

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ**

Кафедра теорії функцій та методики навчання математики

Круковець Антоніна

**ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО КОМУНІКАЦІЙНИХ
ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ
ЗАСТОСУВАННЯ»**

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

Освітньо-професійна програма: Середня освіта. Математика

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

ПАДАЛКО НІНА ЙОСИПІВНА

Кандидат педагогічних наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № _____

Засідання кафедри теорій функцій та методики

навчання математики від _____ 20__ р.

Завідувач кафедри

Гембарська С. Б. _____

Луцьк 2024

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ I.....	6
ТЕОРЕТИЧНІ ТА МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ..	6
1.1 Розвиток поняття похідної.....	6
1.2 Методи знаходження розв’язку задач з використанням поняття похідної	11
1.3 Місце поняття похідної в шкільному курсі математики	20
ВИСНОВОК ДО РОЗДІЛУ 1	23
РОЗДІЛ 2.	24
ЗАСТОСУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ДЛЯ ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ ЗДОБУВАЧІВ ОСВІТИ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ» ..	24
2.1. Поняття інформаційно-комунікаційних технологій	24
2.2. Опис та характеристика інтегрованого середовища GEOGEBRA.....	30
2.3. Технологія знаходження розв’язку задач з використанням похідної за підтримки системи комп’ютерної математики.	33
2.4. Методика формування вмінь та навичок у процесі вивчення теми «Похідна та її застосування ».....	40
2.5 Результативність впровадження методики формування вмінь та навичок.....	44
ВИСНОВОК ДО РОЗДІЛУ 2	47
ВИСНОВОК.....	48
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	50
ДОДАТКИ	54

ВСТУП

Великий потік нової інформації, реклами, використання комп'ютерних технологій на телебаченні, поширення ігрових приставок, електронних іграшок та комп'ютерів значно вплинули на сприйняття здобувачами освіти довкілля. Раніше діти могли отримати інформацію з будь-якої теми різними шляхами: підручники, довідники, лекції вчителів та конспекти уроків.

Дуже важливо організувати навчальний процес так, щоб діти були активними, зацікавленими та захопленими на уроках, бачили та цінували результат своєї праці.

Поєднуючи традиційні методи навчання з сучасними інформаційними технологіями, зокрема комп'ютерними, вчителі можуть вирішити це непросте завдання. Адже використання комп'ютерів на уроках робить процес навчання гнучким, суворо диференційованим та індивідуалізованим.

Сучасний комп'ютер, універсальна іграшка, що поєднує в собі функції телевізора, відеомагнітофона, книги і калькулятора, здатна імітувати інші іграшки та різноманітні ігри, водночас є рівноправним партнером для здобувача освіти і може дуже чутливо реагувати на її поведінку і потреби. З іншого боку, цей метод навчання також дуже привабливий для вчителів. Він допомагає їм краще оцінити і зрозуміти здібності та знання дітей, а також заохочує їх до пошуку нових нетрадиційних форм і методів навчання.

Інформаційні технології стали важливим інструментом у всіх сферах життя, включаючи освіту. Використання інформаційно-комунікаційних технологій в освітньому процесі робить навчання в галузі математики більш доступним, інтерактивним та ефективним.

Однією з фундаментальних тем у вивченні математики є тема «Похідна та її застосування». Похідна відіграє важливу роль у розумінні змінних процесів і використовуються в багатьох прикладних галузях, таких як фізика, економіка та інженерія.

Вивчення теми похідна вимагає не тільки знання теоретичних аспектів, а й уміння застосовувати їх на практиці . Тому інформаційні технології можуть значно спростити процес навчання, надаючи здобувачам освіти можливість візуалізувати математичні поняття , моделювати процеси та виконувати чисельні розрахунки за допомогою спеціального програмного забезпечення. Залучення цифрових інструментів до процесу вивчення теми « Похідна та її застосування» робить навчання більш гнучким, індивідуально орієнтованим та адаптованим до потреб і здібностей кожного здобувача освіти.

У цій роботі досліджується використання інформаційних технологій для підвищення ефективності вивчення теми « Похідна та її застосування» .

Метою дослідження є дослідити науково методичні основи використання інформаційно-комунікаційних технологій при вивченні теми «Похідна та її застосування».

Для досягнення поставленої мети слід вирішити наступні завдання:

1. Вивчити науково-методичну літературу з даної тематики.
2. Оцінити переваги та недоліки використання ІКТ в освітньому середовищі.
3. Провести педагогічний експеримент з впровадженням динамічного середовища GEOGEBRA в освітній процес.
4. Зробити аналіз педагогічного експерименту.

Актуальність теми. Один з найпоширеніших методів використання інформаційно-комунікаційних технологій для вивчення теми "Похідна" - це використання відеоуроків. Припустимо, дитина хворіла, а звернутися до репетитора немає змоги, на допомогу прийдуть відеоуроки з YouTube або Khan Academy. «Академія Хана» — це некомерційна освітня організація, створена у 2006 році педагогом Салманом Ханом для забезпечення *«високоякісної освіти для будь-кого і будь-де»*. [1] Організація створює лекції у формі YouTube-відео. Окрім мікролекцій , веб-сторінка

організації має практичні заняття та методичні матеріали для вчителів. Усі ресурси доступні безкоштовно для кожного в усьому світі. Це допомагає учням краще зрозуміти матеріал і підготуватися до виконання практичних завдань. Використання відеоуроків є зручним, тому що учень не «прив'язаний» до місця і часу.

Об'єкт дослідження: вивчення теми «Похідна та її застосування» на предмет ілюстрації методів використання ІКТ при вивченні даної теми.

Предмет дослідження: аналіз конкретних інструментів для вивчення теми «Похідна та її застосування», дослідження можливостей такої програми як GeoGebra.

Практичне значення роботи полягає у тому, що результати дослідження можуть бути використані вчителями математики, студентами у процесі вивчення математики у період педагогічної практики в закладах загальної середньої освіти.

Апробація результатів дослідження: основні результати роботи доповідалися на всеукраїнській інтернет конференції «Професійна компетентність педагога: теорія , методика, практика» (2024 рік) та були опубліковані в її збірнику матеріалів. [20 с. 103-107]

Структура роботи : робота складається з вступу, двох розділів, висновку та списку використаних джерел.

РОЗДІЛ І.

ТЕОРЕТИЧНІ ТА МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ

1.1 Розвиток поняття похідної

Похідна – одне з фундаментальних понять математики.

Ісаак Ньютон(1643-1727рр.) - один з творців диференціального числення. Головна його праця – «математичні начала натуральної філософії».

Ньютон ввів поняття похідної, вивчаючи закони механіки, тим самим розкрив її механічний зміст.

Г.В. Лейбніц(1646-1716рр.) – творець Берлінської академії наук. Основоположник диференціального числення, ввів велику частину символіки математичного аналізу.

Лейбніц дійшов до поняття похідної, вирішуючи завдання на проведення дотичної до довільної лінії, пояснивши цим її геометричний зміст. Справді, для будь якої функції $y = f(x)$ в системі координат, на її області визначення можна побудувати графік. Якщо взяти точку на осі абсцис то, відповідно до цієї точки можна знайти точку на графіку функції. У цій точці може бути побудована дотична, яка утворює з додатним напрямом осі абсцис кут β .

Але це не означає, що раніше питання похідної не вивчалось. Здовго до цього Архімед не тільки вирішив задачу на побудову дотичної до такої складної кривої, як спіраль, застосовуючи при цьому граничні переходи, а й зумів знайти максимум функції.

У XVII столітті на основі вчення Галілея (1564-1642) активно розвивалася кінематична концепція похідної.

Варто зазначити, що ні Ньютон ні Лагранж не дали чіткого визначення похідної. Вперше визначення похідної було сформульовано Коші, і саме це

визначення стало загальноприйнятим і в даний час використовується майже в усіх курсах математичного аналізу.

Термін «похідна» ввів в 1797 році французький математик Жозеф Луї Лагранж, також він ввів сучасні позначення y' та f' . До Лагранжа похідну за пропозицією Лейбніца називали « диференціальним коефіцієнтом».[6]

Геометрична задача, яка приводить до поняття похідної.

Нехай задано криву $y = f(x)$ і в точці $M_0(x_0, y_0)$ проведено дотичну T (не перпендикулярну до осі Ox). Візьмемо на кривій точку $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Пряма M_0M_1 буде січною. Нехай φ – кут, який утворює січна M_0M_1 з додатним напрямком осі Ox , а кут α – кут між дотичною M_0T і також з додатним напрямком осі Ox .

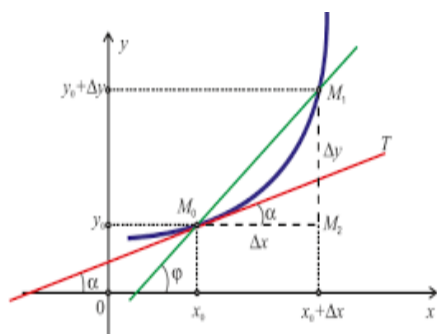


Рис. 1

Розглянемо прямокутний трикутник $M_0 M_1 M_2$ ($\angle M_0 M_1 M_2 = \varphi$) (рис. 1).

$$\text{Тоді } \operatorname{tg} \varphi = \frac{M_1 M_2}{M_2 M_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Нехай $\Delta x \rightarrow 0$. Тоді точка M_1 буде прямувати вздовж кривої до точки M_0 , кут φ – до кута α , а січна $M_0 M_1$ наблизатиметься до дотичної $M_0 T$ (дотичною до кривої в точці M_0 називається граничне положення січної $M_0 M_1$, якщо точка M_1 наближається вздовж кривої до точки M_0), тобто $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

З курсу аналітичної геометрії відомо, що $\operatorname{tg} \alpha = k$ (k – кутовий коефіцієнт прямої). Тоді $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k$

Означення похідної

Нехай задано функцію $y = f(x)$ на деякому проміжку. Візьмемо довільну внутрішню точку x_0 цього проміжку, надамо значенню x_0 довільного приросту Δx (число Δx може бути як додатним, так і від'ємним), але такого, щоб точка $x_0 + \Delta x$ належала даному проміжку.

Тоді:

1) обчислимо в точці x_0 приріст $\Delta y = \Delta f(x_0)$ функції:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

2) складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$;

3) Знайдемо границю цього відношення за умови, що $\Delta x \rightarrow 0$, тобто:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо дана границя існує, то y називають похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 і позначають $f'(x_0)$ або y' .

Похідною функції $y=f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує, тобто:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Похідну позначають ще й так: $y'(x)$, y' , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$. Значення похідної при $x = a$ позначається так: $f'(a)$. Якщо функція має похідну в точці x_0 , то вона диференційовна в цій точці.

Функцію, яка має похідну в кожній точці деякого проміжку, називають диференційовною на цьому проміжку. Операція знаходження похідної функції називається диференціюванням. У шкільному курсі математики похідну знаходять в основному використовуючи таблицю похідних та правила знаходження похідних.

Основні похідні від простих функцій:

$$(c)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(cx)' = c$$

$$|x|' = \frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn} x, x \neq 0$$

$(x^c)' = cx^{c-1}$, де (x^c) та (x^{c-1}) – визначені

$$\left(\frac{1}{x^c}\right)' = \frac{d}{dx}(x^{-c}) = -\frac{c}{x^{c+1}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

Похідні від експоненціальних і логарифмічних функцій

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$$

$$(e^{ax})' = ae^{ax}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, a \neq 1$$

Похідні від тригонометричних функцій

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg})' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg})' = \frac{-1}{1+x^2}$$

1.2 Методи знаходження розв'язку задач з використанням поняття похідної

Геометричний зміст похідної

Згадаємо геометричну задачу, яка приводить до похідної й формулу:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k.$$

Похідна функції має такий геометричний зміст: похідна функції в заданій точці є кутовим коефіцієнтом дотичної до графіка функції в цій точці, тобто дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в заданій точці.

Приклад 1.

Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $f(x) = x^2$ в точці з абсцисою $x_0 = 4$. [3]

Розв'язання:

Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції дорівнює значенню похідної в даній точці, то $k = f'(x_0)$,

$$k = f'(4). \text{ Оскільки } f'(x) = (x^2)' = 2x, \text{ тоді } k = 2 \cdot 4 = 8.$$

Відповідь: $k=8$

Приклад 2.

На графіку функції $f(x) = x^3 - 3x^2$, знайдіть такі точки, в яких дотична, проведена до графіка функції, паралельна осі абсцис.

Розв'язання: Нехай x_0 абсциса шуканої точки. Тоді, виходячи з умови $f(x_0) = 0$ Маємо: $f'(x) = 3x^2 - 6x$;

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0;$$

$$3x(x - 2) = 0;$$

Знаходимо $x_0 = 0$ або $x_0 = -2$.

$$\text{Отже, враховуючи } f(0) = 0 \text{ і } f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = -4,$$

такими є точки $(0; 0)$ та $(2; 4)$.

Відповідь: точки $(0; 0)$ та $(2; 4)$.

Приклад 3.

Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 15x + 1$ в точці $x_0 = 2$.

Розв'язання:

Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції дорівнює значенню похідної в даній точці, то $k = f'(x_0)$, $f'(x) = (x^2 - 15x + 1)' = 2x - 15$, $f'(2) = 2 \cdot 2 - 15 = -11$; $k = -11$.

Відповідь: $k = -11$.

Приклад 4.

Знайти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 + 3x - 8$, яка паралельна прямій $y = 9x - 1$.

Розв'язання:

Оскільки за умовою дотична до $f(x) = x^2 + 3x - 8$, паралельна прямій $y = 9x - 1$, то їх кутові коефіцієнти рівні. Знайдемо їх: $f'(x_0) = 2x_0 + 3 = 9$, тобто $x_0 = 3$.

