МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ
Кафедра теорії функцій та методики навчання математики

На правах рукопису

Гетьман Алла Сергіївна

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ З УЗАГАЛЬНЕНОЮ МІШАНОЮ ПОХІДНОЮ

Спеціальність: 111 Математика
Освітньо-професійна програма “Математика”
Робота на здобуття освітнього ступеня “Магістр”

Науковий керівник:
Романюк Анатолій Сергійович
доктор фізико-математичних наук,
професор

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ
Протокол №
Засідання кафедри теорії функцій та
методики навчання математики від 2024 р.
Завідувач кафедри
доцент Гембарська С. Б.

Луцьк – 2024

Зміст

Перелік умовних позначень

$\forall$ – квантор загальності: “для кожного” , “для будь-якого”

$\exists$ – квантор існування “існує”

$:=$ – “дорівнює за означенням”

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел

$\mathbb{R}^d, d \in N -$ простір точок $t = (t_1, \dots, t_d), t_i \in R, i = \overline{1, d}, \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$

$(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$ – скалярний добуток елементів $x, y \in \mathbb{R}^d$

$x \in A$ ($x \overline{\in} A$) – елемент x належить (не належить) множині A

$sgn\, a -$ величина, що дорівнює 1, якщо $a > 0$, дорівнює -1, якщо $a < 0$ нулю, якщо $a = 0$

$\mathrm{T}^d := \prod_{j=1}^{d} [0; 2\pi)$ – d-вимірний куб

$L_q(\mathrm{T}^d), 1 \le q < \infty$ – простір 2π –періодичних за кожною змінною сумовних у степені q на T^d функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$

$\|f\|_q$ – норма функцій f у просторі L_q

$\rho(s)$ – множина векторів $k = (k_1, \dots, k_d), k_j \in \mathbb{Z}$, що задовольняє умову

$2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1, d}$

$Q_n := \bigcup_{(s,1) < n} \rho(s), n \in N$ – східчастий гіперболічний хрест,

$(s, 1) = s_1 + \ldots + s_d$

$\mathrm{T}(Q_n)$ – множина тригонометричних поліномів з “номерами” гармонік із Q_n ($|k| \in Q_n$)

$\asymp$ – відношення слабкої еквівалентності

$\ll, \gg$ – порядкові нерівності

Вступ

Магістерська робота присвячена встановленню нерівностей типу Літтлвуда-Пелі, Бернштейна та Нікольського, пов'язаних з узагальненою мішаною (ψ, β) –похідною тригонометричних поліномів з “номерами” гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів. З використанням цих нерівностей в роботі знайдені точні за порядком оцінки деяких важливих апроксимаційних характеристик відповідних функціональних класів у просторах Лебега $L_p, 1 < p < \infty$.

Актуальність теми:

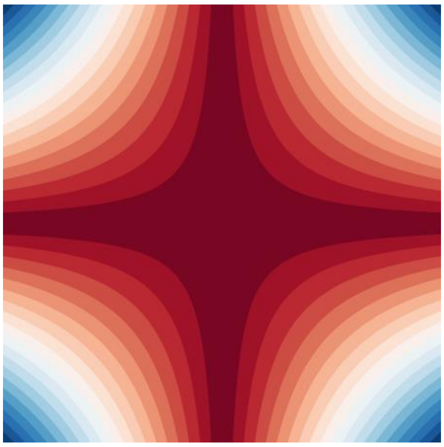
Витоки досліджень, які проводяться в магістерській роботі, беруть початок з 60-х років минулого століття в роботах К. І. Бабенка (1960 р). В цих роботах був запропонований підхід до найкращого наближення класів періодичних функцій багатьох змінних, які визначаються певними обмеженнями на мішану похідну функції (класи Соболєва $W^r_{p,\propto}$).

Природнім питанням, яке ставив перед собою К. І. Бабенко, полягало в тому, якого типу поліноми слід використовувати для наближення згаданих класів функцій аби мінімізувати похибку наближення.

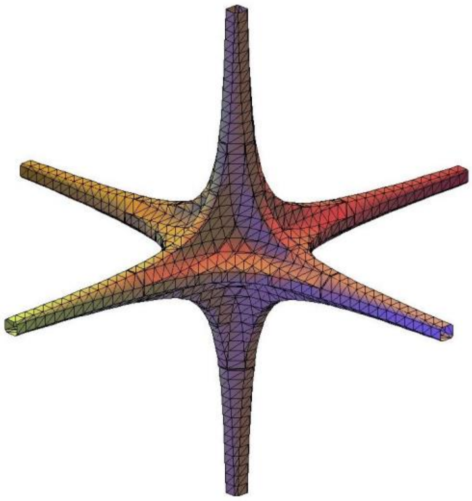
В результаті проведених досліджень, ним було виявлено, що для найкращого наближення класів Соболєва $W^r_{p,\propto}$ у просторі L_2 оптимальними є тригонометричні поліноми з “номерами” гармонік з так званого **гіперболічного хреста** $\Gamma(N), N \in \mathbb{N}$ вигляду

$$\Gamma(N) := \left\{ k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d \colon \prod_{j=1}^{d} max\{1, |k_j|\} < N \right\}$$

(див. Мал. 1, Мал. 2 при $d = 2$ і $d = 3$)



Мал. 1



Мал. 2

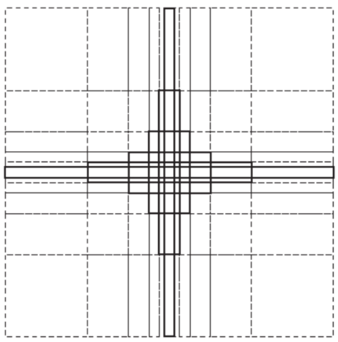
З появою гіперболічних хрестів почали активно досліджуватися різного роду апроксимаційні характеристики, як самих класів Соболєва, так і їхніх узагальнень - добре відомих класів Нікольського і Бєсова. При цьому було виявлено, що в деяких ситуаціях замість поліномів з "номерами" гармонік з гіперболічних хрестів доцільніше використовувати їхні аналоги, а саме поліноми з "номерами" гармонік зі **східчастих гіперболічних хрестів** Q_n , де

$$Q_n := \bigcup_{(s,1)<n} \rho(s),$$

$$\rho(s) \coloneqq \left\{k = (k_1, \dots, k_d)\colon 2^{s_j-1} \le \left|k_j\right| \le 2^{s_j}, j = \overline{1,d}\right\} \text{ і}$$

$$k = (k_1, \dots, k_d), k_j \in \mathbb{Z} \text{ і } s = (s_1, \dots, s_d), s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1,d}\,.$$

На наведеному нижче Мал. 3 зображено відповідну множину у випадку d =2.



Мал. 3

З детальнішою історію досліджень в цьому напрямі можна ознайомитися в монографіях $[1-3]$. У 80-х роках минулого століття О. І. Степанцем [4] були запропоновані класи періодичних функцій однієї змінної $L^{\psi}_{\beta,p}$, які при певному виборі параметрів $\psi, \beta \in \mathbb{R}$ співпадають із вищезгаданими класами Соболєва $W^{r}_{p,\propto}$.

За результатами проведених досліджень О. І. Степанцем, його учнями і послідовниками, на теперішній час можна стверджувати, що для цих класів в одновимірному випадку побудована завершена теорія (див., наприклад монографії [5,6]). В значно меншому обсязі на сьогодні досліджені питання апроксимації класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ в багатовимірному випадку $(d \geq 2)$. І це пов'язано з одного боку з технічними складнощами, а з іншого – з різноманітними можливостями вибору експонент $\{e^{i(k,x}\}_{k\in\mathbb{Z}^d}, (k,x) = k_1x_1 + \cdots + k_dx_d,$ для побудови наближаючих поліномів. Слід зазначити, що в роботах [7-10] вивчалися деякі апроксимаційні характеристики класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій як однієї, так і багатьох змінних, але при цьому залишалася низка важливих питань, які не були дослідженими. Це в першу чергу стосується узагальнень на (ψ, β) −похідні функцій багатьох змінних відомої теореми Літтлвуда-Пелі для норми функцій $f \in L_p, 1 < p < \infty$, а також нерівностей типу Бернштейна і Нікольського для (ψ, β) −похідних тригонометричних поліномів з “номерами” гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів. Одержані в цьому напрямі результати відіграють ключову роль при встановленні точних за порядком оцінок апроксимаційних характеристик відповідних класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторах Лебега L_q.

Таким чином з огляду на сказане тема магістерської роботи є актуальною.

Мате і завдання дослідження.

Метою магістерської роботи є поширення класичних нерівностей Літтлвуда-Пелі для функцій $f \in L_p, 1 < p < \infty$, а також нерівностей Бернштейна і різних метрик Нікольського на випадок (ψ, β) −похідних тригонометричних поліномів з “номерами” гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів Q_n. З використанням одержаних нерівностей передбачається встановити точні за порядком оцінки деяких апроксимаційних характеристик функціональних класів $L^{\psi}_{\beta,p}$у просторі $L_p, 1 < p < \infty$.

Завдання дослідження.

1. Встановити аналог теореми Літтлвуда-Пелі для $(\psi, \beta) -$похідних періодичних функцій багатьох змінних у просторі Лебега $L_p, 1 < p < \infty$.
2. Одержати порядкові нерівності типу Бернштейна і Нікольського для (ψ, β) −похідних тригонометричних поліномів з “номерами” гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів.
3. Знайти точні за порядком оцінки наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі $L_p, 1 < p < \infty$, їхніми східчастими гіперболічними сумами Фур'є.
4. Встановити порядки найкращих наближень згаданих класів функцій у просторі $L_p, 1 < p < \infty$, тригонометричними поліномами з “номерами” гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів.
5. Довести обернену теорему для $(\psi, \beta) -$похідних функцій із простору Лебега L_p.

Об’єктом дослідження є класична теорема Літтлвуда-Пелі , нерівності Бернштейна і Нікольського для (ψ, β) −похідних тригонометричних поліномів з “номерами” гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів, а також деякі апроксимаційні характеристики класів $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Предметом дослідження є точність за порядком нерівностей типу Літтлвуда-Пелі, Бернштейна і Нікольського при певних умовах на (ψ, β) −похідні тригонометричних поліномів зі спектром в східчастих гіперболічних хрестах, а також швидкість наближення функціональних класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ відповідними поліномами у просторі Лебега L_p, $1 < p < \infty$.

Методи дослідження.

