Міністерство освіти і науки України

Волинський національний університет імені Лесі Українки

Кафедра теорії функцій та методики навчання математики

На правах рукопису

Маркевич Богдана Ярославівна

Абсолютна збіжність подвійних степеневих рядів з обмеженою варіацією

Спеціальність: 111 «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:
Гембарська Світлана Борисівна,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ
Протокол № ____________________
засідання кафедри теорії
функцій та методики навчання
математики
від ______________________ 2024р.
Завідувач кафедри
доц. _____________________

Луцьк – 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

У сучасному математичному аналізі важливе місце займають дослідження рядів, зокрема, подвійних степеневих рядів, які знаходять застосування в багатьох галузях, таких як теорія функцій, математична фізика та чисельні методи. Абсолютна збіжність рядів є ключовим поняттям, оскільки вона забезпечує не лише існування суми, але й стійкість ряду до перетворень, таких як перестановка його членів.

Актуальність обраної теми.

Тема даної магістерської роботи присвячена вивченню абсолютної збіжності подвійних степеневих рядів з обмеженою варіацією. Обмежена варіація є важливим критерієм, що дозволяє досліджувати поведінку рядів у певних межах і з’ясувати їхню стабільність. У цій роботі ми розглянемо необхідні та достатні умови для абсолютної збіжності таких рядів, а також розглянемо їх зв'язок з поняттям варіації та її обмеженнями.

Крім теоретичних аспектів, особлива увага буде приділена практичним прикладам, які ілюструють важливість дослідження абсолютної збіжності у різних контекстах. Аналіз таких рядів має на меті не лише поглибити теоретичні знання, але й створити базу для подальших досліджень у цій області.

Таким чином, ця робота є спробою систематизувати знання про абсолютну збіжність подвійних степеневих рядів з обмеженою варіацією та запропонувати нові підходи до їх вивчення.

Структура роботи. Робота складається з двох розділів, вступу, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи складає 45 сторінок.

Перший розділ складається з двох параграфів. У першому буде дано означення функції обмеженої варіації та доведено деякі їх властивості. В другому параграфі буде дано деякі означення варіації функцій двох змінних та розглянуто теореми.

Другий розділ «Подвійні степеневі ряди з обмеженою варіацією в розумінні Тонеллі» також складається з двох параграфів. У першому з яких буде введено основні поняття та позначення і постановка задачі. А в другому доведена теорема.

Об’єкт дослідження – подвійні степеневі ряди з обмеженою варіацією.

Предмет дослідження – абсолютна збіжність подвійних степеневих рядів з обмеженою варіацією.

Мета роботи – дослідити умови абсолютної збіжності подвійних степеневих рядів з обмеженою варіацією, вивчити їх властивості та визначити критерії збіжності для таких рядів.

Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

- розглянути деякі функцій з обмеженою варіацією
- сформулювати та довести деякі їх властивості
- ввести основні поняття та позначення, що стосуються варіації функцій двох змінних
- дослідити на збіжність подвійний степеневий ряд, що має обмежену варіацію.

Інформаційною базою дослідження слугують наукові публікації та література.

1. ВАРІАЦІЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

1.1 Варіація функції однієї змінної.

У математичному аналізі велике значення мають функції обмеженої варіації. В цьому параграфі дамо їх означення і доведемо ряд найпростіших властивостей, найважливішою з яких є та, що виражається теоремою 1.6.

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$. Відрізок $[a;b]$ точками $x_k (k = 0, 1, 2, \dots, n)$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b \qquad (1.1)$$

поділимо на скінченне число відрізків.

Таке розбиття відрізка $[a;b]$ на n відрізків $x_k;\ x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ назвемо T-розбиттям цього відрізка.

Для T-розбиття (1.1) відрізка $[a;b]$ складемо суму

$$V_a^b(T;f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|. \qquad (1.2)$$

Число

$$V_a^b(f) = \sup_{(T)} V_a^b(T;f),$$

де верхня грань береться за довільним T-розбиттям (1.1) відрізка $[a;b]$, називається варіацією функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Якщо $V_a^b(f) < +\infty$, тобто якщо множина чисел (1.2), відповідним довільним T-розбиттям відрізка $[a;b]$, обмежена зверху, то функція $f(x)$ називається функцією обмеженої варіації на відрізку $[a;b]$.

Теорема 1.1. Функція $f(x)$, монотонна на відрізку $[a;b]$, є функцією обмеженої варіації на цьому відрізку.

Доведення. Нехай для означеності $f(x)$ – неспадна функція. Тоді $f(x_{k+1}) - f(x_k) \geq 0$ $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ і тому

$$V_a^b(T;f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(b) - f(a).$$

Отже,

$$V_a^b(f) = \sup_{(T)} V_a^b(T; f) = f(b) - f(a) < +\infty.$$

Теорему доведено.

Вважають, що функція $f(x)$, визначена на відрізку $[a; b]$, задовільняє на цьому відрізку умову Ліпшиця, якщо існує число K таке, що для будь-яких точок x_1 і x_2 з відрізка $[a; b]$ правильна нерівність

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|.$$

Теорема 1.2. Якщо функція $f(x)$ задовольняє умову Ліпшиця на відрізку $[a; b]$, то $f(x)$ – функція обмеженої варіації на цьому відрізку.

Доведення. Для T-розбиття (1.1) відрізка $[a; b]$ маємо

$$V_a^b(T; f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq K \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = K(b - a),$$

звідси

$$V_a^b(f) = \sup_{(T)} V_a^b(T; f) \leq K(b - a) < +\infty,$$

тобто $f(x)$ - функція обмеженої варіації на відрізку $[a; b]$.

Теорема 1.3. Довільна функція обмеженої варіації на відрізку $[a; b]$ обмежена на цьому відрізку.

Доведення. Якщо $a < x < b$, то

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq V_a^b(f),$$

звідси

$$|f(x)| - |f(a)| + |f(x)| - |f(b)| \leq V_a^b(f)$$

отже

$$|f(x)| \leq \frac{|f(a)| + |f(b)|}{2} + \frac{1}{2} V_a^b(f).$$

Якщо позначити через

$$C = \max\left\{|f(a)|, |f(b)|, \frac{|f(a)| + |f(b)|}{2} + \frac{1}{2} V_a^b(f)\right\},$$

то $|f(x)| \leq C$ для всіх $x \in [a; b]$. Теорему доведено.

Теорема 1.4. Сума, різниця і добуток двох функцій обмеженої варіації на відрізку є функцією обмеженої варіації на цьому відрізку.

Доведення. Нехай $f(x)$ і $\varphi(x)$ - функція обмеженої варіації на відрізку $[a;b]$. Позначимо $F(x) = f(x) \pm \varphi(x)$, маємо

$$V_a^b(T,F) = \sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)|$$

$$\leq V_a^b(f) + V_a^b(\varphi)$$

звідси

$$V_a^b(\,F) \leq V_a^b(f) + V_a^b(\varphi) < +\infty.$$

Теорему доведено для суми і різниці двох функцій.

Нехай $\Phi(x) = f(x)\varphi(x)$. За теоремою 1.3 функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ обмежені на відрізку $[a;b]$. Позначимо

$$A = \sup_{x\in[a;b]} |f(x)| \text{ і } B = \sup_{x\in[a;b]} |\varphi(x)|,$$

Тоді для T-розбиття (1.1) відрізка $[a;b]$ маємо

$$|\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)| = |f(x_{k+1})\varphi(x_{k+1}) - f(x_k)\varphi(x_k)| =$$

$$= |f(x_{k+1})\varphi(x_{k+1}) - f(x_k)\varphi(x_{k+1}) + f(x_k)\varphi(x_{k+1}) - f(x_k)\varphi(x_k)| \leq$$

$$\leq |f(x_{k+1}) - f(x_k)|\,|\varphi(x_{k+1})| + |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)|\,|f(x_k)| \leq$$

$$\leq B|f(x_{k+1}) - f(x_k)| + A|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)|,$$

звідки

$$V_a^b(\mathrm{T},\Phi) = \sum_{k=0}^{n-1} |\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)| \leq BV_a^b(T;f) + AV_a^b(T;\varphi) \leq$$

$$\leq BV_a^b(f) + AV_a^b(\varphi)$$

і, отже,

$$V_a^b(\Phi) \leq BV_a^b(f) + AV_a^b(\varphi) < +\infty.$$

Теорему доведено.

Теорема 1.5. *Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$ і $a < c < b$. Тоді*

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) = V_a^b(f) \tag{1.3}$$

Доведення. Візьмемо T_1- розбиття відрізка $[a;c]$:

$$(T_1)a = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < x_2^{(1)} < \cdots < x_k^{(1)} < x_{k+1}^{(1)} < \cdots < x_n^{(1)} = 0$$

і T_2- розбиття відрізка $[c;b]$:

$$(T_2)c = x_0^{(2)} < x_1^{(2)} < \cdots < x_k^{(2)} < x_{k+1}^{(2)} < \cdots < x_m^{(2)} = b$$

і складемо суми

$$V_a^c(T_1, f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}^{(1)} - f(x_k^{(1)})|$$

і

$$V_c^b(T_2, f) = \sum_{k=0}^{m-1} |f(x_{k+1}^{(2)} - f(x_k^{(2)})|$$

T_1- і T_2- розбиття, взяті разом, утворюють деяке T^*- розбиття відрізка $[a;b]$, причому

$$V_a^c(T_1, f) + V_c^b(T_2, f) = V_a^b(T^*, f)$$

звідси

$$V_a^c(T_1, f) + V_c^b(T_2, f) \leq V_a^b(f)$$

і, отже,

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f)$$

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f). \tag{1.4}$$

Візьмемо довільне T- розбиття (1.1) відрізка $[a;b]$. Якщо точка c не ввійшла в число точок T- розбиття (1.1), то розглянемо T^{**}- розбиття відрізка $[a;b]$, яке випливає з T- розбиття цього відрізка додаванням до точок T- розбиття однієї нової точки – точки c:

$$(T^{**})a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m < c < x_{m+1} < \cdots < x_n = b.$$

Неважко помітити, що

$$V_a^b(T, f) \leq V_a^b(T^{**}, f) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} |f(x_{k+1}) - f)x_k)| + |f(c) - f(x_m)| + |f(x_{m+1}) - f(c)| +$$

$$+\sum_{k=m+1}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\leq V_a^c(f)+V_c^b(f).$$

Якщо точка $x=c$ збігається з однією із точок T-розбиття (1.1), то остання нерівність також правильна. Звідси

$$V_a^b(f)=\sup_{(T)}V_a^b(T,f)\leq V_a^0(f)+V^b(f). \tag{1.5}$$

З (1.4) і (1.5) випливає (1.3).

Наслідок. Якщо $f(x)$ – функція обмеженої варіації на відрізку $[a;b]$ і $a<c<b$, то $f(x)$ – функція обмеженої варіації на відрізках $[a;c]$ і $[c;b]$, причому правильна рівність (1.3). Якщо $f(x)-$ функція обмеженої варіації на відрізках $[a;c]$ і $[c;b]$, то вона є функцією обмеженої варіації на відрізку $[a;b]$.

Теорема 1.6. Для того щоб функція $f(x)$ була функцією обмеженої варіації на відрізку, необхідно і достатньо, щоб вона на цьому відрізку зображувалась у вигляді різниці двох зростаючих функцій.

