МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Кафедра теорії функцій та методики навчання математики

На правах рукопису

Корецький Владислав Сергійович

ЛІНІЙНІ ДОДАТНІ ОПЕРАТОРИ

Спеціальність: 111 Математика

Освітньо-професійна програма: «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник :

ХАРКЕВИЧ ЮРІЙ ІЛІОДОРОВИЧ

Кандидат фізико-математичних наук, професор

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол №____________

Засідання кафедри теорії функцій та методики навчання математики

від ___________ 20___ р.

Завідувач кафедри

доц. Гембарська С. Б. ___________

Луцьк – 2024

ЗМІСТ

Вступ

Актуальність теми

Лінійні додатні оператори є одним із ключових інструментів сучасного функціонального аналізу. Вони відіграють важливу роль у вирішенні багатьох теоретичних та прикладних задач, таких як апроксимація функцій, обчислення інтегралів, моделювання фізичних процесів тощо. Їх застосування виходить далеко за межі математики, охоплюючи такі сфери, як інженерія, економіка, біологія, теорія керування та інформаційні технології.

Особливість лінійних додатних операторів полягає в їх здатності зберігати додатність функцій та певні властивості їхньої структури, що робить їх незамінними для роботи з додатно визначеними величинами. Ця властивість є критичною, наприклад, у моделюванні фізичних систем, де додатний результат має фундаментальне значення, як у випадку густини речовини або ймовірностей.

Останні дослідження в цій галузі спрямовані на розширення класів операторів, покращення їх точності та ефективності, а також оптимізацію їхніх характеристик у задачах наближення. Проте багато аспектів, зокрема створення універсальних підходів до побудови додатних операторів і їх адаптація до сучасних викликів у прикладній математиці, залишаються відкритими.

Мета роботи

Метою магістерської роботи є систематичний аналіз властивостей лінійних додатних операторів, дослідження їхнього впливу на процес апроксимації функцій та розробка нових підходів до їхнього використання в задачах функціонального аналізу.

Завдання дослідження

У межах цієї роботи поставлено такі завдання:

- Провести огляд сучасного стану досліджень лінійних додатних операторів у теорії функцій та апроксимації.

- Визначити основні властивості лінійних додатних операторів та їх вплив на функціональні простори.
- Розглянути методи побудови нових класів операторів з покращеними характеристиками.
- Проаналізувати ефективність запропонованих операторів у задачах апроксимації функцій.

Об'єкт і предмет дослідження

- **Об'єкт дослідження:** лінійні додатні оператори у функціональних просторах.
- **Предмет дослідження:** їх властивості, методи побудови та застосування у задачах теорії функцій.

Наукова новизна

У ході дослідження проаналізовано нові результати щодо теоретичних і прикладних аспектів лінійних додатних операторів. Розглянуто нові конструктивні методи для їх аналізу, а також удосконалено підходи до оцінки ефективності операторів.

Апробація дослідження

Результати роботи були представлені у формі тез на міжнародній науковій конференції, присвяченій 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження М. П. Ленюка на тему «Про диференціальні властивості розв'язків деяких крайових задач». Чернівці- Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича. 2021. С.- 98-103.

Практичне значення

Результати дослідження можуть бути використані для вирішення задач, пов'язаних з моделюванням фізичних і математичних процесів, зокрема апроксимації функцій, чисельного інтегрування. Крім того, методи, запропоновані у роботі, можуть знайти застосування у комп'ютерній графіці, обробці сигналів і зображень, а також у математичному забезпеченні систем керування.

Структура роботи

Магістерська робота складається зі вступу, одного розділу, що включає 10 параграфів, прикладів розв’язування задач, висновків, списку використаних джерел та додатків.

Лінійні додатні функціонали та оператори

§1. Група, кільце, поле, лінійний простір

Означення 1. Множина G елементів довільної природи називається **групою**, якщо на G встановлена операція, що ставить у відповідність кожній парі елементів x, y з G деякий елемент $\omega = xy$, який називається **добутком** елементів x і y, при цьому виконуються наступні аксіоми:

1. $(xy)z = x(yz)$ (асоціативність);
2. в G існує **ліва одиниця**, тобто такий елемент e, що $ex = x$ для будь-якого $x \in G$;
3. для будь-якого елемента $x \in G$ існує **лівий обернений елемент**, тобто такий елемент x^{-1}, що $x^{-1}x = e$.

Якщо, окрім того, для будь-яких двох елементів x і y виконуються рівності $xy = yx$, то група називається **комутативною** або **абелевою**. Для комутативних груп зазвичай групову операцію записують у вигляді **додавання**: $\omega = x + y$, при цьому одиниця групи називається **нульовим елементом** і позначається символом 0, а елемент x^{-1}, обернений до x, називається **протилежним** і позначається x. Такі групи називають **адитивними**.

Означення 2. Кільцем K називається множина, на якій визначені дві операції — додавання та множення, що задовольняють наступним властивостям:

1. Відносно додавання K є абелевою групою;

2. Для множення виконується асоціативність: $(xy)z = x(yz)$;
3. $x(y+z) = xy + xz$; $(y+z)x = yx + zx$.

Означення 3. Полем P називається комутативне кільце з одиницею, ненульові елементи якого утворюють групу відносно множення.

Означення 4. Лінійним простором L над полем P називається множина, на якій визначені операції — додавання та множення на елементи поля, що задовольняють наступним властивостям:

1. Відносно додавання L є абелевою групою;
2. Виконуються співвідношення:

- $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
- $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
- $1 \times x = x$

де 1, $\alpha, \beta \in P$; $x, y \in L$.

§2. Лінійні оператори. Простір операторів

Означення 1. Відображення A лінійного простору L_1 в лінійне простір L_2 над тим самим полем P називається лінійним оператором (позначення $A: L_1 \to L_2$), якщо виконуються наступні аксіоми:

1. $A(x+y) = Ax + Ay$ для будь-яких x та y з L_1,
2. $A(\alpha x) = \alpha Ax$ для будь-якого $x \in L_1$ та будь-якого $\alpha \in P$.

Простір $L_1 = L_2 = L$ також є лінійним, і відображення A називається лінійним оператором.

Введемо поняття суми операторів $A: L_1 \to L_2$ і $B: L_1 \to L_2$ наступним чином:

$$(A+B)x = Ax + Bx, x \in L_1$$

очевидно, що це також лінійний оператор, тобто $(A+B): L_1 \to L_2$.

Точно так само вводиться поняття множення лінійного оператора A на скаляр $\alpha \in P$, а саме:

$$(\alpha A)x = \alpha(Ax)$$

для будь-якого $x \in L_1$.

Нарешті, якщо $A: L_1 \to L_2$ і $B: L_1 \to L_2$, то добуток лінійних операторів A і B визначається за правилом:

$$(BA)x = B(Ax)$$

Добуток BA є лінійним оператором і відображає L_1 в L_3.

Таким чином, ми приходимо до важливого поняття — простору лінійних операторів.

Означення 2. Сукупність всіх лінійних операторів, що відображають лінійний простір L_1 в L_2, утворює лінійне простір з введеними вище операціями додавання операторів A і B та множення оператора A на скаляр $\alpha \in P$. Цей простір називається простором лінійних операторів і позначається $(L_1 \to L_2)$.

Якщо $L_1 = L_2 = L$, то $(L \to L)$ є кільцем.

Таким чином, ми побудували новий простір $(L_1 \to L_2)$, елементами якого є лінійні оператори.

Розглянемо тепер частковий випадок лінійного відображення в лінійний простір із полем скалярів, яке може бути комплексним чи дійсним.

Означення 3. Лінійний оператор $A: L_1 \to L_2$ називається лінійним функціоналом, якщо $L_2 \subset P$, де P — поле коефіцієнтів.