Рівняння дотичної має вигляд:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Знаходимо: $f(x_0) = f(3) = 9 + 9 - 8 = 10$.

$$f'(x_0) = 9.$$

$$y = 10 + 9 \cdot (x - 3) = 10 + 9x - 27 = 9x - 17.$$

Відповідь: $y = 9x - 17$.

Розглянемо, як обчислюється неявно задана функція за допомогою похідної. Наведемо приклади таких обчислень.

Приклад 5 .

Знайти похідну від неявної функції

$$x^2 - 2axy + y^2 = 0$$

Повторимо правило знаходження похідної від неявної функції: щоб знайти похідну від неявної функції $F(x, y) = 0$ треба диференціювати це рівняння по змінній x , розглядаючи при цьому y як функцію змінної x . Далі з отриманого рівняння потрібно виразити y' .

Функція задана неявно, тому ми прямо диференціюємо це рівняння. Обчислюємо похідну від кожного доданку. $2a$ - це константа, тому її можна винести за дужки. $2x - 2a(x' \cdot y + x \cdot y') + 2y \cdot y' = 0$.

Далі продиференціюємо за формулою $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

$$2x - 2a y - 2ax \cdot y' + 2y \cdot y' = 0.$$

y' - не обчислюється, так і залишається. Далі скорочуємо рівняння на 2, отримуємо

$$x - a y - ax \cdot y' + y \cdot y' = 0$$

Наступним кроком виносимо y' за дужки, а ліву частину переносимо за знак рівності.

$y' (y - ax) = ay - x$ Останнім що ми робимо, це виражаємо y' , отримуємо:

$$y' = \frac{ay - x}{y - ax}$$

$$\text{Отже } (x^2 - 2axy + y^2)' = \frac{ay-x}{y-ax}$$

Приклад 6.

$$\arctg \frac{x}{y} - xy = 0$$

Починаємо диференціювання неявної функції.

$$(\arctg)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{x'y - xy'}{y^2} - (x' \cdot y + x \cdot y') = 0$$

$\frac{x}{y}$ диференціювали за формулою $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

xy - за формулою $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

$$\frac{1}{\frac{y^2 + x^2}{y^2}} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} - (y + x \cdot y') = 0$$

Скоротимо y^2 , та виконаємо дії, отримаємо:

$$\frac{y - xy'}{x^2 + y^2} - (y + x \cdot y') = 0$$

Далі треба виразити y' , помножимо обидві частини рівняння на $x^2 + y^2$, після чого одержимо:

$$y - x \cdot y' - (x^2 + y^2) - x \cdot y'(x^2 + y^2) = 0$$

Далі згрупуємо доданки з y' та перенесемо все інше за знак рівності, отримаємо рівняння:

$$y'(x + x(x^2 + y^2)) = y - y(x^2 + y^2)$$

$$y' = \frac{y - y(x^2 + y^2)}{x + x(x^2 + y^2)}$$

Отже:

$$\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} - xy \right)' = \frac{y - y(x^2 + y^2)}{x + x(x^2 + y^2)}$$

Приклад 7.

$$x + y - e^{x-y} = 0$$

Продиференціюємо рівняння по змінній x :

$$1 + y' - e^{x-y} (x - y)' = 0$$

Враховуючи, що y це функція $f(x)$ то похідна від y буде дорівнювати y'

$$e^{x-y} - \text{знаходимо як похідну складної функції } (e^u)' = e^u \cdot u'$$

Далі зручно замінити e^{x-y} на $x + y$, як ми це зробимо. З нашого основного рівняння $x + y - e^{x-y} = 0$ перенесемо $-e^{x-y}$ за знак рівності, отримаємо:

$$x + y = e^{x-y}$$

Зробимо заміну та продовжимо диференціювання.

$$1 + y' - (x + y)(1 - y') = 0$$

Розкриємо дужки:

$$1 + y' - (x - xy' + y - yy') = 0$$

$$1 + y' - x + xy' - y + yy' = 0$$

Згрупуємо доданки з y' та винесемо y' за дужки, все інше перенесемо за знак рівності, одержимо рівняння:

$$y'(x + y - 1) = x + y - 1$$

Виразимо y' :

$$y' = \frac{x+y-1}{x+y+1}$$

Отже: $(x + y - e^{x-y})' = \frac{x+y-1}{x+y+1}$

Приклад 8.

$$x^2 + xy + y^2 = 6$$

Продиференціюємо обидві частини рівняння:

$$(x^2 + xy + y^2)' = (6)'$$

$$2x + 1 \cdot y + x \cdot y' + 2y \cdot y' = 0$$

Згрупуємо доданки з y' :

$$x \cdot y' + 2y \cdot y' = -2x - y$$

Винесемо y' за дужки, все інше перенесемо за знак рівності, одержимо рівняння: $y'(x + 2y) = -2x - y$

Останнім кроком виражаємо y' :

$$y' = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$

Отже

$$(x^2 + xy + y^2 = 6)' = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$

Приклад 9.

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

Продиференціюємо обидві частини рівняння по x , враховуючи, що y є функцією від x . Одержимо

$$3x^2 + 3y^2y' - 3a(y + xy') = 0$$

Для знаходження y' виконаємо такі перетворення:

$$x^2 + y^2y' - a(y + xy') = 0$$

$$x^2 + y^2y' - ay - axy' = 0$$

$$(y^2 - ax)y' = ay - x^2$$

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

$$\text{Отже } (x^3 + y^3 - 3axy)' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

Приклад 10.

$$x^4 + y^4 = x^2y^2$$

Продиференціюємо обидві частини рівняння по x , враховуючи, що y є функцією від x . Одержимо

$$4x^3 + 4y^3y' = 2xy^2 + x^2 \cdot 2yy';$$

Для знаходження y' виконаємо такі перетворення:

$$2x^3 + 2y^3y' = xy^2 + x^2 \cdot yy';$$

$$(2y^3 - x^2y)y' = xy^2 - 2x^3;$$

$$y' = \frac{xy^2 - 2x^3}{2y^3 - x^2y}$$

Отже

$$(x^4 + y^4 = x^2y^2)' = \frac{xy^2 - 2x^3}{2y^3 - x^2y}$$

Приклад 11.

Знайти y' в точці $M(1;1)$ якщо $2y = 1 - xy^3$

За правилом диференціювання неявно заданої функції маємо

$$2y' = y^3 + 3xy^3y'$$

При $x = 1$ і $y = 1$ одержимо

$$2y' = 1 + 3y'$$

Звідси $y'(1; 1) = -1$.

Приклад 12.

Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ в точці $M(1;-1)$.

Підставляючи значення координат даної точки до рівняння, переконаємося, що точка $M(1; -1)$ належить кривій: $1^2 = 2 \cdot 1 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^4 = 6$

Продиференціюємо рівняння кривої:

$$2x + 2(y^2 + 2xyy') + 12y^3y' = 0$$

$$y' = -\frac{x + y^2}{2xy + 6y^3}$$

Обчислимо значення y' в точці M : $f'(x_0) = y_0' = y'(1; -1)$

$$= \frac{1+(-1)^2}{2 \cdot 1 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1)^3} = \frac{1}{4}$$

Тепер запишемо рівняння дотичної

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1) \text{ або } x - 4y - 5 = 0.$$

Відповідь: $x - 4y - 5 = 0$.

Суть доведення нерівностей за допомогою похідної полягає в тому, що на певному проміжку $x \in [a, b]$ із області визначення функції f та g потрібно довести нерівність $f(x) \geq g(x)$. Введемо в розгляд функцію $u(x) = f(x) - g(x)$. Нехай похідна $u'(x)$ має на відрізку єдиний корінь x_0 , це значення є точкою мінімуму функції u , а також виконується нерівність $u(x_0) = f(x_0) - g(x_0) \geq 0$.

Тоді цього достатньо, щоб стверджувати, що на проміжку $[a, b]$ виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$.

Приклад 13.

Довести нерівність $e^x \geq 1 + \ln(x + 1)$

Доведення. ОДЗ: $x > -1$. Очевидно, що при $x = 0$ ми отримуємо рівність. Розглянемо функцію $f(x) = e^x - 1 - \ln(x + 1)$. Її похідна $f'(x) = e^x - \frac{1}{1+x} = 0$ в точці $x = 0$ і монотонно зростає. Таким чином, для функції $f(x)$ точка $x = 0$ є точкою екстремуму, а саме точкою мінімуму. Тому для всіх x , що належать ОДЗ, виконується нерівність $f(x) \geq f(0) = 0$, що і потрібно було довести. Зауважимо, що розв'язане рівняння $e^x = 1 + \ln(x + 1)$ з єдиним коренем $x = 0$ та нерівність $e^x > 1 + \ln(x + 1)$ з розв'язками $x \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.

Приклад 14.

Довести, що при $x > 0$ виконується нерівність $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Доведення: Розглянемо функцію $y(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$. Знайшовши $y'(x) = e^x - 1 - x$ та $y''(x) = e^x - 1$, друга похідна перетворюється в 0 в точці $x = 0$

і при переході через цю точку змінює знак із «-» на «+». Це означає, що для функції $y'(x)$ точка $x = 0$ є точкою мінімуму і $y'(0) = 0$. Таким чином, $y'(x) \geq 0$ на всій числовій осі. Звідси випливає, що функція $y(x)$ монотонно зростає. Отже при $x > 0$, маємо $y(x) > 0$.

Нерівність доведена.

$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ має розв'язки $x \in (0; +\infty)$;

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ має єдиний корінь $x = 0$;

$e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2}$ має розв'язки $x \in (-\infty; 0)$.

Приклад 15.

Довести, що при $x > -1$ для всіх натуральних n виконується нерівність $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ (нерівність Бернуллі).

Доведення:

При $n = 1$ нерівність вірна. Нехай $n > 1$. Розглянемо $f(x) = (1 + x)^n - 1 - nx$.

Її похідна $f'(x) = n(1 + x)^{n-1} - n$ перетворюється в 0 у єдиній точці $x = 0$, яка є точкою мінімуму. Тому для всіх $x > -1$ виконується нерівність $f(x) \geq f(0)$, тобто $(1 + x)^n - 1 - nx \geq 0$. З одержаного співвідношення випливає нерівність Бернуллі.

Приклад 16.

Довести нерівність $a^2 - b^2 \geq ab$.

Доведення: нехай $b = x$. Розглянемо функцію $f(x) = x^2 - ax + a^2$. Її похідна $f'(x) = 2x - a$ перетворюється в 0 в точці $x = \frac{a}{2}$. Оскільки $f(x) \geq f\left(\frac{a}{2}\right) \geq 0$,

то $x^2 - ax + a^2 \geq 0$, що і потрібно було довести. Рівність виконується тільки тоді, коли $a = b = 0$.

Приклад 17.

Довести, що для всіх дійсних x виконується нерівність $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Доведення:

Розглянемо функцію $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. Похідна $f'(x) = x - \sin x$ приймає значення 0 в єдиній точці $x = 0$. Очевидно, що це значення є точкою мінімуму. Тому для значень $x \neq 0$ буде виконуватися нерівність $f(x) > 0$. Рівність виконується при $x = 0$.

Приклад 18.

Порівняти числа $\sqrt[2023]{2023}$ та $\sqrt[2024]{2024}$

Розв'язання: порівняємо натуральні логарифми цих чисел, тобто числа $\frac{\ln 2023}{2023}$ та $\frac{\ln 2024}{2024}$, що рівносильне поставленій задачі, оскільки функція $\ln x$ монотонно зростає на своїй області визначення. Для цього розглянемо проміжки її монотонності. Очевидно, що $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ перетворюється в нуль в точці $x = e$ – точка максимуму, на проміжку $x \in (e; +\infty)$ функція монотонно спадає.

Оскільки на цьому проміжку належать числа 2023 та 2024, то більшому з них відповідає менше значення функції. Тому $\frac{\ln 2023}{2023} > \frac{\ln 2024}{2024}$.

$$\sqrt[2023]{2023} > \sqrt[2024]{2024}.$$

1.3 Місце поняття похідної в шкільному курсі математики

Важливим завершенням функціональної лінії курсу «Математика» є розгляд понять похідної та інтеграла, які є необхідним інструментом дослідження руху. Основні ідеї математичного аналізу виглядають досить простими і наочними, якщо викладати їх на тому інтуїтивному рівні, на якому вони виникли історично і який цілком задовольняє потреби загальноосвітньої підготовки учнів. Не варто захоплюватися формально - логічною строгістю доведень та відводити багато часу суто технічним питанням і конструкціям. Більше уваги слід приділити змісту ідей і понять, їх геометричному і фізичному тлумаченню. Вивчення інтегрального числення зазвичай починається з розгляду сукупності первісних даної функції, яку доцільно розуміти як сукупність функцій, які задовольняють умову $y' = f(x)$. [13],[14]

При порівнянні викладення теми «Похідна та її застосування» в підручниках «Математика» авторів О.С. Істер[5] та А.Г. Мерзляк[12], можна виділити кілька важливих моментів.

Таблиця 1.

