МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Кафедра теорії функцій та методики навчання математики

На правах рукопису

ХРОЛЬ РОМАН ВАСИЛЬОВИЧ

НЕСКІНЧЕННІ ДОБУТКИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Спеціальність: 111 Математика

Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:
КАЛЬЧУК ІННА ВОЛОДИМИРІВНА,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ
Протокол № ________
Засідання кафедри теорії функцій та
методики навчання математики
від ________________________________2024 р.
Завідувач кафедри
Гембарська С. Б. ________________________

ЛУЦЬК – 2024

Зміст

ВСТУП

Роботи по розділу математики «Числові ряди» є вже класичними, проте дослідження в цій області продовжуються і залишаються актуальними. Разом з нескінченними сумами (рядами) розглядають також нескінченні добутки і інші нескінченні вирази. Поняття нескінченного числового добутку близьке до поняття числового ряду.

Дана робота присвячена темі "Нескінченні добутки та їх застосування до цілих функцій".

Актуальність цієї роботи обумовлена особливо значним впливом нескінченних добутків на розвиток сучасної математики та широким спектром їх застосування в різних наукових галузях. Побудова цілих функцій за допомогою нескінченних добутків є основоположним підходом у комплексному аналізі, що дозволяє детальніше досліджувати аналітичні властивості функцій.

Розгляд питань, пов'язаних з цією тематикою, носить, як і теоретичну, так і практичну значущість.

Об'єкт дослідження – нескінченні добутки.

Предмет дослідження – властивості, ознаки збіжності нескінченних добутків та застосування їх до цілих функцій.

Мета роботи: розглянути теорію нескінченних добутків та приклади їх знаходження та використання.

Для реалізації мети було поставлено наступні **завдання**:

1. Проаналізувати літературу по темі дослідження.
2. Ознайомитись з історією розвитку проблеми нескінченних добутків.
3. Розглянути основні поняття, пов'язані з нескінченними добутками і їх властивостями.
4. Розглянути основні ознаки збіжності нескінченних добутків.
5. Визначити зв'язок між збіжністю нескінченних добутків і рядів.

6. Вивчити питання про розкладання цілої функції в нескінченний добуток

7. Навести приклади застосування ознак збіжності нескінченних добутків.

Методи дослідження. В роботі використовуються наступні методи: історичний, аналізу, порівняння, конкретизації, систематизації та узагальнення теоретичного і практичного матеріалу.

Робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновку і списку використаних джерел. Перший розділ роботи присвячений розгляду основних понять, пов'язаних з нескінченними добутками та їх властивостями. Другий розділ присвячений збіжності нескінченних добутків та ознак їх збіжності. У третьому розділі розглядаються розклади цілих функцій в нескінченні добутки. Четвертий розділ містить приклади задач з нескінченними добутками. В висновках наведені підсумки виконання роботи.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, ПОВ'ЯЗАНІ З НЕСКІНЧЕННИМИ ДОБУТКАМИ

1.1. Нескінченні добутки. Основні поняття

Аналітичний вираз, що має вигляд добутку нескінченної множини співмножників, або членів послідовності $\{a_n\}$ називається *нескінченним добутком*. Формально це записується так

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

$a_1,\ a_2,\ \ldots a_n,\ \ldots$ називаються членами нескінченного добутку.

Якщо співмножники є числами, то такий добуток називається *нескінченним числовим добутком*.

Історично нескінченний числовий добуток вперше зустрівся у зв'язку із задачею про обчислення числа π . Так, французький математик Ф. Вієт в 16 столітті отримав формулу:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}} \ldots = \frac{2}{\pi},$$

а англійський математик Дж. Валліс в 17 столітті – формулу:

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2}{4n^2 - 1} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Особливого значення нескінченні добутки набули після робіт Л. Ейлера, який застосував ці добутки для зображення функцій. Прикладом може бути розклад синуса:

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^2 / n^2 \pi^2) .$$

Леонард Ейлер, зокрема, вперше розглянув так звану дзета-функцію, отримав розклад її у нескінченний добуток, який іноді приймають за її означення:

$$\zeta(s)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_i^s}\right)^{-1}$$

де p_i – просте число.

Означення. *Дзета-функцією Рімана $\zeta(s)$ називають функцію, яка будь-якому дійсному числу s ставить у відповідність суму ряду*

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\ ,$$

якщо вона існує.

У математиці для послідовності чисел $\{a_n\}=a_1, a_2, a_3, ...$ нескінченний добуток

$$\prod_{n=1}^{\infty}a_n = a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot ... \tag{1.1}$$

визначається як границя частинних добутків $a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n$ при $n\to\infty$.

Добуток називається ***збіжним***, коли ця границя існує і не дорівнює нулю. Інакше добуток називається розбіжним.

Таким чином, нескінченний добуток називається розбіжним, якщо границя послідовності його частинних добутків або дорівнює нулю, або $\pm\infty$, або не існує. Зокрема, якщо

$$\prod_{n=1}^{\infty}a_n = 0\,,$$

то добуток $\prod_{n=1}^{\infty}a_n$ називається добутком розбіжним до нуля.

Якщо в нескінченному добутку (1.1) відкинути перші n співмножників, то нескінченний добуток, що вийшов

$$\prod_{k=1}^{\infty}a_{n+k}$$

називається n-м залишковим добутком.

Відмітимо, що на збіжність нескінченного добутку не впливає видалення будь-якого скінченного числа членів цього добутку (якщо серед цих членів немає рівних нулю) так і приєднання скінченної множини відмінних від нуля перших співмножників. Випадок, в якому границя дорівнює нулю, розглядається окремо.

Якщо усі числа $a_1, a_2, a_3, ...$ додатні, то можна застосувати операцію логарифмування. Тоді дослідження збіжності нескінченного добутку зводиться до дослідження збіжності числового ряду.

Члени послідовності $\{a_n\}$ називаються співмножниками або членами нескінченного добутку (1.1).

Розклад функцій у нескінченні добутки аналогічні розкладам многочленів на лінійні множники; вони чудові тим, що виявляють всі значення незалежної змінної, у яких функція перетворюється на нуль.

Множниками нескінченного добутку можуть бути комплексні числа, функції і загалом елементи, для яких визначені добуток скінченного набору множників і збіжність послідовностей елементів.

Якщо послідовність часткових добутків $\{a_n\}$ має скінченну або певного роду нескінченну границю a:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\infty} a_k \,, \tag{1.2}$$

то ця границя називається значенням скінченного добутку (1.2) і пишуть

$$a = a_1 a_2 a_3 ... a_n = \prod_{n=1}^{\infty} a_n \,.$$

Відмітимо, що остання рівність має сенс лише для збіжного нескінченного добутку.

Таким чином, аналогічно випадку ряду, тут одним і тим же символом позначають як сам нескінченний добуток, так і його значення, якщо воно існує.

Зрозуміло, що розгляд нескінченних добутків по суті являє собою нову форму вивчення числових послідовностей, бо кожному даному нескінченному добутку однозначно відповідає послідовність його часткових добутків і кожній числовій послідовності $\{a_n\}$, всі елементи якої відмінні від нуля, однозначно відповідає нескінченний добуток, для якого ця послідовність є послідовністю часткових добутків.