Таким чином, функціонал відображає лінійний простір в поле коефіцієнтів, тобто функціонал — це числова функція.

Нагадаємо, що поле P, над яким визначено лінійний простір L, або співпадає з R^1, або з полем комплексних чисел C. (У першому випадку L називається дійсним лінійним простором, у другому — комплексним.)

§3.Принцип рівномірної обмеженості.

Природно виникає питання про повноту простору лінійних операторів $N_1 \to N_2$ і в сенсі точкової збіжності операторів.

Означення 1. Нехай дана послідовність лінійних обмежених операторів

$$\{A_n\} \in (N_1 \to N_2)$$

така, що числова послідовність

$$\{\|A_n\|\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

є не обмеженою. Тоді множина $\{\|A_n\|\}$ не обмежена, якщо x належить будь-якому замкнутому шару $K(x_0; \varepsilon)$.

Теорема 1 (Банаха). Нехай послідовність $\{A_n\}$ лінійних обмежених операторів, які відображають банахів простір B у нормований простір N, поточково сходиться при $n \to \infty$ до оператора A. Тоді числова послідовність $\{\|A_n\|\}$ обмежена, а отже, $\lim\limits_{x\to\infty} A_n x = 0$ рівномірна, і оператор $Ax = \lim\limits_{x\to\infty} A_n x$ є обмеженим.

Теорема 2. Нехай B_1 і B_2 — банахові простори, тоді простір лінійних обмежених операторів $(B_1 \to B_2)$ є повним простором у сенсі точкової збіжності.

Теорема 3 (Принцип рівномірної неперервності). Нехай для кожного елемента σ деякої множини $\sum$ задано лінійне неперервне відображення A_σ одного F -

простору F_1 в інший F -простір F_2. Якщо для кожного $x \in F_1$ множина $\{A_\sigma x : \sigma \in \sum\}$ обмежена, то $\lim_{x \to 0} A_\sigma x$ рівномірно відносно $\sigma \in \sum$.

§4. Банахові простори

У функціональному аналізі важливу роль відіграють нормовані та банахові простори**.**

Означення 1. Лінійний простір N над полем P дійсних або комплексних чисел називається нормованим, якщо кожному елементу $x \in N$ відповідає невід'ємне дійсне число $\|x\|$, яке називається нормою елемента x, при цьому виконуються наступні аксіоми:

1. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
3. $\|x\| > 0$, якщо $x \neq 0$, де 0 — нульовий елемент з N.

Кожен нормований простір можна розглядати як метричний простір, де функція $\rho(x; y)$, визначена таким чином:

$$\rho(x; y) = \|x - y\|$$

Очевидно, з аксіом 1) — 3) визначення 1 ми отримаємо, що функція $\rho(x; y)$ задовольняє аксіомам 1) — 3) визначення відстані.

Таким чином, нормовані простори мають всі властивості метричних просторів. Зокрема, всі поняття, введені нами в попередньому параграфі, переносяться і на нормовані простори.

Тепер перейдемо до визначення банахового простору.

Означення 2. Банаховим простором B називається нормований простір, повне відносно метрики $\rho(x; y) = \|x - y\|$, що визначається його нормою.

§5. Продовження операторів і функціоналів. Принцип продовження Банаха- Хана

Якщо в лінійному просторі задано оператор або функціонал, визначений не на всьому просторі L, а лише на певному просторі L', то природно виникає питання про його продовження збереженням тих чи інших властивостей на весь простір. Іншими словами, потрібно побудувати новий оператор або функціонал, визначений вже на всьому просторі, що володіє певними властивостями і співпадає з раніше визначеним на L'.

Для лінійних операторів це питання вирішується легко, якщо вихідний оператор задано на лінійному многочлені, що всюди щільний в усьому просторі.

Справедлива така теорема.

Теорема 1. Лінійний обмежений оператор A_0, заданий на лінійному просторі L', що всюди щільний в лінійному нормованому просторі N, зі значенням у банаховому просторі B, може бути продовжений на все простір без збільшення своєї норми. А саме, на просторі N можна визначити оператор A, такий, що $Ax = A_0x, x \in L',\ \|A\|_n = \|A_0\|_{L'}$.

Якщо задано лінійний неперервний функціонал, то його можна продовжити зі збереженням норми, навіть якщо спочатку він заданий на лінійному многочлені, що не обов'язково всюди щільний в просторі. Відповідна теорема відіграє важливу роль в аналізі і носить назву принцип продовження Банаха-Хана.

Теорема 2 (принцип продовження Банаха-Хана). Нехай на дійсному лінійному просторі L задана функція $p(x)$, тобто така дійсна функція, що:

$$p(x_1 + x_1) \leq p(x_1) + p(x_2), \qquad p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad x_1, x_2 \in L, \quad \lambda \geq 0.$$

Нехай $f(x)$ — дійсний лінійний функціонал, визначений на лінійному многочлені L', такий, що:

$f(x) \leq p(x), \qquad x \in L'$.

Тоді існує дійсний лінійний функціонал F, визначений на всьому L, такий, що:

1. $F(x) = f(x), \quad x \in L'$,
2. $F(x) \leq p(x), \quad x \in L$.

Тобто функціонал f продовжується до неперервного функціонала F на L з збереженням норми.

§6. Лінійні додатні функціонали

Вивчення природи, для явищ якої характерні постійні зміни і взаємозалежності, призвело до понять змінної та функції — найважливіших понять сучасної математики.

Що таке функція?

Ми говоримо, що на множині X дійсних чисел x визначена функція $f(x)$, якщо кожному значенню x з множини X поставлено у відповідність дійсне число y, $y = f(x)$. Іншими словами, функція задана, якщо:

1) дано певну множину X дійсних чисел x

2) вказано закон, за яким кожному числу x з множини X відповідає дійсне число y, $y = f(x)$.

Розглянемо тепер кілька операцій над функціями, які приведуть нас до поняття функціонала.

1. Позначимо $M(f) = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$. Що спільного між величиною $M(f)$ і функцією, і які між ними відмінності? Величина $M(f)$ — це залежна змінна величина. Так, якщо $f_1(x) = x + 1$,а $f_2(x) = x^2 + 6$ то $M(f_1) = 2$, $M(f_2) = 7$. Залежною змінною величиною є також і функція. Відмінності між величиною $M(f)$ і функцією не є суттєвими: вони полягають у відмінностях природи аргументів цих величин. Точка (число) — це

аргумент функції, а обмежена на відрізку $[0,1]$ функція $f(x)$ — це аргумент величини $M(f)$. Множина F функцій $f(x)$, обмежених на відрізку $[0,1]$, є областю існування величини $M(f)$.

2. Нехай $\varphi(x)$ — неперервна на відрізку $[a,b]$ функція. Позначимо

$$I(f)=\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x).$$

Величина $I(f)$, значення якої залежить від $f(x)$($\varphi(x)$— фіксована функція), визначена на множині F функцій $f(x)$, інтегровних на відрізку $[a,b]$. Узагальнюючи ці приклади, ми приходимо до поняття функціонала.

Означення 1. Ми говоримо, що на множині F функції $f(x)$ визначений функціонал $\Phi(f)$, якщо кожній функції $f(x)$, що належить множині F, $f(x)\in F$, поставлено у відповідність дійсне число Φ, $\Phi=\Phi(\mathrm{f})$. Множина F називається областю існування функціонала.

Зауваження. З цього визначення випливає, що відмінність між функціоналом і функцією полягає лише у відмінностях областей існування цих величин: множина точок — область існування функції, множина функцій — область існування функціонала. Інших відмінностей між цими поняттями немає. Саме тому часто не вживають нового терміна «функціонал», а говорять про функцію, задану на множині F, функцій $f(x)$.