Критерії порівняння	«Математика» О.С. Істер	«Математика» А.Г. Мерзляк
Структура та подача матеріалу	У підручнику більше уваги приділяється теоретичним аспектам теми, детально пояснюється, що таке похідна, її геометричний та фізичний сенс. Ознайомлення з темою починається з поняття границі функції в точці, наведено приклади та	Для підручника характерним є систематичне та логічне викладення матеріалу, починаючи з основних понять і поступово переходячи до складніших тем. Ознайомлення з темою починається з розгляду задач про миттєву

	<p>правила для обчислення границі функції в точці. Спочатку розглядається поняття приросту аргумента та приросту функції, тільки потім ознайомлюють з поняттям похідна функції. Також присутні приклади розв'язування вправ різного рівня складності, При переліку вправ для виконання, поділу на рівні складності як такого немає.</p> <p>Цікавим є те, що в підручнику є такий пункт як «Життєва математика», де присутні вправи, які зустрічаються в реальному житті.</p>	<p>швидкість і дотичну до графіка функції. Похідна подається як похідна від функції, вводяться формули та правила обчислення похідних. При поданні теорії в підручнику, автор наводить приклади розв'язування вправ як легкого рівня складності так і складнішого.</p> <p>Вправи чітко розділені на рівні складності, спочатку вправи легкого рівня плавно переходять до більш складніших. Варто зауважити, що в підручнику також є історичні довідка з даної теми.</p>
<p>Глибина матеріалу</p>	<p>Тут похідна розглядається як математичний інструмент для вирішення реальних задач. Додані розділи про прикладні аспекти</p>	<p>Підручник більше орієнтований на практичні навички обчислення похідних. Розглядаються правила диференціювання,</p>

	похідної (механіка, економіка тощо).	включаючи похідні складених функцій, але акцент робиться на відпрацюванні алгоритмів.
Приклади та задачі	Задачі більш різнопланові і часто супроводжуються теоретичними поясненнями. Важливою частиною є прикладні задачі, які допомагають учням зрозуміти, як похідна використовується у реальному житті.	У цьому підручнику велика кількість вправ, які розподілені за рівнем складності. Учні можуть почати з базових прикладів і поступово підвищувати рівень задач, що дозволяє краще освоїти навички обчислення похідних.

Отже, якщо здобувачу освіти потрібно більше прикладних вправ і відпрацювання навичок, підручник «Математика» автора А.Г. Мерзляк може бути більш відповідним.

Якщо ж є потреба в глибшому розумінні теоретичної частини та прикладних аспектів, то підручник «Математика» автора О.С. Істер краще підійде для таких цілей.

ВИСНОВОК ДО РОЗДІЛУ 1

Тема «Похідна та її застосування» доволі складна для розуміння учнів, саме тому вона повинна мати високий рівень наочності, чого можна досягти за допомогою використання інтерактивних вправ. Треба зазначити, що для розвитку сучасних школярів недостатньо традиційної системи навчання, а є необхідним використання поряд з традиційними - новітніх методів та засобів навчання. Тому впровадження інформаційно-комунікаційних технологій під час навчання учнів старших класів на сьогоднішній день є однією з умов ефективності освітнього процесу.

Завдяки теоретичним і методологічним основам, викладеним у цьому розділі, закладається фундамент для подальшого вивчення складніших аспектів математичного аналізу, таких як інтегральне числення, диференціальні рівняння та прикладний аналіз.

Аналіз викладення теми «Похідна та її застосування» в сучасних підручниках з математики показав, що всі основні поняття сформульовані однаково і досить доступно. Неможливо визначити який з підручників кращий, адже усі вони мають достатню кількість прикладів для розв'язування, закріплення знань та вмінь. Також у всіх підручниках наведені приклади розв'язання типових завдань, що допоможе здобувачам освіти навчитись самостійно розв'язувати завдання.

РОЗДІЛ 2.

ЗАСТОСУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ДЛЯ ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ ЗДОБУВАЧІВ ОСВІТИ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»

2.1. Поняття інформаційно-комунікаційних технологій

Протягом останніх двох десятиліть в українській освітній спільноті відбуваються зміни, пов'язані з розвитком інформаційного суспільства. Інформатизація освіти - це взаємопов'язані організаційні, правові, соціально-економічні, педагогічні та методичні заходи, спрямовані на задоволення інформаційних, обчислювальних і телекомунікаційних потреб учасників навчально-виховного процесу, а також тих, хто управляє і забезпечує цей процес, щодо їхньої компетентності в методах і засобах інформаційно-комунікаційних технологій, що розуміється як упорядкована сукупність науково-технічних, виробничих та управлінських процесів.

Мета інформаційно-комунікаційних технологій полягає в підготовці здобувачів освіти до повноцінної діяльності в умовах інформаційного суспільства.

Оскільки основою технологічного процесу навчання є отримання та перетворення інформації, то будь-яка освітня технологія є інформаційною технологією.

Більш відповідним терміном для позначення комп'ютерної технології навчання є комп'ютерна технологія. Комп'ютерна технологія навчання - це процес підготовки та передачі інформації учням, засобом якого є комп'ютер.

Готуючи урок з використанням ІКТ, вчитель повинен пам'ятати, що при плануванні уроків, виходячи з поставлених цілей і підбираючи навчальні матеріали, вони повинні дотримуватися основних дидактичних принципів,

таких як систематичність, послідовність, доступність, диференційованість і науковість. При цьому комп'ютери непокликані замінити вчителя, а лише доповнити його.

Сучасному вчителю для застосування ІКТ на уроках потрібна, насамперед, теоретична та практична підготовка щодо забезпечення формування інформаційної компетентності здобувачів освіти, які вміють самостійно, активно діяти, приймати рішення, гнучко адаптуватися до викликів суспільства. Значне збільшення інформації призводить до зміни не тільки моделі взаємодії вчителя та здобувача освіти, а й усього процесу отримання знань, відтворення запам'ятовування і зберігання яких повинно спрямовуватись на формування навичок шукати, відбирати, аналізувати, синтезувати, оцінювати необхідну інформацію для навчання.

У загальноосвітніх навчальних закладах оптимальною формою створення інформаційного навчального середовища став процес укомплектування мультимедійних аудиторій, комп'ютерних кабінетів (окремо від кабінету, де проходять уроки інформатики), предметних кабінетів – лабораторій, методичних центрів, які забезпечені відповідними сучасними технічними засобами навчання.

Основні завдання інформаційно-комунікаційних технологій навчання:

- інтенсифікація всіх рівнів навчально-виховного процесу, підвищення його ефективності та якості;
- побудова відкритої системи освіти, яка забезпечує кожній дитині можливість самоосвіти;
- системна інтеграція галузей знань;
- розвиток творчого потенціалу учня, його здібностей до комунікативної діяльності;
- формування інформаційної культури учнів;

- розвиток експериментально-дослідницької діяльності та культури навчальної діяльності .

У спеціальній літературі «інформаційно-комунікаційні технології» тлумачаться як сукупність методів, засобів та прийомів пошуку, зберігання, опрацювання, подання і передавання графічних, текстових, цифрових, аудіо- та відеоданих на базі комп'ютерних мереж і засобів зв'язку.

Узагалі ІКТ можна визначити як сукупність різноманітних технологічних інструментів і ресурсів, які використовуються для забезпечення процесу комунікації та створення, поширення, збереження та управління інформацією.

Науковець Н.Морзе вважає, що до сучасних інформаційно-комунікаційних технологій навчання «відносяться Інтернет-технології, мультимедійні програмні засоби, офісне та спеціалізоване програмне забезпечення, електронні посібники та підручники, системи комп'ютерного супроводу навчання» .

У роботах М.Жалдака, Ю.Жука, В. Лапінського, Ю. Машбиця зазначається, що одним із шляхів активізації пізнавальної діяльності учнів є застосування інформаційних технологій, які зможуть зробити процес здобуття освіти більш гнучким, індивідуалізованим і одночасно нададуть змогу учням використовувати глобальні ресурси для навчання, спілкуватись та обмінюватись досвідом з учнями інших міст, країн тощо .[25]

Проте використання ІТ у навчальному процесі не обмежується лише розв'язанням зазначених педагогічних завдань, а й має значні дидактичні можливості для активізації пізнавальної діяльності учнів на уроках.

Можемо виділити такі переваги застосування в навчальному процесі інформаційних технологій:

- розвиток мотивації, посилення інтересу до навчання, у тому числі до способів одержання знань;
- індивідуалізація та диференціація навчання;

- розвиток самостійності;
- підвищення наочності навчання;
- збільшення арсеналу засобів пізнавальної діяльності, опанування сучасних методів наукового пізнання, пов'язаних із застосуванням комп'ютерів;
- спрощення та збільшення швидкості доступу до навчальної та наукової інформації через мережу Internet .[20]

Разом з перевагами існують й недоліки використання ІКТ:

- Кожному школяреві необхідний доступ до комп'ютера.
- Потрібне спеціальне обладнання для роботи програм.
- Розробка може вимагати значних фінансових затрат та затрат часу.
- Internet надає величезну кількість інформації, яка може збивати учнів.
- Системи мультимедіа представляють насичене інформацією середовище і для того, щоб експлуатувати їх у повному обсязі, потрібний добір значної кількості матеріалів.
- Доступ із робочого столу до технічного забезпечення може бути проблематичним, зокрема, в корпоративних мережах.
- Невисока якість зв'язку.
- Для деякого з учнів важко сприймати інформацію з екрана.
- Практично відсутні мультимедійні програми українською мовою.
- Не розроблена методика використання ІКТ в освіті .

Математика, як шкільний предмет, має великі можливості у використанні інформаційних технологій, оскільки дає багатий матеріал для формулювання різноманітних методів і прийомів обробки інформації. Навчання математики пов'язане з використанням великого обсягу різноманітної інформації, тому використання комп'ютерної техніки є особливо ефективним, оскільки вона дозволяє ефективно обробляти цю інформацію та складати таблиці, схеми, діаграми для визначення залежностей між різними об'єктами та явищами.

Застосування комп'ютерних технологій на уроці робить клас неповторним, яскравим і насиченим, а зміст насиченим знаннями з інших ракурсів, перетворюючи математику з об'єкта навчання на засіб отримання нових знань. Ефективність використання нових інформаційних технологій на уроках математики залежить від таких факторів:

- Подання інформації в різних формах;
- Висока видимість;
- можливість комп'ютерного моделювання різноманітних об'єктів і процесів;
- Позбутися обмежень щоденної роботи, які можуть відволікати від вивчення основного змісту;
- Можливість організації колективної та індивідуальної дослідницької роботи;
- вміння диференціювати роботу учнів на основі підготовки, пізнавальних інтересів, використання сучасних інформаційних технологій;
- вміє організувати контроль роботи комп'ютера та отримувати допомогу від викладачів.

Проте вчителям математики не варто забувати, що проектування заняття з використанням інформаційних технологій потребує детальної підготовки кожного його елемента за певними алгоритмами:

- 1) Поставити завдання щодо використання ІКТ у навчальній програмі.
- 2) Проаналізувати зміст курсу та зрозуміти можливість і зручність використання інформаційних технологій для оптимізації навчальної діяльності.
- 3) Побудувати завдання.
- 4) Прогнозувати результати діяльності, організованої з використанням інформаційно-комунікаційних технологій.
- 5) Ідентифікувати інформацію для забезпечення вирішення освітніх завдань засобами інформаційно-комунікаційних технологій.
- 6) Сформулюйте основні вимоги до інформатизації освіти.

7) Визначити джерела важливої інформації.

8) Вибір засобів інформаційних технологій, відповідних поставленому завданню.

9) Співвідношення функціональних можливостей засобів інформаційних технологій з метою діяльності та віковими особливостями учнів.

2.2. Опис та характеристика інтегрованого середовища GEOGEBRA

Освіта - це система, що безперервно само розвивається, це капітал, заради досягнення практичних результатів. Сучасні методичні системи навчання математики мають реалізовувати ідеї комп'ютерної підтримки. Навчальні програми з математики вже багато років містять перелік тем, під час вивчення яких доцільно використовувати комп'ютери. Проте більшість учителів математики як і раніше обмежуються презентаціями, а найпростіші приклади які наводяться в численних публікаціях, не переконують у доцільності застосування комп'ютера.

Система комп'ютерної математики – інтегроване середовище GeoGebra, ідейною основою створення якого було візуалізувати зв'язки геометрії та алгебри(*geometry + algebra*).

GeoGebra — це динамічне математичне програмне забезпечення для всіх рівнів освіти, яке об'єднує геометрію, алгебру, електронні таблиці, графіки, статистику та обчислення в одне ціле. Крім того, GeoGebra пропонує онлайн-платформу з понад 1 мільйоном безкоштовних ресурсів, створених багатомовною спільнотою. Цими ресурсами можна легко поділитися через платформу для співпраці GeoGebra Клас, де прогрес здобувачів освіти можна відстежувати в реальному часі.

Функціональні можливості програми та потужна веб-підтримка користувачів GeoGebra надають можливість ефективно її використовувати при вивченні переважної більшості тем шкільного курсу математики. Важливим є те, що програма має широкий набір інструментів для створення динамічних комп'ютерних моделей математичних об'єктів, що надає можливість використовувати її не тільки для розв'язування математичних задач, а і для організації евристичного навчання, формування вмінь та навичок дослідницької діяльності, розвитку творчих здібностей учнів, створення динамічних наочних посібників тощо.

GeoGebra — вільно-поширюване (GPL) динамічне геометричне середовище, яке дає можливість створювати «живі креслення» для використання в геометрії, алгебрі, планіметрії, зокрема, для побудов за допомогою циркуля і лінійки.

Крім того, програма володіє багатьма можливостями для роботи з функціями (побудова графіків, обчислення коренів, екстремумів, інтегралів тощо) за рахунок команд вбудованої мови (яка, до речі, дає змогу керувати і геометричними побудовами).

Програма написана Маркусом Хохенвартером мовою Java (відповідно працює повільно, але у великій кількості операційних систем). Перекладена на 39 мов. [23]

Творці розробили серію покрокових посібників для користувачів. Їхня мета — не лише навчити читачів користуватися програмним забезпеченням, а й запропонувати, як можна використовувати освітнє середовище під час навчання математики. Більшість підручників містять посилання на статті, які містять пояснення та доведення математичного змісту, розглянутого в підручнику. Хоча рекомендовано читати цю серію підручників у хронологічному порядку, але здобувач освіти може вибрати будь-який підручник, оскільки кожен підручник створено незалежно від іншого. Читачі можуть починати з будь-якого підручника і читати крок за кроком, навіть не вивчаючи попередній підручник.