При розв'язанні поставлених в магістерській роботі задач використовуються загальні методи математичного аналізу в поєднанні зі спеціальними методами, які розроблені при дослідженні питань апроксимації функцій багатьох змінних. Зокрема маються на увазі методи, які сформувалися у роботах К. І. Бабенка, Е. С. Белінського, Е. М. Галєєва, А. С. Романюка, О. І. Степанця, С. О. Теляковського, В. М. Темлякова та інших.

Практичне значення одержаних результатів.

Робота носить теоретичний характер. Результати, а також методи їх отримання можуть бути використані в подальших дослідженнях питань апроксимації функціональних класів.

Апробація результатів та публікації.

Результати роботи “Тригонометричні поперечники класів періодичних функцій $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі $B_{1,1}$” опубліковані в матеріалах наукової конференції “Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень”.

Розділ 1

Нерівності для (ψ, β) −похідних періодичних функцій багатьох змінних у просторах Лебега

1.1 Означення (ψ, β) −похідної і функціональних класів $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Нехай $\mathbb{R}^d, d \geq 1,-$ евклідів простір з елементами

$x = (x_1, \ldots, x_d)$і $(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d;$ $L_p(\mathrm{T}^d)$,

$\mathrm{T}^d \coloneqq \prod_{j=1}^{d}[0; 2\pi)$ − множина функцій

$f(x)$ 2π − періодичних по кожній змінній і таких, що

$$\|f\|_p \coloneqq \|f\|_{L_p(\mathrm{T}^d)} = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathrm{T}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty \coloneqq \|f\|_{L_\infty(\mathrm{T}^d)} = \underset{x \in \mathrm{T}^d}{ess\ sup} |f(x)| < \infty, p = \infty.$$

У подальших міркуваннях будемо розглядати лише ті функції

$f \in L_p(\mathrm{T}^d)$, для яких виконується умова

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx_i = 0, \;\; j = \overline{1, d}, \text{ майже скрізь.}$$

Множину функцій $f \in L_p(\mathrm{T}^d)$, які задовольняють цій умові будемо позначати $L^o_p(\mathrm{T}^d)$. Крім цього, оскільки в роботі розглядаються лише $2\pi-$ періодичні функції за кожною змінною, то з метою спрощення записів замість $L_p(\mathrm{T}^d)$ і $L^o_p(\mathrm{T}^d)$ частіше будемо використовувати позначення L_p і L^o_p відповідно.

Для функції $f \in L^o_1$ і $\dot{\mathbb{Z}}^d \coloneqq (\mathbb{Z}/\{0\})$ розглянемо її ряд Фур'є

$$\sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^d} \hat{f}(k)\, e^{i(k,x)},$$

де $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathrm{T}^d} f(t)\, e^{-i(k,t)} dt$ $-$ коефіцієнти Фур'є функції f.

Далі, нехай $\psi_j(\cdot) \neq 0$ $-$ довільні функції натурального аргументу,

$\beta_j \in \mathbb{R},\ j \in \overline{1,d}$.

Припустимо, що ряд

$$\sum_{k\in\dot{\mathbb{Z}}^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{\frac{i\pi\beta_j}{2} sgn k_j}}{\psi_j(|k_j|)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції. Наслідуючи О. І. Степанця [4] назвемо її (ψ,β) $-$ похідною функції $f(x)$ і позначимо через $f_\beta^\psi(x)$, тобто

$$f_\beta^\psi(x) = \sum_{k\in\dot{\mathbb{Z}}^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{\frac{i\pi\beta_j}{2} sgn k_j}}{\psi_j(|k_j|)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)} \qquad (1)$$

У зв'язку із введеним означенням (1) будемо говорити, що функція f належить класу $L_{\beta,p}^\psi$ ($f \in L_{\beta,p}^\psi$), якщо $\left\| f_\beta^\psi \right\|_p \leq 1,\ 1 \leq p \leq \infty$.

Зазначимо, що класи $L_{\beta,p}^\psi$ при $\psi_j(|k_j|) = k_j^{-r_j}, r_j > 0, k_j \in \dot{\mathbb{Z}}, j \in \overline{1,d}$, збігаються з добре відомими класами Вейля-Надя $W_{\beta,p}^r$ (див. наприклад [4]).

1.2 Аналог теореми Літтлвуда-Пелі для (ψ,β) $-$похідних функцій у просторі L_p.

При отриманні результатів цього пункту, і в подальшому, важливе значення буде відігравати відома теорема Марцинкевича про мультиплікатори рядів Фур'є (див. наприклад [2, с. 23]).

Нехай $\mathcal{T}$ $-$ множина тригонометричних рядів вигляду

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k\, e^{i(k,x)} = S[f] \qquad (2)$$

і $\mu(k) = \mu(k_1, \dots, k_d)$ $-$ кратна фіксована числова послідовність. Кожному елементу $f \in \mathcal{T}$ поставимо у відповідність елемент $g(x)$ згідно з формулою

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mu(k) c_k\, e^{i(k,x)} = S[g]. \qquad (3)$$

Таким чином кожна кратна послідовність $\mu(k)$ задає оператор М, який діє з $\mathcal{T}$ в $\mathcal{T}$ і який називають мультиплікатором.

Із всіх мультиплікаторів виділимо ті, що переводять ряди Фур'є кожної функції $f \in L_p, 1 < p < \infty$ в тригонометричні ряди, які є рядами Фур'є деяких функцій $g \in L_p, 1 < p < \infty$. Множину таких мультиплікаторів будемо позначати $\mathrm{M_p}$. Якщо функції f і g пов'язані співвідношеннями (2) і (3) і рядами в цих рівностях є $S[f]$ і $S[g]$ відповідно, то будемо писати $g = Mf$. Таким чином (ψ, β) −похідну функції $f \in L_p$ можна означити, як результат дії на неї мультиплікатора D_β^ψ, який задається кратною послідовністю

$$\mu(k) = \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{\frac{i\pi\beta_j}{2} sgn k_j}}{\psi_j(|k_j|)} \qquad (4)$$

Отже, стає зрозуміло, що апроксимаційні властивості класів $L_{\beta,p}^\psi$ суттєво залежать від властивостей мультиплікаторів D_β^ψ.

Тепер сформулюємо згадану вище теорему Марцинкевича. При цьому ми наведемо її в одновимірному випадку, оскільки із способу задання мультиплікаторів нам буде достатньо перевірити її виконання для однократних послідовностей

Теорема А (Марцинкевича) [11]. Нехай $\lambda_0, \lambda_1 \ldots -$ множники Марцинкевича, тобто для них виконані умови:

а) $|\lambda_n| \le C,\ n = 0, \mp 1 \ldots;$

б) $\displaystyle\sum_{l=\mp 2^v}^{\mp(2^{v+1}-1)} |\lambda_l - \lambda_{l\mp 1}| \le C,\ \ v = 0,1, \ldots$

$$\text{Тоді, якщо } f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \in L_p, 1 < p < \infty, \text{то}$$

$$\Lambda f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k \hat{f}(k) e^{ikx} \in L_p,$$

і при цьому $\|\Lambda f(x)\|_p \leq C(p)\|f\|_p$

де $C(p)$ – деяка стала, яка залежить, від p.

Зауваження 1. В подальших міркуваннях норму мультиплікатора Λ, як оператора, що діє з L_p в L_p $\left(\|\Lambda\|_{p\to p}\right)$ домовимося позначати $\|\Lambda\|_p$, тобто $\|\Lambda\|_p := \|\Lambda\|_{p\to p}$.

Для формулювання наступного допоміжного твердження нам знадобляться додаткові позначення.

Нехай $k = (k_1, \dots, k_d), k_j \in \mathbb{Z}, s = (s_1, \dots, s_d), s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}$.

Тоді покладемо $\rho(s) := \left\{(k_1, \dots, k_d) \colon 2^{s_j - 1} \leq \left|k_j\right| < 2^{s_j}, = \overline{1, d}\right\}$

і для $f \in L_p, 1 < p < \infty$,

$$\delta_s(f, x) := \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)}.$$

Функції $\mu(N)$ і $\nu(N)$ будемо називати функціями одного порядку і писати $\mu \asymp \nu$, якщо існують сталі $0 < C_1 < C_2$ такі, що $C_1\mu(N) \leq \nu(N) \leq C_2\mu(N)$. Якщо ж $\nu(N) \leq C_2\mu(N)$, то пишемо $\nu \ll \mu$ і відповідно $\nu \gg \mu$ при $C_1\mu(N) \leq \nu(N)$.

Зауважимо, що часто різні за значенням сталі будемо позначати буквами з однаковими індексами. Ця обставина не буде викликати недорозумінь, оскільки на протязі всієї роботи нас будуть цікавити тільки порядкові співвідношення.

В прийнятих позначеннях має місце відома теорема Літтлвуда-Пелі (див. наприклад [2, с. 117]).

Теорема Б. Нехай задано $p \in (1, \infty)$. Тоді існують додатні сталі $C_1(p)$ і $C_2(p)$ такі, що для кожної функції $f \in L_p^0(\mathrm{T}^d)$ справедлива оцінка

$$C_1(p)\|f(x)\|_p \leq \left\| \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} |\delta_s(f,x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C_2(p)\|f(x)\|_p. \tag{5}$$

Зауваження 2. Взявши до уваги означені вище порядкові співвідношення нерівності (5) можна записати у вигляді

$$\|f(x)\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} |\delta_s(f,x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p. \tag{5'}$$

Отже, головна мета цього пункту полягає в отриманні аналога співвідношень $(5')$ для (ψ, β) −похідних функцій у просторі $L_p(\mathrm{T}^d)$.

Зрозуміло, що подібні співвідношення можна встановити при певних обмеженнях на функції $\psi_j(\cdot)$, $j = \overline{1, d}$.

Далі будемо розглядати множину D функцій $\psi_j(\cdot)$, $j = \overline{1, d}$, які задовольняють таким умовам:

a) $\psi_j(\cdot)$ – додатні і незростаючі;

b) $\forall\ j = \overline{1, d}\ \ \exists\ M_j > 0$ такі, що $\frac{\psi_j(|l|)}{\psi_j(2^\nu)} \leq M_j, \nu = 1,2, \ldots, 2^{\nu-1} \leq |l| \leq 2^\nu$.