1.2. Властивості нескінченних добутків

Відзначимо найпростіші властивості нескінченних добутків.

1. Якщо нескінченний добуток збігається, то і всі його часткові добутки збігаються.

Якщо будь-який частковий добуток збігається, то і сам нескінченний добуток збігається.

2. Якщо нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то послідовність його часткових добутків має границю рівну одиниці.

Доведення: Якщо

$$\prod_{n=1}^{\infty} q_n = p,$$

то

$$q_n = \lim_{m\to\infty} \prod_{k-1}^{m} a_{n+k} = \frac{1}{\prod_{k-1}^{n} a_k} \lim_{m\to\infty} \prod_{k-1}^{n+m} a_k = \frac{p}{p_n}.$$

Так як

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p \neq 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \frac{p}{p_n} = \frac{p}{p} = 1.$$

Отже, логарифм $\ln a_n$, визначений для усіх n, за винятком скінченного числа значень, присутність яких не впливає на збіжність. Виключаючи з послідовності $\{a_n\}$ скінченне число членів, отримаємо рівність:

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n,$$

в якій збіжність нескінченної суми в правій частині рівносильна збіжності нескінченного добутку в лівій. Це дозволяє переформулювати критерій збіжності нескінченних сум в критерій збіжності нескінченних добутків.

Для добутків, таких, що для будь-якого $a_n \geq 1$ позначимо $a_n = p_n + 1$ і $p_n \geq 0$, звідки випливає нерівність

$$1 + \sum_{n=1}^{N} p_n \leq \prod_{n=1}^{N} \left(1 + p_n\right) \leq \exp\left(\sum_{n=1}^{N} p_n\right)$$

яка показує, що нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається тоді і тільки тоді, якщо збігається нескінченна сума $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$.

3. Якщо нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то послідовність його залишкових добутків має границю рівну одиниці.

$$q_n = \prod_{n=1}^{\infty} a_{n+k} \, ,$$

$$\lim_{n \to \infty} q_n = 1 .$$

Не перераховуючи інших властивостей нескінченних добутків, аналогічних властивостям нескінченних рядів, можна звернутися до встановлення зв'язку між збіжністю нескінченних добутків і рядів, що дозволить безпосередньо використати для добутків вже розвинену для рядів теорію. Багато елементарних функцій розкладаються в нескінченні добутки.

Наведемо найбільш відомі розклади:

$$\sin x = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) \ (a = 2 > 1 \Rightarrow \text{добуток збіжний}),$$

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{\left(2n-1\right)^2 \pi^2}\right),$$

$$\operatorname{sh} x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

$$\operatorname{ch} x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{4x^2}{\left(2n-1\right)^2 \pi^2}\right).$$

За допомогою нескінченного добутку можна визначати і нові функції, які називаються спіральними, наприклад, Γ-функція (гама-функція Ейлера):

$$\Gamma\left(z\right) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{1+\frac{z}{n}},\ z \in \mathbb{C} \setminus \left\{0, -1, -2, \ldots\right\}.$$

2. ЗБІЖНІСТЬ НЕСКІНЧЕННИХ ДОБУТКІВ

2.1. Ознаки збіжності нескінченних добутків

Основним завданням в теорії нескінченних добутків є питання про те, як, знаючи елементи нескінченного добутку, тобто його множники, дізнатися, збігається він або розбігається.

Якщо нескінченний добуток збігається, тоді необхідно виконується гранична рівність $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Теорема 1. *Необхідною умовою збіжності нескінченного добутку (1.1) є прагнення до одиниці його* k*-го члена при* $k \to \infty$.

Доведення. Нехай нескінченний добуток (1.1) збігається і має значення a, відмінне від нуля. Оскільки $\prod_n = p_n \prod_{n-1}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_n = a \neq 0$, то

$$p_n = \frac{\prod_n}{\prod_{n-1}} \to 0 \; (n \to \infty) .$$

Відзначимо, що виконання умови прямування послідовності співмножників нескінченного добутку до одиниці недостатньо для його збіжності.

Відмітимо, що на збіжність нескінченного добутку не впливає видалення будь-якого скінченного числа членів цього добутку (якщо серед цих членів немає рівних нулю). Оскільки нескінченний добуток, у якого хоча б один член дорівнює нулю, згідно прийнятому вище означенню вважається розбіжним, то ми надалі взагалі виключаємо з розгляду нескінченні добутки, у яких хоча б один член дорівнює нулю.

Теорема 2 (критерій Коші). *Для того, щоб нескінченний добуток (1.1) збігався, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *знайшлося таке* n_0*, що для усіх* $n > n_0$ *і усіх* $m \geq 0$ *виконувалася нерівність*

$$\left| \frac{p_{n+m}}{p_n} - 1 \right| < \varepsilon . \qquad (2.1)$$

Доведення.

Необхідність. Нехай нескінченний добуток (1.1) збігається, отже, не дорівнює нулю:

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} p_n = p \neq 0.$$

Тому існує такий номер n_0, що для всіх $n > n_o$ виконується нерівність $|p_n| > \left|\frac{p_n}{2}\right| > 0$, тобто послідовність $\left|p_{n_0+k}\right|$ $, k = 1, 2, ...$ обмежена знизу, а оскільки всі співмножники $a_n \neq 0,\ n = 1, 2, \ldots,$ то й вся послідовність $\{p_n\}$ обмежена знизу додатною сталою: існує таке число $c > 0$, що

$$|p_n| > c,\ n = 1, 2, ...$$

Задаймо довільне $\varepsilon > 0$. Зі збіжності послідовності $\{p_n\}$, згідно з критерієм Коші для послідовності, випливає, що знайдеться такий номер n_0, що для всіх номерів $n > n_0$ та всіх $m \geq 0$ виконується нерівність

$$|p_{n+m} - p_n| < c\varepsilon,$$

тоді

$$\left|\frac{p_{n+m}}{p_n} - 1\right| = \left|\frac{1}{p_n}\right| |p_{n+m} - p_n| < \frac{1}{c} c\varepsilon = \varepsilon,$$

тобто. виконано умову (2.1).

Достатність. Нехай виконано умову (2.1). Тоді для $\varepsilon = 1$ існує такий номер n_1, що для всіх $m \geq 0$ виконується нерівність

$$\left|\frac{p_{n_1} + m}{p_{n_1}} - 1\right| < 1,$$

звідси

$$|p_{n_1+m}| = \left|\frac{p_{n_1+m}}{p_{n_1}} - 1 + 1\right| |p_{n_1}| \leq \left|\frac{p_{n_1+m}}{p_{n_1}} - 1\right| |p_{n_1}| + |p_{n_1}| \leq 2|p_{n_1}|,$$

і, отже, послідовність $\{p_n\}$ обмежена, тобто, існує таке $c > 0$, що

$$|p_n| \leq c,\ n = 1, 2, \ldots. \tag{2.2}$$

Задаємо довільне $\varepsilon > 0$. За умовою теореми, знайдеться таке число n_t, що для всіх чисел $n > n_0$ та всіх $m \geq 0$ виконуватиметься нерівність

$$\left| \frac{p_{n_1+m}}{p_{n_1}} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{c}, \tag{2.3}$$

тобто

$$|p_{n+m} - p_n| < \frac{\varepsilon}{c} |p_n| \leq \varepsilon .$$

Це означає, що числова послідовність $\{p_n\}$ відповідає критерію Коші збіжності числових послідовностей, і збігається. Покажемо, що границя $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ не дорівнює нулю. Якби вона дорівнювала нулю, то перейшовши до границі в нерівності (2.3) $m \to \infty$ (n фіксовано), ми отримали б нерівність $1 \leq \frac{\varepsilon}{c}$, що суперечить довільному вибору $\varepsilon > 0$.