Означення 2. Функціонал $\Phi(\mathrm{f})$ називається лінійним, якщо область його існування разом з функціями $f(x)$ і $\varphi(x)$ містить функцію $af(x)+b\varphi(x)$ і якщо має місце рівність

$$\Phi(af+b\varphi)=a\Phi(f)+b\Phi(\varphi),$$

де a і b — будь-які дійсні числа.

Приклад 1.

$$\Phi(\mathrm{f}) = Af(\alpha)$$

Функціонал $\Phi(\mathrm{f})$ існує на множині F функцій f, визначених у точці $x = \alpha$. Лінійність його випливає з рівності:

$$\Phi(af + b\varphi) = A[af(\alpha) + b\varphi(\alpha)] = Aaf(\alpha) + Ab\varphi(\alpha) = a\Phi(\mathrm{f}) + b\Phi(\mathrm{f})$$

Таким чином, F є лінійним функціоналом.

Означення 3. Лінійний функціонал $\Phi(\mathrm{f})$ називається додатнім, якщо $\Phi(\mathrm{f}) \geq 0$ для кожної додатної функції $f(x)$. (Додатною вважається функція, що не приймає від'ємних значень).

Легко побачити, що значення лінійного додатного функціонала $\Phi(\mathrm{f})$ не зменшується з збільшенням його аргументу. Дійсно, якщо $f_1(x) \geq f_2(x)$, тобто$f_1(x) - f_2(x) \geq 0$, то

$$0 \leq \Phi(f_1 - f_2) = \Phi(f_1) - \Phi(f_2)$$

і

$$\Phi(f_1) \geq \Phi(f_2)$$

Ця обставина дозволяє називати додатні лінійні функціонали монотонно зростаючими.

Приклад 2. Функціонал $\Phi(f) = Af(\alpha)$ є додатнім, якщо $A \geq 0$.

Приклад 3. Функціонал $\Phi(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ є додатнім лише тоді, коли $A_k \geq 0,\ k = 1, 2, \dots, n$.

Якщо $A_k \geq 0,\ k = 1, 2, \dots, n\ i\ f(x) \geq 0$, то

$$\Phi(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \geq 0$$

Якщо ж, наприклад, $A_1 < 0$, то, поклавши $f(x_1) = 1$ $і$ $f(x) = 0,\ x \neq x_1$, отримаємо $\Phi(f) = A_1 < 0$, проте $f(x)$- додатна функція.

Тепер ми займемося дослідженням збіжності послідовності $\{\Phi_n(\mathrm{f})\}$ лінійних додатних функціоналів, при цьому нас будуть цікавити умови, виконання яких веде до рівності

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n) = f(\alpha) \qquad (1)$$

що є справедливим, наприклад, для всіх функцій $f(x)$, що неперервні в точці $x = \alpha$ і обмежені на дійсній осі. Зрозуміло, що характер таких умов може бути найрізноманітнішим. Ми будемо шукати умови виконання рівності (1) для всіх функцій $f(x)$, неперервних в точці $x = \alpha$, припускаючи виконання її для деяких простих функцій.

Теорема 1. Якщо для послідовності лінійних позитивних функціоналів $\Phi_n(\mathrm{f})$ виконуються дві умови:

$$\Phi_n(1) \to 1, \Phi_n(\varphi) \to 0 \text{ при } n \to \infty \qquad (2)$$

де $\varphi(\mathrm{x}) = (x-\alpha)^2$, то

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(\mathrm{f}) = f(\alpha) \qquad (3)$$

для будь-якої функції $f(x)$, що неперервна в точці $x = \alpha$ і обмежена на дійсній осі.

Зауваження. У цій теоремі припускається, хоча це й не було зазначено в її формулюванні, що функція $f(x)$ належить областям існування всіх функціоналів послідовності. Цим же областям існування належать функції $f(x) \equiv 1$ і $\varphi(\mathrm{x}) = (x-\alpha)^2$, хоча остання й не обмежена на дійсній осі.

Це зазначення стосується не лише цієї, але й усіх наступних теорем. У формулюваннях усіх наступних теорем ми також будемо припускати існування величин, там зазначених. Але для полегшення формулювань ми не будемо цього в них оголошувати.

Наслідок 1. Якщо для послідовності лінійних додатних функціоналів $\Phi_n(\mathrm{f})$ виконуються три умови:

1. $\Phi_n(1) \to 1$ (4)
2. $\Phi_n(x) \to \alpha$ (5)
3. $\Phi_n(x^2) \to \alpha^2$ (6)

то для будь-якої функції $f(x)$, обмеженої на дійсній осі і неперервної в точці $x = \alpha$, послідовність $\Phi_n(\mathrm{f})$ збігається до $f(\alpha)$.

Теорема 2. Якщо для послідовності лінійних і додатних функціоналів $\Phi_n(\mathrm{f})$ виконуються дві умови:

$$\Phi_n(1) \to 1, \Phi_n(\varphi) \to 0, \qquad (7)$$

де $\varphi(\mathrm{x}) = \sin^2 \frac{x-\alpha}{2}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(\mathrm{f}) = f(\alpha) \qquad (8)$$

якщо функція $f(x)$ має період 2π, неперервна в точці $x = \alpha$ і обмежена.

Наслідок 2. Якщо для послідовності лінійних і додатних функціоналів виконані три умови:

$$\Phi_n(1) \to 1 \qquad (9)$$

$$\Phi_n(\cos x) \to \cos \alpha \qquad (10)$$

$$\Phi_n(\sin x) \to \sin \alpha \qquad (11)$$

то

$$\Phi_n(\mathrm{f}) = f(\alpha) \qquad (12)$$

якщо періодична функція $f(x)$ неперервна в точці $x = \alpha$ і обмежена.

§7. Лінійні додатні оператори

Ми почнемо з розгляду прикладу, який приведе нас до поняття оператора, близького до поняття функції.

Нехай $u_1(x)$, $u_2(x)$… $u_n(x)$ — функції, задані на множині E та t_1, t_2, …, t_n — дійсні числа. Покладемо:

$$H(f;x) = H(f(t);x) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)u_k(x) = \varphi(x) \qquad (1)$$

Останнім рівнянням кожній функції $f(t)$, заданій на множині точок t_1, t_2, …, t_n ставиться у відповідність функція $\varphi(x) = H(f;x)$.

Означення 1. Ми кажемо, що на множині F функцій $f(t)$ заданий оператор $H(f;x) = H(f(t);x)$, якщо кожній функції $f(t)$ з множини F поставлена у відповідність функція $\varphi(x)$, $\varphi(x) = H(f;x)$.

Зауваження. Відмінність оператора від функції полягає в тому, що ці величини мають різні області існування: множина чисел — область існування і зміни функції, множина функцій — область існування і зміни оператора.

Означення 2. Оператор $L(f;x)$ називається лінійним, якщо область існування його разом з функціями $f(t)$ і $\varphi(t)$ містить функцію $af(t) + b\varphi(t)$ і якщо має місце рівність

$$L(af + b\varphi;x) = aL(f;x) + bL(\varphi;x), \qquad (2)$$

де a і b — будь-які дійсні числа.

Приклад 1.

Нехай $u_1(x)$, $u_2(x)$… $u_n(x)$ — функції, задані на множині F. Покладемо:

$$L(f;x) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) u_k(x)$$

Маємо

$$L(af + b\varphi;x) = \sum_{k=1}^{n} (af(t_k) + b\varphi(t_k));x)\, u_k(x) =$$

$$= a\sum_{k=1}^{n} f(t_k)u_k(x) + b\sum_{k=1}^{n} \varphi(t_k)u_k(x) =$$

$$= aL(f;x) + bL(\varphi;x).$$

Цим доведена лінійність оператора $L(f;x)$.

