкових богослужінь і дозволив йому залишитися у ліжку до полудня – звичка, яка збереглася у Декарта на все життя. Саме ці ранкові хвилини були для нього особливо творчими.

Після коледжу Декарт навчався в університеті Пуатьє, отримавши в 1616 році диплом бакалавра і ліцензію правника, виконуючи волю батька, який бажав, щоб син став юристом.

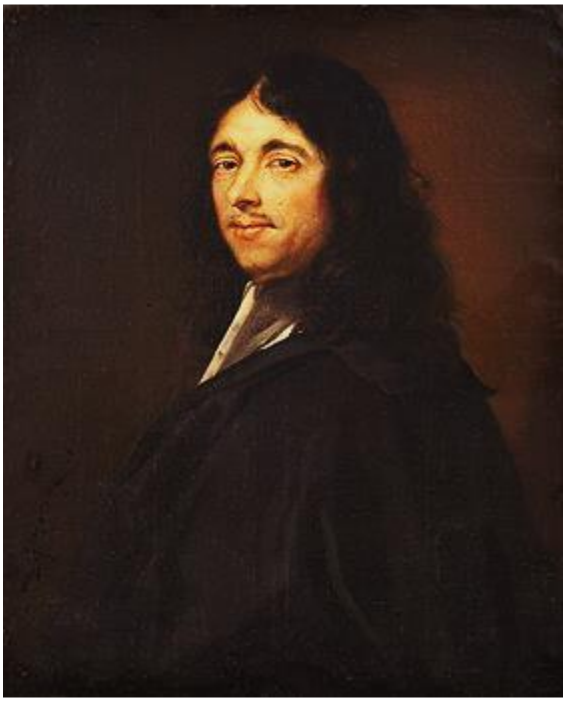
Після отримання освіти Декарт проводив у Парижі безтурботне життя, повне насолоди. Але врешті-решт такий спосіб життя став тягарем для нього, і він усамітнився для того, щоб присвятити себе математичним дослідженням. Коли Декарту виповнився 21 рік, він декілька років служив добровольцем у арміях Голландії, Баварії та Угорщини.

У 1629 році переїхав до Нідерландів. Ніщо людське не було чужим для нього – правда, єдиний його роман тривав всього лише три роки. Коханою Декарта була якась голландська жінка, яка в 1635 році народила йому дівчинку. Декарт обожнював дитину і був сильно вражений раптовою смертю дочки у п'ятирічному віці. Він завжди казав про цю втрату як про найбільше нещастя у своєму житті.

Для продовження занять математикою Декарт повернувся до Парижа, але столичне життя знову швидко набридло йому. Він продав маєток, який отримав від батька і переїхав до самотнього сільського будинку в Голландії, що знаходився недалеко від католицької церкви та університету.

Рене Декарт захворів на запалення легень і помер 11 лютого 1650 року.

П'єр Ферма́



(фр. Pierre de Fermat, 17серпня 1601 — 12січня 1665) — французький математик, засновник аналітичної геометрії і теорії чисел.

П'єр де Ферма — найзагадковіша постать у науковому світі XVII століття

П'єр Ферма́ народився у місті Бомон-де-Ломань (Гасконь, згідно сучасного, з 2016 року, адміністративного поділу Франції — округ Кастельсарразен департамент Тарн і Гаронна, регіон Окситанія). Баск за походженням.

Ферма навчався в Орлеанському університеті з 1623 року і отримав ступінь бакалавра цивільного права 1626 року. Потім перебрався в Бордо, де і почав свої перші серйозні математичні дослідження,

Ферма вільно володів шістьма мовами . Він передавав більшість своїх робіт у листах друзям, часто практично без доведень своїх теорем. У деяких з цих листів він досліджував багато фундаментальних ідей числення ще до Ньютона або Лейбніца.

Раніше від Рене Декарта і більш систематизовано П'єр Ферма ввів метод координат із його застосуваннями до рівнянь прямої та кривих другого порядку, рівняння яких шляхом паралельного перенесення і повороту осей зводив до простого вигляду.