Прикладами функцій, які належать до множини D можуть бути наступні функції:

$$\psi_j(k) = k^{-r_j}, r_j > 0, k \in \mathbb{N};$$

$$\psi_j(k) = \ln^{\alpha_j}(k+1), k \in \mathbb{N}, a_j < 0;\ a_j \in R;$$

$$\psi_j(k) = k^{-r_j}\ \ln^{\alpha_j}(k+1), r_j > 0, a_j \in R, k \in \mathbb{N}.$$

Нами отримане наступне твердження .

Теорема 1. Нехай $d \geq 1, p \in (1, \infty)$ і $f \in L_p^0(\mathrm{T}^d)$. Тоді при $\psi_j(\cdot) \in D$, $j = \overline{1, d}\ \beta \in \mathbb{R}^d$, справедлива оцінка

$$\left\| f_\beta^\psi(x) \right\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} \left| \prod_{j=1}^{d} \psi_j^{-1}(2^{s_j}) \delta_s(f, x) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p . \qquad (6)$$

Перед тим, як перейти до доведення теореми, зробимо суттєве зауваження, яке полягає в такому. Як буде показано в процесі доведення, оцінка зверху в (6) виконується і при послаблених умовах на функції $\psi_j(\cdot)$, а саме достатньо при цьому вимагати для них виконання тільки умови а) з означення множини D.

Доведення теореми 1.

Спочатку отримаємо в (6) оцінку зверху. Нехай $f \in L_p^0(\mathrm{T}^d)$. Тоді згідно з означенням (ψ, β) −похідної можемо записати

$$f_\beta^\psi(x) = \sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^d} \frac{e^{\frac{i\pi\beta_j}{2} sgn k_j}}{\psi_j(|k_j|)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)}.$$

Далі введемо до розгляду функцію

$$g(x) = \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \widetilde{\delta_s}(f, x),$$

де $\widetilde{\delta_s}(f, x) \coloneqq \prod_{j=1}^{d} \psi_j^{-1}(2^{s_j}) \delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \prod_{j=1}^{d} \psi_j^{-1}(2^{s_j}) \hat{f}(k) e^{i(k,x)}.$

Зауважимо, що $\widetilde{\delta_s}(f,x)$ є тригонометричним поліномом з “номерами” гармонік з множини $\rho(s)$.

Оцінимо $\left\|f_\beta^\psi(x)\right\|_p$ через $\|g(x)\|_p$. З цією метою розглянемо кратну послідовність

$$\lambda_{k,s} = \prod_{j=1}^{d} \psi_j\,(2^{s_j})/\psi_j(|k_j|)e^{\frac{i\pi\beta_j}{2}sgnk_j},$$

де $s_j = 1,2, \dots k_j \in \rho(s_j)$ і через Λ позначимо мультиплікатор, який породжується цією послідовністю. Легко переконатися, що $\Lambda g(x) = f_\beta^\psi(x)$.

Дійсно, згідно з означенням $\widetilde{\delta_s}(f,x)$ можемо записати

$$\Lambda g(x) = \Lambda \sum_{s\in\mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^{d} \psi_j^{-1}\,(2^{s_j}) \sum_{k\in\rho(s)} \hat{f}(k)e^{i(k,x)} =$$

$$= \sum_{s\in\mathbb{N}^d} \sum_{k\in\rho(s)} \prod_{j=1}^{d} \psi_j^{-1}(|k_j|)e^{\frac{i\pi\beta_j}{2}sgnk_j}\hat{f}(k)e^{i(k,x)} =$$

$$= \sum_{k\in\dot{\mathbb{Z}}^d} \prod_{j=1}^{d} \psi_j^{-1}(|k_j|)e^{\frac{i\pi\beta_j}{2}sgnk_j}\hat{f}(k)e^{i(k,x)} = f_\beta^\psi(x).$$

Тепер покажемо, що мультиплікатор Λ належить M_p. Для цього достатньо перевірити, що числа послідовності $\{\lambda_{k,s}\}$ – множники Марцинкевича. Зауважимо, що оскільки

$$\lambda_{k,s} = \prod_{j=1}^{d} \lambda_{k_j,s_j}\ \text{, де } \lambda_{k_j,s_j} = \psi_j(2^{s_j})/\psi_j(|k_j|)e^{\frac{i\pi\beta_j}{2}sgnk_j},$$

$s_j = 1,2, \dots, k_j \in \rho(s_j)$,

то достатньо перевірити, що числа λ_{k_j,s_j} для будь-якого фіксованого j задовольняють умовам теореми А.

Згідно з умовою а) належності функції $\psi_j(\cdot)$ до множини D маємо

$$\left|\lambda_{k_j,s_j}\right| = \left|\frac{\psi_j(2^{s_j})}{\psi_j(|k_j|)e^{\frac{i\pi\beta_j}{2}sgnk_j}}\right| =$$

$$= \left|\psi_j(2^{s_j})/\psi_j(|k_j|)\right| \leq \frac{\psi_j(2^{s_j})}{\psi_j(|k_j|)} \leq 1.$$

Отже, умова а) теореми А виконана. Тепер покажемо, що і умова б) цієї теореми також виконана.

Для $s_j = 1,2,\dots$ і відповідних k_j можемо записати

$$\left|\Delta\lambda_{k_j,s_j}\right| = \left|\lambda_{k_j+1,s_j} - \lambda_{k_j,s_j}\right| \leq \left|\lambda_{k_j+1,s_j}\right| + \left|\lambda_{k_j,s_j}\right| \leq 2$$

і тому при $s_j = 1$ будемо мати

$$\sum_{k_j\in\rho(1)} \left|\Delta\lambda_{k_j,s_j}\right| \leq \left|\lambda_{k_j+1,1}\right| + \left|\lambda_{k_j+1,1}\right| \leq 2. \qquad (8)$$

Нехай $s_j > 1$. Тоді позначимо через $\hat{\rho}(s_j)$ множину всіх $k_j \in \rho(s_j)$ за винятком найбільшого серед них. Враховуючи, що $\left|\Delta\lambda_{k_j,s_j}\right| \leq 2, s_j = 1,2,\dots, k_j \in \rho(s_j)$, одержимо

$$\sum_{k_j\in\rho(s_j)} \left|\Delta\lambda_{k_j,s_j}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k_j\in\hat{\rho}(s_j)} \left|\Delta\lambda_{k_j,s_j}\right| + 2. \qquad (9)$$

І крім цього зауважимо, що числа k_j і k_j+1 для $k_j \in \hat{\rho}(s_j)$ мають однаковий знак.

Отже, для кожного $s_j > 1$ знаходимо

$$\sum_{k_j \in \hat{\rho}(s_j)} \left|\Delta\lambda_{k_j,s_j}\right| = \sum_{k_j \in \hat{\rho}(s_j)} \left|\frac{\psi_j(2^{s_j})}{\psi_j(|k_j|)} e^{\frac{i\pi\beta_j}{2} sgn k_j} - \frac{\psi_j(2^{s_j})}{\psi_j(|k_j+1|)} e^{\frac{i\pi\beta_j}{2} sgn(k_j+1)}\right| \le$$

$$\le \psi_j(2^{s_j}) \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} \left|\frac{1}{\psi_j(k_j)} - \frac{1}{\psi_j(k_j+1)}\right| =$$

$$= \psi_j(2^{s_j}) \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j-1}} \left(\frac{1}{\psi_j(k_j+1)} - \frac{1}{\psi_j(k_j)}\right) =$$

$$= \psi_j(2^{s_j}) \left(\frac{1}{\psi_j(2^{s_j})} - \frac{1}{\psi_j(2^{s_j-1})}\right) = 1 - \frac{\psi_j(2^{s_j})}{\psi_j(2^{s_j-1})} \le 1. \qquad (10)$$

Таким чином поєднавши (9) і (10) приходимо до оцінки

$$\sum_{k_j \in \rho(s_j)} \left|\Delta\lambda_{k_j,s_j}\right| \le 3.$$

З одержаних оцінок можемо стверджувати, що для послідовності λ_{k_j,s_j} де $s_j = 1, 2, \dots, k_j \in \rho(s_j)$, виконуються умови теореми А, і тому для мультиплікатора Λ справедливе включення $\Lambda \in M_p$.

Скориставшись цим фактом можемо записати

$$\|\Lambda g(x)\|_p \le \|\Lambda\|_p \|g(x)\|_p \le C(p)\|g(x)\|_p. \qquad (11)$$

З іншого боку, враховуючи (7), маємо

$$\|\Lambda g(x)\|_p = \left\|f_\beta^\psi(x)\right\|_p \qquad (12)$$

і таким чином з (11) і (12) приходимо до оцінки

$$\left\| f_\beta^\psi(x) \right\|_p \le C(p)\|g(x)\|_p. \qquad (13)$$

На завершення, застосувавши теорему Б по відношенню до функції $g(x)$, з (13) будемо мати

$$\left\| f_\beta^\psi(x) \right\|_p \le C(p) \left\| \left(\sum_{s\in\mathbb{N}^d} |\delta_s(g,x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p =$$

$$= \tilde{C}(p) \left\| \left(\sum_{s\in\mathbb{N}^d} \left|\tilde{\delta}_s(f,x)\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p = \tilde{C}(p) \left\| \left(\sum_{s\in\mathbb{N}^d} \left| \prod_{j=1}^d \psi_j^{-1}(2^{s_j})\, \delta_s(g,x) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p,$$

де $\tilde{C}(p) > 0 -$ деяка стала, яка залежить від p.

Оцінка зверху встановлена.

Для доведення в (6) оцінки знизу розглянемо послідовність

$$\lambda_{k,s}^{-1} = \prod_{j=1}^d \psi_j\left(\left|k_j\right|\right)/\psi_j(2^{s_j}) e^{-\frac{i\pi\beta_j}{2} sgn k_j},$$

де $s_j = 1,2,\dots,\ \ k_j \in \rho(s_j)$ і мультиплікатор Λ^{-1}, який породжений цією послідовністю.