Означення 3. Лінійний оператор $L(f;x)$ називається додатнім на множині E, якщо нерівність $L(f;x) \geq 0,\ x \in E$ справедлива для кожної додатної функції $f(t)$.

Зазначимо (і це дуже важливо), що при кожному фіксованому значенні x лінійний оператор $L(f;x)$ стає лінійним функціоналом. Звідси слідує, що лінійний оператор $L(f;x)$ буде додатнім на множині E, якщо для кожного фіксованого значення x з цієї множини буде додатним лінійним функціоналом, і, навпаки, якщо лінійні функціонали $L(f;\bar{x})$ додатні для кожного значення $\bar{x}$ з множини E, то додатнім буде й лінійний оператор $L(f;x)$ на цій множині.

Так, наприклад, оператор

$$L(f;x) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) u_k(x)$$

додатній на множині E тільки тоді, коли всі функції $u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, додатні на цій же множині; оператор:

$$L(f; x) = \int_a^b f(t)\varphi(t; x)dt,$$

де $\varphi(t; x)$ неперервна на відрізку $a \leq t \leq b$ відносно аргументу t при кожному фіксованому значенні x з множини E, додатні тільки тоді, коли функція $\varphi(t; x)$ додатна на відрізку $a \leq t \leq b$ при кожному фіксованому значенні x з множини E.

Також зазначимо для подальшого, що аргумент функції f, що стоїть під знаком лінійного оператора $L(f; x)$, відрізняється від $x, L(f; x) = L(f(t); x)$. При обчисленні значення оператора $L(f; x)$ ми вважаємо x сталим (але будь-яким з множини E), і тому справедлива рівність:

$$L(f(x); x) = f(x)L(1; x) \qquad (3)$$

Тепер, ми займемося дослідженням умов, виконання яких веде до рівномірної збіжності на відрізку $[a; b]$ послідовності лінійних додатних операторів $L_n(f; x)$ до функції $f(x)$, що є неперервною на цьому відрізку, неперервною справа в точці b і зліва в точці a та обмеженою на всій дійсній осі. Як і в випадку функціоналів, ми будемо шукати ці умови, виходячи з припущення, що рівномірна збіжність має місце для тих чи інших простих функцій. А саме, ми покажемо, що рівномірна збіжність на відрізку $[a; b]$ послідовності

$L_n(f; x)$ до $f_k(x) = x^k, k = 0, 1, 2,$ веде до рівномірної збіжності $L_n(f; x)$ до $f(x)$, якщо $f(x)$ задовольняє раніше зазначеним умовам.

Далі будуть наведені два доведення цього твердження, одне з яких спирається на рівномірну неперервність функції, що є неперервною на відрізку, а інше — не спирається на цю властивість неперервної функції. Попередньо розглянемо одну лему і теорему.

Лема 1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, неперервна справа в точці b і зліва в точці a, то по $\varepsilon > 0$ можна задати $\delta > 0$ таке, що буде виконуватися нерівність:

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon,$$

якщо

$$|y - x| < \delta,$$

$$a \leq x \leq b.$$

Теорема Больцано-Вейерштраса. З будь-якої обмеженої послідовності чисел $\{x_n\}$ можна вибрати збіжну підпослідовність.

Теорема 1. Якщо для послідовності лінійних і додатних операторів $L_n(f; x)$ виконуються три умови:

$$L_n(1; x) = 1 + \alpha_n(x) \qquad (4)$$

$$L_n(t; x) = x + \beta_n(x) \qquad (5)$$

$$L_n(f^2; x) = x^2 + \gamma_n(x) \qquad (6)$$

де $\alpha_n(x), \beta_n(x), \gamma_n(x)$ рівномірно прямують до нуля на відрізку $a \leq x \leq b$, то послідовність $L_n(f; x)$ рівномірно на цьому відрізку збігається до функції $f(x)$, якщо $f(t)$ обмежена, неперервна на відрізку $[a; b]$, неперервна справа в точці b і зліва в точці a.

Теорема 2. Якщо для послідовності лінійних додатних операторів $L_n(f; x)$ виконуються три умови:

$$L_n(1; x) = 1 + \alpha_n(x) \qquad (7)$$

$$L_n(t; x) = \cos x + \beta_n(x) \qquad (8)$$

$$L_n(f^2;x) = \sin x + \gamma_n(x) \qquad (9)$$

де $\alpha_n(x), \beta_n(x), \gamma_n(x)$ рівномірно прямують до нуля на відрізку $[a;b]$, то послідовність $L_n(f;x)$ рівномірно збігається на цьому відрізку до функції $f(x)$, якщо функція $f(t)$ обмежена, має період 2π, неперервна на відрізку $[a;b]$, неперервна справа в точці b і зліва в точці a.

Лема 2. Якщо функція $\varphi(x)$ задовольняє такі умови:

1. $\varphi(x)$ неперервна на відрізку $-c \leq x \leq c, c > 0$
2. $\varphi(0) = 0;$ $0 \leq \varphi(x) < 1$, якщо $x \neq 0, -c \leq x \leq c$

якщо ми покладемо:

$$I_n = \int_{-c}^{c} \varphi^n(x)dx \ ; \qquad I_n(\delta) = \int_{-\delta}^{\delta} \varphi^n(x)dx; \qquad 0 < \delta \leq c$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n(\delta)}{I_n} = 1.$$

Теорема 3. Якщо функція $\varphi(x)$ задовольняє умовам леми 2 і

$$I_n = \int_{-c}^{c} \varphi^n(x)dx$$

то послідовність операторів

$$L_n(f;x) = \frac{1}{I_n}\int_{a}^{b} f(t)\varphi^n(t-x)dt, \qquad 0 < b - a \leq c$$

рівномірно на відрізку $[a+\delta,\ b-\delta], \delta>0$, збігається до функції $f(x)$, якщо на відрізку $[a,\ b]$ функція $f(x)$ неперервна.

§8. Наближення функцій алгебраїчними многочленами

З курсу математичного аналізу відомо, що деякі функції (аналітичні функції) можуть бути представлені сумою степеневого ряду

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \qquad (1)$$

що рівномірно збігається до функції $f(x)$ на деякому відрізку $[-a;a], a>0$.

Це означає, що якщо ми позначимо

$$S_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n, \quad S_0=a_0$$

то для будь-якого $\varepsilon>0$ можна вказати номер $N(\varepsilon)$ такий, що для $n>N(\varepsilon)$ виконуватиметься нерівність

$$|f(x)-S_n(x)|<\varepsilon, \qquad -a\le x\le a$$

Тобто, многочлен $S_n(x)$ може бути скільки завгодно близьким до функції $f(x)$, якщо степінь n многочлена достатньо великий. Але чи може будь-яка неперервна функція на відрізку $[-a;a]$ бути представлена у вигляді суми степеневого ряду?

З курсу математичного аналізу відомо, що рівність, яка слідує з (1), вимагає нескінченної диференційованості функції $f(x)$ на інтервалі $-a<x<a$, а цією властивістю володіє далеко не кожна неперервна функція.

Ще Вейерштрас навів приклад неперервної функції, яка не має похідної в жодній точці. Зрозуміло, що таку функцію не можна представити як суму збіжного ряду (1). Проте Вейерштрас встановив наскільки завгодно можливого наближення будь-якої неперервної функції належно вибраними многочленами.

Перша теорема Вейерштрасса. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $a \leq x \leq b, \varepsilon > 0$, то можна вказати многочлен $P(x)$такий, що нерівність

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

буде справедливою для всіх значень x з цього відрізка.