2.2. Нескінченні добутки з дійсними членами

Досі усі доведені для нескінченних добутків теореми були справедливі, незалежно від того, чи були їх співмножники комплексними або тільки дійсними числами. Розглянемо тепер нескінченні добутки, співмножники яких є тільки дійсними числами. В цьому випадку з необхідної умови збіжності нескінченного добутку (1.1) виходить, що усі його співмножники, починаючи з деякого номера додатні. Відкидання ж скінченної множини співмножників не впливає на збіжність нескінченного добутку, тому додаткове припущення про те, що усі співмножники нескінченного добутку додатні, не обмежуватиме спільності вивчення збіжності нескінченних добутків з дійсними співмножниками.

Взаємно-зворотний зв'язок між нескінченними добутками з додатними співмножниками і рядами встановлює наступна

Теорема 3. *Для того, щоб нескінченний добуток*

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$$

збігався, необхідно і достатньо, щоб збігався ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n . \qquad (2.4)$$

Якщо за збіжності ряду (2.4) число S *є його сумою, а число* p *– значення нескінченного добутку (1.1), то*

$$p = e^s. \qquad (2.5)$$

Доведення: Справді, якщо S_n – часткова сума порядку *n* для ряду (2.4), а p_n – частковий добуток того самого порядку для нескінченного добутку (1.1), то

$$S_n = \sum_{k-1}^{n} \ln a_k = \ln \prod_{k-1}^{n} a_k = \ln p_n,\ n = 1, 2, \ldots,$$

отже, $p_n = e^{S_n}$. Перейшовши тут до границі при $n \to \infty$ отримаємо формулу (2.5).

При дослідженні нескінченного добутку (1.1) часто буває зручним його множники a_n представляти у вигляді

$$a_n = 1 + u_n,\ n = 1, 2, \ldots .$$

У випадку нескінченного добутку (1.2), внаслідок його властивості 3, послідовність $\{u_n\}$ є нескінченно малою.

Теорема 4. *Якщо всі* u_n *знакопостійні, то для того, щоб збігався нескінченний добуток*

$$\prod_{n-1}^{\infty} (1 + u_n) \qquad (2.6)$$

необхідно і достатньо, щоб збігався ряд

$$\sum_{n-1}^{\infty} u_n . \qquad (2.7)$$

Доведення.

Згідно з необхідною умовою збіжності нескінченного добутку та необхідною умовою збіжності ряду, зі збіжності нескінченного добутку (2.6), так само, як і зі збіжності ряду (2.7), слідує, що

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{2.8}$$

Тому припускатимемо цю умову виконаною.

Збіжність нескінченного добутку (2.6), згідно з теоремою 1, рівносильна збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+u_n). \tag{2.9}$$

За умовою (2.8), має місце еквівалентність

$$\ln(1+u_n) \sim u_n \quad, n \to \infty,$$

і оскільки всі u_n одного знаку, то, згідно з ознакою порівняння рядів, ряд (2.9) сходиться і розходиться одночасно з рядом (2.7).

Теорема 5. *Якщо збігаються ряди*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \;\; i \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$$

то нескінченний добуток

$$\prod_{n-1}^{\infty}(1+u_n)$$

збігається.

Нескінченний добуток (1.1) назвемо таким, що абсолютно збігається, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\ln a_n\right|$. Інакше (1.1) збігається умовно.

Приклад. Добуток

$$\prod_{n-1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^x}\right), \; x>0$$

збігається при $x>1$ і є розбіжним при $x \le 1$.

Це виходить з того, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ збігається при $x>1$ і є розбіжним при $x\le 1$.

2.3. Нескінченні добутки з комплексними членами

Означення. *Нехай*

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

нескінченна послідовність комплексних чисел $u_n \ne 0$.

Нескінченним добутком називається вираз виду:

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \dots \cdot u_n \dots . \qquad (2.10)$$

При цьому u_n *називається загальним членом (загальним співмножником) нескінченного добутку (2.10).*

Вирази виду:

$$\prod_{k=1}^{n} u_k = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \dots \cdot u_k = v_n \qquad (2.11)$$

називаються частинними добутками.

Означення. *Якщо послідовність* v_n *чисел (2.11) збігається при* $n \to \infty$ *до числа* $v \ne 0$*, то кажуть, що нескінченний добуток (2.10) збігається і має значення рівне* v*, тобто*

$$v = \lim_{n\to\infty} v_n = \prod_{n=1}^{\infty} v_n . \qquad (2.12)$$

Якщо ж послідовність v_n *не збігається або* $v = 0$ *, то нескінченний добуток (2.10) називається розбіжним.*

Теорема 6. (ознака збіжності добутку): *Якщо ряд*

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \qquad (2.13)$$

абсолютно збіжний, то збіжний і добуток (2.10).

Доведення: (2.13) абсолютно збіжний, отже, ряд

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

збіжний. Тому

$$\lim_{n\to\infty}\left|u_n\right| = 0$$

і може бути $\left|u_n\right| < \frac{1}{2},\ n \in N$, або $n > n_0$.

Припустимо спочатку, що $u_n \in R,\ \forall n \in N$,

$$u_n = a_n$$

Тоді

$$\left|\ln\left(1+u_n\right)\right| \le 2\left|u_n\right|.$$

Звідси випливає збіжність послідовності

$$\ln\left(1+u_1\right)+\ldots+\ln\left(1+u_n\right)=\ln(1+u_1)\ldots\ln\left(1+u_n\right),$$

і відповідно добутку (2.10).