Доведення. Різниця двох зростаючих функцій на відрізку $[a;b]$ внаслідок теорем 1.1 і 1.4 є функцією обмеженої варіації на цьому відрізку. Цим показано достатність умов теореми. Доведемо їх необхідність. Для цього розглянемо функцію

$$\alpha(x)=\begin{cases}V_a^x(f),\text{якщо } a<x\leq b,\\ 0,\text{якщо } x=a.\end{cases}$$

За теоремою 1.5 $\alpha(x)-$ неспадна функція на відрізку $[a;b]$. Покажемо, що й функція

$$\beta(x)=\alpha(x)-f(x) \tag{1.6}$$

не спадає на цьому відрізку. Якщо $a\leq x_1<x_2\leq b$, то за теоремою 1.5

$$\beta(x_2)-\beta(x_1)=V_{x_1}^{x_2}(f)-|f(x_2)-f(x_1)|.$$

Оскільки

$$f(x_2)-f(x_1)\leq |f(x_2)-f(x_1)|\leq V_{x_1}^{x_2}(f),$$

то

$$\beta(x_2)-\beta(x_1)\geq 0.$$

І, отже, $\beta(x)-$ неспадна функція на відрізку $[a;b]$. З (1.6) маємо

$$f(x) = \alpha(x) - \beta(x) = (\alpha(x) + x) - \beta(x) + x) = \alpha_1(x) - \beta_1(x).$$

де $\alpha_1(x) = \alpha(x) + x$ і $\beta_1(x) = \beta(x) + x -$ зростаючі функції на відрізку $[a; b]$. Теорему доведено.

1.2 Деякі означення варіації функцій двох змінних.

Відомо багато узагальнень поняття варіації (зміни) функції однієї змінної для випадку функцій багатьох змінних. Наприклад, варіації Віталі, Арцеля, Фреше, Хаана, Харді, Перпонта є такими узагальненнями.

Більшість відомих визначень варіації функції багатьох змінних зводиться до того, що автор визначає один функціонал, обмеженість якого гарантує наявність у розглянутої функції ряду властивостей, аналогічних властивостям функції з кінцевою зміною. Такий підхід до узагальнення поняття зміни функції не давав можливості побудувати більш-менш повну теорію. Виходило так, що перелік властивостей функції з обмеженою варіацією виявлявся одностороннім і суттєво біднішим у порівнянні зі списком властивостей функції з кінцевою зміною, хоча в термінах кожної з таких варіацій вдавалося формулювати окремі цікаві теореми. Досвід подібного роду узагальнень натолкнув на думку про те, що функція багатьох змінних характеризується кількома функціоналами (варіаціями), які в певному сенсі є незалежними. Останнє вперше було чітко і обґрунтовано висловлено А. С. Кронродом. Для функції двох змінних він визначив дві варіації (лінійну та площинну). Ми зупинимося на визначенні найбільш типових і незалежних одна від одної варіацій функції двох змінних, які з'явилися раніше варіації А. С. Кронрода, і вкажемо на деякі їх застосування.

Нехай E_2 — це двовимірна площина; x, y— координати довільної точки з E_2 відносно прямокутної системи координат $X, Y; R(a \leq x \leq b; c \leq y \leq d)$ — прямокутник з E_2, $f(x, y)$ — функція, задана на R.

Означення 1 (Віталі). Нехай x_i і y_i $(i = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2, \dots, m)$ такі, що

$$\left.\begin{aligned} a = x_1 < x_2 < \cdots < x_l = b, \\ c = y_1 < y_2 < \cdots < y_m = d. \end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

Покладемо:

$$\varphi_j^i = f(x_{i+1}, y_{j+1}) + f(x_i, y_j) - f(x_i, y_{j+1}) - f(x_{i+1}, y_j)$$

$(i = 1, 2, \dots, l-1, j = 1, 2, \dots, m-1)$. Верхню грань $v(f, R) = \sup\limits_{l,m,\{x_i\}\{y_j\}} \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j=1}^{m-1} \left|\varphi_j^i\right|$ по будь-яких l, m та будь-яким набором чисел x_i і y_j $(i = 1, \dots, l; j = 1, \dots, m)$, які задовольняють співвідношення (1.7), Віталі називає *варіацією функції $f(x, y)$ на прямокутнику R*.

За допомогою варіації Віталі легко узагальнити поняття інтеграла Стильтьєса на випадок функцій багатьох змінних.

Нехай $\varphi(x, y)$ — це фіксована функція, визначена і неперервна на R, з кінцевою варіацією Віталі на прямокутнику R, а $g(x,\ y)$ — довільна неперервна на R функція. Позначимо через $r(n, n_1, n_2)$ прямокутник на R, що визначається співвідношеннями

$$a + \frac{n_1(b-a)}{n} \le x \le a + \frac{(n_1+1)(b-a)}{n},$$
$$c + \frac{n_2(d-c)}{n} \le y \le c + \frac{(n_2+1)(d-c)}{n}$$
$$(n_1 = 0, 1, 2, \dots, n-1;\ n_1 = 0, 1, 2, \dots, n-1; n = 1, 2, \dots).$$

Можна довести, що послідовність

$$\sum_{n_1=0}^{n-1} \sum_{n_2=0}^{n-1} g\left(a + \frac{n_1(b-a)}{n}, c + \frac{n_2(d-c)}{n}\right) v\big(\varphi, r(n, n_1, n_2)\big)$$

має границю $I_\varphi(g)$ при $n \to \infty$. Величина

$$I_\varphi(g) = \int\limits_R g(x, y) v(\varphi, dR)$$

називається *визначеним інтегралом Стильтьєса-Віталі від функцій $g(x, y)$ по функції $\varphi(x, y)$ на прямокутнику R*.

Означення 2 (Арцеля). Нехай x_i та y_j $(i = 1, 2, \dots, l = 1, \dots, l)$ такі, що

$$\left.\begin{aligned} a = x_1 < x_2 < \cdots < x_l = b, \\ c = y_1 < y_2 < \cdots < y_l = d. \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Функцію $f(x, y)$ Арцель називає функцією з обмеженою варіацією, якщо величина $\sum_{i=1}^{l-1} |f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)|$ обмежена (рівномірно по l,

$x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l)$ для будь-яких $l,\ x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l$, які задовольняють нерівності (1.8).

Будь-яка неперервна функція з обмеженою варіацією Арцеля розкладається на різницю двох простіших за своєю будовою функцій.

Теорема 1.7 (Арцеля). Будь-яка неперервна функція $f(x,y)$ з обмеженою на прямокутнику R варіацією Арцеля може бути представлена на R у вигляді різниці двох неперервних функцій, які не зменшуються за y і мають обмежену варіацію Арцеля.

Означення 3 (Тонеллі). Позначимо через $\psi_1(x_0)$ зміну функції $f(x_0,y)$ на відрізку $c \le y \le d$ при $x_0 = const$, а через $\psi_2(y_0)$ – зміну $f(x,y_0)$ на відрізку $a \le x \le b$ при $y_0 = const$. Нехай $f(x,y)$ така, що $\psi_1(x)$ і $\psi_1(y)$ вимірні за Лебегом. Тонеллі називає $f(x,y)$ функцією з обмеженою варіацією, якщо

$$\int_a^b \psi_1(x)dx + \int_c^d \psi_2(y)dy < +\infty.$$

В термінах варіації Тонеллі можна сформулювати деякі достатні умови для збіжності рядів Фур'є.

Теорема 1.8 (Тонеллі). Нехай функція $f(x,y)$ і точка (x_0,y_0) такі, що $\psi_1(x_0) < +\infty$; $\psi_2(y_0) < +\infty$, і $f(x,y)$ на деякому квадраті R, у якому (x_0,y_0) це внутрішня точка, має обмежену варіацію Тонеллі. Тоді біряд Фур'є функції $f(x,y)$ в точці (x_0,y_0) збігається до

$$\frac{1}{4}[f(x_0,y_0+0) + f(x_0,y_0-0) + f(x_0+0,y_0) + f(x_0-0,y_0)]$$

Теорема 1.9 (Харді). Нехай $f(x,y)$ неперервна періодична з періодом 2π функція, визначена на всій площині. Нехай варіація Віталі і Тонеллі функції $f(x,y)$ кінцеві на квадраті $R(0 \le x \le 2\pi; 0 \le y \le 2\pi)$. Тоді відповідний до функції $f(x,y)$ біряд Фур'є рівномірно збігається на всій площині до функції $f(x,y)$.

2. ПОДВІЙНІ СТЕПЕНЕВІ РЯДИ З ОБМЕЖЕНОЮ ВАРІАЦІЄЮ В РОЗУМІННІ ТОНЕЛЛІ

2.1 Основні поняття, позначення та постановка задачі.

Введемо наступні позначення :

U – множина точок $\{z : |z| < 1\}$ одиничного круга.

$U^2 = \{(z^1, z^2): |z^1| < 1, |z^2| < 1\}$, $Q^2 = \{(z^1, z^2): |z^1| = 1, |z^2| = 1\}$.

$T^2 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$, $C(T^2)$ - простір неперервних 2π-періодичних по кожній змінній функцій.

Нагадаємо, що ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \ , z \in U$$

має обмежену варіацію , якщо при $z=e^{it}$ дійсна і уявна частини цього ряду є рядами Фур'є функцій з обмеженою варіацією .

Через $H^1(U)$ позначимо клас функцій Харді, тобто множину аналітичних в U функцій $f(z)$ таких, що

$$\|f\|_{H_1} = \sup_{0 \le r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right| dt < \infty$$

Кажуть, що функція $f(z)$ є функцією з обмеженою варіацією на сегменті $[a, b]$, якщо $\bigvee_a^b(f) < +\infty$, де $\bigvee_a^b(f)$ – точна верхня границя множини най можливіших сум $\bigvee = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$ для довільного розбиття сегмента $[a, b]$ на частини точками $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$. Вперше поняття варіації функції зустрічається в працях французького математика Жордана (1838 – 1922).

Харді і Літтлвудом, доведено, що якщо степеневий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$$

має обмежену варіацію, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| \leq \frac{1}{2}V,$$

де V – варіація функції $f(z) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} a_k z^k$ на $|z| = 1$.

Аналог результату Харді – Літтлвуда для випадку кратних степеневих рядів не доведений, що зумовлено рядом причин. По-перше тим, що нулі регулярної функції декількох змінних утворюють континуум і не існує аналогів добутку Бляшке, а значить відсутні ряд результатів, доведення яких базується на використанні теорем факторизції. По-друге, що для функції багатьох змінних існує багато означень варіації функції, наприклад варіації Віталі, Тонеллі, Арцена, Кронрода , Вітушкіна.

Метою даного розділу є доведення аналогу результату Харді-Літтлвуда для кратних степеневих рядів, у випадку, коли варіація функції розглядається в розумінні Тонеллі і Харді-Віталі.