§9. Наближення функцій тригонометричними поліномами

Означення 1. Дві функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ називаються ортогональними на відрізку $a \leq x \leq b$, якщо

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0$$

Означення 2. Скінченна або нескінченна система функцій $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$… називається ортогональною на відрізку $a \leq x \leq b$, якщо ортогональні на цьому відрізку будь-які дві функції цієї системи, тобто:

$$\int_a^b f_i(x)f_k(x)dx = 0\,, \qquad i \neq k.$$

Лема 1. Тригонометрична система функцій $1, \cos x\,, \sin x\,,\ \cos 2x\,,\ \sin 2x\,, \ldots$ є ортогональною на відрізку $[-\pi, \pi]$.

Означення 3. Функція

$$T_n(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots \\ + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \cdots$$

називається тригонометричним поліномом порядку n, якщо $a_n^2 + b_n^2 \neq 0$, а ряд

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ + \cdots$$

називається тригонометричним рядом.

Якщо тригонометричний ряд рівномірно збігається на відрізку $[-\pi, \pi]$ (завдяки періодичності тригонометричних функцій), то його рівномірна збіжність випливає з того, що функція $f(x)$ може бути представлена як такий ряд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad (1)$$

де коефіцієнти a_k та b_k визначаються за формулами:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \qquad (2)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \qquad (3)$$

Дійсно, інтегруючи рівняння (1) на відрізку $[-\pi, \pi]$, ми отримаємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx \right).$$

Почленне інтегрування ряду можливе, так як він рівномірно збігається. Так як всі інтеграли, що стоять під знаком останньої суми, рівні нулю, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{a_0}{2} \times 2\pi = a_0 \pi,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Таким чином, рівність (2) доведено для $k = 0$. Для перевірки його у випадку $k = 1, 2, 3, \ldots$ перемножимо обидві частини рівності (1) на $\cos kx$ та проінтегруємо в межах від $-\pi$ до π. Отримаємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx =$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx + \sum_{S=1}^{k-1} \left(a_s \int_{-\pi}^{\pi} \cos sx \cos kx \; dx + b_s \int_{-\pi}^{\pi} \sin sx \cos kx \, dx \right) +$$

$$+ a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx \, dx +$$

$$+ \sum_{S=k+1}^{\infty} \left(a_s \int_{-\pi}^{\pi} \cos sx \cos kx \; dx + b_s \int_{-\pi}^{\pi} \sin sx \cos kx \, dx \right). \qquad (4)$$

В силу леми 3 всі інтеграли правої частини рівності (4), крім одного, рівні нулю і тому:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = a_k \pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx.$$

Помноживши рівність (1) на $\sin kx$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ та проінтегрувавши в межах від $-\pi$ до π, отримаємо рівність (3).

Таким чином, ми показали, що коефіцієнти ряду (1) однозначно визначаються за допомогою рівнянь (2) та (3), якщо ряд рівномірно сходиться до функції $f(x)$.

Проте праві частини рівнянь (2), (3) мають сенс для будь-якої функції $f(x)$, інтегрованої на відрізку від $-\pi$ до π, незалежно від того, чи є вона рівномірно збіжним тригонометричним рядом.

Коефіцієнти a_k, b_k за формулами (2) та (3) називаються **коефіцієнтами Фур'є** функції $f(x)$, а ряд:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (5)$$

називається **рядом Фур'є** цієї функції.

Лема 2. Справедливе відношення:

$$D_n(\alpha) = \frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad (6)$$

$$F_n(\alpha) = \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{3}{2}\alpha + \cdots + \sin\frac{2n-1}{2}\alpha = \frac{\sin^2\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad (7)$$

Тепер покажемо інтегральне представлення часткових сум ряду Фур'є функції $f(x)$, за допомогою якого ми встановимо в подальшому рівномірну збіжність цих рядів для досить широкого класу неперервних та періодичних функцій. Покладемо:

$$S_n(f;x) = S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

В силу (2) та (3) отримаємо:

$$S_n(f;x) = S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt + \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} (\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(t-x)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\frac{1}{2} + \cos(t-x) + \dots + \cos n(t-x))dt.$$

Взявши до уваги рівність (7), отримаємо:

$$S_n(f;x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt \qquad (8)$$

Відмітимо одну важливу властивість лінійного оператора $S_n(f;x)$. Якщо

$$f(x) = T_m(x) = A + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (9)$$

то ряд Фур'є функції $T_m(x)$ співпадає з цим поліномом, і тому часткові суми $S_n(T_m;x)$ ряду для $n \geq m$ також будуть співпадати з $T_m(x)$

$$T_m(x) = S_n(T_m;x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_m(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt \qquad (10)$$

Зокрема:

$$1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt\,,\qquad n\geq 0 \qquad (11)$$

Покладемо:

$$F_n(f;x)=\frac{S_0(f;x)+S_1(f;x)+\cdots+S_{n-1}(f;x)}{n} \qquad (12)$$

Оператори $F_n(f;x)$ називаються операторами Фейера. Беручи до уваги рівності (7), (8) та (12), отримаємо:

$$F_n(f;x)=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)+\sin\frac{3}{2}(t-x)+\cdots+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{(\sin\frac{n}{2})^2(t-x)}{2(\sin\frac{t-x}{2})^2}dt. \qquad (13)$$

Поклавши $f(t)=1,\cos t\,,\sin t$ та врахувавши (12) і (13), отримаємо:

$$F_n(1;x)=\frac{S_0(1;x)+S_1(1;x)+\cdots+S_{n-1}(1;x)}{n}=\frac{1+1+\cdots+1}{n}=1 \qquad (14)$$

$$F_n(\cos t\,;x)=\frac{0+\cos x+\cdots+\cos x}{n}=\frac{n-1}{n}\cos x \qquad (15)$$

$$F_n(\sin t\,;x)=\frac{n-1}{n}\sin x \qquad (16)$$

Друга теорема Веєрштраса. Якщо функція $f(x)$ має період 2π і неперервна на дійсній осі, то по $\varepsilon>0$ можна вказати тригонометричний поліном $T(x)$ такий, що буде справедлива нерівність

$$|T(x)-f(x)|<\varepsilon,\qquad -\pi\leq x\leq\pi.$$

§10. Про умови збіжності послідовності лінійних додатних операторів.

В цьому параграфі ми обмежимося дослідженням умов рівномірної збіжності на відрізку $a \leq x \leq b$ послідовності лінійних додатніх операторів $L_n(f;x)$, значення яких не залежить від поведінки функції $f(x)$ за межами відрізка.
У теоремі ми показали, що рівномірна збіжність на відрізку $[a,b]$ послідовності $L_n(f;x)$ до $f(x)$ має місце для будь-якої функції $f(x)$, неперервної на цьому відрізку, якщо тільки послідовність $L_n(f_k;x)$ рівномірно збігається до $f_k(x)$, де $f_k(x) = x^k, k = 0,1,2.$
Природно виникають питання: чи можна в умові теореми 3 замінити функції $1, x, x^2$ будь-якими трьома лінійно незалежними на цьому відрізку функціями? (Система функцій $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ називається лінійно незалежною на відрізку $a \leq x \leq b$, якщо рівність $a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_k(x) \equiv 0$ має місце, тоді і тільки тоді, коли $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$). Чи можна замінити в умові теореми три функції $1, x, x^2$ будь-якими двома іншими функціями?
Зараз ми покажемо, що на поставлені питання можна дати негативну відповідь.