Методичні особливості програми GeoGebra такі, що програмне забезпечення можна використовувати в школах і вдома, в різних форматах курсів і на різному комп'ютерному обладнанні в аудиторії. Це забезпечує можливість більш швидкого і ефективного засвоєння математичних знань і навичок, покращити запам'ятовування матеріалу завдяки впровадженню в навчальний процес експериментальних та дослідницьких елементів. Розвивати мотивацію учнів та організувати проектну роботу це також демонстрація того, як можна ефективно використовувати сучасні технології.

Найбільш доцільним буде використання GeoGebra на таких етапах вивчення теми «Похідна та її застосування»:

– розв’язування задачі, що приводить до поняття похідної про кутовий коефіцієнт дотичної (використати динамічний рисунок графіка деякої функції та проведеної до нього дотичної, положення якої можна змінювати);

– знаходження похідної функції (учні можуть виконати самоперевірку, порівнюючи свої результати з результатом програми);

– знаходження рівняння дотичної до графіка функції (після аналітичного знаходження рівняння, в слід GeoGebra побудувати саму функцію і пряму, рівняння якої одержали; за рисунком перевірити, чи дійсно знайдена пряма є дотичною);

– дослідження функції на монотонність та екстремуми, опуклість та точки перегину (після дослідження функції за допомогою похідної в зошиті необхідно побудувати її графік в GeoGebra та перевірити вірність своїх висновків);

– повне дослідження функції за схемою та побудова її графіку (самоперевірку виконання завдання учні можуть виконати за допомогою побудови графіка функції в GeoGebra);

– застосування похідної до розв’язування задач, у тому числі прикладного змісту (дослідження відповідної моделі засобами GeoGebra).

2.3. Технологія знаходження розв'язку задач з використанням похідної за підтримки системи комп'ютерної математики.

Розглянемо приклади задач з теми «Похідна та її застосування», які демонструють використання GeoGebra.

Задача 1.

Складіть рівняння дотичної до графіка функції

$$f(x) = -x^2 - 5x - 6, \text{ яка проходить через точку } M(-1; -1).$$

Розв'язання:

Нехай $A(x_0; f(x_0))$ - точка дотику шуканої прямої до графіка функції f .

Оскільки, $f(x_0) = -x_0^2 - 5x_0 - 6, f'(x_0) = -2x_0 - 5,$

то рівняння дотичної має вигляд

$$y = (2x_0 - 5)(x - x_0) + (-x_0^2 - 5x_0 - 6)$$

Враховуючи, що координати точки $M(-1; -1)$ задовільняють отримане рівняння, маємо:

$$x_0 = 0 \text{ або } x_0 = -2.$$

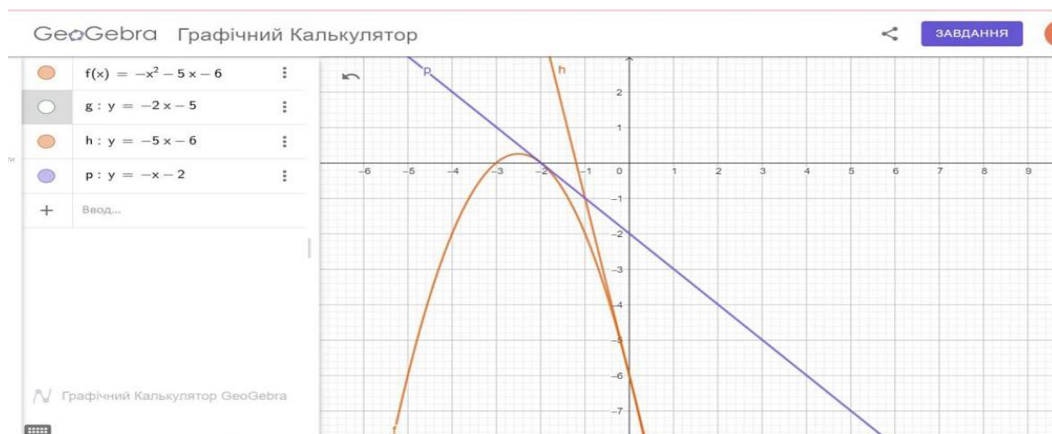
Таким чином, через точку M проходять дві дотичні до графіка функції :

$$y = -5x - 6; y = -x - 2.$$

Відповідь: $y = -5x - 6; y = -x - 2.$

Перевірити правильність отриманого результату засобами GeoGebra, можна наступним чином: введемо рівняння даної функції та знайденої дотичної, і дослідимо кількість їх спільних точок Рис.2.

Рис. 2



Задача 2.

Дослідити функцію $f(x) = 3x - x^3$ та побудувати її графік.

Дослідивши функцію аналітично, отримали такі результати.

1. Область визначення функції $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. $f(-x) = 3(-x) - (-x)^3 = -3x + x^3$. Функція непарна.
3. Функція перетинає координатні осі в точках $x=0, x=\sqrt{3}, x=-\sqrt{3}$.
4. Похідна функції має вигляд $f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x)(1 + x)$.
5. Критичні точки $f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x)(1 + x) = 0$

$$\begin{cases} x = -1, \\ x = 1. \end{cases}$$

6. Функція зростає на проміжку $[-1; 1]$. Функція спадає на проміжку $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

7. Точки екстремуму та значення функції в точках екстремуму.

$x = -1$ – точка мінімуму,

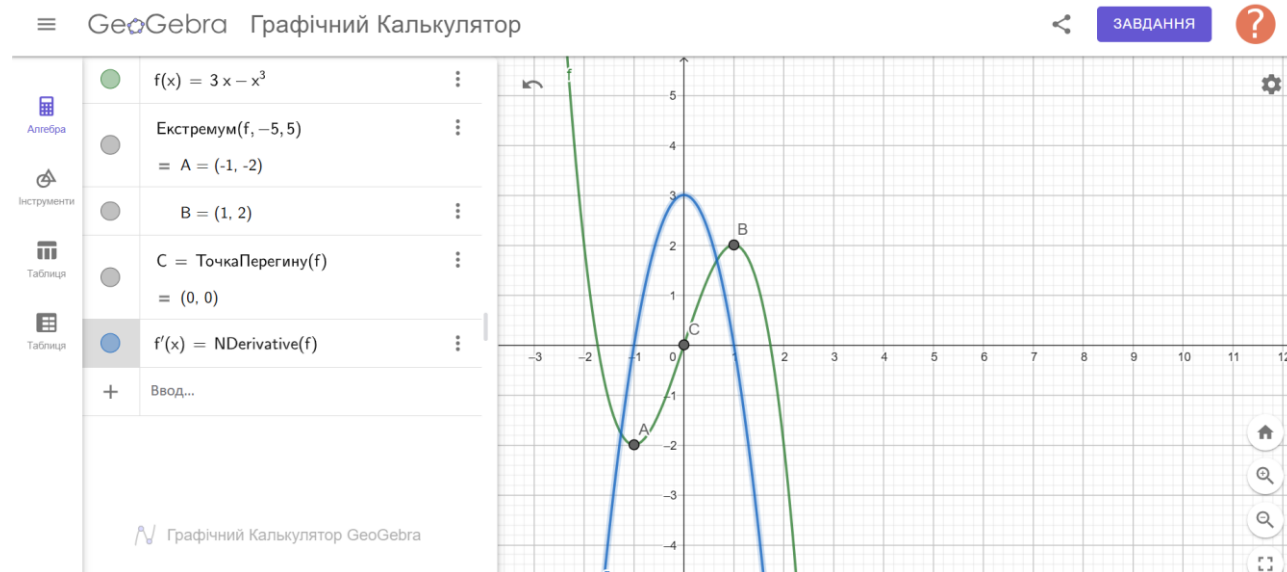
$x = 1$ – точка максимуму.

$$y_{\min} = f(-1) = 3(-1) - (-1)^3 = -2,$$

$$y_{\max} = f(1) = 3 \cdot 1 - 1^3 = 2.$$

Можна передбачити, що у такій кількості розрахунків Здобувачі освіти можуть зробити помилки, але за допомогою GeoGebra ці помилки можна відслідкувати та виправити. Разом з тим здобувачі освіти навчаються порівнювати, аналізувати та узагальнювати, критично мислити. Побудуємо функцію в GeoGebra $f(x) = 3x - x^3$ та виконаємо її дослідження.

Рис.3



На рис.3 побудовано графік функції $f(x) = 3x - x^3$, за допомогою команди 'екстремум(f)' визначено екстремальні точки функції та значення функції в екстремальних точках. За допомогою команди 'ТочкаПерегину(f)' знайшли точки перегину досліджуваної функції. Аналізуючи властивості функції за рисунком, можемо зробити висновок, що функцію досліджено вірно.

Задача 3.

Знайти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 + 3x - 8$, яка паралельна прямій $y = 9x - 1$.

Розв'язання:

Оскільки за умовою дотична до $f(x) = x^2 + 3x - 8$, паралельна прямій $y = 9x - 1$, то їх кутові коефіцієнти рівні. Знайдемо їх: $f'(x_0) = 2x_0 + 3 = 9$, тобто $x_0 = 3$.

Рівняння дотичної має вигляд:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

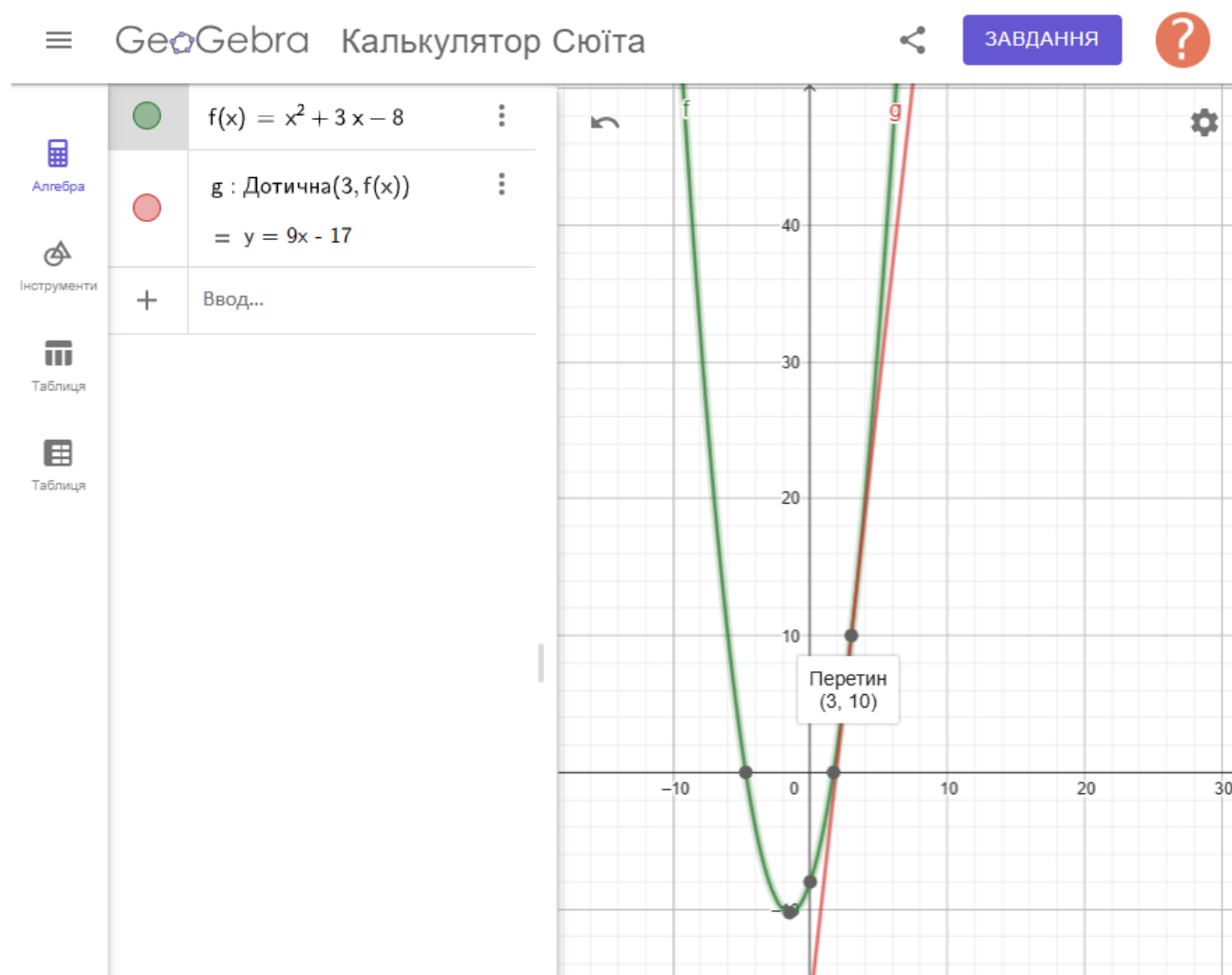
Знаходимо: $f(x_0) = f(3) = 9 + 9 - 8 = 10$.

$$f'(x_0) = 9.$$

$$y = 10 + 9 \cdot (x - 3) = 10 + 9x - 27 = 9x - 17.$$

Відповідь: $y = 9x - 17$.