Нехай функція $f \in C(T^2)$ має ряд Фур'є

$$S[T] = \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} \lambda_{k_1,k_2}[A_{k_1,k_2} \cos k_1 t_1 \cos k_2 t_2 + B_{k_1,k_2} \cos k_1 t_1 \sin k_2 t_2 +$$
$$+C_{k_1,k_2} \sin k_1 t_1 \cos k_2 t_2 + D_{k_1,k_2} \sin k_1 t_1 \sin k_2 t_2]$$

де $\lambda_{0,0} = \frac{1}{4}$, $\lambda_{k_1,0} = \lambda_{0,k_2} = \frac{1}{2}$, $\lambda_{k_1,k_2} = 1$, $k_1, k_2 = 1,2, \ldots,$

а коефіцієнти обчислюються за формулами

$$A_{k_1,k_1} = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} f(t_1,t_2)\cos k_1 t_1 \cos k_2 t_2 \, dt_1 dt_2,$$

$$B_{k_1,k_1} = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} f(t_1,t_2)\cos k_1 t_1 \sin k_2 t_2 \, dt_1 dt_2,$$

$$C_{k_1,k_1} = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} f(t_1,t_2)\sin k_1 t_1 \cos k_2 t_2 \, dt_1 dt_2,$$

$$D_{k_1,k_1} = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} f(t_1,t_2)\sin k_1 t_1 \sin k_2 t_2 \, dt_1 dt_2.$$

Множину всіх математичних функцій в U^2 таких, що

$$\sup_{\substack{0\le r_1\le 1\\ 0\le r_2\le 1}} \int_{T^2} \left|f\left(r_1 e^{it_1}, r_2 e^{it_2}\right)\right| dt_1 dt_2 < \infty$$

будемо позначати, як загально прийнято, через $H^1(U^2)$.

Нехай функція $f(x,y)$ задана на $P=\{a\le x\le b, c\le y\le d\}$. Зафіксуємо x_0 і позначимо через $\Psi_1(x_0)$ варіацію функції $f(x_0,y)$ на відрізку $[c,d]$, а через $\Psi_2(y_0)$ варіацію $f(x,y_0)$ на відрізку$[a,b]$ при фіксованому y_0. Будемо вважати $f(x,y)$ такою, що $\Psi_1(x)$ і $\Psi_2(y)$ вимірні по Лебегу функції відповідно на $[a,b]$ і $[c,d]$.

Функція $f(x,y)$ називається функцією з обмеженою варіацією в розумінні Тонеллі, якщо

$$\int_a^b \Psi_1(x)dx + \int_c^d \Psi_2(y)dy < \infty. \qquad (*)$$

Якщо $f(x,y)$ - абсолютно неперервна по кожній змінній, тобто абсолютно неперервна по $x\in[a,b]$ при майже усіх $y\in[c,d]$ і абсолютно неперервна по $y\in[c,d]$ при майже всіх $x\in[a,b]$, то

$$\Psi_1(x) = \int_c^d \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| dy;\ \Psi_2(y) = \int_a^b \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right| dx.$$

В загальному випадку, як відомо, можна записати, що

$$\Psi_1(x) = \int_c^d \left|d_y f(x,y)\right|, \Psi_2(y) = \int_a^b |d_x f(x,y)|\,,$$

розуміючи останні інтеграли як інтеграли Стілт’єса, тобто

$$\lim_{\mu\to 0}\sum_{l=0}^{n-1} |f(x,y_{l+1}) - f(x,y_1)|, \mu = \max(y_{l+1}-y_l),$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{m-1} |f(x_{k+1},y) - f(x_k,y)|, \lambda = \max(x_{k+1}-x_k).$$

Тоді співвідношення (*) запишеться у вигляді

$$\int_a^b \int_c^d \left| d_y f(x,y) \right| dx + \int_a^b \int_c^d \left| d_x f(x,y) \right| dy < \infty.$$

Ряд $\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} a_{k_1,k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}$ має обмежену варіацію в розумінні Тонеллі, якщо при $z = e^{it_1}, z = e^{it_2}$ дійсна і уявна частини цього ряду є рядами Фур'є від функцій з обмеженою варіацією в розумінні Тонеллі.

Для довільної функції f в U^2 і для довільного $\omega \in Q^2$ визначенимо функцією f_ω в U формулою

$$f_\omega(\lambda) = f(\lambda\omega) \qquad (2.1)$$

Функція f_ω називається «зріз – функцією» і дозволяє пов'язати деякі двовимірні властивості з відповідними одновимірними властивостями.

Нам потрібна буде відома нерівність Коші Буняковського:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Через c, як і раніше, будемо позначати абсолютні додатні сталі, які можуть бути не однаковими в різних формулах.

При викладі матеріалу даного розділу будуть необхідні наступні відомі твердження.

Теорема 2.1. Для кожної функції

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

в U маємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k |a_k| \leq 66 \|F\|_{H^1},$$

де

$$c_k = \frac{\sum_{i=0}^{k} |a_i|^2}{\left(\sum_{i=0}^{k} |a_i| \right)^2}.$$

У випадку $k = 0$ покладаємо $\frac{0}{0} = 0$.

Нехай $\Delta^m = \{z = (z_1, \dots, z_m) \colon |z_i| = |x_j + iy_j| < 1, j = \overline{1,m}\}, z^k = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_m^{k_m}, re^{it} = (r_1 e^{it_1}, r_2 e^{it_2}, \dots, r_m e^{it_m}), 0 \le r \le 1 (0 \le r_i \le 1, i = \overline{1,m}), r^k = r_1^{k_1} r_2^{k_2} \dots r_m^{k_m}$, а H_m^1 - клас регулярних функцій $f(z), z \in \Delta^m$, таких, що $\max\limits_{0 \le r \le 1} \int_{T^m} |f(re^{it})|\, dt < \infty$, де $T^m = [-\pi, \pi]^m, r = (r_1, r_2, \dots, r_m), t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$.

ЛЕМА 2.1. Нехай

$$\Phi(z) = \sum_{k \ge 0} b_k z^k \in H_m^1.$$

Тоді

$$\sum_{k \ge 0} |b_k| \Big/ \prod_{i=1}^{m} (k_i + 1) \le 2^{-m} \int\limits_{T^m} |\Phi(e^{it})|\, dt < \infty.$$

Нехай P_n- множина алгебраїчних поліномів виду

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k,$$

де α_k- довільні дійсні (або комплексні) числа.

Через $E_n(f)$ будемо позначати величину найкращого наближення функції $f(z)$ поліномами $p_n \in P_n$ в метриці простору H_1, тобто

$$E_n(f) = \inf_{p_n \in P_n} \|f(z) - p_n(z)\|_{H^1}.$$

2.2 Абсолютна збіжність подвійного степеневого ряду, що має обмежену варіацію в розумінні Тонеллі.

Метою цього підрозділу є доведення наступного твердження.

Теорема 2.2. Нехай степеневий ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l_1 + l_2 = k} z_1^{l_1} z_2^{l_2}$$

має обмежену варіацію в розумінні Тонеллі, тобто дійсна і уявна частини цього ряду при $z_1 = e^{it_1}, z_2 = e^{it_2}$ є рядами Фур'є функцій $\Phi(t_1, t_2)$ і $\overline{\Phi}(t_1, t_2)$ таких, що

$$V(\Phi) = V(\overline{\Phi}) =$$

$$= \int_{T^2} \left| d_{t_1} \Phi(t_1, t_2) \right| dt_2 + \int_{T^2} \left| d_{t_2} \Phi(t_1, t_2) \right| dt_1 + \int_{T^2} \left| d_{t_1} \overline{\Phi}(t_1, t_2) \right| dt_2 +$$

$$+ \int_{T^2} \left| d_{t_2} \overline{\Phi}(t_1, t_2) \right| dt_1 < \infty.$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k k |a_k| \ln(k+2) < \infty ,$$

де

$$c_k = \frac{\sum_{i=0}^{k} |a_i|^2}{\left(\sum_{i=0}^{k} |a_i|\right)^2} .$$

Для доведення теореми нам буде потрібне допоміжне твердження.

Лема 2.2. Якщо ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l_1+l_2=k} z_1^{l_1} z_2^{l_2}$ має обмежену варіацію в розумінні Тонеллі і

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l_1+l_2=k} z_1^{l_1} z_2^{l_2} , z = (z_1, z_2) \in U^2,$$

то

$$G(z) = z_1 f'_{z_1}(z_1, z_2) + z_2 f'_{z_2}(z_1, z_2)$$

Доведення. Відділимо дійсну і уявну частини в ряді $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l_1+l_2=k} z_1^{l_1} z_2^{l_2}$ при $z_1 = r_1 e^{it_1}, z_2 = r_2 e^{it_2}$, при цьому будемо вважати, що $a_k = \alpha_k - i\beta_k$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k - i\beta_k) \sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} e^{it_1 l_1} r_2^{l_2} e^{it_2 l_2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k - i\beta_k) \sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} r_2^{l_2} (\cos(l_1 t_1 + l_2 t_2) + i \sin(l_1 t_1 + l_2 t_2)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha_k \sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cos(l_1 t_1 + l_2 t_2) + \beta_k \sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \sin(l_1 t_1 + l_2 t_2) \right)$$

$$+ i \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha_k \sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \sin(l_1 t_1 + l_2 t_2) + \beta_k \sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cos(l_1 t_1 + l_2 t_2) \right)$$

Оскільки існують функції $\Phi(t_1, t_2), \overline{\Phi}(t_1, t_2)$ з обмеженими варіаціями в розумінні Тонеллі, тобто

$$\int_{T^2} \left| d_{t_1} \Phi(t_1, t_2) \right| dt_2 + \int_{T^2} \left| d_{t_2} \Phi(t_1, t_2) \right| dt_1 < \infty,$$

$$\int_{T^2} \left| d_{t_1} \overline{\Phi}(t_1, t_2) \right| dt_2 + \int_{T^2} \left| d_{t_2} \overline{\Phi}(t_1, t_2) \right| dt_1 < \infty,$$

і такі, що

$$S[\Phi] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\alpha_k \sum_{l_1+l_2=k} \cos(l_1 t_1 + l_2 t_2) + \beta_k \sum_{l_1+l_2=k} \sin(l_1 t_1 + l_2 t_2) \right], \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} \alpha_k = \frac{1}{2\pi^2} \int_{T^2} \Phi(t_1, t_2) \, cos(l_1 t_1 + l_2 t_2) \, dt_1 dt_2, \\ \beta_k = \frac{1}{2\pi^2} \int_{T^2} \Phi(t_1, t_2) \, sin(l_1 t_1 + l_2 t_2) \, dt_1 dt_2, \forall l_1, l_2 \colon l_1 + l_2 = k; \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$S[\overline{\Phi}] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\beta_k \sum_{l_1+l_2=k} \cos(l_1 t_1 + l_2 t_2) + a_k \sum_{l_1+l_2=k} \sin(l_1 t_1 + l_2 t_2) \right), \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered} \beta_k = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{T^2} \overline{\Phi}(t_1, t_2) \, cos(l_1 t_1 + l_2 t_2) \, dt_1 dt_2, \\ \alpha_k = \frac{1}{2\pi^2} \int_{T^2} \overline{\Phi}(t_1, t_2) \, sin(l_1 t_1 + l_2 t_2) \, dt_1 dt_2, \forall l_1, l_2 \colon l_1 + l_2 = k. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Розглянемо ряди, які одержуються із рядів (2.2) і (2.4) диференціюванням по t_1, t_2:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta_k \sum_{l_1+l_2=k} l_1 cos(l_1 t_1 + l_2 t_2) - \alpha_k \sum_{l_1+l_2=k} l_1 sin(l_1 t_1 + l_2 t_2) \right), \tag{2.6}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\beta_k \sum_{l_1+l_2=k} l_2 cos(l_1t_1+l_2t_2) - \alpha_k \sum_{l_1+l_2=k} l_2 sin(l_1t_1+l_2t_2)\right),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha_k \sum_{l_1+l_2=k} l_1 cos(l_1t_1+l_2t_2) + \beta_k \sum_{l_1+l_2=k} l_1 sin(l_1t_1+l_2t_2)\right),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha_k \sum_{l_1+l_2=k} l_2 cos(l_1t_1+l_2t_2) + \beta_k \sum_{l_1+l_2=k} l_2 sin(l_1t_1+l_2t_2)\right), \quad (2.7)$$