Теорема 1. Якщо три неперервні на відрізку $[a,b]$ функції $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ такі, що існує многочлен

$$F(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$$

який містить більше як два нулі на цьому відрізку, а числа a_0, a_1, a_2 одночасно не дорівнюють нулю, то існує лінійний додатній оператор $L(f;x)$ такий, що

$$L(f_k;x) \equiv f_k(x), \quad a \leq x \leq b, \qquad k = 0,1,2, \qquad (1)$$

і неперервна на відрізку функція $f(x)$ така, що

$$L(f;x) \not\equiv f(x).$$

Наслідок 1. В умові теореми 3 не можна замінити три функції $1, x, x^2$ будь-якими трьома неперервними і лінійно незалежними на відрізку $[a,b]$ функціями $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$.

Наслідок 2. В умові теореми не можна замінити три функції $1, x, x^2$ будь-якими двома функціями $f_0(x)$ і $f_1(x)$.

Означення 1. Система функцій $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, неперервних на відрізку $[a, b]$ називається системою Чебишева порядку n , T-системою, якщо деякий поліном

$$F(x) = a_0 f_0(x) + a_1\, f_1(x) + \cdots + a_n\, f_n(x)$$

має не більше n нулів на даному відрізку при умові, що не всі числа $a_0, a_1, a_2, \dots a_n$ рівні нулю.

Лема 1. Для того щоб система $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ трьох функцій, неперервних на відрізку $[a, b]$ була T-системою необхідно і достатньо, щоб оператор $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ був відмінний від нуля, якщо x_1, x_2, x_3- різні точки відрізку.

Означення 2. Корінь полінома F(x) називається простим, якщо при переході через нього поліном змінює знак, і подвійним, якщо не змінює. (Поняття простого та подвійного кореня має сенс тільки для внутрішніх точок відрізка.)

Лема 2. Якщо поліном $P(x)$ має два корені x_1 і x_2, то серед них немає подвійних.

Наслідок. Якщо в точці x_1 поліном має подвійний корінь, то він немає інших коренів на відрізку $a \leq x \leq b$.

Лема 3. Існує поліном $F(x)$, який має в точці $x_1, a < x_1 < b$, подвійний корень.

Лема 4. Якщо для послідовності лінійних додатних функціоналів виконуються три умови

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n\,(f_i) = f_i(\alpha)$$

$$i = 0, 1, 2$$

$$a \leq \alpha \leq b$$

де $\{f_i(x)\}$ -системи Чебишева на відрізку $[a, b]$ то знайдеться таке число, що буде справедлива нерівність

$$\Phi_n(1) < c < \infty, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Лема 5. Якщо виконуються умови леми 4 і $a \leq \alpha \leq b$, то $\Phi_n(f) \to f(\alpha)$, якщо функція $f(x)$ неперервна в точці $x = \alpha$ і обмежена на відрізку $[a, b]$.

Зауваження. Нагадаємо ще раз про те, що в цьому параграфі йдеться про функціонали та оператори, значення яких не залежить від поведінки функції за межами відрізка $a \leq x \leq b$.

Теорема 2. Якщо для послідовності лінійних і додатних функціоналів $\Phi_n(f)$ виконуються умови:

$$\Phi_n(f_i) \to f_i(\alpha), \qquad i = 0, 1, 2,$$

де $\{f_i(x)\}_0^2$- система Чебишева на відрізку $[a, b]$, то

$$\Phi_n(f) \to f(\alpha), \qquad a \leq \alpha \leq b$$

якщо функція $f(\,x)$ неперервна в точці $x = \alpha$ та обмежена на відрізку $[a, b]$.

Теорема 3. Якщо для послідовності лінійних додатних операторів $L_n(f; x)$ виконуються умови:

$$L_n(f_i; x) = f_i(x) + \alpha_{i,n}(x),$$

де $\{f_i(x)\}$- система Чебишева на відрізку $[a, b]$, а $\alpha_{i,n}(x)$, рівномірно на цьому відрізку прагне до нуля, то послідовність $L_n(f; x)$ рівномірно на відрізку $[a, b]$ сходиться до $f(\,x)$, якщо функція неперервна на даному відрізку.

ПРИКЛАДИ РОЗВЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Перевірка додатності оператора

Нехай L – лінійний оператор, заданий як:

$$L(f)(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

де $f(x)$ – неперервна функція на [0,1], $f(x) \geq 0$.

Потрібно довести, що L є додатним оператором.

Розв'язання:

1. Оператор L є лінійним, оскільки:

$$L(af + bg)(x) = \int_0^2 [af(t) + bg(t)]dt =$$

$$= a\int_0^2 f(t)dt + b\int_0^2 g(t)dt =$$

$$= aL(f)(x) + bL(g)(x)$$

   де $a, b \in R$.

2. Для перевірки додатності L, нехай $f(x) \geq 0$. Тоді:

$$L(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \geq 0$$

   для всіх $x \in [0, 1]$.

Отже, L є лінійним додатним оператором.

Задача 2. Застосування операторів у задачах наближення

Нехай

$$L_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x)$$

де

$P_{n,k}(x) = (\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$- многочлен Берштейна.

Задача: Довести, що $L_n(f)$ є додатним оператором і що $L_n(f) \to f$ за рівномірною нормою для $f \in C[0, 1]$.

Розв'язання:

1. Лінійність L_n випливає з того, що оператор побудований як сума добутків $f(\frac{k}{n})$ на $P_{n,k}(x)$.
2. Для перевірки додатності, нехай $f(x) \geq 0$. Тоді:

   $L_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x) \geq 0,$

   оскільки $P_{n,k}(x) \geq 0$ для всіх $x \in C[0, 1]$.

3. За теоремою Вейєрштрасса, оператор $L_n(f)$ збігається до $f(x)$ рівномірно на $[0, 1]$, оскільки $P_{n,k}(x)$ апроксимують $f(x)$ за умов неперервності.

Задача 3. Норма оператора

Нехай

$$L(f)(x) = xf(x)$$

на просторі $C[0,1]$ із нормою $\|f\| = max_{x\in[0,1]}|f(x)|$.

Задача: Обчислити норму оператора L.

Розв'язання:

1. За означенням, норма оператора:

$$\|L\| = \sup_{\|f\|\le 1} \|L(f)\| = \sup_{\|f\|\le 1} \max_{0\le x\le 1} |xf(x)|.$$

2. Оскільки

$$\|f\| = \max_{0\le x\le 1} |f(x)| = 1$$

то

$$|f(x)| \le 1.$$

Тоді:

$$|L(f)(x)| = |xf(x)| \le x.$$

3. Максимум x на $[0,1]$ досягається при $x = 1$. Отже, $\|L\| = 1$.

Задача 4. Оператор зваженого середнього

Нехай

$$L(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt$$

для $x > 0$, а $L(f)(0) = 0$.

Задача: Довести, що L є додатним оператором, і знайти його норму на просторі $C[0,1]$.

Розв'язання:

1. Лінійність:

   Для $g(x) = af_1(x) + bf_2(x)$ маємо:

$$L(g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t\big(af_1(x) + bf_2(x)\big)dt =$$

$$= aL(f_1)(x) + bL(f_2)(x),$$

   отже, L – лінійний.

2. Додатність:

   Якщо $f(x) \geq 0$ для всіх $x \in [0, 1]$, то $tf(t) \geq 0$, а отже:

$$L(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt \geq 0$$

   для всіх $x \in [0, 1]$.

   Також $L(f)(0) = 0 \geq 0$. Таким чином, L є додатним оператором.

3. Норма оператора:

   Для неперервної функції $f(x)$ з $\|f\| = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$, маємо:

$$|L(f)(x)| \leq \frac{1}{x}\int_0^x t|f(t)|dt \leq \frac{1}{x}\int_0^x t\|f\|dt = \|f\|\frac{x^2}{2x} = \frac{\|f\|}{2}.$$

   Отже, $\|L\| = \frac{1}{2}$.