Рис.4



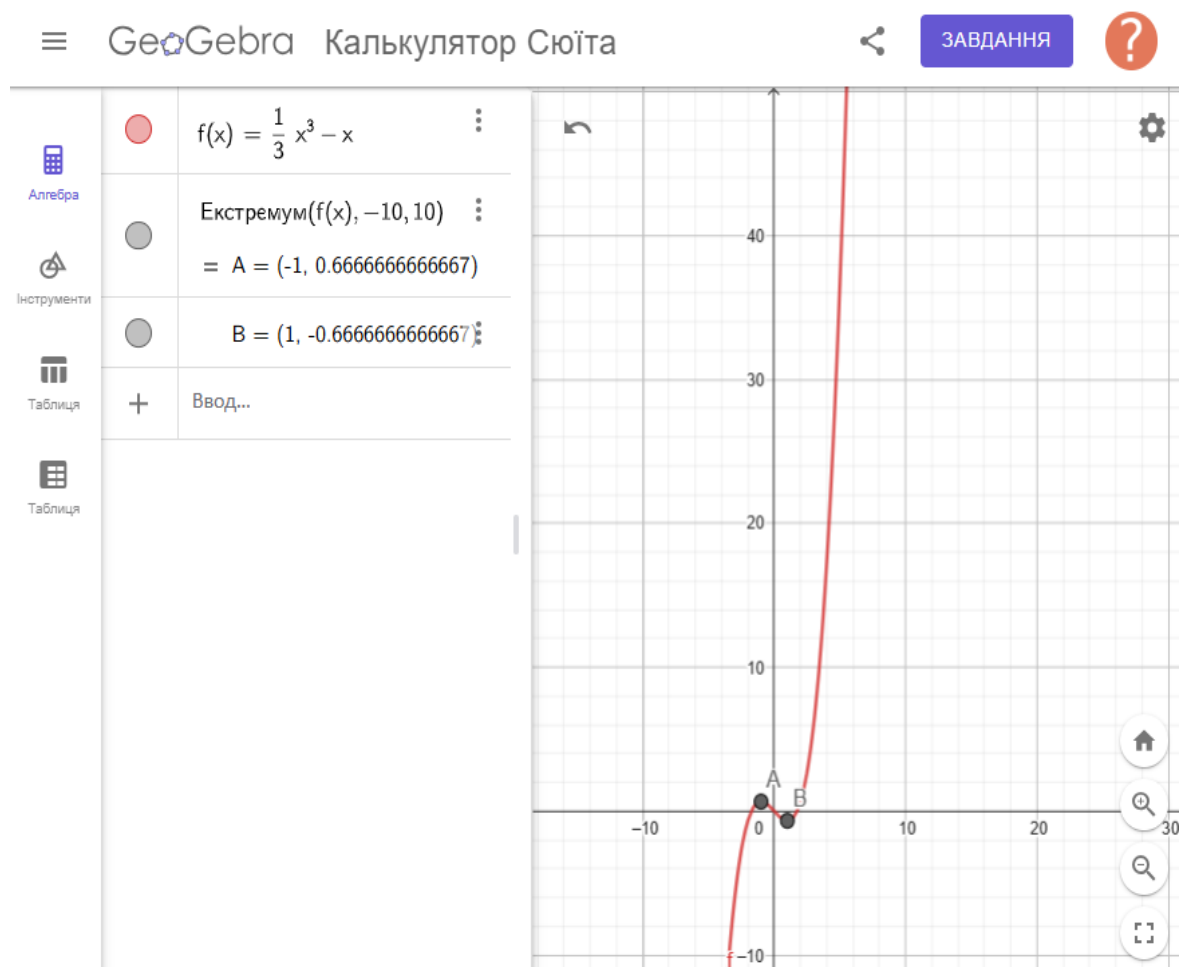
За допомогою функції Дотична (Точка;Функція) динамічне середовище побудувало дотичну до функції в точці, яку ми знайшли самостійно на Рис.4. А також програма знайшла рівняння дотичної.

Задача 4 . Знайдіть точки мінімуму та максимуму функції

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x.$$

Точки мінімуму та максимуму шукатимемо за допомогою функції Екстремум(Функція, Початкове значення, Кінцеве значення)Рис.5.

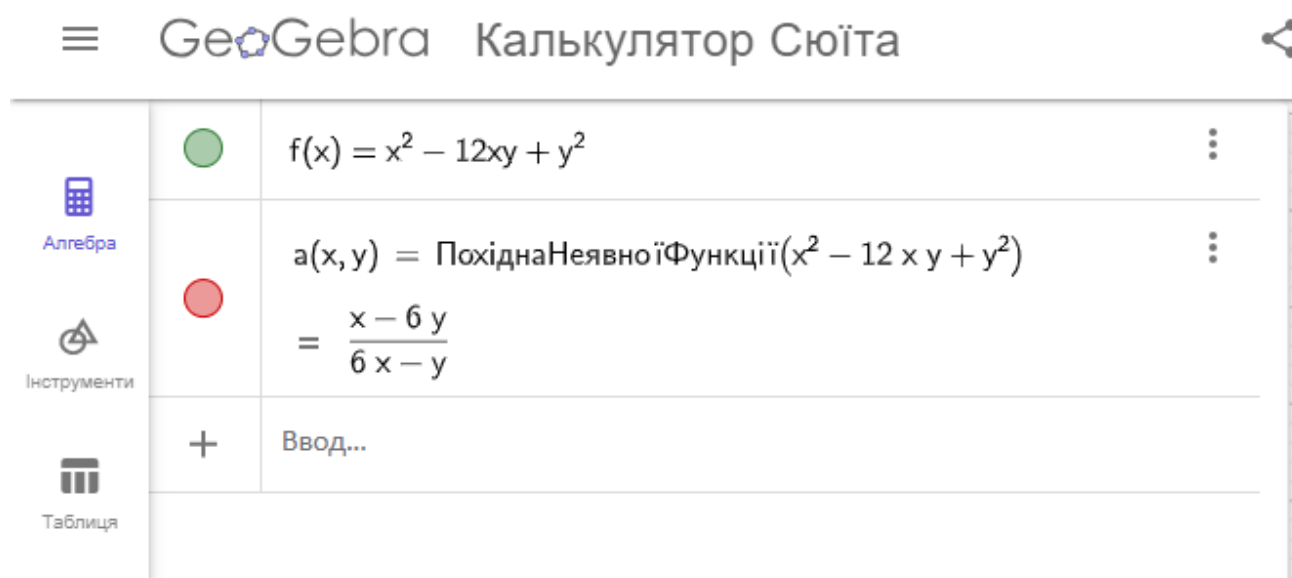
Рис.5



Задача 5. Знайти похідну неявно заданої функції.

$$f(x) = x^2 - 12xy + y^2$$

Рис.6



Використовуючи функцію ПохіднаНеявноїФункції(Функція) можемо перевірити правильність виконання прикладу 5 з розділу 1.

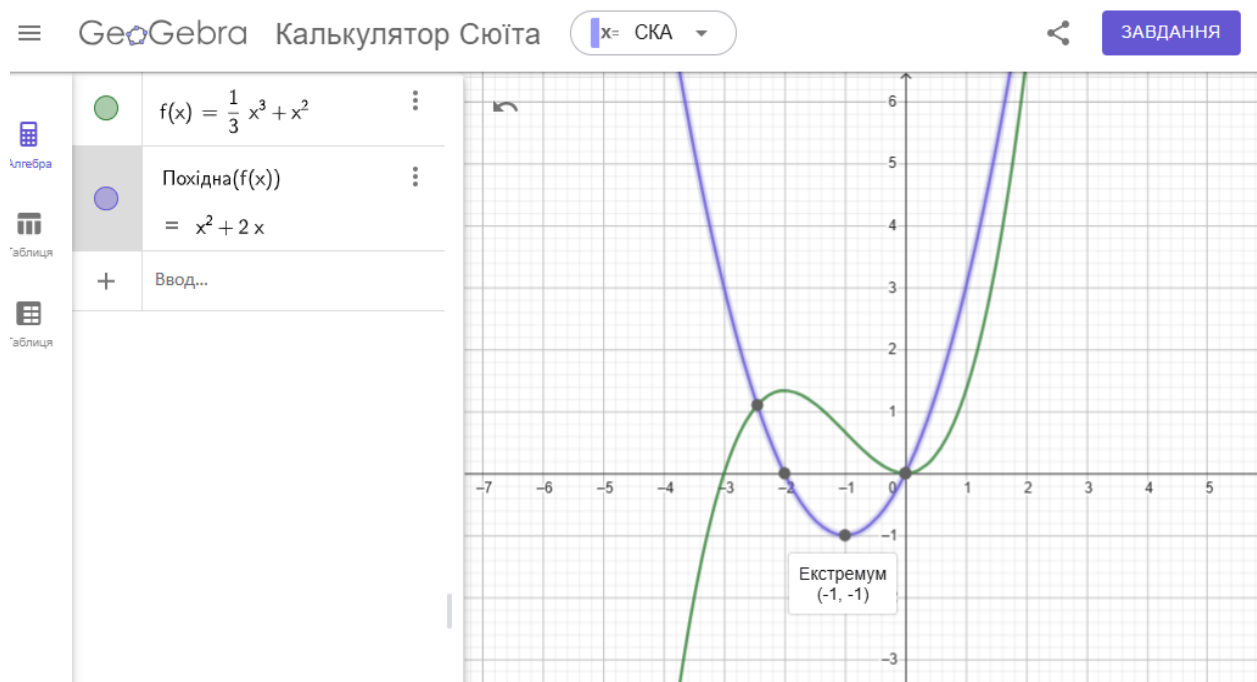
Задача 6.

Знайти похідну функції

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$$

Використовуючи функцію Похідна(Функція) знайдемо похідну функції.(Рис.7)

Рис.7



2.4. Методика формування вмінь та навичок у процесі вивчення теми «Похідна та її застосування»

Для того, щоб спланувати та провести педагогічні експерименти, ми розглянули методологію організації та проведення педагогічних досліджень.

Спочатку поставлено такі завдання дослідження:

□ вивчити досвід використання інформаційно-комунікаційних технологій при вивченні теми «Похідна та їх застосування». (вересень 2023 р.);

□ Розробити навчально-методичне забезпечення використання інформаційно-комунікаційних технологій при вивченні теми «Похідна та їх застосування» у 10 класі (жовтень 2023 - лютий 2024).

□ Впровадити розроблене навчально-методичне забезпечення в освітній процес (березень - травень 2024 року);

□ Перевірити ефективність розробленої методики використання інформаційно-комунікаційних технологій при вивченні теми «Похідна та їх застосування», провівши діагностичну роботу серед здобувачів освіти наприкінці педагогічного експерименту (травень-червень 2024 року).

Педагогічний експеримент з реалізації використання інформаційно-комунікаційних технологій під час вивчення теми «Похідна та її застосування» мав констатуючий, формуючий та контрольний етапи.

Основні завдання констатуючого етапу педагогічного експерименту:

- проведення анкетування серед вчителів математики, з метою вивчення їх досвіду використання інформаційно-комунікаційних технологій під час вивчення теми «Похідна та її застосування» (проведене у жовтні-листопаді 2023 року);

- аналіз сучасних шкільних підручників з математики з можливостей використання інформаційно-комунікаційних технологій під час вивчення теми «Похідна та її застосування» (жовтень 2023 року);
- виявлення початкового рівня сформованості предметної компетентності учнів (лютий 2024 року).

Перед початком експерименту здобувачам освіти була запропонована діагностувальна робота(Додаток А) для визначення рівню сформованості навчальних досягнень здобувачів освіти з теми «Похідна та її застосування» у 10 класі.

За результатами діагностувальної роботи можемо виокреслити такі рівні:

Низький рівень

Здобувачі освіти:

- не завжди розуміють значення поняття похідної для опису реальних процесів;
- знаходять з помилками швидкість зміни величини в точці;
- не можуть знайти кутовий коефіцієнт і кут нахилу дотичної до графіка функції в даній точці;
- з помилками диференціюють функції,використовуючи таблицю похідних і правила диференціювання;
- не завжди вдало застосовують похідну для знаходження проміжків монотонності і екстремумів функції, побудови графіків;
- не завжди правильно знаходять найбільше і найменше значення функції;
- намагаються розв'язувати нескладні прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин.

Середній рівень

Здобувачі освіти:

- розуміють значення поняття похідної для опису деяких реальних процесів, зокрема механічного руху;
- здебільшого правильно знаходять швидкість зміни величини в точці;
- здебільшого правильно знаходять кутовий коефіцієнт і кут нахилу дотичної до графіка функції в даній точці;
- намагаються диференціювати функції, використовуючи таблицю похідних і правила диференціювання;
- намагаються застосовувати похідну для знаходження проміжків монотонності і екстремумів функції, побудови графіків;
- знаходять найбільше і найменше значення нескладних функції;
- розв'язують нескладні прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин.

Високий рівень

Здобувачі освіти:

- розуміють значення поняття похідної для опису реальних процесів, зокрема механічного руху;
- знаходять швидкість зміни величини в точці;
- кутовий коефіцієнт і кут нахилу дотичної до графіка функції в даній точці;
- диференціюють функції, використовуючи таблицю похідних і правила диференціювання;
- застосовують похідну для знаходження проміжків монотонності і екстремумів функції, побудови графіків;
- знаходять найбільше і найменше значення функції;

- розв'язують нескладні прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин.

В експерименті брали участь здобувачі освіти 10-А та 10-Б класу. Згідно з завданням експерименту, у освітній процес з математики для здобувачів освіти 10-А класу Комунального закладу загальної середньої освіти Луцького ліцею №23 Луцької міської ради було впроваджено застосування інформаційно-комунікаційних технологій, а саме динамічного математичного середовища GeoGebra, під час вивчення теми “Похідна та її застосування”. Для здобувачів освіти 10-Б класу було запропоноване вивчення теми за допомогою традиційних методів навчання. Приклад конспекту уроку з використанням динамічного середовища GeoGebra, наведено в Додатку Д.