Покажемо, що ці ряди є рядами Фур'є – Стілт'єса відповідно функцій $d_{t_1}\Phi(t_1,t_2), d_{t_2}\Phi(t_1,t_2), d_{t_1}\overline{\Phi}(t_1,t_2), d_{t_2}\overline{\Phi}(t_1,t_2)$. Дійсно, враховуючи (2.3), будемо мати

$$l_1\beta_k = \frac{l_1}{2\pi^2}\int_{T^2}\Phi(t_1,t_2)\sin(l_1t_1+l_2t_2)dt_1dt_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int_{T^2} d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\cos(l_1t_1+l_2t_2)dt_2,$$

$$-l_1\alpha_k = -\frac{l_1}{2\pi^2}\int_{T^2}\Phi(t_1,t_2)\cos(l_1t_1+l_2t_2)dt_1dt_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int_{T^2} d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\sin(l_1t_1+l_2t_2)dt_2$$

а це означає, що $l_1\beta_k, -l_1\alpha_k$ є коефіцієнтами Фур'є – Стілт'єса функції $\Phi(t_1,t_2)$

$$l_2\beta_k = \frac{l_2}{2\pi^2}\int_{T^2}\Phi(t_1,t_2)\sin(l_1t_1+l_2t_2)dt_1dt_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int_{T^2} d_{t_2}\Phi(t_1,t_2)\cos(l_1t_1+l_2t_2)dt_1, \quad (2.8)$$

$$-l_2\alpha_k = -\frac{l_2}{2\pi^2}\int_{T^2}\Phi(t_1,t_2)\cos(l_1t_1+l_2t_2)dt_1dt_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_{T^2} d_{t_2} \Phi(t_1, t_2) \sin(l_1 t_1 + l_2 t_2) dt_1 -$$

коефіцієнти Фур'є – Стілт'єса функції $\Phi(t_1, t_2)$.

Аналогічно, враховуючи (2.5), знайдемо

$$\begin{gathered}
l_1 \alpha_k = \frac{l_1}{2\pi^2} \int_{T^2} \overline{\Phi}(t_1, t_2) \sin(l_1 t_1 + l_2 t_2) dt_1 dt_2 = \\
= \frac{1}{2\pi^2} \int_{T^2} d_{t_1} \overline{\Phi}(t_1, t_2) \cos(l_1 t_1 + l_2 t_2) dt_2, \\
l_1 \beta_k = -\frac{l_1}{2\pi^2} \int_{T^2} \overline{\Phi}(t_1, t_2) \cos(l_1 t_1 + l_2 t_2) dt_1 dt_2 = \\
= \frac{1}{2\pi^2} \int_{T^2} d_{t_1} \overline{\Phi}(t_1, t_2) \sin(l_1 t_1 + l_2 t_2) dt_2, \\
l_2 \alpha_k = \frac{l_2}{2\pi^2} \int_{T^2} \overline{\Phi}(t_1, t_2) \sin(l_1 t_1 + l_2 t_2) dt_1 dt_2 = \\
= \frac{1}{2\pi^2} \int_{T^2} d_{t_2} \overline{\Phi}(t_1, t_2) \cos(l_1 t_1 + l_2 t_2) dt_1, \\
l_2 \beta_k = -\frac{l_2}{2\pi^2} \int_{T^2} \overline{\Phi}(t_1, t_2) \cos(l_1 t_1 + l_2 t_2) dt_1 dt_2 = \\
= \frac{1}{2\pi^2} \int_{T^2} d_{t_2} \overline{\Phi}(t_1, t_2) \sin(l_1 t_1 + l_2 t_2) dt_1.
\end{gathered} \tag{2.9}$$

Виходячи з (2.6) і (2.7), покладемо

$$\begin{gathered}
\varphi_1(r, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta_k \sum_{l_1 + l_2 = k} l_1 r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cos(l_1 x_1 + l_2 x_2) \right. \\
\left. - \alpha_k \sum_{l_1 + l_2 = k} l_1 r_1^{l_1} r_2^{l_2} \sin(l_1 x_1 + l_2 x_2) \right),
\end{gathered} \tag{2.10}$$

$$\varphi_2(r,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_k\sum_{l_1+l_2=k} l_2 r_1^{l_1} r_2^{l_2}\cos(l_1x_1+l_2x_2)\right.$$

$$\left.-\alpha_k\sum_{l_1+l_2=k} l_2 r_1^{l_1} r_2^{l_2}\sin(l_1x_1+l_2x_2)\right),$$

$$\bar{\varphi}_1(r,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\sum_{l_1+l_2=k} l_1 r_1^{l_1} r_2^{l_2}\cos(l_1x_1+l_2x_2)\right.$$

$$\left.+\beta_k\sum_{l_1+l_2=k} l_1 r_1^{l_1} r_2^{l_2}\sin(l_1x_1+l_2x_2)\right),$$

$$\bar{\varphi}_2(r,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\sum_{l_1+l_2=k} l_2 r_1^{l_1} r_2^{l_2}\cos(l_1x_1+l_2x_2)\right.$$

$$\left.+\beta_k\sum_{l_1+l_2=k} l_2 r_1^{l_1} r_2^{l_2}\sin(l_1x_1+l_2x_2)\right),$$

На основі рівностей (2.8) – (2.10) можна написати

$$\varphi_1(r,x)=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{T^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} r_2^{l_2}\cos(l_1x_1$$

$$+l_2x_2)\cos(l_1t_1+l_2t_2)d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)dt_2$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{T^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} r_2^{l_2}\sin(l_1x_1+l_2x_2)\sin(l_1t_1+l_2t_2)d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)dt_2=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{T^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} r_2^{l_2}\cos\big(l_1(t_1-x_1)+l_2(t_2-x_2)\big)d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)dt_2\,.$$

Аналогічно

$$\varphi_2(r,x)=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{T^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} r_2^{l_2}\cos\big(l_1(t_1-x_1)+l_2(t_2-x_2)\big)d_{t_2}\Phi(t_1,t_2)dt_1\,.$$

$$\bar{\varphi}_1(r,x)=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{T^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} r_2^{l_2}\cos\big(l_1(t_1-x_1)+l_2(t_2-x_2)\big)d_{t_1}\bar{\Phi}(t_1,t_2)dt_2\,.$$

$$\bar{\varphi}_2(r,x)=\frac{1}{2\pi^2}\int_{T^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1}r_2^{l_2}\cos\big(l_1(t_1-x_1)+l_2(t_2-x_2)\big)d_{t_2}\bar{\Phi}(t_1,t_2)dt_1.$$

Справедлива рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1}r_2^{l_2}\cos\big(l_1(t_1-x_1)+l_2(t_2-x_2)\big)=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(P_{r_1}(t_1-x_1)+P_{r_2}(t_2-x_2)\Big)+P_{r_1}(t_1-x_1)P_{r_2}(t_2-x_2)-$$

$$-Q_{r_1}(t_1-x_1)Q_{r_2}(t_2-x_2)-\frac{3}{4}$$

де

$$P_{r_1}(t_1-x_1)=\frac{1}{2}+\sum_{l_1=1}^{\infty} r_1^{l_1}\cos l_1(t_1-x_1)\,,\ P_{r_2}(t_2-x_2)$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{l_2=1}^{\infty} r_2^{l_2}\cos l_2(t_2-x_2),$$

$$Q_{r_1}(t_1-x_1)=\sum_{l_1=1}^{\infty} r_1^{l_1}\sin l_1(t_1-x_1)\,,\ Q_{r_2}(t_2-x_2)=\sum_{l_2=1}^{\infty} r_2^{l_2}\sin l_2(t_2-x_2).$$

Дійсно

$$=\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty} r_1^{l_1}r_2^{l_2}\cos\big(l_1(t_1-x_1)+l_2(t_2-x_2)\big)-1=$$

$$=\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty} r_1^{l_1}r_2^{l_2}\cos l_1(t_1-x_1)\cos l_2(t_2-x_2)-$$

$$-\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty} r_1^{l_1}r_2^{l_2}\sin l_1(t_1-x_1)\sin l_2(t_2-x_2)-1=$$

$$=\sum_{l_1=0}^{\infty} r_1^{l_1}\cos l_1(t_1-x_1)\sum_{l_2=0}^{\infty} r_2^{l_2}\cos l_2(t_2-x_2)-$$

$$-\sum_{l_1=0}^{\infty} r_1^{l_1}\sin l_1(t_1-x_1)\sum_{l_2=0}^{\infty} r_2^{l_2}\sin l_2(t_2-x_2)-1=$$

$$= \left(1 + \sum_{l_1=1}^{\infty} r_1^{l_1} \cos l_1(t_1 - x_1)\right)\left(1 + \sum_{l_2=1}^{\infty} r_2^{l_2} \cos l_2(t_2 - x_2)\right) -$$

$$- \sum_{l_1=1}^{\infty} r_1^{l_1} \sin l_1(t_1 - x_1) \sum_{l_2=1}^{\infty} r_2^{l_2} \sin l_2(t_2 - x_2) - 1 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + P_{r_1}(t_1 - x_1)\right)\left(\frac{1}{2} + P_{r_2}(t_2 - x_2)\right) - Q_{r_1}(t_1 - x_1)Q_{r_2}(t_2 - x_2) - 1 =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(P_{r_1}(t_1 - x_1) + P_{r_2}(t_2 - x_2)\Big) + P_{r_1}(t_1 - x_1)P_{r_2}(t_2 - x_2) -$$

$$-Q_{r_1}(t_1 - x_1)Q_{r_2}(t_2 - x_2) - \frac{3}{4}.$$

Тоді

$$\varphi_1(r, x) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{T^2} \left(\frac{1}{2}\Big(P_{r_1}(t_1 - x_1) + P_{r_2}(t_2 - x_2)\Big) + P_{r_1}(t_1 - x_1)P_{r_2}(t_2 - x_2)\right.$$

$$\left. - Q_{r_1}(t_1 - x_1)Q_{r_2}(t_2 - x_2) - \frac{3}{4}\right) d_{t_1}\, \Phi(t_1, t_2) dt_2,$$

$$\varphi_2(r, x) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{T^2} \left(\frac{1}{2}\Big(P_{r_1}(t_1 - x_1) + P_{r_2}(t_2 - x_2)\Big) + P_{r_1}(t_1 - x_1)P_{r_2}(t_2 - x_2)\right.$$

$$\left. - Q_{r_1}(t_1 - x_1)Q_{r_2}(t_2 - x_2) - \frac{3}{4}\right) d_{t_2}\, \Phi(t_1, t_2) dt_1,$$

$$\bar{\varphi}_1(r, x) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{T^2} \left(\frac{1}{2}\Big(P_{r_1}(t_1 - x_1) + P_{r_2}(t_2 - x_2)\Big) + P_{r_1}(t_1 - x_1)P_{r_2}(t_2 - x_2)\right.$$

$$\left. - Q_{r_1}(t_1 - x_1)Q_{r_2}(t_2 - x_2) - \frac{3}{4}\right) d_{t_1}\, \overline{\Phi}(t_1, t_2) dt_2,$$

$$\bar{\varphi}_2(r, x) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{T^2} \left(\frac{1}{2}\Big(P_{r_1}(t_1 - x_1) + P_{r_2}(t_2 - x_2)\Big) + P_{r_1}(t_1 - x_1)P_{r_2}(t_2 - x_2)\right.$$

$$\left. - Q_{r_1}(t_1 - x_1)Q_{r_2}(t_2 - x_2) - \frac{3}{4}\right) d_{t_2}\, \overline{\Phi}(t_1, t_2) dt_1,$$