Додаток Б

Застосування перетворення координат до розв'язання задач та дослідження функцій

1. *Дані формули перетворення координат*:

$$x = \frac{2}{7}x' + \frac{3}{7}y' + \frac{6}{7}z',$$

$$y = \frac{6}{7}x' + \frac{2}{7}y' - \frac{3}{7}z',$$

$$z = \frac{3}{7}x' - \frac{6}{7}y' + \frac{2}{7}z'.$$

Знайти нову систему координат, при переході до якої дані співвідношення є формулами перетворення координат точок. Чи буде нова система координат прямокутною декартовою, якщо початкова система прямокутна декартова?

Розв'язання. Так як визначник, складений з коефіцієнтів, дорівнює – 1, то згідно теореми 4 (п.3.2), існує система $O'e_1', e_2', e_3'$, при переході до якої дані співвідношення є формулами перетворення координат точок. Якщо початкова система прямокутна декартова, то нова система також є прямокутною декартовою в силу того, що матриця, утворена з коефіцієнтів при x', y', z' є ортогональною.

2. *Написати формули перетворення координат точок при афінному повороті, якщо:* $e_1' = e_1 + e_2, e_2' = e_2, e_3' = e_1 - e_3$.

Розв'язання. Підставивши значення координат векторів $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ у формули (3.20), отримаємо:

$$x_1 = x_1' \quad + x_3',$$

$$x_2 = x_1' + x_2',$$

$$x_3 = \quad -x_3'.$$

Відповідь: $x_1 = x_1' + x_3', \quad x_2 = x_1' + x_2', \quad x_3 = -x_3'$.

3. *Знайти точку M, яка має однакові координати у двох різних системах координат:* Oe_1, e_2, e_3 і $O'e_1', e_2', e_3'$, *де*

$$O'(-4, 1, -8), e_1'\{3, -1, 1\}, e_2'\{-1, 5, 1\}, e_3'\{1, 2, -3\}.$$

Розв'язання. Формула (3.17) для даного випадку має вигляд:

$$x_1 = 3x_1' - x_2' + x_3' - 4,$$

$$x_2 = -x_1' + 5x_2' + 2x_3' + 1,$$

$$x_3 = x_1' + x_2' - 3x_3' - 8.$$

Для шуканої точки $x_1 = x_1', x_2 = x_2', x_3 = x_3'$; тому координати точки M задовольняють систему рівнянь

$$2x_1 - x_2 + x_3 - 4 = 0,$$

$$-x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 1 = 0,$$

$$x_1 + x_2 - 4x_3 - 8 = 0.$$

Звідси визначаємо координати точки M:

$$x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = -1.$$

Відповідь: $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = -1$.

4. *Прямокутні координати точки* $A(2,3)$. *Знайти її полярні координати.*

Розв'язання. Скористаємося формулами

$$\rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \cos\varphi = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Отримаємо $\rho = \pm\sqrt{13}$. Вибираємо знак перед коренем, наприклад, плюс. Тоді

$$\rho = +\sqrt{13}, \ \sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}; \quad \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Так як, $\sin\varphi > 0$ і $\cos\varphi > 0$, то кут φ в першій чверті. На основі формули $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ отримуємо

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{2}.$$

За таблицями знаходимо, що $\varphi = 0{,}98$. Полярні координати точки *A* знайдені: $\rho = \sqrt{13}, \varphi = 0{,}98$ або $A(\sqrt{13}, 0{,}98)$.

Якщо б перед коренем був вибраний знак мінус, то тоді $\rho = -\sqrt{13}$,

$\sin\varphi = -\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, і так як $\sin\varphi < 0$ і $\cos\varphi < 0$, то кут φ знаходиться в третій чверті.

Знаючи, що $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{3}{2}$, отримуємо $\varphi = 4{,}12$, а точка A має полярні координати

$$\rho = -\sqrt{13}, \varphi = 4{,}12: A(-\sqrt{13}, 4{,}12).$$

Відповідь: $A(\sqrt{13}, 0{,}98)$, $A(-\sqrt{13}, 4{,}12)$.