2.5 Результативність впровадження методики формування вмінь та навичок

Проаналізуємо анкетування вчителів математики, проведене з метою вивчення їх досвіду використанні інформаційно-комунікаційних технологій під час вивчення теми «Похідна та її застосування». Анкетування для вчителів було проведено в онлайн - режимі за допомогою Google Form.

Приклад анкети наведений у додатку Б до кваліфікаційної роботи. В опитуванні взяли участь 6 вчителів математики Комунального закладу загальної освіти Луцького ліцею №23 Луцької міської ради.

Аналіз результатів показав, що учителі розуміють поняття інформаційно-комунікаційних технологій і активно впроваджують їх у освітній процес з математики. Розподіл відповідей на запитання ‘ Чи застосовуєте ви інформаційно-комунікаційні технології в освітньому середовищі?’ можемо побачити на діаграмі.

Рис.8 Результати опитування вчителів математики



Найпопулярнішим сервісом для створення тестів серед вчителів математики є платформа ‘ На Урок ’ та ‘ Всеосвіта ’ . Педагоги Луцького ліцею №23 підтримують зв’язок зі здобувачами освіти за допомогою таких сервісів як: Viber, Telegram, Gmail, GoogleClassroom.

Наприкінці 2023-2024 навчального року, ми активно розпочали впроваджувати середовище GeoGebra в навчальний процес учнів 10-А класу Комунального закладу загальної середньої освіти Луцького ліцею №23 Луцької міської ради. В експерименті взяли участь 35 здобувачів освіти. Під час вивчення даної теми, була написана діагностувальна робота для визначення рівня навчальних досягнень здобувачів освіти 10-А(експериментального) та 10-Б класів з теми ‘Похідна та її застосування’.

Результати здобувачів освіти визначались як середнє арифметичне самостійної (Додаток В) та діагностувальної роботи.(Додаток Г)

Результати наведені в таблиці.

Порівняння навчальних результатів здобувачів освіти під час педагогічного експерименту.

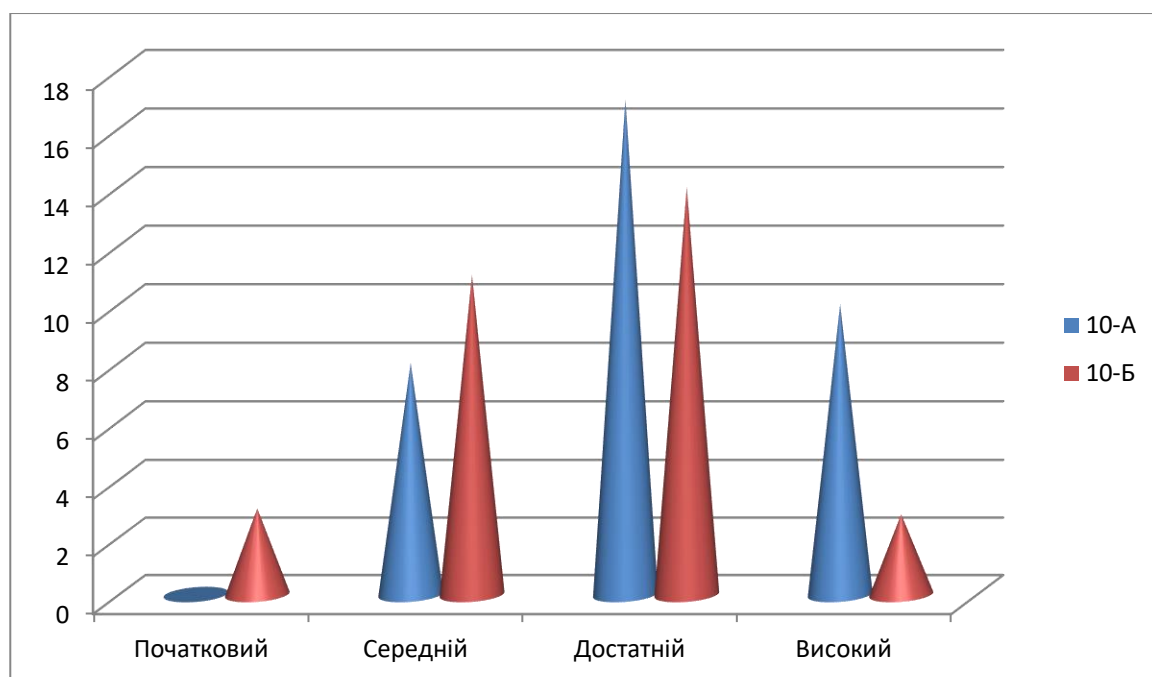
Таблиця 2.

Класи які брали частку в експерименті	Рівні навчальних досягнень здобувачів освіти								Всього
	Початковий		Середній		Достатній		Високий		
	К-сть		К-сть		К-сть		К-сть		
10-А(I)	2		8	3	16	5	9	7	35
10-А(II)	-		8	3	17	9	10	8	35
10-Б(I)	3		12		13		4		32

				8		0		3	
10-Б(П)	3	11		14		4		32	
			4		4		3		

Також можемо побачити розподіл рівнів навчальних досягнень здобувачів освіти 10-А(експериментального) та 10-Б класу на рис.9

Рис.9



Розподіл рівнів навчальних досягнень здобувачів освіти 10-А(експериментального) та 10-Б класу

Досліджувана нами вибірка склала 67 осіб.

Провівши статистичний аналіз результатів педагогічного експерименту, можемо зробити висновок, що розроблені нами уроки з використанням динамічного середовища GeoGebra з математики позитивно впливають на якість освітнього процесу, спостерігались позитивні зміни у рівнях навчальних досягнень учнів.

ВИСНОВОК ДО РОЗДІЛУ 2

У даному розділі магістерської роботи було відзначено можливості використання інформаційно-комунікаційних технологій при вивченні теми «Похідна та її застосування».

Також, проаналізовано сутність та складові ІКТ, обґрунтовано доцільність їх впровадження в освітній процес для формування інформатичних компетентностей учнів, підвищення ефективності та якості навчання.

GeoGebra об'єднує візуалізацію, інтерактивність та можливість самостійного дослідження. Використання цього динамічного програмного забезпечення сприяє глибшому розумінню складних математичних концепцій, розвитку критичного та аналітичного мислення, підвищує мотивацію та інтерес здобувачів освіти до предмета. Завдяки GeoGebra процес навчання стає не тільки більш зрозумілим, а й захоплюючим, що в кінцевому результаті підвищує загальну успішність здобувачів освіти у вивченні математики.

Активне використання цього середовища, підвищує інтерес до вивчення математики та дослідницької діяльності за рахунок використання інтерактивності побудов та досліджень.

GeoGebra – динамічний ресурс, який постійно розвивається та є потужним математичним інструментом. Поки розвивається математика та інформатика, буде розвиватися і GeoGebra тому оновлена версія ресурсу, буде приводом для подальших досліджень.

Результати проведеного педагогічного експерименту засвідчили позитивний вплив обраної методики навчання з використанням ІКТ на підвищення успішності та цікавості здобувачів освіти.

ВИСНОВКИ

1. Аналіз вивчення методологічної літератури з даної теми показав, що візуалізація процесів, таких як обчислення похідної, за допомогою графіків допомагає здобувачам освіти встановлювати причинно-наслідкові зв'язки та навчитися усвідомлювати математичні залежності.

2. Проаналізувавши означення ІКТ та застосування в освітньому середовищі можна виокремити такі переваги та недоліки ІКТ в освітньому середовищі.

Переваги використання ІКТ в освітньому середовищі:

- розвиток мотивації, посилення інтересу до навчання, у тому числі до способів одержання знань;
- розвиток самостійності;
- підвищення наочності навчання;
- спрощення та збільшення швидкості доступу до навчальної та наукової інформації через мережу Internet.

Недоліки використання ІКТ в освітньому середовищі:

- Кожному школяреві необхідний доступ до комп'ютера.
- Невисока якість зв'язку.
- Для деякого з учнів важко сприймати інформацію з екрана.
- Практично відсутні мультимедійні програми українською мовою.
- Не розроблена методика використання ІКТ в освіті.

3. Було проведено анкетування вчителів математики КЗЗСО «Луцького ліцею №23» Луцької міської ради. Аналіз результатів показав, що учителі розуміють поняття інформаційно-комунікаційних технологій і активно впроваджують їх у освітній процес з математики.

Найпопулярнішим сервісом для створення тестів серед вчителів математики є платформа 'На Урок' та 'Всеосвіта'. Педагоги Луцького ліцею №23 підтримують зв'язок зі здобувачами освіти за допомогою таких сервісів як: Viber, Telegram, Gmail, GoogleClassroom.

Було вирішено впровадити динамічне середовище GEOGEBRA в освітній процес 10-А класу Комунального закладу загальної середньої освіти Луцького ліцею №23 Луцької міської ради.

4. Для того, щоб визначити рівень навчальних досягнень учнів 10-А та 10-Б класу було запропоновано 2 діагностувальні та самостійна роботи.

Провівши статистичний аналіз результатів педагогічного експерименту, можемо зробити висновок, що розроблені нами уроки з використанням динамічного середовища GeoGebra з математики позитивно впливають на якість освітнього процесу, спостерігались позитивні зміни у рівнях навчальних досягнень учнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. [Khan Academy | Free Online Courses, Lessons & Practice](#). *Khan Academy* (англ.). Архів [оригіналу](#) за 1 серпня 2019.
2. Бевз В.Г. Практикум з історії математики: Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. – К.:НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. –312с
3. Данильчук Л. Сутність і зміст поняття «інформаційно-комунікаційні технології» // Педагогіка і психологія проф. освіти. 2012. № 4. С. 123–130.
4. Дереза І. С., Формування дослідницької компетентності учнів при вивченні теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні / І. С. Дереза, О. А. Іванова // ВІСНИК Міжнародного дослідного центру: «Людина: мова, культура, пізнання»: наук. журн.: за заг. ред. В. В. Корольського. – Кривий Ріг: КДПУ, МДЦ «ЛМКП», 2018. – Том 42. – с.171-178.
5. Істер О. С. Математика:(алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ: Генеза, 2018. 384 с.
6. Історія виникнення похідної [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://pohidnamat.blogspot.com/p/blog-page_12.html
7. Кадемія М. Ю., Шевченко Л. С., Шестопалюк О. В. Підготовка майбутніх вчителів до використання ІКТ: навчально-методичний посібник. – Вінниця, 2009. – 100 с.
8. Кіяновська Н. М. Теоретико-методичні засади використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні вищої математики студентів інженерних спеціальностей у Сполучених Штатах Америки : монографія / Н. М. Кіяновська, Н. В. Рашевська, С. О. Семеріков // Теорія та методика електронного навчання. – Кривий Ріг : Видавничий відділ ДВНЗ «Криворізький національний університет», 2014. – Том V. – Випуск 1 (5) : спецвипуск «Монографія в журналі». – 316 с. : іл.

9. Колеснікова Л. Інноваційні комп'ютерні технології в практичній діяльності вчителя математики : // Математика в шк. України. 2012. № 1/2. С. 4–6.

10. Кривонос О.М. Використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчанні: навч. посібник. Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2013. 182 с.

11. Лев А. Електронні засоби навчання: [використання ІКТ на уроках математики] // Відкритий урок: розробки, технології, досвід. 2012. № 7/8. С. 40–45.

12. Мерзляк А.Г. Математика:(алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ: Генеза, 2018. 384 с.

13. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів Рівень стандарту

14. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень:навчання. — 2012. — № 4 (30).

15. Означення похідної // Вища математика в прикладах і задачах / Клепко В.Ю., Голець В.Л.. — 2-ге видання. — К. : Центр учбової літератури, 2009. — С. 238. — 594 с.

16. Падалко Н. Й. Методика навчання математики : метод. посіб. Луцьк : Волин. нац. ун-т ім. Лесі Українки, 2021. 143 с.

17. Перелік навчальних програм, підручників та навчально-методичних посібників, рекомендованих Міністерством освіти і науки України для використання в основній і старшій школі загальноосвітніх навчальних закладів з навчанням українською мовою.

18. Похідна та її застосування [Текст]: навчальний посібник / В. М. Кузнецов, Т. М. Бусарова, Т. А. Агошкова, І. В. Клименко, Н. В. Міхєєва;

Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Дніпро, 2017. – 104 с

19. Похідні вищих порядків // Вища математика в прикладах і задачах / Клепко В.Ю., Голець В.Л.. — 2-ге видання. — К. : Центр учбової літератури, 2009. — С. 256. — 594 с.

20. Пудренко Т. Інформаційні технології на уроках математики // Відкритий урок: розробки, технології, досвід. 2010. № 9. С. 29-30.

21. Професійна компетентність педагога: теорія, методика, практика : зб. матеріалів доповідей (статей, тез) учасників Всеукр. інтернет-конф. (м. Луцьк, 18 квіт. 2024 р.). Луцьк : ВІППО, 2024. 224 с.

22. Саломатнікова О.М. Застосування похідної до розв'язування прикладних задач / О.М. Саломатнікова // Математика в школах України. – 2005. – № 30. – С. 27-32.

23. Система динамічної математики GeoGebra як іноваційний засіб для вивчення математики / В. М. Ракута // Інформаційні технології і засоби

24. Теплицький І. О. Розвиток пізнавальної активності учнів 10-11-х класів у процесі навчання алгебри і початків аналізу засобами комп'ютерно-орієнтованих систем навчання / Ілля Теплицький, Олена Віхрова, Сергій Семеріков // Рідна школа. – 2004. – № 6. – С. 48-49.

25. Шипілова І. Використання комп'ютерних технологій на уроках математики // Обдарована дитина. 2011. № 10. С. 24 –34.