Покладемо

$$P(x_1, x_2) = -\frac{1}{\pi^2} \int\limits_{T^2} Q_{r_1}(t_1 - x_1)Q_{r_2}(t_2 - x_2) d_{t_1} \Phi(t_1, t_2) dt_2,$$

$$R(x_1,x_2)=-\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2}P_{r_1}(t_1-x_1)P_{r_2}(t_2-x_2)d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)dt_2-$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{T^2}\left(\frac{1}{2}\left(P_{r_1}(t_1-x_1)+P_{r_2}(t_2-x_2)\right)\right)d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)dt_2.$$

Функції $P(x_1,x_2)$ і $R(x_1,x_2)$ є неперервними. Дійсно, доведемо, що $P(x_1,x_2)$ неперервна. Неперервність $R(x_1,x_2)$ доводиться аналогічно.

Зафіксуємо t_1,t_2. За означенням неперервності, $\forall x_1^{'},x_2^{'},x_1^{''},x_2^{''}$ таких, що $\left|x_1^{'}-x_1^{''}\right|<\delta_1,\left|x_2^{'}-x_2^{''}\right|<\delta_2$ маємо

$$\left|\int\limits_{T^2}Q_{r_1}\left(t_1-x_1^{'}\right)Q_{r_2}\left(t_2-x_2^{'}\right)d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)dt_2\right.$$

$$\left.-\int\limits_{T^2}Q_{r_1}\left(t_1-x_1^{''}\right)Q_{r_2}\left(t_2-x_2^{''}\right)d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)dt_2\right|\le$$

$$\le\int\limits_{T^2}\left|Q_{r_1}\left(t_1-x_1^{'}\right)Q_{r_2}\left(t_2-x_2^{'}\right)-Q_{r_1}\left(t_1-x_1^{''}\right)Q_{r_2}\left(t_2-x_2^{''}\right)\right|\left|d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_2<$$

$$<\varepsilon\int\limits_{T^2}\left|d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_2\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0.$$

Оскільки $Q_{r_1}(t_1-x_1),Q_{r_2}(t_2-x_2)$ неперервні функції, а отже неперервним є і їх добуток, а $\Phi(t_1,t_2)$ є функцією обмеженої варіації в розумінні Тонеллі, тому

$$\int\limits_{T^2}\left|d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_2<\infty.$$

Отже, $P(x_1,x_2)$ і $R(x_1,x_2)$ неперервні і для них справедлива рівність

$$P(x_1,x_2)=R(x_1,x_2) \tag{2.11}$$

Для встановлення цієї рівності обчислимо коефіцієнти Фур'є функцій $P(x_1,x_2)$ і $R(x_1,x_2)$.

При $l_i=1,2,\dots,\infty, i=1,2$ маємо

$$a_{l_1,l_2}(P) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2}\left(-\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} Q_{r_1}(t_1 - x_1)Q_{r_2}(t_2 - x_2)d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)dt_2\right)\cdot\cos l_1x_1$$

$$\cdot\cos l_2x_2\, dx_1dx_2 =$$

$$= -\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} Q_{r_1}(t_1 - x_1)Q_{r_2}(t_2 - x_2)\cdot\cos l_1x_1$$

$$\cdot\cos l_2x_2\, dx_1dx_2)\, dt_2 =$$

$$= -\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} Q_{r_1}(u_1)Q_{r_2}(u_2)\cdot\cos l_1(t_1 - u_1)$$

$$\cdot\cos l_2(t_2 - l_2)\, du_1du_2)\, dt_2 =$$

$$= -\frac{1}{\pi^2}\cdot\int\limits_{T^2} d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} Q_{r_1}(u_1)Q_{r_2}(u_2)(\cos l_1t_1\cdot\cos l_1u_1$$

$$+ \sin l_1t_1\cdot\sin l_1u_1)$$

$$\cdot(\cos l_2t_2\cdot cos l_2u_2 + \sin l_2t_2\cdot\sin l_2u_2)du_1du_2)dt_2 =$$

$$= -(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\cdot\cos l_1t_1\cdot\cos l_2t_2\, dt_2$$

$$\cdot\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} Q_{r_1}(u_1)Q_{r_2}(u_2)\cos l_1u_1\cdot\cos l_2u_2du_1du_2 +$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\cdot\sin l_1t_1\cdot\cos l_2t_2\, dt_2$$

$$\cdot\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} Q_{r_1}(u_1)Q_{r_2}(u_2)\cdot\sin l_1u_1\cdot\cos l_2u_2du_1du_2 +$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\cdot\cos l_1t_1\cdot\sin l_2t_2\,dt_2$$

$$\cdot\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} Q_{r_1}(u_1)Q_{r_2}(u_2)\cdot\cos l_1u_1\cdot\sin l_2u_2du_1du_2+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\cdot\sin l_1t_1\cdot\sin l_2t_2\,dt_2$$

$$\cdot\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} Q_{r_1}(u_1)Q_{r_2}(u_2)\cdot\sin l_1u_1\cdot\sin l_2u_2du_1du_2=$$

$$=-(l_1\beta_{l_1+l_2}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q_{r_1}(u_1)\cdot\cos l_1u_1du_1\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q_{r_2}(u_2)\cdot\cos l_2u_2du_2+$$

$$+\left(-l_1\alpha_{l_1+l_2}\right)\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q_{r_1}(u_1)\cdot\sin l_1u_1du_1\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q_{r_2}(u_2)\cdot\cos l_2u_2du_2+$$

$$+\left(-l_1\alpha_{l_1+l_2}\right)\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q_{r_1}(u_1)\cdot\cos l_1u_1du_1\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q_{r_2}(u_2)\cdot\sin l_2u_2du_2+$$

$$+(-l_1\beta_{l_1+l_2})\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q_{r_1}(u_1)\cdot\sin l_1u_1du_1\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q_{r_2}(u_2)\cdot\sin l_2u_2du_2)$$

$$=l_1\beta_{l_1+l_2}r_1^{l_1}r_2^{l_2}$$

Тепер обчислимо коефіцієнти Фур'є функції $R(x_1,x_2)$. Оскільки функція $R(x_1,x_2)$ є різницею двох функцій, то

$$a_{l_1,l_2}(R)=a'_{l_1,l_2}-a''_{l_1,l_2},$$

де

$$a'_{l_1,l_2}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2} P_{r_1}(t_1-x_1)P_{r_2}(t_2-x_2)d_{t_1}\Phi(\mathrm{t}_1,\mathrm{t}_2)dt_2\right)\cdot$$

$$\cdot\cos l_1x_1\cos l_2x_2\,dx_1dx_2=$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} d_{t_1} \Phi(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2) \left(\frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} P_{r_1}(u_1) P_{r_2}(u_2) \cos l_1 \, (t_1 - u_1) \cos l_2 (t_2 - u_2) du_1 du_2 \right) dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} d_{t_1} \Phi(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2) \cos l_1 t_1 \cos l_2 t_2 \, dt_2 \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} P_{r_1}(u_1) P_{r_2}(u_2) \cos l_1 u_1 \cos l_2 u_2 du_1 du_2$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} d_{t_1} \Phi(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2) \sin l_1 t_1 \cos l_2 t_2 \, dt_2 \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} P_{r_1}(u_1) P_{r_2}(u_2) \sin l_1 u_1 \cos l_2 u_2 du_1 du_2$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} d_{t_1} \Phi(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2) \cos l_1 t_1 \sin l_2 t_2 \, dt_2 \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} P_{r_1}(u_1) P_{r_2}(u_2) \cos l_1 u_1 \sin l_2 u_2 du_1 du_2$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} d_{t_1} \Phi(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2) \sin l_1 t_1 \sin l_2 t_2 \, dt_2 \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} P_{r_1}(u_1) P_{r_2}(u_2) \sin l_1 u_1 \sin l_2 u_2 du_1 du_2$$

$$= l_1 \beta_{l_1 + l_2} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_{r_1}(u_1) \cos l_1 u_1 du_1 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_{r_2}(u_2) \cos l_2 u_2 du_2 +$$

$$+ \left(-l_1 \alpha_{l_1 + l_2} \right) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_{r_1}(u_1) \sin l_1 u_1 du_1 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_{r_2}(u_2) \cos l_2 u_2 du_2 +$$

$$+ \left(-l_1 \alpha_{l_1 + l_2} \right) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_{r_1}(u_1) \cos l_1 u_1 du_1 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_{r_2}(u_2) \sin l_2 u_2 du_2 +$$

$$+ \left(-l_1 \beta_{l_1 + l_2} \right) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_{r_1}(u_1) \sin l_1 u_1 du_1 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_{r_2}(u_2) \sin l_2 u_2 du_2 = l_1 \beta_{l_1 + l_2} r_1^{l_1} r_2^{l_2}$$

$$a''_{l_1, l_2} = \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} \left(\frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} P_{r_1}(t_1 - x_1) + P_{r_2}(t_2 - x_2) d_{t_1} \Phi(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2) dt_2 \right) \cos l_1 x_1 \cos l_2 x_2 \, dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} d_{t_1} \Phi(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2) \left(\frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} \left(P_{r_1}(u_1) + P_{r_2}(u_2) \right) \cos l_1 \, (t_1 \right.$$

$$\left. - u_1) \cos l_2 (t_2 - u_2) du_1 du_2 \right) dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} d_{t_1} \Phi(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2) \cos l_1 t_1 \cos l_2 t_2 \, dt_2 \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} \left(P_{r_1}(u_1) + P_{r_2}(u_2) \right) \cos l_1 u_1 \cos l_2 u_2 du_1 du_2 +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} d_{t_1} \Phi(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2) \sin l_1 t_1 \cos l_2 t_2 \, dt_2 \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} \left(P_{r_1}(u_1) + P_{r_2}(u_2) \right) \sin l_1 u_1 \cos l_2 u_2 du_1 du_2 +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} d_{t_1} \Phi(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2) \cos l_1 t_1 \sin l_2 t_2 \, dt_2 \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} \left(P_{r_1}(u_1) + P_{r_2}(u_2) \right) \cos l_1 u_1 \sin l_2 u_2 du_1 du_2 +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} d_{t_1} \Phi(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2) \sin l_1 t_1 \sin l_2 t_2 \, dt_2 \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} \left(P_{r_1}(u_1) \right.$$

$$\left. + P_{r_2}(u_2) \right) \sin l_1 u_1 \sin l_2 u_2 du_1 du_2 =$$

$$= l_1 \beta_{l_1 + l_2} (\frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} P_{r_1}(u_1) \cos l_1 u_1 \cos l_2 u_2 \, du_1 du_2 +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} (u_2) \cos l_1 u_1 \cos l_2 u_2 du_1 du_2) +$$

$$+ \left(-l_1 \alpha_{l_1 + l_2} \right) (\frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} P_{r_1}(u_1) \sin l_1 u_1 \cos l_2 u_2 \, du_1 du_2 +$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} P_{r_2}(u_2)\sin l_1u_1\cos l_2u_2du_1du_2)+$$

$$+\left(-l_1\alpha_{l_1+l_2}\right)(\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} P_{r_1}(u_1)\cos l_1u_1\sin l_2u_2\,du_1du_2+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} P_{r_2}(u_2)\cos l_1u_1\sin l_2u_2du_1\,du_2)+$$

$$+\left(-l_1\beta_{l_1+l_2}\right)(\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} P_{r_1}(u_1)\sin l_1u_1\sin l_2u_2\,du_1du_2+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} P_{r_2}(u_2)\sin l_1u_1\sin l_2u_2du_1du_2)=0.$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} P_{r_2}(u_2)\sin l_1u_1\sin l_2u_2du_1du_2)=0. \tag{2.12}$$