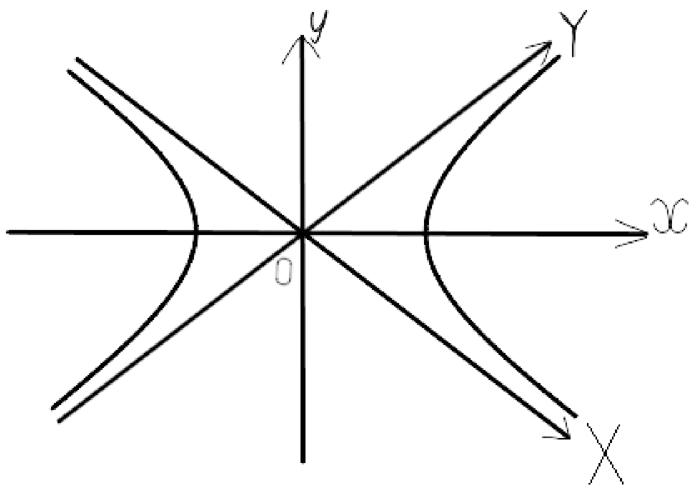
5. *Рівняння рівносторонньої гіперболи відносно асимптот*

Приймаючи асимптоти гіперболи за нові координати, потрібно повернути вісь симетрії на кут 45°, тобто виконати поворот за формулами

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha;\quad y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha,$$

де α = - 45° (поворот за годинниковою стрілкою) (мал.1). Звідси

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y),\quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y-X)$$



Мал.1

Підставляючи ці значення x і y в рівняння гіперболи $x^2 - y^2 = a^2$,

отримаємо $\frac{1}{2}(X+Y)^2 - \frac{1}{2}(Y-X)^2 = a^2$

Розкривши дужки і звівши подібні члени, отримаємо:

$2XY = a^2$ і $XY = \frac{a^2}{2}$

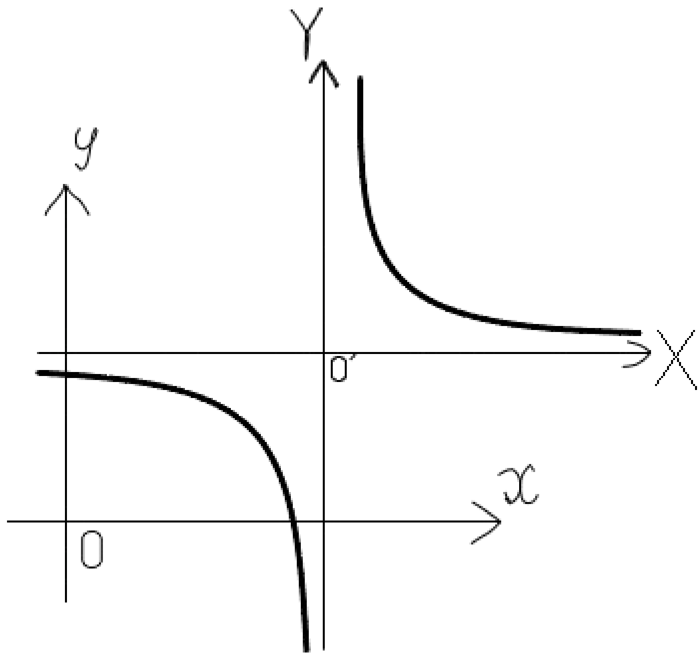
Це і є рівняння рівносторонньої гіперболи, осями координат якої є її асимптоти (мал.1).

6. Геометричний зміст дробово-лінійної функції

Дано рівняння $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Потрібно дослідити криву, що задається цим рівнянням. Вважатимемо $c \neq 0$, оскільки у випадку $c = 0$ дане рівняння задає, очевидно, пряму лінію. Розділивши чисельник і знаменник на c, запишемо рівняння у вигляді $y = \frac{ax+\beta}{x+\delta}$

де $\alpha = \frac{a}{c}$, $\beta = \frac{ba}{c}$, $\delta = \frac{d}{c}$

Попередньо спростимо рівняння кривої, перенесенням початку координат у нову точку площини. Нехай координати нового початку $(x_0; y_0)$ поки що довільні. Формули перетворення: $x = X + x_0$, $y = Y + y_0$.



Мал.2

Підставляючи у дане рівняння замість x і y їх вирази через X та Y, знайдемо: $(X+x_0+\delta)(Y+y_0)=\alpha(X+x_0)+\beta$

Розкриваємо дужки і зводимо подібні доданки:

$$XY+(y_0-\alpha)X+(x_0+\delta)Y+(x_0y_0-\alpha x_0+\delta y_0-\beta)=0$$

Так як x_0 і y_0 довільні, то виберемо їх так, щоб позбутися членів з X та Y. Для цього потрібно покласти $y_0-\alpha=0$, $x_0+\delta=0$.