26. Посилання:

1. <https://www.geogebra.org/about?lang=uk>

2. <https://imzo.gov.ua/pidruchniki/pereliki/>.

3. <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>.

АНОТАЦІЯ

Круковець А.С. Використання інформаційно-комунікаційних технологій при вивченні теми «Похідна та її застосування». Магістерська робота на здобуття ступеня магістра за спеціальністю 014 Середня освіта (Математика). – Волинський національний університет імені Лесі Українки. Кафедра «Теорії функцій та методики навчання математики» – Луцьк, 2024. – 68с., список використаних джерел зі 26 найменувань, два розділи, 8 підрозділів.

Магістерська робота присвячена дослідженню нових методик вивчення змістової лінії «Похідна та її застосування».

Перший розділ магістерської роботи присвячений теоретичним та методологічним основам поняття похідної, другий – застосуванню інформаційно-комунікаційних технологій для організації діяльності для здобувачів освіти у процесі вивчення теми «Похідна та її застосування». Розглянуто динамічне середовище GEOGEBRA.

Результати дослідження оформленні у вигляді тез доповідей на конференції «Професійна компетентність педагога: теорія , методика, практика».

Ключові слова: похідна, методика, Geogebra, графік функції , навчання, ІКТ.

ANNOTATION

Krukovets A.S. The use of information and communication technologies in the study of the topic "Derivative and its application". Master's thesis for a master's degree in specialty 014 Secondary Education (Mathematics) - Lesya Ukrainka Volyn National University. Department of Theory of Functions and Methods of Teaching Mathematics - Lutsk, 2024. 68 p., list of references of 26 titles, two sections, 8 subsections.

The master's thesis is devoted to the study of new methods of studying the content area "Derivative and its application".

The first section of the master's thesis is devoted to the theoretical and methodological foundations of the concept of derivative, the second - to the application of information and communication technologies for the organization of activities for students in the process of studying the topic "Derivative and its application". The GEOGEBRA dynamic environment is considered.

The results of the research were presented in the form of abstracts of reports at the conference "Professional competence of the teacher: theory, methodology, practice".

Keywords: derivative, methodology, Geogebra, function graph, learning, ICT.

ДОДАТКИ

Додаток А

Діагностувальна робота 1 для 10-го класу з теми ‘Похідна та її застосування’

У завданнях 1-3 вибрати одну правильну відповідь. Кожна відповідь оцінюється в 1 бал.

1. Похідною функції $y = x^{12}$ є вираз:

А) $y' = 12x^{13}$ Б) $y' = 12x^{11}$ В) $y' = \frac{x^{13}}{13}$

2. Знайдіть похідну функції $y = \cos x + e^3$

А) $y' = \sin x + e^3$ Б) $y' = -\sin x + e^3$ В) $y' = -\sin x + 3e^2$

3. Знайдіть похідну функції $y = x^9 \ln x$

А) $y' = 9x^8 \ln x$ Б) $y' = x^8(9x^2 \ln x + 1)$ В) $y' = x^8(9 \ln x + 1)$

Завдання 4 оцінюється в 1 бал

4. Знайдіть похідну складеної функції $y = \ln(\operatorname{ctg} 6x)$.

Завдання 5-6 оцінюється в 1,5 бали

5. Знайдіть екстремуми функції $y = 2x^3 - 3x^2$.

6. Знайдіть найбільше та найменше значення функції

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 7x - 4 \text{ на відрізку } [-1; 2].$$

Завдання 7 оцінюється в 2 бали (за кожну правильну відповідність 0,5 бали)

7. Установіть відповідність між функціями (1-4) та значеннями похідних (А-Д) у точці $x_0 = 2$:

$$1. y = x\sqrt{2} \qquad \text{A) } \frac{1}{4}$$

$$2. y = \sqrt{2x} \qquad \text{Б) } \frac{1}{2}$$

$$3. y = \sqrt{x+2} \qquad \text{В) } 1$$

$$4. y = \sqrt{2x-3} \qquad \text{Г) } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Д) } \sqrt{2}.$$

Завдання 8 оцінюється в 3 бали

8. Побудувати графік функції $y = 3x - x^3$

Додаток Б

Анкета для вчителів математики

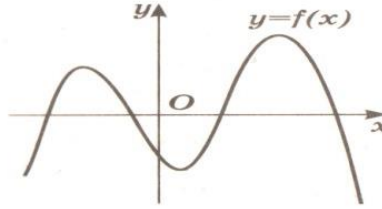
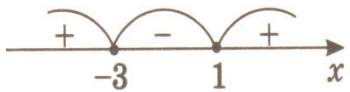
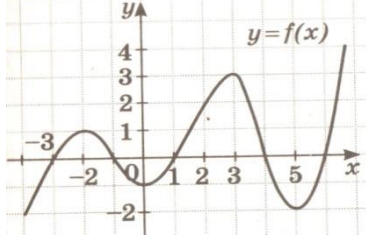
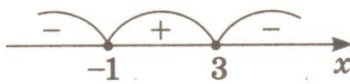
1. Ваш стаж роботи в школі- _____
2. Чи застосовуєте ви інформаційно-комунікаційні технології в освітньому середовищі?
 - а) так, постійно;
 - б) так, але не постійно;
 - в) переважно ні;
 - г) зовсім не застосовую;
 - д) інше _____
3. Яким, на Вашу думку, повинен бути розподіл часу на різні види діяльності під час навчання при вивченні теми «Похідна та її застосування»?
 - а) більшість часу на пояснення матеріалу;
 - б) більшість часу на розв'язання завдань під час уроку;
 - в) більшість часу на групову діяльність;
 - г) більшість часу на самостійну роботу;
 - д) не можна сказати, залежить від особливостей класу.
4. Заповніть таблицю, в якій вкажіть назви електронних ресурсів навчання, які ви використовуєте під час вивчення теми «Похідна та її застосування».

Електронний ресурс	Назва
Навчальні платформи	
Засоби зв'язку з учнями	
Сервіси створення	

тестів	
Віртуальні дошки	
Youtube-канали, блоги	

Додаток В

Самостійна робота з теми ‘ Похідна та її застосування ’ для 10-го класу

<p>1. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, яка визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Скільки критичних точок має ця функція?</p>	
<p>2. Знак похідної функції $y = f(x)$, яка визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$, змінюється за схемою, зображеною на рисунку (-3 і 1 – критичні точки). Знайдіть проміжки зростання функції.</p>	
<p>3. Укажіть точки мінімуму функції $y = f(x)$</p>	
<p>4. Знайдіть мінімуми функції $y = f(x)$</p>	
<p>5. Знак похідної функції $y = f(x)$, яка визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$, змінюється за схемою, зображеною на рисунку (-1 і 3 – критичні точки). Знайдіть точки максимуму функції.</p>	
<p>6. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $y = x^2 - 6$</p>	

7. Знайдіть найменше значення функції $y = x^2 - 3x + 2$ на проміжку $[0; 4]$

Додаток Г

Діагностувальна робота 2 для 10-го класу з теми «Похідна та її застосування»

1 частина

У завданнях 1-3 вибрати одну правильну відповідь. Кожна відповідь оцінюється в 1 бал.

1. Знайти похідну функції $y = x^4 + 3\cos x$.

А) $4x^3 + 3\sin x$; Б) $4x - 3\sin x$; В) $4x^3 - 3\sin x$; Г) $x^3 - 3\sin x$;

2. Знайти похідну функції $y = \frac{x}{x-9}$.

А) 1; Б) $\frac{2x-9}{(x-9)^2}$; В) $\frac{9}{(x-9)^2}$; Г) $\frac{-9}{(x-9)^2}$;

3. Знайти критичні точки функції $y = x^2 - 4x - 5$.


А) -1; 5; Б) 4; В) -2; Г) 2.

У завданнях 4,5 встановити відповідність. Кожна відповідь оцінюється в 1 бал.

4. На малюнку зображено графік функції $y = f(x)$. Установить відповідність між числовими значеннями абсцис або ординат (1 – 4) точок (А – Д)

1. $y = -2$	А) точка мінімуму	
2. $x = 3$	Б) мінімум	
3. $x = 0$	В) максимум	
4. $y = 3$	Г) точка перетину з віссю ОУ	
	Д) точка максимуму	

5. Установить відповідність між поведінкою функції (1 – 4) та проміжками або точками (А – Д)

1. функція зростає;	А) $(-1; 3)$ Б) $(-\infty; -1)$	
2. функція спадає;	В) -1 ; Г) $(3; +\infty)$;	
3. функція має максимальне значення	Д) 3 .	
4. функція має мінімальне значення		

6. Знайти найменше значення функції $y = x^2 - 3x + 2$ на проміжку $[1; 3]$

А) 2 ; Б) $-\frac{1}{4}$; В) 0 ; Г) -1 ; Д) 1 .

2 частина

Кожне завдання оцінюється в 3 бали.

7. Знайти екстремуми функції $y = \frac{x^2}{x-5}$. Визначте найбільше та найменше значення цієї функції на проміжку

8. Задано функцію $f(x) = x^4 - 8x^2$. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції та побудуйте ескіз графіку цієї функції.

Додаток Д

Тема. *Похідна та її застосування*

Мета:

Навчальна: сформувати вміння розв'язувати задачі, що передбачають знаходження похідної та використання геометричного змісту похідної

Виховна: виховувати активність та охайність

Формування компетентностей:

предметна компетентність:

- удосконалити вміння шукати похідну;
- сформувати вміння розв'язувати задачі, що передбачають знаходження похідної та використання геометричного змісту похідної ;
- виховувати активність та охайність;

 **ключові компетентності:**

- *спілкування державною мовою* — розуміти, пояснювати і перетворювати тексти математичних задач;
- *основні компетентності у природничих науках і технологіях* — розпізнавати проблеми, що виникають у довкіллі і які можна розв'язати засобами математики;
- *уміння вчитися впродовж життя* — прагнути до вдосконалення результатів своєї діяльності.

Очікувані результати: Здобувачі освіти вміють формулювати поняття похідна, знають суть геометричного змісту похідної, вміють розв'язувати завдання які зводяться до відшукування похідної.

Тип уроку: удосконалення знань і вмінь.

Обладнання та наочність: Підручник Мерзляк А.Г. Математика:(алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту):

підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ: Генеза, 2018, мультимедійна дошка, динамічне середовище GeoGebra.

Хід уроку

I. Організаційний момент.(2 хв)

Пролунав дзвінок,

Починаємо урок,

Працюватимем старанно,

Щоб почути у кінці,

Що у нашій десятій класі

Діти – просто молодці.

Сьогодні на уроці ми будемо продовжувати працювати з поняттям похідна та її застосування при розв'язуванні завдань, тобто сьогодні ми повторимо і узагальнимо те, що вивчили на попередніх уроках.

II. Мотивація навчальної діяльності. Формулювання цілей та завдань уроку. (2хв)

Як ми вже знаємо, Похідна-фундаментальне поняття математичного аналізу, за допомогою якого досліджують процеси та явища в природних, соціальних і економічних науках. Тому вивченню цієї теми ми приділяємо особливу увагу.

Варто також не забувати що на НМТ є завдання з даної теми.

III. Перевірка домашнього завдання (3 хв)

Перевірку домашнього завдання пропоную зробити так: по закінченню нашого уроку ви здасте зошити, і тоді я вже самостійно перевірю виконання. Опрацювання питань які виникли під час роботи.

IV. Актуалізація опорних знань.(5 хв)

Повторення основних тверджень про похідну проводиться у вигляді вправи «Мікрофон»:

- Що називають диференціюванням? (*Операцію знаходження похідної функції називають диференціюванням*)

- Що таке приріст аргументу? (*Вираз $x - x_0 = \Delta x$*)
- Що таке приріст функції? ($\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$)
- Дайте означення похідної (*Похідною функції $f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує*)
 - В чому полягає геометричний зміст похідної? (*Похідна – це кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до заданої точки*)
 - Як можна сформулювати фізичний зміст похідної? (*Похідна – це миттєва швидкість*)
 - А з економічної точки зору похідна – це? (*Похідна - це продуктивність праці, продуктивність праці вимірюється кількістю продукції, виконаної робітником впродовж деякого часу*)