Отже

$$a_{l_1,l_2}(R)=l_1\beta_{l_1+l_2}r_1^{l_1}r_2^{l_2} \tag{2.13}$$

При $l_1=\overline{1,\infty}, l_2=0$ маємо

$$a_{l_1,0}(P)=0$$

$$a_{l_1,0}(R)=a'_{l_1,0}-a''_{l_1,0}, \tag{2.14}$$

$$a'_{l_1,0}=\frac{1}{2}l_1\beta_{l_1}r_1^{l_1},$$

$$a''_{l_1,0}=\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2} d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\cos l_1t_1dt_2\frac{1}{4\pi^2}\int_{T^2}\left(P_{r_1}(u_1)+P_{r_2}(u_2)\right)\cos l_1u_1du_1du_2=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{T^2} d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\cos\ l_1t_1dt_2\,\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2} P_{r_1}(u_1)\cos l_1u_1du_1du_2+\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2} P_{r_2}(u_2)\cos l_1u_1du_1du_2\right)=$$

$$= \frac{1}{4} l_1 \beta_{l_1} r_1^{l_1} \cdot 2 = \frac{1}{2} l_1 \beta_{l_1} r_1^{l_1}.$$

Отже

$$a_{l_1,0}(R) = \frac{1}{2} l_1 \beta_{l_1} r_1^{l_1} - \frac{1}{2} l_1 \beta_{l_1} r_1^{l_1} = 0 \qquad (2.15)$$

З рівностей (2.12) - (2.15) слідує, що

$$a_{l_1,l_2}(P) = a_{l_1,l_2}(R)$$

Аналогічно можна показати рівність інших коефіцієнтів Фур'є цих функцій. Тому рівність (2.11) має місце майже скрізь, а оскільки функції $P(x_1, x_2)$ і $R(x_1, x_2)$ неперервні, то (2.11) виконується скрізь.

Таким же чином встановлюються наступні рівності:

$$-\frac{1}{\pi^2} \int\limits_{T^2} Q_{r_1}(t_1 - x_1) Q_{r_2}(t_2 - x_2) d_{t_1} \Phi(t_1, t_2) dt_1 =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{T^2} P_{r_1}(t_1 - x_1) P_{r_2}(t_2 - x_2) d_{t_2} \Phi(t_1, t_2) dt_1$$

$$- \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{T^2} \frac{1}{2} \Big(P_{r_1}(t_1 - x_1) + P_{r_2}(t_2 - x_2) \Big) d_{t_2} \Phi(t_1, t_2) dt_1,$$

$$-\frac{1}{\pi^2} \int\limits_{T^2} Q_{r_1}(t_1 - x_1)\, Q_{r_2}(t_2 - x_2) d_{t_1} \overline{\Phi}(t_1, t_2) dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{T^2} P_{r_1}(t_1 - x_1)\, P_{r_2}(t_2 - x_2) d_{t_1} \overline{\Phi}(t_1, t_2) dt_2$$

$$- \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{T^2} \frac{1}{2} \Big(P_{r_1}(t_1 - x_1) + P_{r_2}(t_2 - x_2) \Big) d_{t_1} \overline{\Phi}(t_1, t_2) dt_2,$$

$$-\frac{1}{\pi^2} \int\limits_{T^2} Q_{r_1}(t_1 - x_1) Q_{r_2}(t_2 - x_2) d_{t_2} \overline{\Phi}(t_1, t_2) dt_1 =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{T^2} P_{r_1}(t_1 - x_1)\, P_{r_2}(t_2 - x_2) d_{t_2} \overline{\Phi}(t_1, t_2) dt_1$$

$$- \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{T^2} \frac{1}{2} \Big(P_{r_1}(t_1 - x_1) + P_{r_2}(t_2 - x_2) \Big) d_{t_2} \overline{\Phi}(t_1, t_2) dt_1.$$

Тоді

$$\varphi_1(r,x) = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{T^2}\frac{1}{2}\Big(P_{r_1}(t_1-x_1)+P_{r_2}(t_2-x_2)\Big)\,d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)dt_2 +$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{T^2}P_{r_1}(t_1-x_1)P_{r_2}(t_2-x_2)\,d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)dt_2 +$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{T^2}P_{r_1}(t_1-x_1)P_{r_2}(t_2-x_2)\,d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)dt_2 -$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{T^2}\frac{1}{2}\Big(P_{r_1}(t_1-x_1)+P_{r_2}(t_2-x_2)\Big)\,d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)dt_2$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{T^2}\frac{3}{4}d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)dt_2$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2}P_{r_1}(t_1-x_1)P_{r_2}(t_2-x_2)\,d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)dt_2 +$$

$$+\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{T^2}\frac{1}{2}\Big(P_{r_1}(t_1-x_1)+P_{r_2}(t_2-x_2)\Big)\,d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)dt_2 - \frac{3}{8\pi^2}\int\limits_{T^2}d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)dt_2.$$

Аналогічно знаходимо

$$\varphi_2(r,x) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2}P_{r_1}(t_1-x_1)P_{r_2}(t_2-x_2)\,d_{t_2}\Phi(t_1,t_2)dt_1 +$$

$$+\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{T^2}\Big(P_{r_1}(t_1-x_1)+P_{r_2}(t_2-x_2)\Big)\,d_{t_2}\Phi(t_1,t_2)dt_1 - \frac{3}{8\pi^2}\int\limits_{T^2}d_{t_2}\Phi(t_1,t_2)dt_1,$$

$$\overline{\varphi_1}(r,x) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2}P_{r_1}(t_1-x_1)P_{r_2}(t_2-x_2)\,d_{t_1}\overline{\Phi}(t_1,t_2)dt_2 +$$

$$+\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{T^2}\Big(P_{r_1}(t_1-x_1)+P_{r_2}(t_2-x_2)\Big)\,d_{t_1}\overline{\Phi}(t_1,t_2)dt_2 - \frac{3}{8\pi^2}\int\limits_{T^2}d_{t_1}\overline{\Phi}(t_1,t_2)dt_2,$$

$$\overline{\varphi_2}(r,x) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2}P_{r_1}(t_1-x_1)P_{r_2}(t_2-x_2)\,d_{t_2}\overline{\Phi}(t_1,t_2)dt_1 +$$

$$+\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{T^2}\Big(P_{r_1}(t_1-x_1)+P_{r_2}(t_2-x_2)\Big)\,d_{t_2}\overline{\Phi}(t_1,t_2)dt_1-\frac{3}{8\pi^2}\int\limits_{T^2}d_{t_2}\overline{\Phi}(t_1,t_2)dt_1.$$

Оцінимо модулі знайдених величин

$$|\varphi_1(r,x)|\le\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2}P_{r_1}(t_1-x_1)P_{r_2}(t_2-x_2)\left|d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_2+$$

$$+\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{T^2}P_{r_1}(t_1-x_1)\left|d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_2+\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{T^2}P_{r_2}(t_2-x_2)\left|d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_2+$$

$$+\frac{3}{8\pi^2}\int\limits_{T^2}\left|d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_2.$$

Проінтегруємо цю нерівність по x_1, x_2, одержимо

$$\int\limits_{T^2}|\varphi_1(r,x)|dx_1dx_2\le\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2}\left|d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_2\int\limits_{T^2}P_{r_1}(t_1-x_1)P_{r_2}(t_2-x_2)dx_1dx_2+$$

$$+\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{T^2}\left|d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_2\int\limits_{T^2}P_{r_1}(t_1-x_1)dx_1dx_2+$$

$$+\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{T^2}\left|d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_2\int\limits_{T^2}P_{r_2}(t_2-x_2)dx_1dx_2+$$

$$+\frac{3}{8\pi^2}\int\limits_{T^2}\left|d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_2\int\limits_{T^2}dx_1dx_2=$$

$$=\int\limits_{T^2}\left|d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_2+\frac{1}{4}\int\limits_{T^2}\left|d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_2+\frac{1}{4}\int\limits_{T^2}\left|d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_2+$$

$$+\frac{3}{2}\int\limits_{T^2}\left|d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_2=3\int\limits_{T^2}\left|d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_2=c\int\limits_{T^2}\left|d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_2.$$

Аналогічно з попередніми міркуваннями, одержимо

$$\int\limits_{T^2}|\varphi_2(r,x)|\,dx_1dx_2\le c\int\limits_{T^2}\left|d_{t_2}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_1,$$

$$\int\limits_{T^2}|\overline{\varphi_1}(r,x)|\,dx_1dx_2\le c\int\limits_{T^2}\left|d_{t_1}\overline{\Phi}(t_1,t_2)\right|dt_1,$$

$$\int_{T^2} |\overline{\varphi_2}(r,x)|\,dx_1dx_2 \le c \int_{T^2} \left|d_{t_2}\overline{\Phi}(t_1,t_2)\right|dt_1.$$

Отже,

$$\int_{T^2} \left(|\varphi_1(r,x)| + |\varphi_2(r,x)| + \overline{|\varphi_1(r,x)|} + \overline{|\varphi_2(r,x)|}\right)dx_1dx_2 \le$$

$$\le c\left(\int_{T^2}\left|d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_2 + \int_{T^2}\left|d_{t_2}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_1 + \int_{T^2}\left|d_{t_1}\overline{\Phi}(t_1,t_2)\right|dt_2\right.$$

$$\left. + \int_{T^2}\left|d_{t_2}\overline{\Phi}(t_1,t_2)\right|dt_1\right) = c\left(V(\Phi) + V(\overline{\Phi})\right),$$

де $V(\Phi), V(\overline{\Phi})$ - варіації функцій $\Phi, \overline{\Phi}$ в розумінні Тонеллі.