Звідси $x_0=-\delta$, $y_0=\alpha$.

Підставивши ці значення у перетворене рівняння, отримаємо: $XY=\beta-\alpha\delta$ Очевидно, отримане рівняння задає рівносторонню гіперболу, для якої нові осі координат є асимптотами (див. попередній приклад). Отже, дане рівняння визначає рівнобічну гіперболу з центром у точці $(x_0;y_0)$, асимптоти якої паралельні осям координат (мал.2).

7. Геометричний зміст квадратичної функції

Дано рівняння $y=ax^2+bx+c$. Потрібно дослідити криву, задану цим рівнянням. Попередньо спростимо рівняння кривої, перенісши початок координат у нову точку площини. Нехай координати нового початку $(x_0;y_0)$ поки що довільні. Формули перетворення: : $x=X+x_0$, $y=Y+y_0$. Підставляючи у дане рівняння замість x і y їх вирази через X і У, знайдемо: $Y+y_0=a(X+x_0)^2+b(X+X+x_0)+c$

Розкриваємо дужки та зводимо подібні доданки:

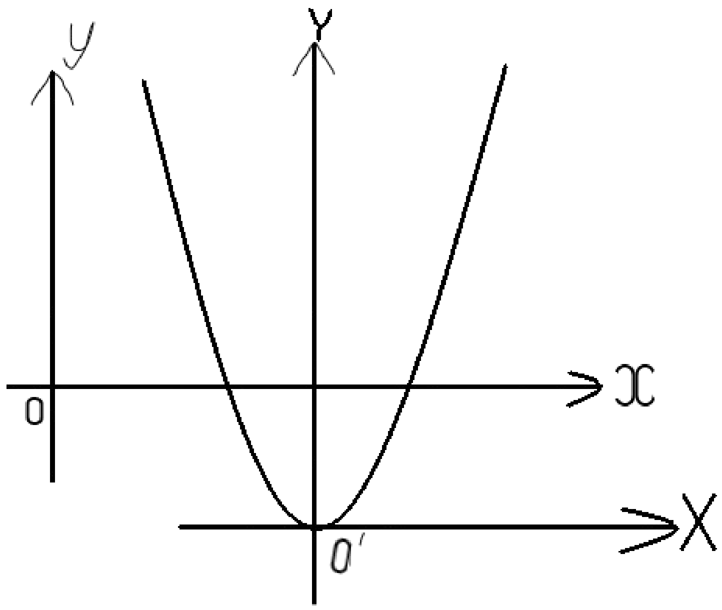
$$Y=aX^2+(2ax_0+b)X+(a{x_0}^2+x_0+c-y_0).$$

Оскільки x_0 і y_0 довільні, то виберемо їх так, щоб не стало членів з x і вільного члена. Для цього потрібно покласти: $2ax_0+b=0$,

$$ax_0+by_0+c-y_0=0$$

Звідки $x_0 = -\frac{b}{a}$, $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$

Підставимо ці значення у перетворене рівняння, отримаємо: $Y=aX^2$. Очевидно, отримане рівняння задає параболу, для якої новий початок координат є вершиною, а нова вісь ординат- віссю симетрії (мал.3).



Мал.3

Отже, дане рівняння задає параболу з вершиною у точці (x_0, y_0) і віссю симетрії, розташованою паралельно осі Оу (мал.3). Для відшукання її вершини важливо лише знати, що $x_0 = -\frac{b}{a}$, ордината $y_0 = f(x_0)$ є значенням функції у точці x_0. Часто буває також корисно для побудови кривої у=ax^2+bx+c знайти її точки перетину з віссю Ох, вважаючи у = 0, якщо ці точки існують, тобто якщо корені квадратного рівняння у=ax^2+bx+c дійсні.

Додаток В

Поступальні та обертальні перетворення

Системи координат можуть бути перенесені або повернуті одна відносно іншої, а також піддаватися просторовій інверсії або зміні часу. Скаляри, вектори та тензори визначаються своїми властивостями трансформації при обертанні, просторовій інверсії та часовому розвороті, і тому такі перетворення відіграють ключову роль у фізиці.