Тоді подіявши цим мультиплікатором на функцію $f_\beta^\psi(x)$, де $\psi_j(\cdot) \in D$ і $\beta_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1,d}$, отримаємо

$$\Lambda^{-1} f_\beta^\psi(x) = \Lambda^{-1} \sum_{k\in\dot{\mathbb{Z}}^d} \prod_{j=1}^d \hat{f}(k)\psi_j^{-1}\left(\left|k_j\right|\right) e^{\frac{i\pi\beta_j}{2} sgn k_j}\, e^{(k,x)} =$$

$$= \Lambda^{-1} \sum_{s\in\dot{\mathbb{N}}^d} \sum_{k\in\rho(s)} \prod_{j=1}^d \hat{f}(k)\psi_j^{-1}\left(\left|k_j\right|\right) e^{\frac{i\pi\beta_j}{2} sgn k_j} e^{i(k,x)} =$$

$$= \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \sum_{k \in \rho(s)} \prod_{j=1}^{d} \hat{f}(k) \psi_j^{-1}(2^{s_j}) e^{i(k,x)} =$$

$$= \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^{d} \psi_j^{-1}(2^{s_j}) \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)} =$$

$$= \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^{d} \psi_j^{-1}(2^{s_j}) \delta_s(f,x) = g(x). \tag{14}$$

Тепер покажемо, що мультиплікатор Λ^{-1} належить до M_p. Для цього, як зазначалося вище, достатньо перевірити, що для будь-якого фіксованого j числа

$$\lambda_{k_j,s_j}^{-1} = \psi_j(|k_j|)/\psi_j(2^{s_j}) e^{-\frac{i\pi\beta_j}{2} sgn k_j},$$

$$s_j = 1,2, \dots, k_j \in \rho(s_j)$$

є множниками Марцинкевича, тобто для них виконані умови а) і б) теореми А.

Згідно з означенням множини D маємо

$$\left|\lambda_{k_j,s_j}^{-1}\right| = \left|\psi_j(|k_j|)/\psi_j(2^{s_j}) e^{-\frac{i\pi\beta_j}{2} sgn k_j}\right| = \frac{\psi_j(|k_j|)}{\psi_j(2^{s_j})} \le M_j$$

і таким чином умова а) виконана.

Для перевірки виконання умови б) проведемо міркування аналогічні до тих, які використовувалися при доведенні оцінки зверху.

Маємо

$$\sum_{k_j \in \rho(s_j)} \left|\Delta\lambda_{k_j,s_j}^{-1}\right| \le \sum_{k_j \in \hat{\rho}(s_j)} \left|\Delta\lambda_{k_j,s_j}^{-1}\right| + 2M_j =$$

$$= \sum_{k_j \in \hat{\rho}(s_j)} \left| \frac{\psi_j(|k_j|)}{\psi_j(2^{s_j})} e^{-\frac{i\pi\beta_j}{2} sgnk_j} - \frac{\psi_j(|k_j+1|)}{\psi_j(2^{s_j})} e^{-\frac{i\pi\beta_j}{2} sgn(k_j+1)} \right| + 2M_j \leq$$

$$\leq \psi_j^{-1}(2^{s_j}) \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} \left|\psi_j(k_j) - \psi_j(k_j+1)\right| + 2M_j =$$

$$= \psi_j^{-1}(2^{s_j}) \left(\psi_j(2^{s_j-1}) - \psi_j(2^{s_j})\right) + 2M_j = \frac{\psi_j(2^{s_j-1})}{\psi_j(2^{s_j})} - 1 + 2M_j < 3M_j.$$

Таким чином, взявши до уваги виконання умов а) і б) для послідовності $\lambda_{k,s}^{-1}$ робимо висновок, що для мультиплікатора Λ^{-1} справедливе включення $\Lambda^{-1} \in M_p$ і відповідно

$$\left\|\Lambda^{-1} f_\beta^\psi(x)\right\|_p \leq \|\Lambda^{-1}\|_p \left\|f_\beta^\psi(x)\right\|_p \leq C(p) \left\|f_\beta^\psi(x)\right\|_p. \tag{15}$$

Поєднавши (14) і (15) можемо записати

$$\left\|f_\beta^\psi(x)\right\|_p \geq C^{-1}(p) \|g(x)\|_p. \tag{16}$$

На завершення застосувавши до правої частини (16) теорему Літтлвуда-Пелі, одержимо

$$\left\|f_\beta^\psi(x)\right\|_p \geq \tilde{C}^{-1}(p) \left\| \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} |\delta_s(g,x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p =$$

$$= \tilde{C}^{-1}(p) \left\| \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} \left|\tilde{\delta}_s(f,x)\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p =$$

$$= \tilde{C}^{-1}(p) \left\| \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} \left| \prod_{j=1}^d \psi_j^{-1}(2^{s_j}) \delta_s(f,x) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p.$$

Оцінка знизу встановлена.

Теорему 1 доведено.

Зауваження 3. У випадку $\psi_j|k_j| = |k_j|^{-r_j}, r_j > 0, j = \overline{1,d}$, співвідношення (6) встановлено Н. С. Нікольською (1974 р.) (див. наприклад, [3, р 37]) і має вигляд

$$\|f_\beta^r(x)\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{s\in\mathbb{N}^d} \left|2^{(s,r)}\delta_s(f,x)\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p,$$

де $r = (r_1 \dots, r_d)$.

1.3 Нерівність типу Бернштейна для $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$ −похідних тригонометричних поліномів у просторі $\boldsymbol{L_p}$.

У цьому пункті з використанням результату теореми 1, отримаємо нерівність типу Бернштейна для тригонометричних поліномів з множини $T(Q_n)$. Одержана нерівність показує зв'язок між нормою в $L_p, 1 < p < \infty$, $(\psi, \beta) -$ похідних поліномів $t \in T(Q_n)$ і нормою самого полінома також у просторі L_p. Відповідне співвідношення будемо записувати в термінах величини

$$\Phi(n) = \min_{s:(s,1)<n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}).$$

Теорема 2. Нехай $d \geq 2$ $\psi_j(\cdot) -$ додатні і незростаючі, $\beta_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1,d}$. Тоді для $p \in (1,\infty)$ справедливе співвідношення

$$\sup_{t\in T(Q_n)} \left\|t_\beta^\psi(x)\right\|_p / \|t(x)\|_p \asymp \Phi^{-1}(n). \qquad (17)$$

Зауваження 4. Порядкова нерівність в (17) розуміється з константами залежними від параметра p і не залежними від полінома $t(x) \in T(Q_n)$.

Доведення. Оскільки $t(x) \in T(Q_n)$ то

$$t(x) = \sum_{(s,1)<n} \delta_s(t,x)$$

і тому для (ψ,β) −похідної цього полінома згідно з теоремою 1 і коментарем до неї можемо записати

$$\left\| t_\beta^\psi(x) \right\|_p \leq C(p) \left\| \left(\sum_{(s,1)<n} \left| \prod_{j=1}^{d} \psi_j^{-1}(2^{s_j})\, \delta_s(t,x) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq$$

$$\leq C(p)\Phi^{-1}(n) \left\| \left(\sum_{(s,1)<n} |\delta_s(t,x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p .$$

Оцінка зверху в (17) встановлена.

Для того, щоб отримати в (17) оцінку знизу достатньо навести приклад полінома $\tilde{t}(x) \in T(Q_n)$, для якого реалізується одержана оцінка зверху з деякою константою $\tilde{C}(p)$.

Нехай $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_d), \tilde{s} \in \mathbb{N}^d,$ − вектор, для якого

$$\prod_{j=1}^{d} \psi_j^{-1}\left(2^{\tilde{s}_j}\right) = \Phi(n), (\tilde{s},1) < n.$$

Розглянемо поліном

$$\tilde{t}(x) = e^{i\left(2^{\tilde{s}},x\right)},$$

де $2^{\tilde{s}} = \left(2^{\tilde{s}_1}, \dots, 2^{\tilde{s}_d}\right)$ і $\left(2^{\tilde{s}}, x\right) = 2^{\tilde{s}_1}x_1 + \ldots + 2^{\tilde{s}_d}x_d$.

Тоді, згідно з означенням (ψ,β) −похідної можемо записати

$$\tilde{t}_{\beta}^{\psi}(x)=\prod_{j=1}^{d}\psi_j^{-1}\left(2^{\tilde{s}_j}\right)e^{i\left(2^{\tilde{s}_j}x_j+\frac{\pi\beta_j}{2}\right)}=\Phi^{-1}(n)\prod_{j=1}^{d}e^{i\left(2^{\tilde{s}_j}x_j+\frac{\pi\beta_j}{2}\right)}.$$

Звідси отримаємо

$$\left\|\tilde{t}_{\beta}^{\psi}(x)\right\|_p=\Phi^{-1}(n)\left\|\prod_{j=1}^{d}e^{i\left(2^{\tilde{s}_j}x_j+\frac{\pi\beta_j}{2}\right)}\right\|_p=$$

$$=\Phi^{-1}(n)\left\|\prod_{j=1}^{d}e^{i\left(2^{\tilde{s}_j}x_j\right)}\right\|_p=\Phi^{-1}(n)\left\|e^{i\left(2^{\tilde{s}},x\right)}\right\|_p\Phi^{-1}(n)\|\tilde{t}(x)\|_p.$$

Теорему 2 доведено.

Зауваження 5. У випадку $\psi_j\left(|k_j|\right)=|k_j|^{-r}, r>0, j=\overline{1,d},$ співвідношення (17) встановлено Н. С. Нікольською (1974 р.) (див. наприклад [3, p. 37] і має вигляд

$$\sup_{t\in T(Q_n)}\left\|t_{\beta}^{r}(x)\right\|_p/\|t(x)\|_p\asymp 2^{-nr}.$$

Для (ψ,β) −похідної полінома від однієї змінної $(d=1)$ аналогічний результат отриманий О. І. Степанцем і О. К. Кушпелем (див, наприклад, [4]).

З доведеної теореми виокремимо випадок $p=2$ і покажемо, що в гільбертовому просторі L_2 порядкове співвідношення (17) перетворюється в рівність.