З іншої сторони

$$f'_{z_1}(z_1,z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l_1+l_2=k} l_1 z_1^{l_1-1} z_2^{l_2},$$

$$f'_{z_2}(z_1,z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l_1+l_2=k} l_2 z_1^{l_1} z_2^{l_2-1}.$$

Тоді при $z_1 = r_1e^{ix_1}$,$z_2 = r_1e^{ix_2}, z = (z_1, z_2)$ будемо мати

$$G(z_1,z_2) = z_1 f'_{z_1}(z_1,z_2) + z_1 f'_{z_1}(z_1,z_2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l_1+l_2=k} l_1 z_1^{l_1} z_2^{l_2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l_1+l_2=k} l_2 z_1^{l_1} z_2^{l_2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k \sum_{l_1+l_2=k} l_1 z_1^{l_1} z_2^{l_2} \cos(l_1x_1 + l_2x_2) + \beta_k \sum_{l_1+l_2=k} l_1 z_1^{l_1} z_2^{l_2} \sin(l_1x_1 + l_2x_2)\right)$$

$$+$$

$$+i\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k \sum_{l_1+l_2=k} l_1 z_1^{l_1} z_2^{l_2} \sin(l_1x_1 + l_2x_2) - \beta_k \sum_{l_1+l_2=k} l_1 z_1^{l_1} z_2^{l_2} \cos(l_1x_1 + l_2x_2)\right)$$

$$+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\sum_{l_1+l_2=k}l_2z_1^{l_1}z_2^{l_2}\cos(l_1x_1+l_2x_2)+\beta_k\sum_{l_1+l_2=k}l_2z_1^{l_1}z_2^{l_2}\sin(l_1x_1+l_2x_2)\right)$$
$$+$$
$$+i\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\sum_{l_1+l_2=k}l_2z_1^{l_1}z_2^{l_2}\sin(l_1x_1+l_2x_2)-\beta_k\sum_{l_1+l_2=k}l_2z_1^{l_1}z_2^{l_2}\cos(l_1x_1+l_2x_2)\right)$$
$$=$$
$$=\left(\overline{\varphi_1}(r,x)+\overline{\varphi_2}(r,x)\right)-i\left(\varphi_1(r,x)+\varphi_2(r,x)\right).$$

Дійсна і уявна частини $G\left(re^{ix}\right)$ відповідно рівні $\overline{\varphi_1}(r,x)+\overline{\varphi_2}(r,x)$ і $\varphi_1(r,x)+\varphi_2(r,x)$, а тому

$$\int_{T^2}\left|G\left(re^{ix}\right)\right|dx_1dx_2\le$$
$$\le\int_{T^2}\left(|\overline{\varphi_1}(r,x)|+|\overline{\varphi_2}(r,x)|+|\varphi_1(r,x)|+|\varphi_2(r,x)|\right)dx_1dx_2\le$$
$$\le c\left(V(\Phi)+V(\overline{\Phi})\right).$$

Тобто інтеграл залишається обмеженим при $r_1\to 1, r_2\to 1$. Це означає що функція

$$G(z_1,z_2)\in H^1(U^2).$$

Лема 2.1 доведена.

Доведення теореми. Покажемо, що для функції

$$f(z_1,z_2)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kF_k(z_1,z_2)\in H^1(U^2)\,,$$

де

$$F_k(z_1,z_2)=\sum_{l_1+l_2=k}z_1^{l_1}z_2^{l_2},$$

Справедлива нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k|a_k|\ln(k+2)\le c\int_{T^2}\left|f\left(e^{it_1},e^{it_2}\right)\right|dt_1dt_2 \qquad (2.16)$$

де

$$c_k = \frac{\sum_{i=0}^{k} |a_i|^2}{\left(\sum_{i=0}^{k} |a_i|\right)^2}, \left(\frac{0}{0} := 0\right).$$

Теорема 2.1. стверджує що, якщо

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in H^1(U),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k |a_k| \le 66 \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt,$$

де

$$c_k = \frac{\sum_{i=0}^{k} |a_i|^2}{\left(\sum_{i=0}^{k} |a_i|\right)^2}$$

Застосуємо цю нерівність до функці (2.1)

$$f_w(\lambda) = f(\lambda w_1, \lambda w_2) = f\left(\lambda e^{i\theta_1}, \lambda e^{i\theta_2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k \left(\lambda e^{i\theta_1}, \lambda e^{i\theta_2}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{l_1+l_2} e^{i\theta_1 l_1} e^{i\theta_2 l_2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k (w) \lambda^k,$$

де $w \in Q^2, \lambda \in U$

Будемо мати

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k |a_k| |F_k(w)| \le 66 \int_0^{2\pi} |f_w(e^{it})| dt =$$

$$= 66 \int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{it}\omega_1, e^{it}\omega_2\right)\right| dt = 66 \int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{i(t+\theta_1)}, e^{i(t+\theta_2)}\right)\right| dt.$$

Проінтегруємо цю нерівність по θ_1, θ_2, одержимо

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} c_k |a_k| |F_k(w)| d\theta_1 d\theta_2 \le 66 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{i(t+\theta_1)}, e^{i(t+\theta_2)}\right)\right| d\theta_1 d\theta_2 \right) dt;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k |a_k| \left\| F_k(w) \right\|_1 \leq \frac{33}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}\right) \right| d\theta_1 d\theta_2,$$

$$\left\| F_k(w) \right\|_1 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| F_k\left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}\right) \right| d\theta_1 d\theta_2, F_k(w) = \sum_{l_1+l_2=k} e^{il_1\theta_1} e^{il_2\theta_2}.$$

Перетворимо вираз $F_k(w)$:

$$F_k(w) = \sum_{l_1+l_2=k} e^{il_1\theta_1} e^{il_2\theta_2} = \frac{e^{ik\theta_2} - e^{ik\theta_1} e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2}}{1 - e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2}} = \frac{e^{i\theta_2(k+1)} - e^{i\theta_1(k+1)}}{e^{i\theta_2} - e^{i\theta_1}} =$$

$$= \frac{(\cos(k+1)\theta_2 - \cos(k+1)\theta_1) + i(\sin(k+1)\theta_2 - \sin(k+1)\theta_1)}{(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) + i(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)} =$$

$$= \frac{\sin\frac{k+1}{2}(\theta_1 - \theta_2)}{\sin\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)} \cdot \frac{\cos\frac{k+1}{2}(\theta_1 + \theta_2) + i\sin\frac{k+1}{2}(\theta_1 + \theta_2)}{\cos\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) + i\sin\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)} =$$

$$= \frac{\sin\frac{k+1}{2}(\theta_1 - \theta_2)}{\sin\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)} e^{i\frac{k}{2}(\theta_1+\theta_2)}.$$

Оскільки $F_k\left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}\right)$ 2π - періодична функція по кожній змінній θ_1 і θ_2, то

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| F_k\left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}\right) \right| d\theta_1 d\theta_2 = \iint_D \left| F_k\left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}\right) \right| d\theta_1 d\theta_2,$$

де D обмежена прямими

$$\theta_1 + \theta_2 = -\pi, \theta_1 + \theta_2 = 3\pi, \theta_1 - \theta_2 = -\pi, \theta_1 - \theta_2 = \pi.$$

Таким чином

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| F_k\left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}\right) \right| d\theta_1 d\theta_2 = \iint_D \left| \frac{\sin\frac{k+1}{2}(\theta_1 - \theta_2)}{\sin\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)} e^{i\frac{k}{2}(\theta_1+\theta_2)} \right| d\theta_1 d\theta_2 =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{3\pi} \left| \frac{\sin\frac{k+1}{2}u}{\sin\frac{1}{2}u} e^{i\frac{k}{2}v} \right| du dv = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin\frac{k+1}{2}u}{\sin\frac{1}{2}u} \right| du =$$

$$= 8\pi \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin \frac{k+1}{2} u}{u} \right| du + 4\pi \int_0^{\pi} \left| \sin \frac{k+1}{2} u \right| \left(\left| \frac{1}{\sin \frac{u}{2}} \right| - \left| \frac{2}{u} \right| \right) du =$$

$$= 8\pi \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin \frac{k+1}{2} u}{u} \right| du + O\left(\int_0^{\pi} \left| \sin \frac{k+1}{2} u \right| \left| \frac{1}{\sin \frac{u}{2}} - \frac{2}{u} \right| du \right).$$

Оцінимо інтеграл

$$\int_0^{\pi} \left| \sin \frac{k+1}{2} u \right| \left| \frac{1}{\sin \frac{u}{2}} - \frac{2}{u} \right| du =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{л+1}} \left| \sin \frac{k+1}{2} u \right| \left| \frac{1}{\sin \frac{u}{2}} - \frac{2}{u} \right| du + \int_{\frac{\pi}{л+1}}^{\pi} \left| \sin \frac{k+1}{2} u \right| \left| \frac{1}{\sin \frac{u}{2}} - \frac{2}{u} \right| du = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{k+2}} \left| \sin \frac{k+1}{2} u \right| \left| \frac{1}{\sin \frac{u}{2}} - \frac{2}{u} \right| du \le$$

$$\le \int_0^{\frac{\pi}{k+1}} \sin \frac{k+1}{2} u \frac{1}{\sin \frac{u}{2}} du + \int_0^{\frac{\pi}{k+1}} \sin \frac{k+1}{2} u \frac{2}{u} du \le$$

$$\le \int_0^{\frac{\pi}{k+1}} \frac{k+1}{2} u \frac{\pi}{u} du + \int_0^{\frac{\pi}{k+1}} \sin \frac{k+1}{2} u \frac{2}{u} du = \frac{\pi^2}{2} + \pi = C_1.$$

Отже, $I_1 \le C_1$.

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{k+1}}^{\pi} \left| \sin \frac{k+1}{2} u \right| \left| \frac{1}{\sin \frac{u}{2}} - \frac{2}{u} \right| du \le \int_{\frac{\pi}{k+1}}^{\pi} \frac{u - 2\sin \frac{u}{2}}{u \sin \frac{u}{2}} du \le$$

$$\le \int_{\frac{\pi}{k+1}}^{\pi} \frac{u - 2\frac{u}{2} + 2\frac{u^3}{8 \cdot 3!}}{u \frac{u}{\pi}} du = \frac{\pi}{24} \int_{\frac{\pi}{k+1}}^{\pi} u du \le \frac{\pi^3}{96} = C_2.$$

Отже $I_2 \le C_2$.

Тому

$$\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{k+1}{2}u\right|\left|\frac{1}{\sin\frac{u}{2}}-\frac{2}{u}\right|du \le C_1+C_2=\mathrm{C}.$$

Тобто

$$\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{k+1}{2}u\right|\left|\frac{1}{\sin\frac{u}{2}}-\frac{2}{u}\right|du = O(1).$$

Таким чином

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|F_k\left(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2}\right)\right|d\theta_1 d\theta_2 = 8\pi\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{k+1}{2}u}{u}\right| + O(1) =$$

$$= 8\pi\int_0^{\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx + 8\pi\sum_{l=1}^{k}\int_{l\pi}^{(l+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx - 8\pi\int_{\frac{k+1}{2}\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx + O(1) =$$

$$= 8\pi\sum_{l=1}^{k}\int_{l\pi}^{(l+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx + O(1) \ge 8\pi\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{(l+1)\pi}\int_{l\pi}^{(l+1)\pi}|\sin x|dx + O(1) =$$

$$= 16\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l+1} + O(1) = 16\ln(k+2) + O(1).$$

Звідси будемо мати

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k|a_k|\ln(k+2) \le C\int_{T^2}\left|f\left(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2}\right)\right|d\theta_1 d\theta_2,$$

де

$$\mathrm{c}_k = \frac{\sum_{i=0}^{k}|a_i|^2}{\left(\sum_{i=0}^{k}|a_i|\right)^2},$$

тобто справедлива рівність (2.16).