Нехай тепер u_n – довільні комплексні числа. Потрібно довести, що при $n\to\infty$ збігаються дві послідовності дійсних чисел.

$$\left|v_n\right| = \left|\left(1+u_1\right)\left(1+u_2\right)\ldots\left(1+u_n\right)\right| = \left|\left(1+u_1\right)\right|\left|\left(1+u_2\right)\right|\ldots\left|\left(1+u_n\right)\right| \tag{2.14}$$

і

$$\arg v_n = \arg\left(1+u_1\right)\ldots\arg\left(1+u_n\right) = \arg\left(1+u_1\right)+\ldots+\arg\left(1+u_n\right). \tag{2.15}$$

Щоб збігалася (2.14), необхідно і достатньо збіжності послідовності $\left|v_n\right|^2$. Але

$$\left|\left(1+u_n\right)\right|^2 = \left|1+\alpha_n+i\beta_n\right|^2 = \sqrt{\left(1+\alpha_n\right)^2+\beta_n{}^2}^{\,2} = 1+\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2+2\alpha_n,$$

де $\alpha_n = \operatorname{Re} u_n,\ \beta_n = \operatorname{Im} u_n$, а

$$\left|\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2+2\alpha_n\right| \le \left|\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2\right| + 2\left|\alpha_n\right| = \alpha_n{}^2+\beta_n{}^2+2\sqrt{\alpha_n{}^2} \le$$

$$\le \alpha_n{}^2+\beta_n{}^2+2\sqrt{\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2} = \left|\alpha_n+i\beta_n\right|^2+2\left|\alpha_n+i\beta_n\right| = \left|u_n\right|^2+2\left|u_n\right|.$$

Тоді збіжність $\left|v_n\right|^2$ випливає з доведеного. Збіжність (2.15) випливає з того, що при достатньо великих n_0 і $n > n_0$:

$$\left|\arg\left(1+u_n\right)\right| = \left|\arcsin\frac{\beta_n}{\sqrt{\left(1+\alpha_n\right)^2+\beta_n{}^2}}\right| < \pi\left|\beta_n\right| < \pi\left|u_n\right|.$$

Теорему доведено.

Теорема 7. *Нехай* $u_n(s)$ *– нескінченна послідовність аналітичних в області* G *функцій, причому*:

$$|u_n(s)| \neq -1, \quad \forall n \in N, \ s \in G.$$

$$|u_n(s)| \leq a_n, \quad \forall n \in N, \ s \in G.$$

Додатний ряд чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збіжний.}$$

Тоді добуток

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + u_n(s)\right) \tag{2.16}$$

збіжний для $\forall s \in G$*, а функція*

$$v(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + u_n(s)\right)$$

є аналітичною в області G*, причому* $v(s) \neq 0$, $\forall s \in G$.

Доведення: збіжність (2.16) $\forall s \in G$ випливає з теореми 6. Щоб довести аналітичність $v(s), s \in G$, потрібно довести, що послідовність аналітичних $v_k(s)$ функцій:

$$v_k(s) = \prod_{n=1}^{k} \left(1 + u_n(s)\right)$$

є рівномірно збіжною до $v(s)$, $s \in G$ і використати потім теорему Вейєрштрасса.

Покладемо

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + a_n\right) = p,$$

$$\left(1 + a_1\right) + \left(1 + a_2\right) + \ldots + \left(1 + a_n\right) = p_n.$$

Доведемо спочатку, що $\forall s \in G$

$$\left| \frac{v(s)}{v_n(s)} - 1 \right| \leq \frac{p}{p_n} - 1. \tag{2.17}$$

Дійсно,

$$\left|\frac{v_{n+k}(s)}{v_n(s)}-1\right|=\left|\left(1+u_{n+1}(s)\right)\ldots\left(1+u_{n+k}(s)\right)-1\right|=$$

$$=\left|u_{n+1}(s)+\ldots+u_{n+k}(s)+u_{n+1}(s)u_{n+2}(s)+\ldots+u_{n+1}(s)\ldots u_{n+1}(s)\right|\le$$

$$\le a_{n+1}+\ldots+a_{n+k}+a_{n+1}a_{n+2}+\ldots+a_{n+1}a_{n+k}=\frac{p_{n+k}}{p_n}-1.$$

Переходимо до границі при $k\to\infty$, отримаємо (2.8). Тому

$$\left|v(s)-v_n(s)\right|=\left|v_n(s)\right|\left|\frac{v(s)}{v_n(s)}-1\right|\le p_n\left(\frac{p}{p_n}-1\right)=p-p_n<\varepsilon$$

при $n>n_0(\varepsilon)$ і $\forall s\in G$.

2.4. Функціональні нескінченні добутки

Якщо $f_1(z),\ f_2(z),\ldots\ f_n(z)$ довільна послідовність функцій $f_n(z)$, що визначені на множині E , то символ виду

$$\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) \tag{2.18}$$

називається функціональним нескінченним добутком.

Функціональний нескінченний добуток (2.18) називається збіжним (розбіжним) в точці z_0 із E, якщо збіжний (розбіжний) числовий

нескінченний добуток $\prod\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$.

Сукупність всіх точок із E, в яких збігається нескінченний добуток (2.18) називається множиною його збіжності.

Теорема 8. *Нехай $u_n(s)$ – нескінченна послідовність аналітичних в області G функцій, причому:*

$$\left|u_n(s)\right|\ne -1,\quad \forall\, n\in N,\ s\in G.$$

$$\left|u_n(s)\right|\le a_n,\quad \forall\, n\in N,\ s\in G.$$

1) Додатний ряд чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збіжний.}$$

Тоді добуток

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+u_n(s)\right) \tag{2.19}$$

збіжний для $\forall s \in G$, а функція

$$v(s)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+u_n(s)\right)$$

є аналітичною в області G, причому $v(s) \neq 0$, $\forall s \in G$.

Приклад нескінченного функціонального добутку. Добуток Бляшке

Якщо $0<|z_n|<1,\ n=1, 2, 3, \dots, n, \dots$, і нескінченний добуток

$$\prod_{i}^{\infty}\frac{|z_n|}{z_n}\frac{z_n-z}{1-\overline{z_n}z}$$

збігається для $|z|<1$, воно представляє деяку функцію, аналітичну в одиничному колі; вона називається добутком Бляшке. Можна навіть допустити рівність скінченного числа чисел z_n нулю - просто в цьому випадку множники, що відповідають $\frac{|z_n|}{z_n}\frac{z_n-z}{1-\overline{z_n}z}$, замінюються на z.

Маємо

$$\frac{|z_n|}{z_n}\frac{z_n-z}{1-\overline{z_n}z}=|z_n|\frac{1-\frac{z}{z_n}}{1-\overline{z_n}z}=|z_n|+\frac{\left(\overline{z_n}-\frac{1}{z_n}\right)|z_n|z}{1-\overline{z_n}z}=|z_n|+\frac{|z_n|^2-1}{1-\overline{z_n}z}\frac{|z_n|z}{z_n},$$

звідси

$$\frac{|z_n|}{z_n}\frac{z_n-z}{1-\overline{z_n}z}=1+\left(|z_n|-1\right)+\left|1+\frac{\left(|z_n|+1\right)z_n}{z_n\left(1-\overline{z_n}z\right)}z\right|,$$

отже, аналізований нескінченний добуток збігається при $z=0$ тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_n \left(1-|z_n|\right) < \infty.$$

Але якщо $\sum_n \left(1-|z_n|\right) < \infty$, то по тій же тільки що знайденій формулі

$$\sum_n \left| 1 - \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1-\overline{z_n}z} \right| = \sum_n \left\{1-|z_n|\right\} \left| 1 + \frac{\left(|z_n|+1\right)|z_n|}{z_n\left(1-\overline{z_n}z\right)} z \right| < \infty$$

при $|z|<1$; тому нескінченний добуток збігається в $\{|z|<1\}$, якщо

$$\sum_n \left(1-|z_n|\right) < \infty .$$

Таким чином,

$\prod_i^\infty \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1-\overline{z_n}z}$ збігається в $\{|z|<1\}$ тоді і тільки тоді, коли $\sum_n \left(1-|z_n|\right) < \infty$.

3. РОЗКЛАДАННЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ В НЕСКІНЧЕННІ ДОБУТКИ

3.1. Розкладання цілої функції в нескінченний добуток

Означення. *Функція* $f(s)$*, яка аналітична в довільній скінченній частині комплексної площини, називається* ***цілою****.*

Теорема 9. (про існування цілої функції, що має своїми нулями лише числа заданої нескінченної послідовності): *Нехай*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

нескінченна послідовність комплексних чисел, причому

$$0 < |a_1| \le |a_2| \le \ldots \le |a_n| \le \ldots$$

і

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = 0.$$

Тоді існує ціла функція $G(s)$*, яка має своїми нулями лише числа* a_n *(якщо серед них є рівні, то нуль* $G(s)$ *буде мати відповідну кратність).*

Доведення: При $n \in N$ покладемо

$$u_n = u_n(s) = \left(1 - \frac{s}{a_n}\right) e^{\frac{s}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}$$

і розглянемо нескінченний добуток

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n(s). \qquad (3.1)$$

Доведемо, що цей добуток збігається $\forall s \ne a_n$ площини комплексної змінної і є цілою функцією $G(s)$ з нулями $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Розглянемо круг C радіуса $|a_n|$ і нескінченний добуток

$$\prod_{r=n}^{\infty} u_r(s).$$

Доведемо, що цей добуток збіжний до аналітичної функції в крузі $|s|<|a_n|$. Тоді (9) теж буде аналітичною функцією в цьому крузі, яка має там тільки нулі $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Оскільки $|a_n| \to \infty$, то тоді теорема буде доведена. При $|s|<|a_n|$, $r \ge n$, покладемо:

$$\ln u_r(s) = \ln\left(1-\frac{s}{a_r}\right) + \frac{s}{a_r} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_r}\right)^2 + \dots + \frac{1}{r-1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r-1},$$

де $\ln\left(1-\dfrac{s}{a_r}\right)$ – головна вітка логарифма, тобто при $s=0$ вона рівна нулю.

Тоді при $r=n$, $n+1, \dots$, і $|s|<|a_n|$:

$$\ln u_r(s) = -\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r - \frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1} - \dots$$

і

$$u_r(s) = e^{-\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r - \frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1} - \dots}$$

Таким чином потрібно довести, що ряд

$$\sum_{r=n}^{\infty}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r + \frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1} + \dots\right] \tag{3.2}$$

збіжний в $|s|<|a_n|$ до аналітичної функції. Але при $\forall 0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$ і

$$|s| \le (1-\varepsilon)|a_n|$$

маємо

$$\left|\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r + \frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1} + \dots\right| \le \frac{1}{r}(1-\varepsilon)^r + \frac{1}{r+1}(1-\varepsilon)^{r+1} + \dots < \frac{(1-\varepsilon)^r}{\varepsilon r}.$$

Звідси випливає рівномірна збіжність (3.2) в області $|s| \le (1-\varepsilon)|a_n|$, тобто аналітичність (3.1) в крузі C.

Наслідок 1 (формула Вейєрштраса): *Нехай*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

послідовність комплексних чисел, що задовольняє умови теореми 9. Тоді функція $G(s)$*:*

$$G(s) = s^n \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_n}\right) e^{\frac{s}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}$$

є цілою і має своїми нулями тільки числа 0, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Наслідок 2: *Нехай послідовність чисел*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots .$$

задовольняє умови теореми 8, і, крім того, існує ціле число $p \geq 0$ *таке, що збігається ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}} .$$

Тоді функція $G_1(s)$*:*

$$G_1(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_n}\right) e^{\frac{s}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p}}$$

задовольняє теорему 9.

Доведення: дійсно, в цьому випадку при

$$|s| \leq (1 - \varepsilon)|a_n|$$

ряд

$$\sum_{r=n}^{\infty} \left[\frac{1}{p+1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p+1} + \frac{1}{p+2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p+2} + \ldots \right]$$

мажорується рядом.

Теорема 10. Кожна *ціла функція* $G(s)$ *може бути подана у вигляді:*

$$G(s) = e^{H(s)} s^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_n}\right) e^{\frac{s}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}} \qquad (*)$$

де $H(s)$ *– ціла функція, а числа 0,* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *- нулі* $G(s)$*, розміщені в порядку зростання їх модулів. Якщо, крім того, послідовність* a_n *,* $\forall n \in N$ *задовольняє умови наслідку 2, то*

$$G(s) = e^{H(s)} s^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_n}\right) e^{\frac{s}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^p}.$$

Доведення: Нулі $G(s)$ не можуть мати граничної точки, тобто їх можна розмістити в порядку зростання модулів. За теоремою 9 побудуємо цілу функцію $G_1(s)$, яка має своїми нулями нулі $G(s)$. Покладемо

$$\varphi(s) = \frac{G(s)}{G_1(s)}$$

при $s \neq a_n$

$$\varphi(a_n) = \lim_{s \to a_n} \varphi(s).$$

Очевидно, що $\varphi(s)$ – ціла функція, ніде не рівна 0, тоді $\ln \varphi(s)$ – ціла функція. Але тоді

$$\varphi(s) = e^{H(s)},$$

де $H(s)$ – ціла функція.

3.2. Розкладання цілої функції скінченного порядку в нескінченний добуток

Означення. *Нехай* $G(s)$ *– ціла функція і*

$$M(r) = M_G(r) = \max_{|s|=r} |G(s)|. \qquad (3.3)$$

Якщо існує $a > 0$*, що* $M(r) < e^{r^a}$ *при* $r > r_0(a) > 0$*, то* $G(s)$ *називається цілою* ***функцією скінченного порядку****. В цьому випадку* $\alpha = \inf a$ *називається порядком* $G(s)$*. Якщо ж (3.3) не виконується ні для якого* $a > 0$*, то говорять, що порядок* $G(s)$ *рівний* ∞*. Нехай*

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

послідовність комплексних чисел таких, що

$$0<|s_1|\le|s_2|\le\ldots\le|s_n|\le\ldots. \qquad (3.4)$$

Якщо існує $b>0$*, для якого*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-b}<+\infty, \qquad (3.5)$$

то кажуть, що послідовність (3.4) має скінченний показник збіжності. В цьому випадку $\beta=\inf b$ *називається показником збіжності (3.4). Якщо ж (3.5) не виконується ні при якому* $b>0$*, то кажуть, що показник збіжності (3.4) рівний* ∞.