Задача 5. Композиція лінійних додатних операторів

Нехай

$$L_1(f)(x) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

та

$$L_2(f)(x) = xf(x)$$

Задача: Довести, що композиція $L = L_1 \circ L_2$ є лінійним додатним оператором.

Розв'язання:

1. Лінійність:

   Для довільних f, g і $a, b \in R$ маємо:

$$L_1(af + bg) = \int_0^1 \big(af(t) + bg(t)\big)dt =$$

$$= a\int_0^1 f(t)dt + b\int_0^1 g(t)\,dt,$$

   тобто L_1 лінійний.

   Аналогічно, L_2 лінійний, тому їх композиція L також лінійна.

2. Додатність:

   Нехай $f(x) \geq 0$. Тоді

$$L_1(f)(x) = \int_0^1 f(t)dt \geq 0$$

   і, оскільки $x \geq 0$, маємо:

$L(f)(x) = x \times L_1(f)(x) \geq 0.$

Таким чином, L є додатним оператором.

Задача 6. Збереження додатності сумою операторів

Нехай

$$L_1(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

і

$$L_2(f)(x) = xf(x)$$

Задача: Довести, що оператор $L = L_1 + L_2$ є додатним.

Розв’язання:

1. Для $f(x) \geq 0$ маємо:

$$L_1(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \geq 0$$

$$L_2(f)(x) = xf(x) \geq 0.$$

2. Сума двох невід’ємних функцій також є невід’ємною:

$$L(f)(x) = L_1(f)(x) + L_2(f)(x) \geq 0.$$

Отже, L є додатним оператором.

Задача 7. Застосування оператора в оцінці функціоналів

Нехай

$$L(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Задача: Знайти значення функціонала

$$F(f) = \int_0^1 L(f)(x)dx$$

якщо $f(x) = x^2$.

Розв’язання:

1. Обчислимо $L(f)(x)$:

$$L(f)(x) = \int_0^x t^2 dt = \left(\frac{t^3}{3}\right)_0^x = \frac{x^3}{3}.$$

2. Обчислимо $F(f)$:

$$F(f) = \int_0^1 L(f)(x)dx = \int_0^1 \frac{x^3}{3} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{3}(\frac{x^4}{4})_0^1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Відповідь: $F(f) = \frac{1}{12}$.

Задача 8. Операторна рівність

Нехай

$$L(f)(x) = xf(x)$$

і

$$M(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Задача: Довести, що оператор $N(f)(x) = L(M(f))(x)$ є лінійним і додатним.

Розв’язання:

1. Обчислимо $N(f)(x)$:

$$N(f)(x) = L\big(M(f)\big)(x) = x\int_0^x f(t)dt.$$

2. Лінійність: Оскільки і L, і M є лінійними операторами, то їх композиція N також лінійна.
3. Додатність: Якщо $f(x) \geq 0$, то $M(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \geq 0$, і добуток $x \times M(f)(x) \geq 0$. Тому $N(f)(x) \geq 0$.

Задача 9. Оператор проекції

Нехай

$$L(f)(x) = f(c)$$

для всіх $x \in [a, b]$, де $C \in [a, b]$.

Задача: Довести, що L є лінійним додатним оператором.

Розв’язання:

1. Лінійність: Для $f, g \ \in C[a, b]$ і $\alpha, \beta \ \in R$:

$$L(\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha f + \beta g)(c) = \alpha f(c) + \beta g(c) =$$

$$\alpha L(f)(x) + \beta L(g)(x).$$

2. Додатність: Якщо $f(x) \geq 0$ для всіх $x \in [a, b]$, то $f(C) \geq 0$.

   Отже, $L(f)(x) \geq 0$.

ВИСНОВКИ

У магістерській роботі було проведено систематичний аналіз лінійних додатних операторів, їх властивостей, теоретичних засад та практичного застосування. Дослідження спрямоване на вивчення фундаментальних аспектів цієї важливої галузі функціонального аналізу та її ролі у розв’язанні сучасних математичних і прикладних задач.

У роботи були сформульовані базові поняття та визначення лінійних додатних операторів, розглянуто їх місце в загальній теорії операторів. Особливу увагу приділено характеристикам додатності, що дозволяють оцінювати їх вплив на структуру простору функцій. Наведено приклади різних типів операторів, проаналізовано їхні властивості, що дозволяють глибше зрозуміти принципи їх дії.

Також була присвячена увага аналізу збіжності послідовностей операторів, важливість якої визначається широким застосуванням таких операторів у задачах апроксимації. Виведено основні критерії збіжності та досліджено їх практичну значущість для побудови ефективних обчислювальних алгоритмів.

Окрім теоретичних аспектів, у роботі розглянуто прикладні задачі, де лінійні додатні оператори знаходять застосування. До таких задач належать: апроксимація функцій, розв’язання інтегральних рівнянь, побудова чисельних методів для аналізу диференціальних рівнянь. У дослідженні було показано, як додатні оператори сприяють покращенню точності чисельних методів і стабільності розв’язків.

Результати дослідження мають широку теоретичну та прикладну значущість. З одного боку, вони розширюють уявлення про властивості та особливості лінійних додатних операторів, з іншого – пропонують нові можливості для їхнього використання в різних галузях математики та суміжних дисциплінах.

Робота також відкриває перспективи для подальших досліджень, таких як:

1. Розробка нових видів лінійних додатних операторів із покращеними властивостями.
2. Вивчення впливу цих операторів на характеристики функціональних просторів.
3. Застосування отриманих результатів у більш складних задачах моделювання та аналізу динамічних систем.

Одержані результати сприяють глибшому розумінню основних принципів функціонального аналізу, а також створюють основу для розв'язання широкого кола прикладних задач. Робота підкреслює значущість цього математичного апарату у вирішенні як фундаментальних, так і практичних проблем сучасної науки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Rudin, W. *Functional Analysis*. – New York: McGraw-Hill, 1991. – 424 p.
2. Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. – New York: Wiley, 1989. – 704 p.
3. Sobolev, S. L. *Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*. – Philadelphia: American Mathematical Society, 1991. – 302 p.
4. Dunford, N., Schwartz, J. *Linear Operators. General Theory*. – New York: Interscience, 1958. – 859 p.
5. Browder, F. E. *Fixed Point Theory and Nonlinear Problems*. – Providence: American Mathematical Society, 1987. – 312 p.
6. Kantorovich, L. V., Akilov, G. P. *Functional Analysis*. – Oxford: Pergamon Press, 1982. – 618 p.
7. Werner, D. *Functional Analysis*. – Berlin: Springer, 2001. – 432 p.
8. Lang, S. *Real and Functional Analysis*. – New York: Springer, 1993. – 580 p.
9. Heuser, H. *Functional Analysis*. – New York: Wiley, 1982. – 400 p.
10. Taylor, A. E., Lay, D. C. *Introduction to Functional Analysis*. – New York: Wiley, 1980. – 328 p.
11. Titchmarsh, E. C. *Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations*. – Oxford: Oxford University Press, 1946. – 432 p.
12. Dieudonné, J. *Foundations of Modern Analysis*. – New York: Academic Press, 1969. – 399 p.
13. Conway, J. B. *A Course in Functional Analysis*. – New York: Springer, 1985. – 400 p.
14. Yosida, K. *Functional Analysis*. – New York: Springer, 1980. – 504 p.
15. Folland, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. – New York: Wiley, 1999. – 400 p.
16. Корецький В. С., Макарчук А. В., Караханов Д. А. Про диференціальні властивості розв’язків деяких крайових задач. Міжнародна наукова конференція, присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження М. П. Ленюка: матеріали конференції.-

Чернівці: Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, 2021.- С. 98-103.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Стефан Банах (1892–1945) – видатний польський математик, один із засновників сучасного функціонального аналізу, автор основоположних праць у цій галузі. Його ім'я носить важлива структура в математиці – банахів простір, який є центральним об'єктом досліджень у функціональному аналізі.