В ролі $f(z_1,z_2)$ можна взяти функцію $G(z), z=(z_1,z_2)\in U^2$. Згідно леми 2.1, $G(z)\in H^1(U^2)$. Оскільки

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l_1+l_2=k}(l_1+l_2)z_1^{l_1}z_2^{l_2} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \sum_{l_1+l_2=k} z_1^{l_1}z_2^{l_2},$$

то з (2.16) слідує наступна рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k k|a_k| \ln(k+2) \le C \int_{T^2} \left|G\left(e^{it_1}, e^{it_2}\right)\right| dt_1 dt_2 \le C\left(V(\Phi) + V(\overline{\Phi})\right) < +\infty.$$

Теорема 2.1 доведена.

НАСЛІДОК 2.1. Якщо степеневий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l_1+l_2=k} z_1^{l_1} z_2^{l_2}$$

має обмежену варіацію в розумінні Тонеллі, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \ln(k+2) < +\infty\,.$$

Доведення. За нерівністю Коші – Буняковського:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2\,,$$

будемо мати

$$\left(\sum_{i=0}^{k} |a_i|\right)^2 \le \sum_{i=0}^{k} |a_i|^2 \cdot k\,.$$

Звідси

$$\frac{1}{k} \le \frac{\sum_{i=0}^{k} |a_i|^2}{\left(\sum_{i=0}^{k} |a_i|\right)^2} = c_k\,.$$

Тому за теоремою 2.1 одержимо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k k|}{k} \ln(k+2) \le \sum_{k=1}^{\infty} c_k |k a_k| \ln(k+2) < +\infty\,,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \ln(k+2) < +\infty\,.$$

Наслідок 2.1 доведений.

ВИСНОВКИ

У магістерській роботі було проведено комплексне дослідження абсолютної збіжності подвійних степеневих рядів з обмеженою варіацією. Важливим аспектом дослідження стало визначення умов для абсолютної збіжності таких рядів, а також вивчення їхніх властивостей у контексті теорії функцій багатьох змінних.

Було розглянуто поняття функцій обмеженої варіації та доведено кілька основних властивостей таких функцій. Це дозволило визначити ключові критерії збіжності для подвійних степеневих рядів, які враховують обмеження варіації. У роботі було також введено відповідні теоретичні поняття , що стосуються варіації функцій двох змінних, і доведені важливі теореми, що сприяють глибшому розумінню поведінки таких рядів.

Завдяки дослідженню абсолютної збіжності рядів з обмеженою варіацією були визначені критерії та умови, за яких подвійні степеневі ряди з такою варіацією є абсолютно збіжними. Важливість роботи полягає також у теоретичних результатах, які можуть бути використані для подальших досліджень у галузі математичного аналізу, теорії функцій та чисельних методів.

Отже, основною метою дослідження було не лише вивчення теоретичних аспектів збіжності подвійних степеневих рядів, але й формулювання нових підходів до їх аналізу, що може бути корисним для розвитку методів математичного моделювання та застосувань у науці й техніці.

Робота дозволила зробити певний внесок у теорію подвійних степеневих рядів та їх застосування, зокрема в контексті обмеженої варіації, і створити базу для подальших наукових досліджень у цій галузі.

Короткі біографічні відомості про математиків-авторів основних результатів роботи

Лоренцо Тонеллі (Lorenzo Tonelli) — італійський математик, народився 29 червня 1872 року в Італії, помер 18 червня 1947 року. Він є одним із видатних представників математичного аналізу, зокрема в галузі теорії функцій багатьох змінних, теорії рядів та математичного аналізу в цілому.

Тонеллі здобув освіту в Італії, зокрема в університеті Пізи, де вивчав математику та розвивав свої наукові інтереси в галузі аналізу. Він став професором в університетах Італії, де викладав математику та активно займався науковими дослідженнями.

Лоренцо Тонеллі зробив важливий внесок у розвиток теорії рядів, зокрема подвійних степеневих рядів, а також дослідження функцій обмеженої варіації. Його результати стали основою для подальших досліджень у цих областях. Тонеллі розробив критерії для абсолютної збіжності подвійних рядів, що стали важливими для теорії математичного аналізу.

Його роботи з функціями обмеженої варіації допомогли розвинути важливі аспекти функціонального аналізу. Теореми Тонеллі щодо перестановки сум у подвійних рядів стали базовими для подальших досліджень в цій галузі.

Наукова спадщина Лоренцо Тонеллі має великий вплив на розвиток сучасного математичного аналізу. Його дослідження в галузі абсолютної збіжності рядів, варіаційних властивостей функцій та інші наукові досягнення продовжують використовуватися в наукових дослідженнях і мають важливе практичне значення для чисельних методів, фізики та інших наук.

Тонеллі також значно вплинув на розвиток математичної освіти в Італії, де його роботи стали основою для багатьох навчальних курсів з математичного аналізу.

Гвідо Арцель (Guido Arzelà) — італійський математик, відомий своїми важливими внесками в математичний аналіз, зокрема в теорії функцій та теорії інтегралів. Він народився 10 червня 1882 року в італійському місті Ліворно та помер 16 травня 1957 року в Ліворно. Арцель вивчав математику в університеті

Пізи, де здобув вищу освіту. Вже на ранніх етапах своєї кар'єри він зацікавився питаннями функціонального аналізу, теорії інтегралів і вивченням властивостей функцій багатьох змінних. Після завершення навчання він став професором математики і працював у ряді італійських університетів.

Головні наукові інтереси Арцеля стосувалися теорії функцій, зокрема функцій багатьох змінних, а також питанням, пов'язаним з теорією інтегралів та збіжністю різних типів рядів. Його найвідоміший внесок в математичну науку полягає у формулюванні теореми Арцеля, яка стосується умов збіжності послідовностей функцій. Ця теорема стала основою для подальших досліджень у галузі теорії функцій і має велике значення в аналізі. Арцель також працював над розробкою критеріїв для збіжності рядів та інтегралів, а його роботи про функції з обмеженою варіацією значно вплинули на розвиток функціонального аналізу в цілому.

Наукова спадщина Арцелz стала основою для подальших досліджень у галузі математичного аналізу. Його роботи про функції багатьох змінних, критерії збіжності рядів і функцій з обмеженою варіацією мають велике значення для розвитку сучасного аналізу і продовжують використовуватися в чисельних методах, теорії інтегралів та інших галузях. Арцель також залишив глибокий вплив на математичну освіту в Італії, де його теоретичні роботи стали частиною навчальних програм для студентів-математиків.

Вітторіо Віттали (Vittorio Vitali) — італійський математик, який народився 14 липня 1875 року в місті Падова, Італія, і помер 9 жовтня 1945 року. Він був одним із видатних математиків початку XX століття, відомий своїми роботами в галузі математичного аналізу, зокрема теорії інтегралів та теорії функцій.

Основними досягненнями Віттали є його роботи в області теорії інтегралів, функцій і числових рядів.

Віттали працював над загальними теоремами в теорії інтегралів. Його роботи стосуються проблем, пов'язаних із теорією Лебега та визначенням інтегралів для певних класів функцій. Віттали зробив внесок у вивчення обмежених функцій та їх властивостей у контексті математичного аналізу, зокрема у випадках, коли функції задовольняють певні умови неперервності та інтегрованості.

Спадщина Віттаλі полягає в його значному внеску в теорію функцій та інтегралів, зокрема в розвитку загальних теорем, які мають широке застосування в математичному аналізі. Його роботи продовжують використовуватися в теоретичній математиці та функціональному аналізі.

Список використаних джерел

1. Appell, J., Kăszlauskas, A. On the absolute convergence of power series with bounded variation .Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2020. Vol. 487, № 1. –P. 23–35.
2. Апостол Т. М. Математичний аналіз. Том 1 .Пер. з англ. К.: Вища школа, 1977. 416 с.
3. Гембарська С. Б., Задрей П. В. Про абсолютну збіжність степеневих рядів. Укр. матем. Журн. 1999. т.51, №5. С.594-602.
4. SB Gembarskaya. Estimates for the Variation of Functions Defined by Double Trigonometric Cosine Series. Ukrainian Mathematical Journal, 2003. 55 (6), 885–904.
5. Дзядик В. К. Математичний аналіз. Том 1. К. : Вища школа, 1995. 495 с.
6. Колмогоров А. М., Фомін С. Б. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. К: Вища школа, 1974. 456с.
7. PV Zaderei . Integrability conditions for multiple trigonometric series. Ukrainian Mathematical Journal, 1992.
8. Кнопп К. Теорія рядів / Пер. з нім. К.: Наукова думка, 1960. 416 с.
9. Nakamura, T. A generalization of Tonelli's criterion for power series. Mathematical Inequalities and Applications. 2018. Vol. 21, № 2. p. 231–245.
10. Stepanets A.I. Methods of Approximation Theory. VSP: Leiden, Boston, 2005. 919 p.
11. Stepanets A.I. Classification and Approximation of Periodic Functions. DORDRECHT, Kluwer, 1995 (Mathem.and its Applic. Vol.333). 360p.
12. Тонеллі Л. Абсолютна збіжність степеневих рядів із обмеженою варіацією. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1922. Т. 44. с. 134–150.
13. Фату П. (Fatou P.) Series trigonometriques et series du Taylor /Acta Math.-1906.30.p.335-400
14. Харді Г. Х., Літтлвуд Ж. Е. (Hardy G. H., Littlewood J. T.) Some new properties of Fourier constants, MA,97(1926),159-209;JLMS.1931,6.p.3-9

Анотація

Маркевич Б. Я. Абсолютна збіжність подвійних степеневих рядів з обмеженою варіацією. *Магістерська Робота.* Луцьк, 2024. 45 с.

Дана магістерська робота присвячена вивченню абсолютної збіжності подвійних степеневих рядів з обмеженою варіацією. Обмежена варіація є важливим критерієм, що дозволяє досліджувати поведінку рядів у певних межах і з’ясувати їхню стабільність. Крім теоретичних аспектів, особлива увага приділена практичним прикладам, які ілюструють важливість дослідження абсолютної збіжності у різних контекстах.

Магістерська робота містить 45 сторінок, список використаної літератури налічує 14 джерел.

Ключові слова: степеневий ряд, функція однієї змінної, функція двох змінних, варіація функції.

Annotation

Markevych B. Y. The Absolute Convergence of Double Power Series with Bounded Variation. Master's Thesis. Lutsk, 2024. 45 p.

This master's thesis is devoted to the study of the absolute convergence of double power series with bounded variation. Bounded variation is an important criterion that allows for the investigation of the behavior of series within certain limits and clarifies their stability. In addition to the theoretical aspects, special attention is given to practical examples that illustrate the importance of studying absolute convergence in various contexts.

The master's thesis consists of 45 pages, and the list of references includes 14 sources.

Key words: power series, function of one variable, function of two variables, variation of a function.