Теорема 11: *Нехай* $G(s)$ *– ціла функція скінченного порядку* α *і* $G(0)\ne 0$*,* s_n *– послідовність всіх нулів* $G(s)$*, причому* $0<|s_1|\le|s_2|\le\ldots\le|s_n|\le\ldots$ *Тоді послідовність* s_n *має скінченний показник збіжності* $\beta\le\alpha$*,*

$$G(s)=e^{g(s)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)e^{\frac{s}{s_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p},$$

де $p\ge 0$ *– найменше ціле число, для якого*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-(p+1)}<+\infty,$$

$g(s)$ *– многочлен степеня* $g\le\alpha$ *і* $\alpha=\max(g,\beta)$*. Якщо, крім того,* $\forall c>0$*, існує нескінченна послідовність*

$$r_1,r_2,\ldots,r_n,\ldots,$$

$r_n\to\infty$ *така, що*

$$\max_{\infty}|G(s)|>e^{cr_n^{\alpha}},$$

$$|s|=r_n,\ n\in N,\ \textit{то}\ \alpha=\beta$$

і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-\beta}-\textit{розбіжний.}$$

Один важливий результат про нескінченні добутки — той, що будь-яка ціла функція f, з коренями $\{0\} \cup \{a_n\} \to \infty$, де точка 0 — корінь порядку λ, може бути представлена у вигляді нескінченного добутку

$$f(z) = z^{\lambda} e^{h(z)} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}\right)$$

3.3. Канонічний добуток Вейєрштрасса та його оцінка

Зауважимо, що при побудові цілої функції, нулі якої збігаються з послідовністю $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, відмінних від нуля комплексних чисел з єдиною граничною точкою на нескінченну послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ можна вибирати різними способами. А значить, представлення

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} G^{s_n}\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right) \tag{3.6}$$

залежить істотно від внутрішньої послідовності. Покажемо, що представлення (3.6) можна спростити, якщо нулі a_n функції f та їх кратності $s_n\ (n \in N)$ задовольняють додаткову умову:

$$\exists \alpha \in [0, +\infty) : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{|a_n|^{\alpha+1}} < \infty. \tag{3.7}$$

Нехай γ – натуральне число або нуль таке, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{|a_n|^{\gamma+1}} < \infty.$$

Тоді при будь-якому $R > 0$ збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{\gamma+1}.$$

Отже, до функції f застосовна теорема 11, якщо покласти $p_n = \gamma$. Позначимо символом p найменше з таких цілих чисел γ. За умовою (3.7) нескінченний добуток

$$\prod_{n \to 1}^{\infty} G^{s_n}\left(\frac{z}{a_n}, p\right) \tag{3.8}$$

визначає цілу функцію $\pi(z)$, яка називається канонічним добутком Вейєрштрасса (або просто канонічним добутком). Саме число p називається родом канонічного добутку (3.8).

Теорема 12. *Якщо ціла функція f має нулі на початку координат кратності m, і у точках $z = a_n$, відповідних кратностей s_n, то вона допускає наступне представлення:*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} G^{s_n}\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right)$$

де $g \in H(C)$, p_n — цілі невід'ємні числа, підібрані так, щоб ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{p_n+1}$$

збігався при любому $R > 0$.

Відповідно до теореми 11, при виконанні умови (3.7) ціла функція f, що має нуль на початку координат кратності m й нулі в точках $z = a_n$ відповідних кратностей s_n допускає наступне подання

$$f(z) = z^m \pi(z) e^{g(z)}, \tag{3.9}$$

де $g \in H(C)$. У разі, коли функція g є многочленом степеня q, функцію f називають цілою функцією скінченного роду, а число $\max\{p, q\}$ - її родом.

Якщо нулі функції f не задовольняють умову (3.7) або якщо g з умови (3.9) є трансцендентною функцією, рід функції f вважають нескінченним.

Зауважимо, що якщо нулі функції f утворюють послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (нулі вписані в порядку зростання їх модулів і кожен нуль виписаний стільки разів, яка його кратність; порядок нумерації нулів з однаковим модулем неважливий), то умова (3.7) приймає вигляд

$$\exists \alpha \in [0, +\infty) : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\alpha+1}} < \infty ,$$

а канонічний добуток (3.8) –

$$\prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}, \, p \right)$$

з деяким $p \in N \cup \{0\}$.

3.4. Узагальнення поняття збіжності нескінченного добутку

Вивчення властивостей цілих функцій потребує модифікації поняття збіжності нескінченного добутку, яке було вказане в попередніх розділах.

Означення. *Нехай* $* : G^2 \to G$ *– бінарна операція,* (G, d) *– метричний простір.*

Частковою операцією елементів $(a_k)_{k=1}^{n} \in G^{n+1}$ *назвімо елемент* $s_n = a_0 * a_1 * ... * a_n$.

Нескінченною операцією елементів $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in G^{\infty}$ *назвімо границю*

$$\mathop{*}_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} s_n$$

(у сенсі метричного простору).

Якщо ця границя існує, то говоритимемо, що нескінченна операція збігається (збіжна);інакше — розбігається (розбіжна).

Приклад (нескінченний добуток). Розгляньмо множину $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ з евклідовою метрикою d та операцію добутку $* := \cdot$.

Тоді при $\prod_{n=1}^{\infty} a_n \neq 0$

$$\mathop{\cdot}_{n=0}^{\infty} a_n = \prod_{n=0}^{\infty} a_n ,$$

тобто в цьому випадку поняття нескінченної операції збігається з поняттям нескінченного добутку, причому збіжність обох понять узгоджена.

За означенням нескінченний добуток є збіжним, якщо існує ненульова границя часткових добутків, що відповідає означенню збіжності нескінченної операції, бо у випадку $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = 0 \notin R \setminus \{0\}$ нескінченна операція, як і нескінченний добуток, вважають розбіжними.

Сформулюймо необхідну ознаку збіжності вище зазначеної нескінченної операції.

Нехай $(G, *)$ – абелева група з неперервною бінарною операцією та нейтральним елементом e. Якщо нескінченна операція $*_{n=0}^{\infty} a_n$ збіжна, то $\lim_{n \to \infty} a_n = e$.

Необхідна ознака збіжності нескінченного добутку.

Оскільки $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ з $e = 1$ справджує умови ознаки (тобто є абелевою групою, а операція $\cdot$ неперервна), то зі збіжності $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$, що є відомим фактом з теорії нескінченних добутків.

3.5. Показник збіжності послідовності. Лічильна функція

Нехай $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність комплексних чисел з єдиною граничною точкою на нескінченності, причому $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ не спадає і $a_1 \neq 0$.

З метою характеризації швидкості зростання такої послідовності введемо наступне

Означення. ***Показником збіжності послідовності*** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *називається величина*

$$\tau = \inf \left\{ \alpha > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\alpha}} < \infty \right\}. \tag{3.10}$$

У разі, коли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\alpha}}$ – є розбіжним при будь-якому $\alpha > 0$, показник збіжності послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ вважається рівним $+\infty$.

Очевидно, що чим швидше зростає послідовність $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$, тим менше показник збіжності.

Легко перевірити, що для послідовності $(e^n)_{n=1}^{\infty}$ показник збіжності дорівнює нулю, для $(n^{\frac{1}{\tau}})_{n=1}^{\infty}$ $(\tau > 0)$ має значення τ, а для $(\ln(n+1))_{n=1}^{\infty}$ дорівнює $+\infty$.