Теорема 2′. Нехай $\psi_j(\cdot)$ − додатні і незростаючі, $\beta_j\in\mathbb{R}, j=\overline{1,d}$. Тоді справедлива рівність

$$\sup_{t\in T(Q_n)}\left\|t_{\beta}^{\psi}(x)\right\|_2/\|t(x)\|_2=\Phi^{-1}(n). \tag{18}$$

Доведення. Одержимо в (18) спочатку оцінку зверху. Для цього скористаємося рівністю Парсеваля [13], яка для $f\in L_2^0(\mathrm{T}^d)$ має вигляд

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left|\hat{f}(k)\right|^2 \ . \tag{19}$$

Отже, нехай $t \in T(Q_n)$, тобто

$$t(x) = \sum_{(s,1)<n} \sum_{k\in\rho(s)} c_k e^{i(k,x)}, c_k \in \mathbb{C}.$$

Тоді (ψ, β) −похідна полінома $t(x)$ буде мати вигляд

$$t_\beta^\psi(x) = \sum_{(s,1)<n} \sum_{k\in\rho(s)} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{\frac{i\pi\beta_j}{2} sgnk_j}}{\psi_j(|k_j|)} c_k e^{i(k,x)}.$$

Взявши до уваги рівність (19) можемо записати

$$\left\|t_\beta^\psi(x)\right\|_2^2 = \left\|\sum_{(s,1)<n} \sum_{k\in\rho(s)} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{\frac{i\pi\beta_j}{2} sgnk_j}}{\psi_j(|k_j|)} c_k e^{i(k,x)}\right\|_2^2 =$$

$$\sum_{(s,1)<n} \sum_{k\in\rho(s)} \prod_{j=1}^{d} \left|\frac{c_k}{\psi_j(|k_j|)}\right|^2 \leq \ \sum_{(s,1)<n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j^{-2}(2^{s_j}) \sum_{k\in\rho(s)} |c_k|^2 \leq$$

$$\leq \Phi^{-2}(n) \sum_{(s,1)<n} \sum_{k\in\rho(s)} |c_k|^2 = \Phi^{-2}(n)\|t(x)\|_2^2.$$

Звідси отримаємо

$$\left\|t_\beta^\psi(x)\right\|_2 \leq \Phi^{-1}(n)\|t(x)\|_2. \tag{20}$$

Для встановлення в (18) оцінки знизу достатньо розглянути поліном $t(x)$, який використовувався при доведенні попередньої теореми 2.

Теорему $2'$ доведено.

1.4 Нерівність різних метрик типу Нікольського для $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$ −похідних тригонометричних поліномів.

Важливу роль в теорії наближення функцій відіграє нерівність, встановлена С. М. Нікольським (1951 р.), яка відома в математичній літературі як “нерівність різних метрик” (див. наприклад, [2, с. 19].

Сформулюємо відповідне твердження.

Теорема Б. Нехай $n = (n_1, \dots, n_d), n_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1,d}$, і

$$t(x) = \sum_{|k_j| \leq n} c_k e^{i(k,x)}.$$

Тоді при $1 < q < p < \infty$ справедлива нерівність

$$\|t(x)\|_p \leq 2^d \prod_{j=1}^{d} n_j^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|t(x)\|_q.$$

Наша мета в цьому пункті роботи полягає в тому, щоб отримати подібного роду нерівність для (ψ, β) −похідних тригонометричних поліномів з множини $T(Q_n)$ Для цього нам знадобиться допоміжне твердження (див., наприклад, $[1, ch\ 1, \S\ 1.3]$.

Теорема Г. Нехай $1 < q < p < \infty$, $a = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$,

$$f(x) = \sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^d} \hat{f}(k) e^{i(k,x)} \in L_p^0(\mathrm{T}^d)$$

Тоді

$$A_a f(x) = \sum_{k \in \dot{\mathbb{Z}}^d} \hat{f}(k) \prod_{j=1}^{d} |k_j|^{-a} e^{i(k,x)} \in L_q^0(\mathrm{T}^d)$$

і

$$\|A_a f(x)\|_p \leq C(p,q) \|f(x)\|_q.$$

Нами доведено наступне твердження.

Теорема 3. Нехай $\psi_j(\cdot)$ − додатні і незростаючі, $\beta_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1,d}$.

Тоді $\forall\ t(x) \in T(Q_n)$ і $1 < q < p < \infty$

$$\left\| t_\beta^\psi(x) \right\|_p \ll \Phi^{-1}(n) 2^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \|t(x)\|_q. \qquad (21)$$

Якщо ж $\psi_j(\cdot) \in D, j = \overline{1,d}$, то

$$\sup_{t \in T(Q_n)} \left\| t_\beta^\psi(x) \right\|_p / \|t(x)\|_q \asymp \Phi^{-1}(n) 2^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}. \qquad (22)$$

Доведення. Спочатку отримаємо оцінку (21).

Нехай

$$t(x) = \sum_{k \in Q_n} \hat{t}(k) e^{i(k,x)}$$

і

$$t_\beta^\psi(x) = \sum_{k \in Q_n} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{\frac{i\pi\beta_j}{2} sgn k_j}}{\psi_j\left(\left|k_j\right|^a\right)} \hat{t}(k) e^{i(k,x)}.$$

Розглянемо оператор A_a, який був означений у формулюванні теореми Г, і подіємо ним на поліном $t_\beta^\psi(x)$. В результаті одержимо

$$A_a t_\beta^\psi(x) = \sum_{k \in Q_n} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{\frac{i\pi\beta_j}{2} sgn k_j}}{\psi_j\left(\left|k_j\right|^a\right)} \hat{t}(k) e^{i(k,x)}.$$

Далі, якщо $A_a^{-1} -$ оператор, обернений до оператора A_a, то

$$t_\beta^\psi(x) = A_a A_a^{-1} t_\beta^\psi(x) = A_a t_\beta^{\widetilde{\psi}}(x),$$

де

$$t_\beta^{\tilde{\psi}}(x) = \sum_{k\in Q_n} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{\frac{i\pi\beta_j}{2} sgnk_j}}{\psi_j(|k_j|)} \hat{t}(k) e^{i(k,x)}.$$

Згідно з теоремою Г можемо записати

$$\left\| t_\beta^{\psi}(x) \right\|_p = \left\| A_a t_\beta^{\tilde{\psi}}(x) \right\|_p \ll \left\| t_\beta^{\tilde{\psi}}(x) \right\|_q. \qquad (23)$$

Для оцінки $\left\| t_\beta^{\tilde{\psi}}(x) \right\|_q$ розглянемо кратну послідовність

$$\lambda_{k,s}^{(a)} = \begin{cases} \sum_{k\in Q_n} \prod_{j=1}^{d} \frac{\psi_j(2^{s_j})|k_j|^a}{\psi_j(|k_j|)2^{s_j a}} e^{\frac{i\pi\beta_j}{2} sgnk_j}, (s,1) < n, \ \ k \in \rho(s), \\ 0, \qquad (s,1) \geq n, \ \ k \in \rho(s), \end{cases}$$

і поліном

$$t^*(x) = \sum_{(s,1)<n} \prod_{j=1}^{d} \frac{2^{s_j a}\delta_s(t,x)}{\psi_j(2^{s_j})} = \sum_{(s,1)<n} \prod_{j=1}^{j=1} \frac{2^{s_j a}}{\psi_j(2^{s_j})} \sum_{k\in\rho(s)} \hat{t}(k) e^{i(k,x)}.$$

Провівши міркування, які використовувалися при доведенні теореми 1, можна переконатися, що кратна послідовність $\lambda_{k,s}^{(a)}$ задовольняє багатовимірному випадку теореми Марцинкевича, і тому для мультиплікатора $\tilde{\Lambda}_a$, що породжується цією послідовністю, справедлива оцінка

$$\left\| \tilde{\Lambda}_a \, t^*(x) \right\|_q \leq C(q) \| t^*(x) \|_q. \qquad (24)$$

З іншого боку маємо

$$\tilde{\Lambda}_a \, t^*(x) = \sum_{(s,1)<n} \lambda_{k,s}^{(a)} \prod_{j=1}^{d} \frac{2^{s_j a}}{\psi_j(2^{s_j})} \sum_{k\in\rho(s)} \hat{t}(k) e^{i(k,x)} =$$

$$= \sum_{(s,1)<n} \sum_{k\in\rho(s)} \prod_{j=1}^{d} \frac{|k_j|^a}{\psi_j(|k_j|)} e^{\frac{i\pi\beta_j}{2} sgnk_j} \hat{t}(k) e^{i(k,x)} =$$

$$= \sum_{k \in Q_n} \prod_{j=1}^{d} \frac{|k_j|^a}{\psi_j(|k_j|)} e^{\frac{i\pi\beta_j}{2} sgn k_j} \hat{t}(k) e^{i(k,x)} = t_{\beta}^{\widetilde{\psi}}(x). \qquad (25)$$

Отже, згідно з (23) і (25) можемо записати

$$\widetilde{\Lambda}_a \left\| t_{\beta}^{\widetilde{\psi}}(x) \right\|_q = \left\| \widetilde{\Lambda}_a \, t^*(x) \right\|_q \le C(q) \| t^*(x) \|_q. \qquad (26)$$

і співставивши (26) і (23) будемо мати

$$\left\| t_{\beta}^{\psi}(x) \right\|_p \le C(q) \| t^*(x) \|_q \qquad (27)$$

Для продовження оцінки (27) скориставшись теоремою А по відношенню до полінома $t^*(x)$ отримаємо

$$\| t^*(x) \|_q \ll \left\| \left(\sum_{(s,1)<n} \left| \prod_{j=1}^{d} 2^{s_j a} \psi_j^{-1}(2^{s_j}) \, \delta_s(t,x) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \ll$$

$$\ll \Phi^{-1}(n) 2^{na} \left\| \left(\sum_{(s,1)<n} |\delta_s(t,x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \ll$$

$$\ll \Phi^{-1}(n) 2^{na} \| t^*(x) \|_q. \qquad (28)$$

Таким чином із (27) і (28) отримаємо шукану оцінку

$$\left\| t_{\beta}^{\psi}(x) \right\|_q \ll \Phi^{-1}(n) 2^{n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)} \| t(x) \|_q. \qquad (29)$$

Для того, щоб довести другу частину теореми покажемо, що одержана оцінка (29) при умові, що, $\psi_j(\cdot) \in D, j = \overline{1,d},$ є точною за порядком.

З цією метою побудуємо поліном, для якого права частина в (29) досягається з деякою сталою, залежною можливо від $p \; i \; q$.