Основні факти:

1. **Біографія**:
   - Народився 30 березня 1892 року в Кракові.
   - Навчався в Політехнічному інституті у Львові.
2. **Діяльність**:
   - Працював у Львівському університеті, де став професором і очолив кафедру математики.
   - Засновник Львівської математичної школи, відомої своїми досягненнями в теорії функцій, аналізі та топології.
3. **Досягнення**:
   - 1932 року опублікував книгу *"Теорія операцій"* (*Théorie des opérations linéaires*), яка стала основою функціонального аналізу.
   - Ввів концепцію банахового простору – повного нормованого лінійного простору.
   - Учасник так званої "Шотландської книги" – збірки математичних задач і гіпотез, яку створювали львівські математики в кафе "Шотландське".
4. **Науковий спадок**:
   - Банахові простори мають застосування в багатьох галузях науки: теорії ймовірностей, фізиці, економіці.
   - Його методи і результати стали базою для багатьох подальших відкриттів у математиці.

5. **Особисте життя**:
   - Банах мав широкий кругозір і славився своїм неформальним стилем роботи – багато задач обговорювалися в кав’ярнях, що сприяло колективному пошуку рішень.

Стефан Банах залишив значний слід у математиці, і його ідеї продовжують надихати сучасних дослідників.

ДОДАТОК Б

Карл Теодор Вільгельм Веєрштрасс (1815–1897) – німецький математик, один із засновників сучасного математичного аналізу. Його роботи стали основою для строгого формулювання багатьох математичних понять, особливо в області аналізу і теорії функцій.

Основні факти:

1. **Біографія**:
   - Народився 31 жовтня 1815 року в місті Енсхайде, Пруссія.
   - Вивчав математику і право в університетах Бонна, Мюнстера і Берліна.
   - Більшу частину кар’єри працював у Берлінському університеті, де здобув світове визнання.
2. **Наукова діяльність**:
   - Розробив основи строгого аналізу, ввів поняття межі, збіжності, неперервності й похідної у сучасному вигляді.
   - Відомий як "батько строгого аналізу", оскільки вимагав точності в обґрунтуванні математичних результатів.
   - Вивчав проблеми теорії функцій, зокрема рядів Фур’є, і впровадив багато результатів у теорії аналітичних функцій.
3. **Досягнення**:

- Доведення існування функцій, які є неперервними скрізь, але не мають похідної ніде. Цей приклад відомий як "функція Веєрштрасса".
- Вніс великий вклад у розвиток теорії рядів, аналітичної теорії чисел і геометрії.
- Формулював і обґрунтовував теореми про аналітичні продовження, єдність і розклад функцій у ряди.

4. **Методологія**:
   - Наполягав на використанні строго формалізованих понять у математиці, що заклало фундамент для розвитку математичної логіки та аксіоматичних підходів у XX столітті.
5. **Визнання**:
   - Веєрштрасс вважався одним із провідних математиків свого часу. Його ім'я носить багато математичних об'єктів, зокрема *теорема Веєрштрасса про компактність*.
6. **Особисте життя**:
   - Все життя був відданий викладацькій діяльності та написанню математичних робіт.
   - Його лекції мали величезний вплив на молодих математиків, зокрема на Софію Ковалевську.

Карл Веєрштрасс залишив багатий науковий спадок, який і досі відіграє ключову роль у багатьох областях математики.

ДОДАТОК В

Жан-Батист Жозеф Фур'є (1768–1830) – французький математик і фізик, найбільш відомий завдяки розробці рядів Фур'є та теорії гармонічних коливань. Його роботи стали основою для розвитку математичного аналізу і теоретичної фізики, зокрема в області теплотехніки і хвильових процесів.

Основні факти:

1. **Біографія**:
   - Народився 21 березня 1768 року в місті Ойон, Франція.
   - Вивчав математику та фізику в École Polytechnique (Політехнічній школі), а пізніше став викладачем в цій установі.
   - У 1798 році Фур'є був направлений до Єгипту як частина французької експедиції, де він займався науковими дослідженнями в галузі фізики та математики.
2. **Наукова діяльність**:
   - Фур'є найбільш відомий завдяки своїм працям по теорії тепла і розробці рядів Фур'є.
   - Основною ідеєю його досліджень було розкладання складних функцій на нескінченні ряди синусів та косинусів, що дозволило аналізувати теплові процеси та інші коливальні явища.
3. **Досягнення**:
   - **Ряди Фур'є**: Фур'є довів, що будь-яку періодичну функцію можна представити у вигляді суми синусоїдальних функцій (синусів і косинусів), що є основою для розкладу функцій у ряди Фур'є. Цей результат має величезне значення в аналізі, сигналообробці, теорії струн та фізиці.
   - **Теорія тепла**: У своїй книзі *"Теорія тепла"* (1822) Фур'є досліджував диференціальні рівняння, які описують теплопровідність, що дало потужний імпульс для розвитку математичних методів в фізиці.
   - Ряди Фур'є стали основою для багатьох сучасних методів у математичному аналізі, включаючи перетворення Фур'є, які використовуються в обробці сигналів і аналізі даних.
4. **Методологія**:
   - Фур'є ввів концепцію розкладу функцій на гармонічні функції (синуси і косинуси) для аналізу їх властивостей. Це дозволило не тільки математично описати явища, але й розв'язувати практичні задачі в теплотехніці та механіці.

- Його підхід став основою для подальших розробок у функціональному аналізі та теорії розподілів.

5. **Визнання**:
   - Фур'є був відомий як один з основоположників математичного аналізу в теоретичній фізиці.
   - Його методи і сьогодні використовуються в численних галузях науки та техніки, від математичної фізики до обробки зображень і аудіо.
6. **Особисте життя**:
   - Фур'є не був публічно відомим за свій час, але його вплив на математику і фізику значно зріс після його смерті. Його роботи залишаються фундаментальними для багатьох дисциплін.
   - Незважаючи на його великі досягнення, його праці не були добре сприйняті в свій час, і лише пізніше їх важливість стала очевидною.

Жан-Батист Фур'є зробив значний внесок у розвиток науки, зокрема в математичний аналіз, теоретичну фізику і чисельні методи, і його ім'я стало синонімом досягнень в цих галузях.

Анотація

Магістерська робота присвячена вивченню лінійних додатних операторів, які є важливим інструментом сучасного функціонального аналізу. У роботі досліджуються основні властивості таких операторів, їх дія у різних математичних просторах, а також роль у теоретичних і прикладних аспектах математики. Окрему увагу приділено аналізу структури лінійних додатних операторів, їх взаємозв'язку з іншими класами операторів, а також їх застосуванню у різних математичних задачах. Робота містить приклади розв'язання задач, що ілюструють властивості цих операторів.

Отримані результати можуть бути використані для подальших досліджень у функціональному аналізі, математичному моделюванні та інших областях науки.

Ключові слова: лінійні оператори, додатність, функціональний аналіз, оператори, лінійність.

Annotation

The master's thesis is devoted to the study of linear positive operators, which are a significant tool in modern functional analysis. The paper examines the fundamental properties of such operators, their behavior in various mathematical spaces, and their role in both theoretical and applied aspects of mathematics. Particular attention is paid to analyzing the structure of linear positive operators, their relationship with other classes of operators, and their applications to various mathematical problems. The work includes examples of problem-solving that illustrate the properties of these operators.

The results obtained can be applied to further research in functional analysis, mathematical modeling, and other scientific fields.

Keywords: linear operators, positivity, functional analysis, operators, linearity.