Зауважимо, що при α, рівному показнику збіжності, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\alpha}}$ може як сходитися, так і розходитися в залежності від послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 13. *Якщо* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *– післідовність комплексних чисел з єдиною граничною точкою на нескінченності, причому* $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ *не спадає і* $a_1 \neq 0$*, то її показник збіжності* τ *розраховується за формулою*

$$\tau = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln |a_n|}.$$

Кількість $v(r)$, $r \geq 0$, точок послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, які знаходяться в колі радіусу r називається ***лічильною функцією даної послідовності***.

4. ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ З НЕСКІНЧЕННИМИ ДОБУТКАМИ

Приклад 1.

Нескінченний добуток $1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1\ldots$ збігається, і його значення дорівнює 1.

Приклад 2.

Нескінченний добуток $(-1)\cdot(-1)\cdot\ldots\cdot(-1)\ldots$ є розбіжним, оскільки для нього $p_n=(-1)^n$, а послідовність $\left\{(-1)^n\right\}$ не має границі.

Приклад 3.

Нескінченний добуток $\prod\limits_{n-1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ є розбіжним, оскільки $p_n=n+1$ і, $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=+\infty$.

Приклад 4.

Нескінченний добуток $\prod\limits_{n-1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ є розбіжним до нуля, оскільки тут $p_n=\dfrac{1}{n}$.

Приклад 5.

Для нескінченного добутку $\prod\limits_{n-2}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ маємо

$$p_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1\cdot 3}{2^2}\frac{2\cdot 4}{3^2}\ldots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}.$$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\dfrac{1}{2}$, тобто нескінченний добуток $\prod\limits_{n-2}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ збігається і його значення дорівнює $\dfrac{1}{2}$.

Приклад 6.

Обчислити значення нескінченного добутку

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$$

Розв'язання. Як відомо,

$$n^3-1=(n-1)(n^2+n+1),$$
$$n^3+1=(n+1)(n^2-n+1).$$

Враховуючи те, що

$$n^2+n+1=(n+1)^2-(n+1)+1,$$

запишемо n-й частковий добуток у вигляді

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}=$$

$$=\frac{(2-1)(3^2-3+1)}{(2+1)(2^2-2+1)}\cdot\frac{(3-1)(4^2-4+1)}{(3+1)(3^2-3+1)}\cdots\frac{(n-1)\left((n+1)^2-(n+1)+1\right)}{(n+1)(n^2-n+1)}=$$

$$=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)}{3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{2^2-2+1}=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}$$

Обчислимо границю цієї послідовності

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2(n^2+n+1)}{3(n^2+n)}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)=\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$

Приклад 7.

Дослідити на збіжність нескінченний добуток

$$\prod_{n=2}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

Розв'язання. Обчислимо визначений інтеграл

$$\int_n^{n+1}\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int_n^{n+1}\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\int_n^{n+1}\left(1-\frac{1}{1-x^2}\right)dx=\left(x-\operatorname{arctg}x\right)\Big|_n^{n+1}=$$
$$=n+1-n-\operatorname{arctg}(n+1)+\operatorname{arctg}n=1+\operatorname{arctg}n-\operatorname{arctg}(n+1).$$

Оскільки послідовність $\operatorname{arctg}n$ монотонно зростає $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg}n=\frac{\pi}{2}$, то послідовність $\left(\operatorname{arctg}n-\operatorname{arctg}(n+1)\right)$ є нескінченно малою та такою, що не міняє знаку. Таким чином, наш нескінченний добуток збігається тоді і тільки тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg} n-\operatorname{arctg}(n+1)\right)$$

Це числовий ряд з додатними членами. Порівняємо його з числовим збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Для цього обчислимо границю

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg} n\right):\frac{1}{n^2}.$$

Оскільки

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg} n\right)\square\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg} n,$$

то

$$A=\lim_{n\to\infty}n^2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg} n\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\frac{(n+1)-1}{1+n(n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+n^2+n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}+1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=1.$$

Таким чином, за теоремою порівняння ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg} n-\operatorname{arctg}(n+1)\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg} n\right)$$

збігається, а отже збігається і наш добуток.

Зауваження. Збіжність ряду можна довести безпосередньо, знайшовши суму ряду.

Відповідь : заданий нескінченний добуток збігається .

Приклад 8.

Обчислити $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$.

Тут $p_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}$

$$p_1 \ldots p_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{2^2 - 1}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2} \ldots \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} =$$

$$\frac{(2-1)(2+1)}{2 \cdot 2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3 \cdot 3} \ldots \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \ldots \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{n+1},$$

$$a = \lim_{n \to \infty} \prod\nolimits_n = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2}$$

Тобто, нескінченний добуток збігається і

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Приклад 9.

Обчислити

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\varphi}{2^n} \left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Тут $p_n = \dfrac{\cos\varphi}{2^n}$

Якщо ж $\varphi = 0$, то кожне $p_n = 1,\ \prod_n = 1$ і $\lim\limits_{n \to \infty} \prod_n = 1$.

Таким чином, даний нескінченний добуток збігається при будь-якому φ, $|\varphi| < \dfrac{\pi}{2}$ і

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\varphi}{2^n} = \begin{cases} \dfrac{\sin\varphi}{\varphi}, & \varphi \neq 0,\ |\varphi| < \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & \varphi = 0. \end{cases}$$

Наведемо ще приклади знаходження нескінченних добутків.

Приклад 10.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{4} \ldots \cos\frac{x}{2^n}. \qquad (4.10)$$

(x – будь-яке фіксоване число).

Доведемо, що нескінченний добуток (4.10) при будь якому $x \neq \pi n$ збігається і має значення $\dfrac{\sin x}{x}$. Підрахуємо n-й частковий добуток

$$P_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}. \tag{4.11}$$

Домножуючи обидві частини (4.11) на $\sin\dfrac{x}{2^n}$, послідовно використовуємо формулу для синуса подвійного кута $\sin 2y = 2\sin y\cos y$, і отримаємо

$$P_n \sin\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sin x .$$

З останньої формули маємо

$$P_n = \frac{\sin x}{x}\left\{\frac{\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\sin\dfrac{x}{2^n}}\right\}.$$

Оскільки вираз в фігурних дужках прагне до одиниці при $n \to \infty$ (згідно з першою чудовою границею), то $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ існує і дорівнює $\dfrac{\sin x}{x}$. Тим самим доведено, що нескінченний добуток (4.10) збігається і має значення $\dfrac{\sin x}{x}$ при будь якому $x \neq \pi n$.

Приклад 11.

$$\prod_{k=2}^{\infty}\left[1-\frac{2}{k(k+1)}\right] = \prod_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\ldots\frac{(k-1)}{k}\cdot\frac{(k+2)}{(k+1)}\ldots$$

Доведемо, що цей добуток збіжний і має значення $\dfrac{1}{3}$.

Підрахуємо частковий добуток P_n:

$$P_n = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\ldots\frac{(n-1)}{n}\right]\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\ldots\frac{(n+2)}{(n+1)}\right] = \frac{1}{n}\cdot\frac{n+2}{3}$$

Таким чином $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{3n}$ існує і дорівнює $\dfrac{1}{3}$.