V. Закріплення знань, умінь та навичок.(28 хв)

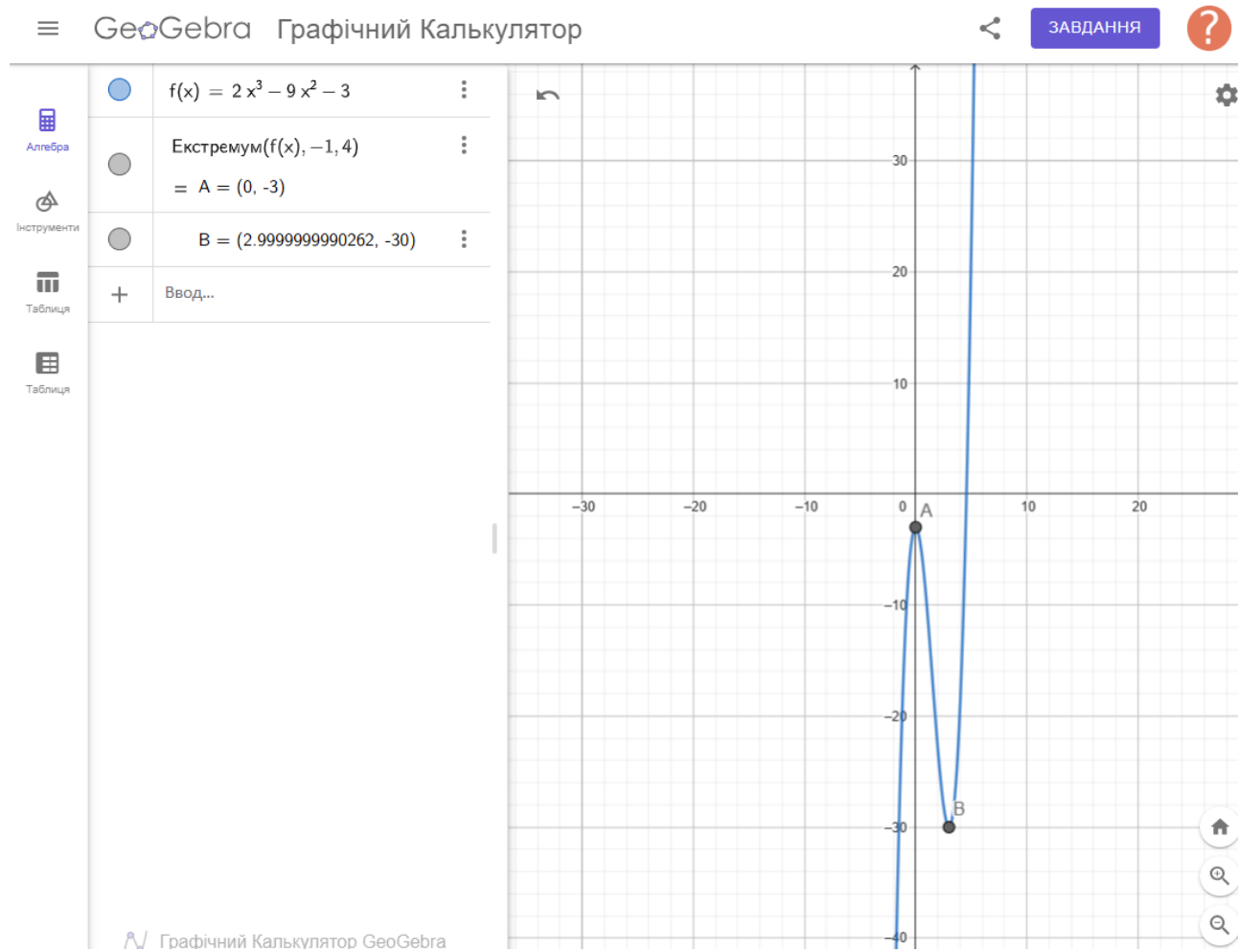
Робота з підручником

Вправа 24.1

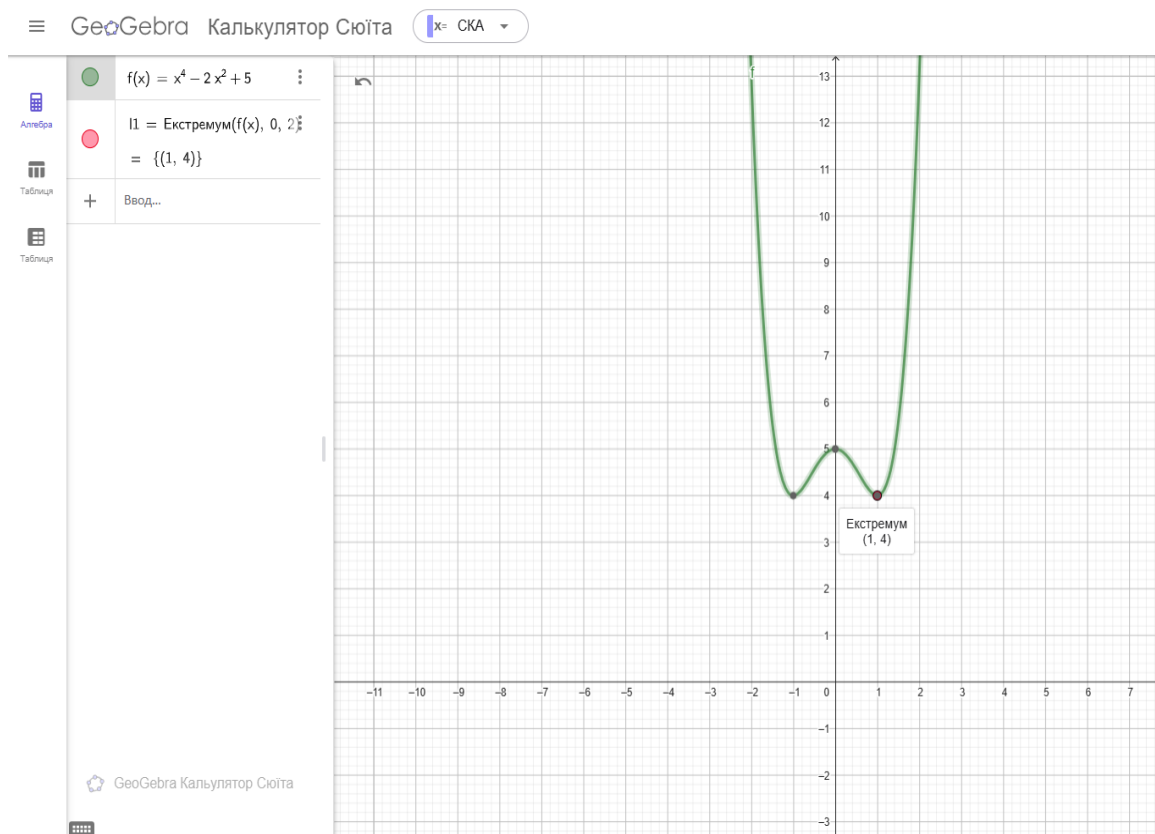
Знайти найбільше і найменше значення функції f на вказаному проміжку:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3, [-1; 4].$$

Учні виконують завдання в зошиті, потім перевіряють за допомогою динамічного середовища Geogebra.

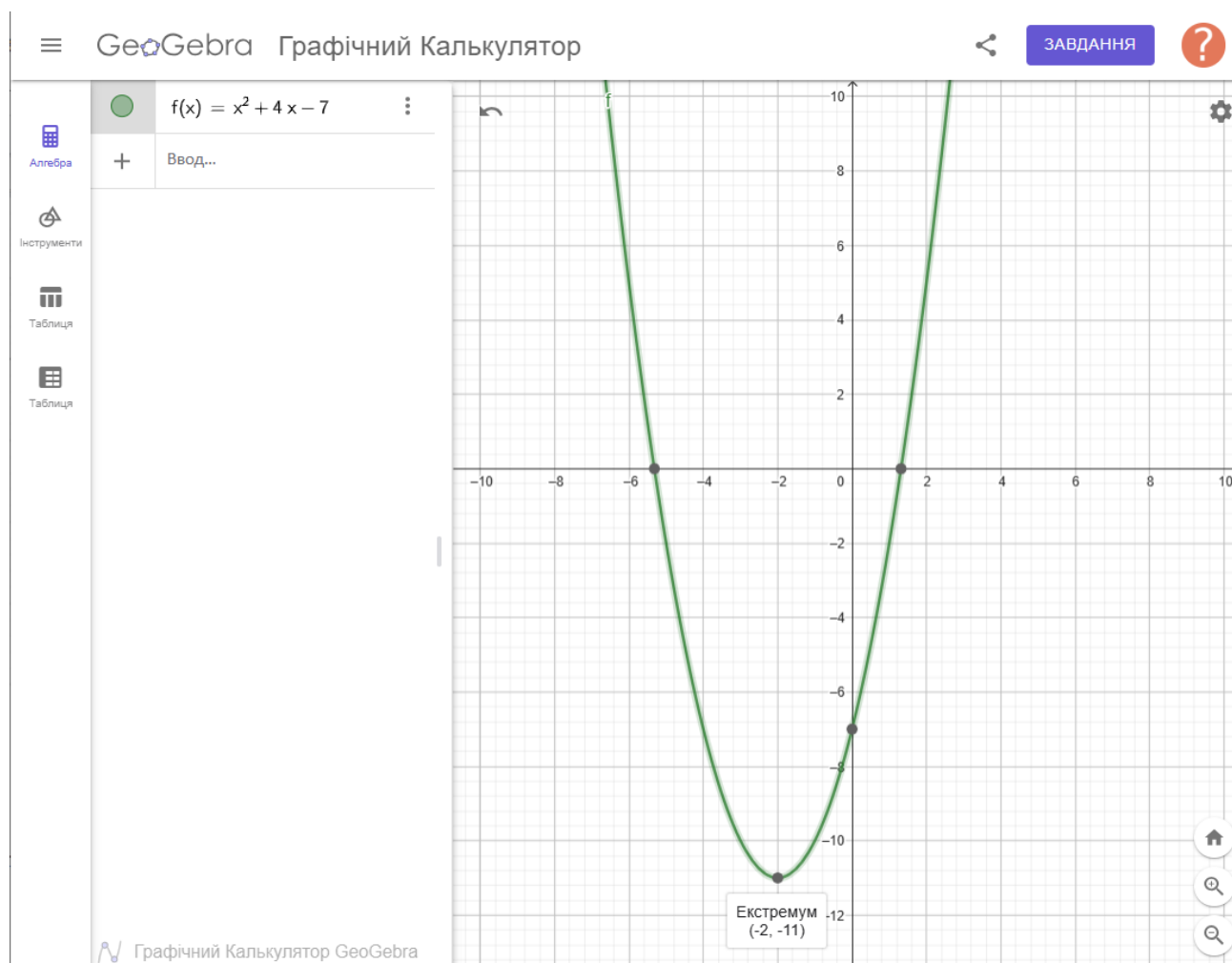


2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5, [0; 2]$.



Вправа 22.1

Знайдіть проміжки зростання функції $f(x) = x^2 + 4x - 7$



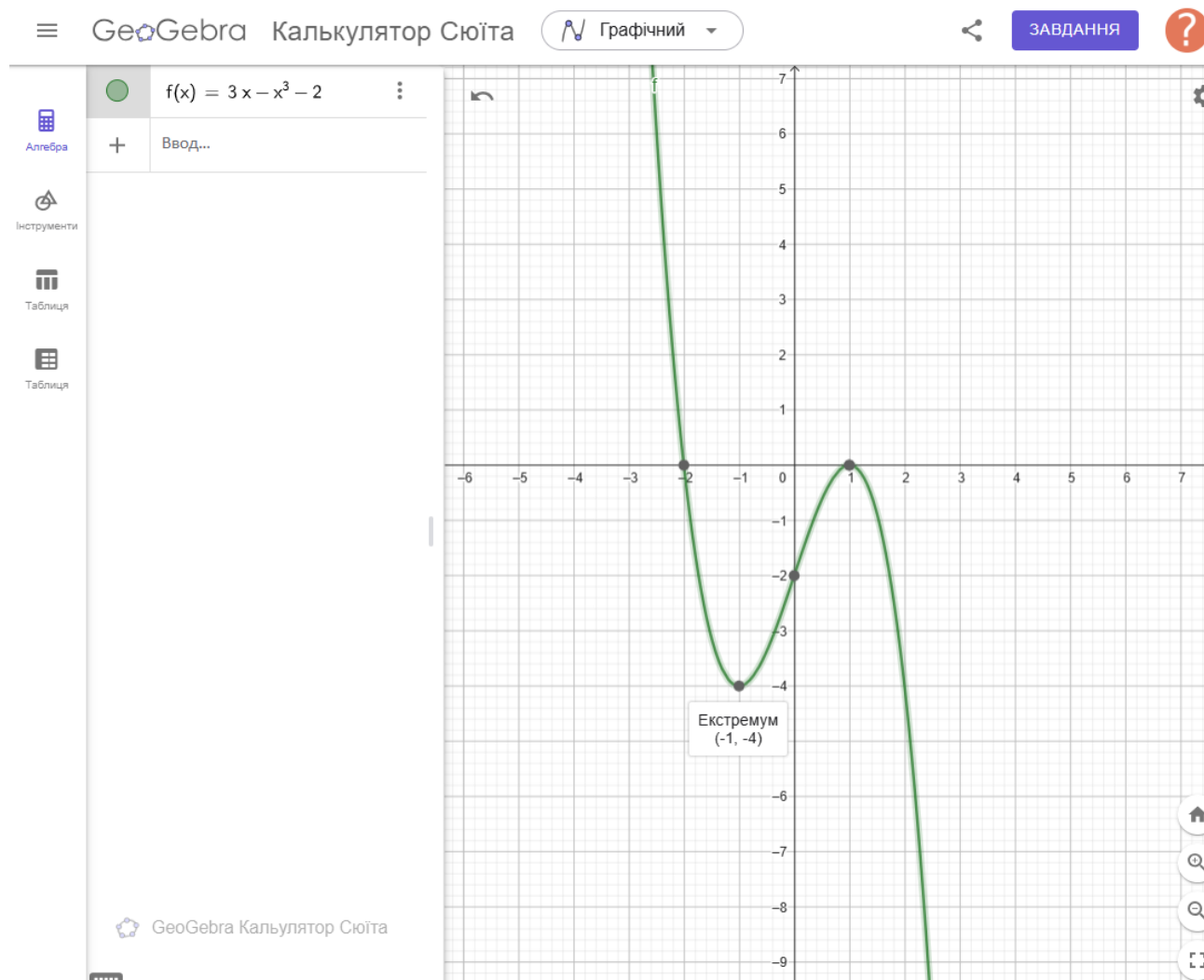
Функція спадає на проміжку $(-\infty; -2]$

Функція зростає на проміжку $[-2; +\infty)$.

Вправа 25.1

Побудуйте графік функції

$$f(x) = 3x - x^3 - 2$$



VI. Підсумок уроку. Рефлексія.(4 хв)

Метод "Мікрофон"

На уроці я ...

Дізнався...

Навчився...

Зрозумів...

Не вмів, а тепер умію...

VII. Домашнє завдання.(1 хв)

Виконати вправи 278.280,284.