Розглянемо поліном

$$\bar{t}(x) = \sum_{k\in\rho(s^*)} e^{i(k,x)} \prod_{j=1}^{d} e^{\frac{i\pi\beta_j}{2} sgnk_j},$$

де $s^* = (s_1^*, \dots, s_d^*) -$ вектор, для якого $(s^*, 1) < n$ і

$$\prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j^*}\right) = \Phi(n).$$

Згідно з означенням (ψ, β) –похідної, можемо записати

$$\bar{t}_\beta^\psi(x) = \sum_{k\in\rho(s^*)} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{i(k,x)}}{\psi_j(|k_j|)}.$$

Далі введемо до розгляду поліном

$$\tau(x) = \sum_{k\in\rho(s^*)} \prod_{j=1}^{d} \psi_j^{-1}(2^{s_j}) e^{i(k,x)},$$

який отримується при дії на поліном $\bar{t}_\beta^\psi(x)$ оператора Λ породженого кратною послідовністю

$$\lambda_{k,s^*} = \begin{cases} \prod_{j=1}^{d} \frac{\psi_j(|k_j|)}{\psi_j(2^{s_j^*})}, & k \in \rho(s^*), \\ 0, & k \notin \rho(s^*) \end{cases}$$

тобто

$$\tau(x) = \Lambda\, \bar{t}_\beta^\psi(x). \tag{30}$$

Легко переконатися, що для $\psi_j(\cdot) \in D$, числа λ_{k,s^*} є множниками Марцинкевича, тобто при $1 < p < \infty$ виконується порядкова нерівність

$$\left\|\Lambda\, \bar{t}_\beta^\psi(x)\right\|_p \ll \left\|\bar{t}_\beta^\psi(x)\right\|_p. \tag{31}$$

Врахувавши (30) і (31) будемо мати

$$\left\|\bar{t}_{\beta}^{\psi}(x)\right\|_{p} \gg \|\tau(x)\|_{p} = \prod_{j=1}^{d} \psi_{j}^{-1}(2^{s_{j}^{*}}) \left\|\sum_{k\in\rho(s^{*})} e^{i(k,x)}\right\|_{p} =$$

$$= \Phi^{-1}(n) \left\|\sum_{k\in\rho(s^{*})} e^{i(k,x)}\right\|_{p}. \qquad (32)$$

Для продовження оцінки (32) скористаємося відомим співвідношенням (див. наприклад, [2], с.39)

$$\left\|\sum_{k=-m}^{m} e^{ikx}\right\|_{p} \asymp m^{1-\frac{1}{p}}, \quad p \in (1,\infty),$$

яке в наших позначеннях можемо записати у вигляді

$$\left\|\sum_{k\in\rho(s^{*})} e^{i(k,x)}\right\|_{p} \asymp 2^{\|s^{*}\|_{1}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \asymp 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \qquad (33)$$

де $\|s^{*}\|_{1} = s_{1}^{*} + \ldots + s_{d}^{*}$.

Отже, підставивши (33) в (32) і ще раз скориставшись співвідношенням (33) при $p = q$, отримаємо

$$\left\|\bar{t}_{\beta}^{\psi}(x)\right\|_{p} \gg \Phi^{-1}(n) 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} 2^{-n\left(1-\frac{1}{q}\right)} \left\|\sum_{k\in\rho(s^{*})} e^{i(k,x)}\right\|_{q} \asymp$$

$$\asymp \Phi^{-1}(n) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left\|\sum_{k\in\rho(s^{*})} e^{i(k,x)}\right\|_{q} = \Phi^{-1}(n) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|\bar{t}(x)\|_{q}. \qquad (34)$$

Оцінку знизу встановлено.

Теорему 3 доведено.

Наслідок 1. Нехай $d \geq 2, \psi_{j}\left(\left|k_{j}\right|\right) = \left|k_{j}\right|^{-r}, r > 0, j = \overline{1,d}, \beta \in \mathbb{R}^{d}$

Тоді при $1 < q < p < \infty$ справедливе співвідношення

$$\sup_{t \in T(Q_n)} \left\| t_\beta^{(r)}(x) \right\|_p / \|t(x)\|_q \asymp 2^{n\left(r + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)}. \qquad (35)$$

Оцінка (35) випливає з теореми 3, оскільки послідовність $\left\{ \left| k_j \right|^{-r} \right\}_{j=1}^{d}, r > 0$, належить до множини D і при цьому

$$\Phi(n) = \min_{s:(s,1)<n} \prod_{j=1}^{d} 2^{-s_j r} = \min_{s:(s,1)<n} 2^{-(s,1)r} \asymp 2^{-nr}.$$

Зауваження 6. Для тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік з гіперболічних хрестів аналог оцінки (35) одержано В.М. Темляковим (1986 р.) (див.[3, с.35]).

Розділ 2

Апроксимаційні характеристики класів $L_{\beta,p}^{\psi}$ у просторі Лебега

2.1 Означення апроксимаційних характеристик класів $L_{\beta,p}^{\psi}$ і зв'язок між ними.

Спочатку наведемо означення апроксимаційних характеристик, які будемо досліджувати.

Для $f \in L_1^0(\mathrm{T}^d)$і $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$S_n(f) \coloneqq S_n(f, x) \coloneqq \sum_{k \in Q_n} \hat{f}(k) e^{i(k,x)}, x \in \mathbb{R}^d,$$

де

$$Q_n = \bigcup_{(s,1)<n} \rho(s) - \text{східчастий гіперболічний хрест і}$$

$$\hat{f}(k) = \int\limits_{\mathrm{T}^d} f(t)e^{-i(k,t)}dt - \text{коефіцієнти Фур}'\text{є функції } f.$$

Поліноми $S_n(f)$ називають східчастими гіперболічними сумами Фур'є і їх, згідно з прийнятими вище позначеннями, можна подати у вигляді

$$S_n(f,x) = \sum_{(s,1)<n} \delta_s(f,x) \coloneqq \sum_{(s,1)<n} \delta_s(f).$$

Нехай $F \subset L_q^0(\mathrm{T}^d) -$ деякий функціональний клас. У зв'язку із введеним означенням поліномів $S_n(f,x)$ будемо розглядати наступну апроксимаційну характеристику

$$\mathcal{E}_n(F)_q \coloneqq \sup_{f\in F} \|f(x) - S_n(f,x)\|_q. \tag{36}$$

Паралельно із величинами (36) будемо досліджувати апроксимаційну характеристику вигляду

$$E_n(F)_q \coloneqq \sup_{f\in F} \inf_{t\in T(Q_n)} \|f(x) - t(x)\|_q, \tag{37}$$

де

$$T(Q_n) \coloneqq \left\{ t \colon t(x) = \sum_{k\in Q_n} c_k e^{i(k,x)}, c_k \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Величина (37) називається найкращим наближенням класу$F \subset L_q^0(\mathrm{T}^d)$ за допомогою тригонометричних поліномів з множини $T(Q_n)$.

Тепер вкажемо на зв'язок між величинами (36) і (37) у просторі $L_q^0(\mathrm{T}^d)$, $q \in (1;\infty)$.

Нехай S_{Q_n} поз начає оператор Фур'є, який ставить у відповідність функції $f \in L_q^0(\mathrm{T}^d)$ її східчасту гіперболічну суму Фур'є $S_n(f)$, тобто $S_{Q_n} f = S_n(f)$.

Легко переконатися, що норма оператора S_{Q_n} , який діє з $L_q^0(\mathrm{T}^d)$ в $L_q^0(\mathrm{T}^d)$ (позначення $\left\|S_{Q_n}f\right\|_{q\to q} \coloneqq \left\|S_{Q_n}\right\|_q$) при $1 < q < \infty$ є обмеженою.

Дійсно, скориставшись теоремою А, можемо записати

$$\|S_n(f,x)\|_q = \left\|\sum_{(s,1)<n} \delta_s(f,x)\right\|_q \le C(q)\left\|\left(\sum_{(s,1)<n} |\delta_s(f,x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_q \le$$

$$\le C(q)\left\|\left(\sum_{s\in\mathbb{N}^d} |\delta_s(f,x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_q \le C_1(q)\|f(x)\|_q.$$

Звідси, згідно з означенням норми оператора будемо мати

$$\left\|S_{Q_n}\right\|_q = \sup_{\|f(x)\|_q\le 1} \left\|S_{Q_n}f(x)\right\|_q = \sup_{\|f(x)\|_q\le 1} \|S_n(f,x)\|_q \le C_1(q). \qquad (38)$$

Далі, нехай

$$E_n(f)_q \coloneqq \inf_{t\in T(Q_n)} \|f(x) - t(x)\|_q -$$

- найкраще наближення функції $f \in L_q^0(\mathrm{T}^d)$ за допомогою полінома $t \in T(Q_n)$.

Покажемо, що для $\forall\, f \in L_q^0(\mathrm{T}^d)$ справедлива оцінка

$$\|\rho_n(f,x)\|_q = \|f(x) - S_n(f,x)\|_q \le C_2(q)E_n(f)_q,$$

де $C_2(q) > 0$.

Нехай $t^*(x) \in T(Q_n) -$ поліном найкращого наближення функції $f \in L_q^0(\mathrm{T}^d)$.

Оскільки $S_n(f,x) \in T(Q_n)$, то $S_n(t^*,x)$ співпадає з $t^*(x)$ і тому

$$S_n(f,x) - t^*(x) = S_n(f,x) - S_n(t^*,x) = S_n(f - t^*,x).$$

Із врахуванням цього співвідношення і оцінки (38) можемо записати

$$\|\rho_n(f,x)\|_q = \|f(x) - t^*(x) + t^*(x) - S_n(f,x)\|_q =$$

$$= \|f(x) - t^*(x) - S_n(f - t^*, x)\|_q \leq \|f(x) - t^*(x)\|_q + \|S_n(f - t^*, x)\|_q \leq$$

$$\leq E_n(f)_q + \left\|S_{Q_n}\right\|_q \|f - t^*\|_q = E_n(f)_q + \left\|S_{Q_n}\right\|_q E_n(f)_q =$$

$$= E_n(f)_q \left(1 + \left\|S_{Q_n}\right\|_q\right) \leq C_3(q) E_n(f)_q, \qquad (39)$$

де $C_3(q) > 0$.

З іншого боку, згідно з означеннями величин $\|\rho_n(f,x)\|_q$ і $E_n(f)_q$,

$f \in L_q^0(\mathrm{T}^d), 1 < q < \infty$, маємо

$$E_n(f)_q \leq \|\rho_n(f,x)\|_q = \|f(x) - S_n(f,x)\|_q. \qquad (40)$$

Отже, співставивши (39) і (40), приходимо до порядкового співвідношення

$$E_n(f)_q \asymp \|f(x) - S_n(f,x)\|_q, \qquad (41)$$

$$f \in L_q^0(\mathrm{T}^d) \text{ і } 1 < q < \infty.$$

2.2 Наближення класів $L_{\beta,p}^{\psi}$ східчастими гіперболічними сумами Фур'є і найкращі наближення у просторі $L_p, 1 < p < \infty$.

У цьому пункті роботи одержимо точні за порядком оцінки величини $\mathcal{E}_n\left(L_{\beta,p}^{\psi}\right)_p$, $1 < p < \infty$, і певних умовах на функції $\psi_j(\cdot), j = \overline{1,d}$.