Поступальні перетворення

Поступальні перетворення часто використовуються для перетворення між центром мас і лабораторними рамками для кінематики реакції, а також при виконанні векторного додавання центральних сил для випадків зміщення центрів. Як класичне перетворення Галілея, так і релятивістське перетворення Лоренца обробляються однаково.

Розглянемо два ортонормовані координатні базиси, де початок координат $O'(x',y',z')$ отримується зміщенням на залежний від часу вектор $\overrightarrow{a(t)}$ з початку координат $O(x,y,z)$. Тоді перетворення Галілея для вектора $\vec{r}$ у такому перетворенні задається як

$$\overrightarrow{r(x';y';z')} = \overrightarrow{r(x;y;z)} + \overrightarrow{a(t)} \tag{1}$$

Швидкості для рухомої системи задаються векторною різницею швидкості у нерухомій системі та швидкістю початку руху системи. Лінійні прискорення можна обробляти аналогічно.

Обертальні перетворення

Матриця обертання

Обертальні перетворення системи координат широко використовуються у фізиці. Властивості трансформації полів при обертанні визначають скалярні та векторні властивості полів, а також обертальну симетрію та збереження кутового моменту. Обертання координатного базису не змінює значення будь-якого скалярного спостережуваного типу маси, температури тощо, тобто перетворення скалярної величини є інваріантним при обертанні координат, коли $x,y,z \rightarrow x',y',z'$:

$$\phi(x'y'z')=\phi(xyz) \tag{2}$$

На відміну від цього, складові вектора по осях координат змінюються при обертанні осей координат. Ця відмінність у властивостях перетворення при обертанні між скаляром і вектором є важливою і визначає як скаляри, так і вектори. Матриця перетворення, між системами координат, що мають різні орієнтації, називається ***матрицею обертання***. Вона перетворює компоненти будь-якого вектора відносно одного координатного базису на компоненти відносно другого координатного базису, повернутого відносно першого базису.

Припустімо, що точка P має координати $(x_1;\ x_2;\ x_3)$ відносно деякої нерухомої системи координат. Розглянемо поворот до іншого координатного базису, для якого точка P має координати $(x_1';x_2';x_3')$ і припустимо, що початки 63оординат обох базисів співпадають. Обертання базису не змінює вектор, а лише векторні складові одиничних базисів. Тому

$$\mathbf{x}=\overrightarrow{e_1'}x_1' + \overrightarrow{e_2'}x_2' + \overrightarrow{e_3'} = \overrightarrow{e_1}x_1+\overrightarrow{e_2}x_2 + \overrightarrow{e_3}x_3 \tag{3}$$

Якщо позначити одиничні базисні вектори для вихідної системи координат $(\overrightarrow{e_1}\,;\ \overrightarrow{e_2}\,;\overrightarrow{e_3})$ і для отриманої при перетворенні відповідно $\left(\overrightarrow{e_1'};\overrightarrow{e_2'};\overrightarrow{e_3'}\right)$, то скалярний добуток можна подати у вигляді наступних трьох співвідношень:

$$x_1' = \left(\overrightarrow{e_1'}\,\overrightarrow{e_1}\right)x_1 + (\overrightarrow{e_1'}\,\overrightarrow{e_2})\,x_2 + (\overrightarrow{e_1'}\,\overrightarrow{e_3})x_3,$$

$$x_2' = \left(\overrightarrow{e_2'}\,\overrightarrow{e_1}\right)x_1 + (\overrightarrow{e_2'}\,\overrightarrow{e_2})\,x_2 + (\overrightarrow{e_2'}\,\overrightarrow{e_3})x_3, \qquad \mathbf{(4)}$$

$$x_3' = \left(\overrightarrow{e_3'}\,\overrightarrow{e_1}\right)x_1 + (\overrightarrow{e_3'}\,\overrightarrow{e_2})\,x_2 + (\overrightarrow{e_3'}\,\overrightarrow{e_3})x_3.$$

Рівняння (.4) можна записати у вигляді матриці як

$$\mathbf{x'}=\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{x} \qquad (5)$$