ВИСНОВКИ

У даній роботі було проведено дослідження одного з типів числових рядів – нескінченних добутків. В ході роботи було виконано аналіз літератури по даній темі, на підставі якого були виділені основні поняття і властивості нескінченних добутків, розглянуті ознаки збіжності нескінченних добутків, вивчено зв'язок між збіжністю нескінченних добутків і рядів та наведено приклади застосування ознак збіжності нескінченних добутків та обчислення нескінченних добутків. Також в роботі вивчене питання про розкладання цілої функції в нескінченний добуток, розглянуто канонічний добуток Вейєрштрасса, лічильну функцію та узагальнення поняття збіжності нескінченного добутку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. К.: Видавництво А.С.К., 2009. С. 648.
2. Годун Б.В. Вища математика. Ряди. Херсон: B&G, 2005.
3. Коренков М. Є., Головенко І. П. Цілі функції та нескінченні добутки (спецкурс). Луцьк: Волинська обласна друкарня, 2008. С. 38
4. Крюков М.М., Клецька Т.С. До історії розвитку і становлення теорії нескінченних числових рядів. Математичне моделювання, 2013. С. 117–120.
5. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Частини 1,2. К., Либідь, 1993. С. 320
6. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Лященко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: навч. посібник. К.: Вища школа, 2003. Ч 2. С. 470.
7. Юськович В., Узагальнення понять числового ряду та нескінченного добутку. Mathematics in Modern Technical University. 2018. Vol. 2018, No 1. P. 55–60.
8. https://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/236

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Йоганн Леонард Ейлер (15 квітня 1707 – 18 вересня 1783) був швейцарським математиком, фізиком, інженером і астрономом, відомим світовою наукою як один із найбільш впливових математиків в історії. Він народився в місті Базель (зараз Швейцарія), але провів більшу частину свого життя у Російській імперії, де працював відомим вченим у головних університетах, таких як Санкт-Петербурзький університет.

Ейлер вніс величезний внесок у розвиток математики, фізики, інженерії та астрономії. Він був автором понад 800 наукових праць і здійснив значний вклад у різні галузі математики, включаючи аналіз, теорію чисел, геометрію, теорію графів, математичну фізику та інші.

Одним з найбільш відомих досягнень Ейлера є формула ейлерових характеристик, яка відіграла важливу роль у топології та геометрії. Він також відомий своїми роботами у теорії графів, та зокрема, у теорії графів у відношенні до сітьової теорії, де він вирішив проблему Конінгсбергських міст.

Крім того, Ейлер відомий також як автор численних важливих теорем, таких як теорема про суму ряду згідно з формулою Ейлера-Маклорена та теорема про сітки на сфері, яка має значення у математичній геометрії.

Ейлер є автором багатьох формул та ідей, які зайняли центральне місце у сучасній науці. Він був визнаний світовою спільнотою математиків як один із найбільш великих учених в історії. Його наукова спадщина залишила глибокий слід у розвитку науки і принесла численні відкриття та досягнення, які неоціненно важливі для сучасного світу.

ДОДАТОК В

Карл Вейєрштрасс (Карл Теодор Вільгельм Вейєрштрасс) – німецький математик, вважається одним з найбільших математиків XIX століття. Він народився 31 жовтня 1815 року в Берліні і помер 19 лютого 1897 року в тому ж місті. Карл Вейєрштрасс відомий як засновник математичного аналізу та теорії функцій. Він отримав освіту в університеті Берліна, де пізніше став професором.

Основним внеском Карла Вейєрштрасса в математику була розробка теорії аналітичних функцій. Він показав, що будь-яка аналітична функція може бути представлена як ряд Тейлора, що вважається основним дослідженням у цій області. Його робота над теорією функцій взагалі змінила напрямок розвитку математики. Він був передовиком у вивченні твердження, про які німецький математик Герман Вейль назвав його "аналітичним шарлоттенбурзьким розгромом".

Карл Вейєрштрасс був також відомий своїми теоріями диференційовних функцій та нескінченно малих величин. Він розробив концепцію неперервності функцій, яка відіграла важливу роль у побудові математичного аналізу. Його роботи вплинули на багатьох математиків після нього і досі вважаються класичними в своїй галузі.

Загалом, Карл Вейєрштрасс за своє життя зробив величезний внесок у розвиток математики, поклавши основи для багатьох ідей та концепцій, які і досі використовуються у сучасній математиці. Його діяльність і талант вплинули на багатьох математиків свого часу, а його спадщина продовжує жити й досі через нове покоління дослідників математики.

ДОДАТОК С

Франсуа Вієт, також відомий як Франсуа Вьєт, – французький математик, який жив у XVI столітті. Він народився 1540 року в місті Париж. Франсуа Вієт вивчав право у університеті Орлеана, але його зацікавлення в шифруванні та математиці виявилися сильнішими. Він співпрацював з французьким королем Франциском I та розвинув алгебру та теорію рівнянь.

Франсуа Вієт написав кілька важливих математичних творів, серед яких "Нова алгебра" та "Математичний канон". Він також вперше використав літерний символ для невідомого числа у математиці, який нині відомий як "*x*". Цей символ став стандартним у записі алгебраїчних формул.

Франсуа Вієт був визнаний своїми внесками в математику та шифрування. Він помер 1603 року, залишивши за собою великий слід у науці.

ДОДАТОК D

Відомий англійський вчений Джон Валліс народився у 1616 році в місті Ашфорд, що на території сучасної Великобританії. Його батько був священиком, що відразу ж позначилося на вихованні та цікавостях малого Джона. Джон Валліс отримав освіту в школах графства Кент, після чого поступив до Кембриджського університету.

У 1649 році Валліс був обраний членом Королівського товариства, де він активно працював над математичними дослідженнями. Валліс отримав значні результати в математичному аналізі, геометрії, тригонометрії, теорії чисел.

В 1655 Валліс видав великий трактат «Арифметика нескінченного», де ввів придуманий ним символ нескінченності. Валліс перший дав сучасне визначення логарифмування як операції, зворотної до піднесення до степеня

Крім того, Джон Валліс був відомий не лише своїми вченими відкриттями, але й як талановитий педагог, який залучав учнів до світу науки. Він був професором університету та активно ділився своїми знаннями й дослідженнями з новими поколіннями учених.

Джон Валліс був відданим дослідником, який присвятив своє життя розвитку математики і науки в цілому. Його внесок у розвиток математики та науки був надзвичайно важливим і досі використовується в сучасних дослідженнях.

Джон Валліс помер у 1703 році, але його спадщина залишилася назавжди і запам'ятовується як вагомий внесок у розвиток математики та науки.

АНОТАЦІЯ

Хроль Р. В. Нескінченні добутки та їх застосування до цілих функцій. Магістерська робота. Луцьк, 2024. 44 с.

Магістерська робота присвячена нескінченним добуткам та їх застосування до цілих функцій.

Магістерська робота містить 44 сторінки, список використаної літератури налічує 8 джерел.

Ключові слова: нескінченні добутки, цілі функції, ряди.

ABSTRACT

Khrol R.V. Infinite products and their application to whole functions. Master's thesis. Lutsk, 2024. 44p.

The master's thesis is devoted to infinite products and their application to entire functions.

The master's thesis contains 44 pages, the list of used literature includes 8 sources.

Key words: infinite products, entire functions, series.