Одержаний результат будемо формулювати в термінах величини

$$\Psi(n) = \max_{s:(s,1)\geq n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}).$$

Справедливе твердження.

Теорема 4. Нехай $d \geq 2, 1 < p < \infty, \psi_j(\cdot) \in D, \beta_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1, d}.$ Тоді мають місце порядкові співвідношення

$$\mathcal{E}_n\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_p \asymp E_n\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_p \asymp \Psi(n). \quad (42)$$

Доведення. Спочатку встановимо оцінку зверху для величини $\mathcal{E}_n\left(L^{\psi}_{\beta,\rho}\right)_p$, з якої зрозумілим чином, буде випливати необхідна оцінка зверху і для найкращого наближення $E_n\left(L^{\psi}_{\beta,p}\right)_p$.

Отже, нехай $f \in L^{\psi}_{\beta,p}$. Введемо до розгляду функцію

$$g_1(x) = \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)}$$

і розглянемо кратну послідовність

$$\lambda^{-1}_{k,s} = \prod_{j=1}^{d} \frac{\psi_j(|k_j|)}{\psi_j(2^{s_j})} e^{-\frac{i\pi\beta_j}{2} sgn k_j},$$

де $s_j = 1,2, \dots, k_j \in \rho(s_j)$.

Позначимо через Λ^{-1}, мультиплікатор, який породжується цією послідовністю і покажемо, що

$$\Lambda^{-1}\, g_1(x) = f(x).$$

Дійсно, оскільки

$$\hat{f}(k) = \prod_{j=1}^{d} \psi_j(|k_j|)\, e^{-\frac{i\pi\beta_j}{2} sgn k_j} \hat{f}^{\psi}_{\beta}(k),$$

то будемо мати

$$\Lambda^{-1}\, g_1(x) = \Lambda^{-1} \sum_{s\in\mathbb{N}^d} \sum_{k\in\rho(s)} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(|k_j|)\, e^{-\frac{i\pi\beta_j}{2} sgn k_j} \hat{f}_{\beta}^{\psi}(k) e^{i(k,x)} =$$

$$= \sum_{s\in\mathbb{N}^d} \sum_{k\in\rho(s)} \hat{f}(k)\, e^{i(k,x)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}(k) e^{i(k,x)} = f(x).$$

Крім цього, при доведенні теореми 1 було показано, що числа $\lambda_{k,s}^{-1}$ є множниками Марцинкевича, тобто мультиплікатор $\Lambda^{-1} \in M_p$ і тому

$$\|f(x)\|_p = \|\Lambda^{-1}\, g_1(x)\|_p \le C_3(p) \|g_1(x)\|_p. \tag{43}$$

Далі, взявши до уваги (43) і скориставшись теоремою Б можемо записати

$$\|\rho_n(f,x)\|_p \le C_3(p)\|\rho_n(g_1,x)\|_p = C_3(p) \left\| \sum_{(s,1)\ge n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) \delta_s\left(f_\beta^\psi, x\right) \right\|_p \le$$

$$\le C_4(p) \left\| \left(\sum_{(s,1)\ge n} \prod_{j=1}^{d} \left| \psi_j(2^{s_j}) \delta_s\left(f_\beta^\psi, x\right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\| \le$$

$$\le C_4(p)\Psi(n) \left\| \left(\sum_{s\in\mathbb{N}^d} \left| \delta_s\left(f_\beta^\psi, x\right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \le C_5(p)\Psi(n) \left| f_\beta^\psi(x) \right| \le$$

$$\le C_5(p)\Psi(n).$$

Оцінки зверху для обох величин в (42) встановлені.

Для того, щоб одержати відповідні оцінки знизу достатньо пред’явити функцію із класу $L_{\beta,\rho}^{\psi}$, для якої реалізуються щойно знайдені оцінки зверху.

Отже, розглянемо функцію

$$f_n(x) = \Psi(n) e^{i(2^{s^*},x)},$$

де $s^* = (s_1^*, \dots, s_d^*) \in \mathbb{N}^d$, –один із векторів таких, що $(s^*,1) \ge n$ і

$$\prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j^*}\right) = \Psi(n).$$

Тоді, згідно з означенням (ψ, β) $-$похідної матимемо

$$\left(f_n(x)\right)_\beta^\psi = \Psi(n) \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j^*}\right) e^{i\left(2^{s_j^*} x_j + \frac{\pi \beta_j}{2} sgn 2^{s_j^*}\right)} =$$

$$= \prod_{j=1}^{d} e^{i\left(2^{s_j^*} x_j + \frac{\pi \beta_j}{2}\right)}.$$

Звідси знаходимо

$$\left\| \left(f_n(x)\right)_\beta^\psi \right\|_p = \left\| \prod_{j=1}^{d} e^{i\left(2^{s_j^*} x_j + \frac{\pi \beta_j}{2}\right)} \right\|_p = 1,$$

і таким чином отримаємо, що $f_n(x) \in L_{\beta,p}^\psi$.

Крім цього $S_n(f_n, x) = 0,$ оскільки функція $f_n(x)$ не містить “номерів” гармонік з множини Q_n.

Врахувавши цю обставину можемо записати

$$E_n(f_n, x)_p \asymp \|\rho_n(f_n, x)\|_p = \|f_n(x) - S_n(f_n, x)\|_p = \|f_n(x)\|_p = \Psi(n).$$

Теорему 4 доведено.

Наслідок 2. Нехай $d \geq 2, 1 < p < \infty$. Тоді при $\psi_j\left(\left|k_j\right|\right) = \left|k_j\right|^{-r}, r > 0,$ $\beta_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1, d},$ справедливі оцінки

$$\mathcal{E}_n\left(W_{\beta,p}^r\right)_p \asymp E_n\left(W_{\beta,p}^r\right)_p \asymp 2^{-nr}. \qquad (44)$$

Як зазначалося в п. 1.1 при $\psi_j(|k_j|) = |k_j|^{-r}, r > 0,$ класи $L^{\psi}_{\beta,p}$збігаються із класами Вейля-Надя $W^r_{\beta,p}$. Крім цього, при таких умовах на функції $\psi_j(\cdot)$ маємо

$$\Psi(n) = \max_{s:(s,1)\geq n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) = \max_{s:(s,1)\geq n} 2^{-(s,1)r} \asymp 2^{-nr}.$$

Оцінки (44) були відомі раніше (див. наприклад, $[1, Ch3, §3]$.

Зауваження 7. В одновимірному випадку ($d = 1$) аналог теореми 4 отриманий О. К. Кушпелем і О. І. Степанцем $[12]$.

2.3. Обернена теорема для $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\beta})$ −похідних функцій із $\boldsymbol{L_p}, \boldsymbol{1 < p < \infty}$.

Твердження, яке за властивостями величин $E_n(f)_q$ дозволяє отримати певну інформацію про властивості як самої функції f, так і її (ψ, β) −похідної називають, за прийнятою в теорії наближень термінологією, оберненою теоремою.

Стосовно нашої ситуації ми вкажемо умови на функцію $f(x) \in L^0_q(T^d)$ достатні для того, щоб її (ψ, β) −похідна належала простору $L^0_p(T^d)$,

$1 < q \leq p < \infty$. Ці умови будуть сформульовані в термінах, найкращих наближень $E_l(f)_q, 1 < q < \infty, l \in \mathbb{N},$, і при цьому суттєво буде використовуватися одержана вища нерівність типу Нікольського (теорема 3).

Теорема 5. Нехай $d \geq 2, 1 < q \leq p < \infty, f(x) \in L^0_q(T^d), \psi_j(\cdot)$ −додатні і незростаючі $\beta_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1,d},$ і крім цього

$$\sum_{l\in\mathbb{N}} \Phi^{-1}(l) 2^{l\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} E_l(f)_q < \infty.$$

Тоді функція $f(x)$ має (ψ, β) −похідну $f^{\psi}_{\beta}(x) \in L^0_p(T^d)$

і

$$E_n\left(f_\beta^\psi\right)_p \le C(p,q)\sum_{l\in\mathbb{N}}\Phi^{-1}(l)2^{l\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}E_l(f)_q.$$

Доведення. Нехай $t_l(x), l\in\mathbb{N},-$поліном із множини $T(Q_l)$ найкращого наближення функції $f(x)$ у просторі $L_q^0(T^d)$. Розглянемо різницю

$\left(t_{l+1}(x)\right)_\beta^\psi-\left(t_l(x)\right)_\beta^\psi$ і оцінимо її норму у просторі $L_q^0(T^d)$.

Скориставшись результатом першої частини теореми 3, одержимо

$$\left\|\left(t_{l+1}(x)\right)_\beta^\psi-\left(t_l(x)\right)_\beta^\psi\right\|_p \le C_1(p,q)\Phi^{-1}(l)2^{l\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\|t_{l+1}(x)-t_l(x)\|_q =$$

$$= C_1(p,q)\Phi^{-1}(l)2^{l\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\|t_{l+1}(x)-f(x)+f(x)-t_l(x)\|_q \le$$

$$C_1(p,q)\Phi^{-1}(l)2^{l\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}(\|t_{l+1}(x)-f(x)\|_q+\|t_l(x)-f(x)\|_q) \le$$

$$\le C_2(p,q)\Phi^{-1}(l)2^{l\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}E_l(f)_q. \qquad (45)$$

Із оцінки (45) і умови теореми можемо зробити висновок, що ряд

$$(t_1(x))_\beta^\psi+\sum_{l=1}^{\infty}\left(\left(t_{l+1}(x)\right)_\beta^\psi-\left(t_l(x)\right)_\beta^\psi\right)$$

збігається за нормою простору $L_q^0(T^d)$ до деякої функції $F(x)$.

Легко перевірити, що коефіцієнти Фур'є цієї функції мають вигляд

$$\hat{F}(k)=\hat{f}(k)\prod_{j=1}^{d}\frac{e^{\frac{i\pi\beta_j}{2}sgnk_j}}{\psi_j(|k_j|)},$$

тобто існує $f_\beta^\psi(x)$ і співпадає з функцією $F(x)\in L_q^0(T^d)$. Таким чином нами показано, що $f_\beta^\psi(x)\in L_q^0(T^d)$.