Цей добуток означає *добуток матриці* обертання **λ** і вектора **x**, де

$$x'=\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ {x_3}' \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3. \end{pmatrix},\ \lambda=\begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1'}\,\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1'}\,\overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_1'}\,\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_2'}\,\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2'}\,\overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_2'}\,\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_3'}\,\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_3'}\,\overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3'}\,\overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Обернене перетворення виконується множенням рівності (3) послідовно на один з одиничних базисних векторів $(\overrightarrow{e_1}\,;\ \overrightarrow{e_2}\,;\overrightarrow{e_3})$, що приводять до трьох рівнянь

$$x_1 = \left(\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_1'}\right)x_1' + (\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2'}\,)\,x_2' + (\,\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_3'})\,{x_3}',$$

$$x_2 = \left(\,\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_1'}\right)x_1' + (\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_2'})\,x_2' + (\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3'})\,{x_3}', \qquad (6)$$

$$x_3, = \left(\,\overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e_1'}\right)x_1 + (\overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_2'}\,)\,x_2' + (\,\overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_3'})\,x\,{}_3'.$$

Рівняння (7) можна записати у вигляді матриці як

$$\mathrm{x} = \lambda^{\mathrm{T}}\mathrm{x}' \qquad (8)$$

де $\boldsymbol{\lambda^T}$ знаходиться транспонування λ.

При підстановці рівняння (5) у рівняння (8) отримаємо

$$\mathrm{x} = \lambda^{\mathrm{T}}(\lambda \cdot \mathrm{x}) = (\lambda^{\mathrm{T}}\lambda) \cdot \mathrm{x} = \mathrm{x}\,. \tag{9}$$

Таким чином

$$(\lambda^{\mathrm{T}} \cdot \lambda) = \mathrm{I}$$

де I - матриця ідентичності. Це означає, що λ матриця обертання ортогональна з $\lambda^{\mathrm{T}} = \lambda^{-1}$.

Зручно перейменувати елементи матриці обертання, позначивши

$$\lambda_{ij=}(\overrightarrow{e_i'}\,\overrightarrow{e_j}) \tag{10}$$

так, що матриця обертання записується більш компактно як

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

і рівняння (4) набуває вигляду

$$\begin{gathered} x_1' = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}\,x_2 + \lambda_{13}x_3, \\ x_2' = \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}\,x_2 + \lambda_{23}x_3, \\ x_3' = \lambda_{31}x_1 + \lambda_{32} \quad x_2 + \lambda_{33}x_3. \end{gathered} \tag{11}$$

Розглянемо довільний поворот на кут θ. Рівняння (10) і (11) можуть бути використані для зв'язку шести із дев'яти величин λ_{ij} у матриці обертання, тому лише три величини є незалежними. Тобто через (11) ми маємо три рівняння, які гарантують, що перетворення є унітарним.

$$\Lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \lambda_{i3} = 1 \tag{12}$$

Вимога ортогональності осей задовольняється трьома рівняннями

$$\sum_j \lambda_{ij}\lambda_{kj} = 0, \quad i \neq k.$$

Ці шість співвідношень можуть бути виражені як

$$\sum_j \lambda_{ij}\lambda_{kj} = \delta\mathrm{ik} \tag{14}$$

Те, що матриця обертання повинна мати три незалежні величини, обумовлено тим, що всі обертання можуть бути виражені через обертання трьох ортогональних осей.

Більшість геометричних перетворень, які реалізуються у практичній діяльності інженера, здійснюються у тривимірному просторі (рух, операції із захопленням об’єкта, зображення об’ємної деталі і тощо). Існують різні нелінійні тривимірні системи координат: циліндричні, сферичні та інші і відповідні перетворення. Але найчастіше застосовуються афінні перетворення, оскільки вони не змінюють форму тіл. Рівняння, що використовуються у процесі таких перетворень, мають структуру:

$$\begin{aligned} x_1' &= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \lambda_{13}x_3 + \lambda_{14}, \\ x_2' &= \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \lambda_{23}x_3 + \lambda_{23}, \\ x_3' &= \lambda_{31}x_1 + \lambda_{32}x_2 + \lambda_{33}x_3 + \lambda_{34}. \end{aligned} \tag{11}$$

При цьому квадратна матриця

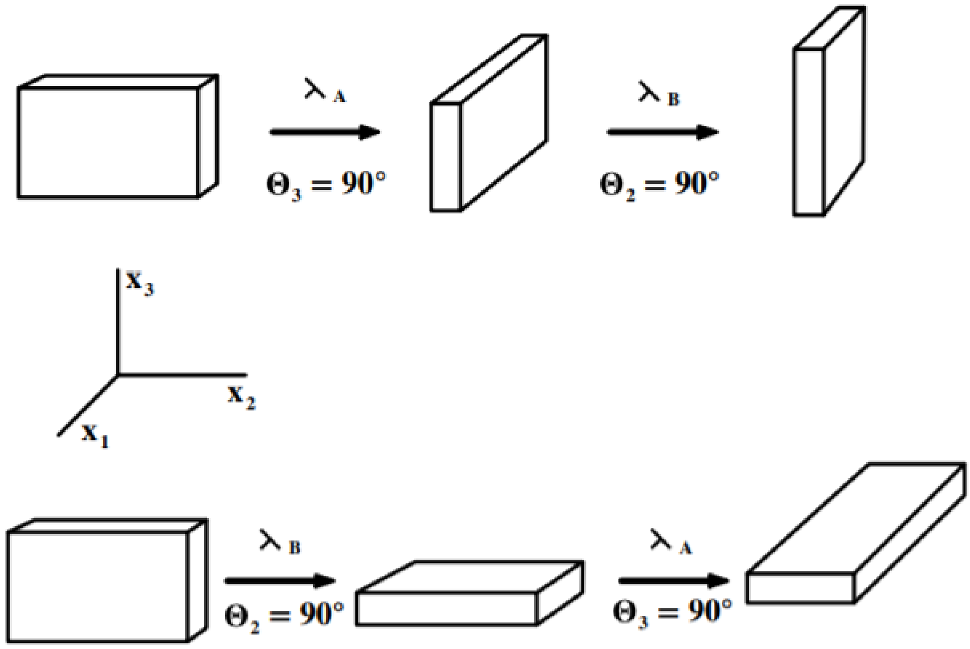
$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

здійснює поворот точки навколо осей, а входить тричленний вектор-стовпець

$$a = \begin{pmatrix} \lambda_{14} \\ \lambda_{24} \\ \lambda_{34} \end{pmatrix}$$

здійснює її перенесення у тривимірному просторі. На відміну від повороту на площині у просторі поворот задається послідовним обертанням навколо трьох координатних осей. При цьому для кожної осі існує своя матриця повороту.

Для прикладу розглянемо обертання паралелепіпеда, проілюстровані на малюнку



Нехай задана матриця обертання $\lambda = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 7 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Запишемо матрицю λ^{T} і знайдемо їх добуток:

$$\lambda^{T} \cdot \lambda = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 7 & 4 & -4 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = 1,$$

що означає, що λ є ортогональним перетворенням.

Розглянемо два повороти на 90° кінцевих обертань λ_A і λ_B,, які проілюстровані на малюнку. Обертання λ_A відбувається на 90°навколо осі x_3 у додатному напрямку, як показано на малюнку. При такому обертанні осі перетворюються так: $x_1' = x_2,\ x_2' = -x_1\ , x_3' = x_3,$

а матриця обертання $\lambda_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Друге обертання λ_B – це обертання у додатному напрямку навколо осі x_1', яка раніше була віссю x_2. Тоді

$$x_1'' = x_2' \,, x_2'' = -x_1', x_3'' = x_3'$$

і матриця обертання $\lambda_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Розглянемо добуток цих двох скінченних обертань, що відповідає одній матриці обертання $\lambda_{AB} = \lambda_B \lambda_A$.

Маємо

$$\lambda_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тепер розглянемо навпаки, зворотний порядок виконання обертань
$$\lambda_{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \lambda_{AB}$$

Зовсім інша орієнтація результатів, як бачимо на малюнку. Така поведінка скінченних обертань є наслідком того, що *кінцеві* обертання не комутативні, тобто зворотний порядок не дає однакового результату. Таким чином, якщо ми пов’язуємо вектори **A** і **B** з цими обертаннями, то маємо на увазі, що векторний добуток $AB \neq BA$. Тобто для матриць скінченного обертання добуток не поводиться як для справжніх векторів, оскільки він не комутативний.