Для завершення доведення теореми залишилося встановити оцінку величини

$$E_n\left(f_\beta^\psi(x)\right)_p.$$

Оскільки $\left(t_n(x)\right)_\beta^\psi \in T(Q_n)$ −поліном найкращого наближення функції $f_\beta^\psi(x)$, то скориставшись оцінкою (45) будемо мати

$$E_n\left(f_\beta^\psi(x)\right)_p = \left\|f_\beta^\psi(x) - \left(t_n(x)\right)_\beta^\psi\right\|_p =$$

$$= \left\|\left(t_1(x)\right)_\beta^\psi + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\left(t_{l+1}(x)\right)_\beta^\psi - \left(t_l(x)\right)_\beta^\psi\right) - \left(t_n(x)\right)_\beta^\psi\right\|_p =$$

$$= \left\|\sum_{l=n}^{\infty}\left(\left(t_{l+1}(x)\right)_\beta^\psi - \left(t_l(x)\right)_\beta^\psi\right)\right\|_p \leq \sum_{l=n}^{\infty}\left\|\left(t_{l+1}(x)\right)_\beta^\psi - \left(t_l(x)\right)_\beta^\psi\right\|_p \leq$$

$$\leq C_2(p,q)\sum_{l=n}^{\infty}\Phi^{-1}(l)2^{l\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}E_l(f)_q.$$

Теорему 5 доведено.

Зауваження 8. З одержаного результату можна стверджувати, що якщо послідовність найкращих наближень $E_l(f)_q, l \in \mathbb{N}$, поводить себе так, як $\Phi(l)$, то ми не можемо гарантувати існування $(\psi,\beta) -$ похідної функції f.

Зауваження 9. Аналог теореми 4 в одновимірному випадку $(d = 1)$ одержаний О. І. Жукіною (1987 р.) (див. наприклад, [6]).

Висновки

У даній магістерській роботі одержано наступні результати.

1. Отримано узагальнення відомої теореми Літтлвуда- Пелі на випадок (ψ,β) – похідних періодичних функцій багатьох змінних у просторі Лебега L_p, $1<p<\infty$. Встановлено точні за порядком нерівності типу Бернштейна і Нікольського для $(\psi,\beta)-$ похідних тригонометричних поліномів з «номерами» гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів. Одержані результати узагальнюють відомі твердження, які в одновимірному випадку для (ψ,β) - похідних встановлені О.І Степанцем [4], а для (r,β) – похідних поліномів від багатьох змінних - Н. С. Нікольською і В.М. Темляковим (див. [3])

2. Знайдено точні за порядком оцінки наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі $L_p, 1<p<\infty$, їхніми східчастими гіперболічними сумами Фур'є. Показано, що такого роду суми Фур'є реалізують найкращі за порядком наближення згаданих функціональних класів серед всіх інших поліномів з «номерами» гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів.

3. Доведено, так звану обернену теорему теорії наближення для функцій багатьох змінних у просторі $L_p, 1<p<\infty$. Виявлено умови, при яких можна гарантувати існування (ψ,β) – похідної для таких функцій.

Список використаних джерел

1. Temlyakov V.N. Approximation of periodic function. – New York: Nova Sc. Publ., Inc., 1993. – 419p.

2. Романюк А.С. Апроксимаційні характеристики класів періодичних функцій багатьох змінних // Праці Інституту математики НАН України. – 2012. – 93.-352с.

3. Dũng D., Temlyakov V.N. and Ullrich T. Hyperbolic Cross Approximation // Advanced Courses in Mathematics, CRM Barselona, Birkhäuser 2019. – 219 p.

4. Stepanets A.I. Classification of periodic functions and the rate of convergence of their Fourier sories. Math. USSR – Jzv, 28:1 (1987) 99-132.

5. Stepanets A.I. Classification and approximation of periodic functions, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1995)

6. Stepanets A.I. Methods of approximation theory, VSP, Utrecht (2005).

7. Консевич Н. М. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів функцій багатьох змінних $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Український математичний журнал 53:1 (2001), 23-29.

8. Shvai K.V. The best M-term trigonometric and approximation of classes of (ψ,β) – differentiable periodic multivariate functions in the space Lq//Journal of computational and applied mathematics. Taras Shevchenko National University of Kyiv. 122:2 (2016), 83-91.

9. Пожарська К.В. Оцінки найкращих M – членних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості у просторі L_q// Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Збірник праць Інституту математики НАН України 14:3 (2017), 293- 318.

10. Власик Г.М. Порядкові оцінки $L_q -$ норм узагальнених похідних ядер типу Діріхле з довільним вибором гармонік // Український математичний журнал 69:10 (2017), 1310-1323.

11. Marcinkiewicz J. Sur les multiplicateurs des series de Fourier // Studia Math, 8 (1939), 78-91.

12. Stepanets A.I. Kushpel A.K. Convergence rate of fourier serier and beste approximation in the space L_p //Ukrainian Mathematical Journal 39:4 (1987), 389-398.

13. Колмогоров А.М., Фомін С.В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу «Вища школа», 1974. – 456 с.

Анотація Гетьман А.С.

Екстремальні задачі теорії наближення періодичних функцій з узагальненою мішаною похідною. *Магістерська робота*. Луцьк. 2024. 49 с.

1. Отримано аналог відомої теореми Літтлвуда-Пелі для (ψ, β) – похідних періодичних функцій багатьох змінних з простору L_p, $1 < q < \infty$. Встановлено нерівності типу Берштейна і Нікольського для $(\psi, \beta) -$ похідних тригонометричних поліномів з «номерами» гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів.

2. Знайдено точні за порядком оцінки наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ східчастими гіперболічними сумами Фур'є у просторі $L_p, 1 < p < \infty$. і Показано, що такого виду поліноми реалізують найкращі наближення серед всіх інших поліномів з «номерами» гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів.

Отримані результати можуть знайти застосування при подальшому дослідженні питань теорії наближення періодичних функцій багатьох змінних.

Магістерська робота містить 49 сторінок, список використаної літератури налічує 13 джерел.

Ключові слова: періодична функція, східчастий гіперболічний хрест, сума Фур'є, найкраще наближення, обернена теорема.

Додатки

Біографія науковців, які згадані в магістерській роботі

Бернштейн Сергій Натанович

Сергій Натанович Бернштейн (1880–1968) – видатний український та радянський математик, який зробив значний внесок у розвиток теорії ймовірностей, теорії наближення функцій, теорії диференціальних рівнянь та інших галузей математики. Народився в Одесі в освіченій родині, отримав чудову математичну підготовку і вже з юного віку виявляв неабиякі здібності до точних наук.

Бернштейн навчався в Сорбонні, де захистив докторську дисертацію під керівництвом Жака Адамара. Його дисертація була присвячена задачі про розподіл ймовірностей, і вже ця робота принесла йому визнання в наукових колах. Після повернення додому він почав викладати в Харківському університеті, де заснував власну математичну школу. Його дослідження охоплювали різноманітні математичні напрями, але найбільшу популярність принесли йому роботи в області теорії наближення функцій, зокрема побудова поліномів Бернштейна, що стали основою для сучасної комп'ютерної графіки і чисельних методів.

Він також створив основи ймовірнісного підходу до теорії наближень, що було новаторським на той час, і його результати виявилися важливими для різних розділів математичного аналізу та його застосувань. Під час роботи в Академії наук СРСР у Москві він займався проблемами математичної фізики та диференціальних рівнянь, зробивши внесок у дослідження нелінійних рівнянь.

Бернштейн був членом Академії наук СРСР, активним учасником міжнародних математичних конгресів і одним із найвпливовіших математиків свого часу. Його спадщина продовжує надихати сучасних науковців, а методи і теорії, які він розробив, залишаються актуальними й сьогодні.

Нікольський Сергій Михайлович

Сергій Михайлович Нікольський (1905–2012) – видатний радянський та російський математик, який зробив значний внесок у теорію функцій, теорію наближення та функціональний аналіз. Народився в селі Талиші (нині на території Орловської області, Росія). В юності проявив неабиякий талант до математики, що визначило його подальшу долю.

Закінчив Московський державний університет (МДУ), де почав активно займатися науковою роботою. У 1930-х роках під керівництвом академіка Лузіна працював над теорією функцій дійсної змінної та зробив важливий внесок у розвиток московської математичної школи. Його наукові досягнення включають розробку нових методів дослідження функцій, побудову просторів Нікольського, які широко використовуються в аналізі та прикладних задачах.

Одним із найвідоміших досягнень Нікольського стала робота над наближенням функцій, де він запропонував оригінальні методи апроксимації, що стали важливими у чисельному аналізі та інженерних задачах. Він також зробив внесок у розвиток теорії вкладень функціональних просторів, які знайшли застосування у розв'язуванні диференціальних рівнянь.

Протягом десятиліть Нікольський викладав у МДУ та інших провідних інститутах, виховав численних учнів, багато з яких стали відомими математиками. Був академіком Академії наук СРСР, лауреатом численних премій, включаючи ордени й державні нагороди за досягнення в науці.

Сергій Михайлович Нікольський прожив понад століття, залишаючись активним у науці та педагогіці до глибокої старості. Його праці продовжують впливати на розвиток математики, а його математичні ідеї досі використовуються в багатьох сферах науки та техніки.

Степанець Олександр Іванович

Олександр Іванович Степанець (1942–2007) – видатний український математик, який зробив значний внесок у теорію функцій, теорію наближення та гармонічний аналіз. Народився в Україні в родині вчителів. Вже з дитинства виявляв великий інтерес до точних наук, і це спонукало його присвятити життя математиці.

Закінчив Київський державний університет, де його науковий талант швидко привернув увагу викладачів. Після університету продовжив наукову діяльність, здобувши спочатку ступінь кандидата, а згодом ступінь доктора наук. Його дослідження зосередилися на теорії функцій, а також на питаннях апроксимації та інтерполяції. Степанець активно працював над побудовою спеціальних функціональних просторів та дослідженням їхніх властивостей, що стали основою для нових підходів у розв'язанні практичних задач аналізу.

Серед його найважливіших досягнень була розробка узагальнених методів наближення функцій та дослідження тригонометричних рядів, що використовуються в теорії сигналів, обробці зображень і цифрових технологіях. Степанець був одним із піонерів у застосуванні математичних методів для вирішення проблем в області технічних наук і розробив численні практичні підходи для прикладного аналізу.

Протягом життя він викладав у різних навчальних закладах України, був відданим наставником і підготував багатьох учнів, які продовжили його наукову спадщину. Активно працював у Національній академії наук України, де отримав чимало наукових нагород за видатні досягнення в галузі математики.

Олександр Іванович Степанець залишив вагому спадщину, що вплинула на розвиток математики не лише в Україні, але й на міжнародному рівні. Його методи і відкриття продовжують відігравати важливу роль у сучасному математичному аналізі.