МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

На правах рукопису

Юхимчук Роман Юрійович

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА

Спеціальність: 111 Математика

Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

ЖИГАЛЛО КОСТЯНТИН МИКОЛАЙОВИЧ

Кандидат фізико-математичних наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № ________________

Засідання кафедри теорії функцій та методики навчання математики

Від ___________________20__ р.

Завідувач кафедри

доц. Гембарська С. Б. ________

Луцьк – 2024

Зміст

ВСТУП

Інтегральні рівняння відіграють ключову роль у сучасній математичній фізиці та прикладній математиці, завдяки своїй здатності моделювати широкий спектр фізичних явищ. Особливе місце серед них займають інтегральні рівняння Фредгольма, які знайшли застосування у багатьох галузях, включаючи квантову механіку, теорію пружності, електродинаміку, та економічну теорію.

Актуальність роботи: Дослідження інтегральних рівнянь Фредгольма дозволяє більш глибоко зрозуміти природу багатьох складних фізичних процесів і явищ. Вони є невід'ємною частиною численних теоретичних і практичних досліджень, де з їх допомогою описуються розсіювання хвиль, проблеми транспорту та дифузії, а також інші прикладні задачі.

Об’єкт: Інтегральні рівняння Фредгольма першого та другого роду.

Предмет: Методи розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма та їх властивості .

Мета: дослідження методів розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма, аналіз їх властивостей та застосувань. Робота спрямована на удосконалення існуючих методів, що дозволять ефективно розв'язувати ці рівняння в різних контекстах. Робота обмежена дослідженням лише лінійних рівнянь, і до того ж таких, в яких зустрічається лише просте одноразове інтегрування. Через обмеження обсягу роботи не розглядаються повні інтегральні рівняння вищих порядків, спеціальні інтегральні рівняння та рівняння з розривними ядрами.

Задачі дослідження :

1. Розглянути основні, допоміжні твердження та факти, що використовуються у теорії інтегральних рівнянь.
2. Проаналізувати метод послідовних підстановок для розв'язання інтегральних рівнянь другого роду.
3. Проаналізувати властивості інтегральних рівнянь Фредгольма першого та другого роду.
4. Дослідити теоретичні основи розв'язування рівнянь Фредгольма у вигляді відношень двох цілих функцій від λ.

Результати цього дослідження мають широке прикладне значення та можуть бути використані у різних галузях науки і техніки. Розроблені методи дозволять підвищити точність та ефективність розв'язання прикладних задач, що включають інтегральні рівняння Фредгольма.

РОЗДІЛ І. ДЕЯКІ ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ ТА ФАКТИ ПРО ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ.

§1. Лінійні інтегральні рівняння першого роду.

Рівняння виду

$$\int_a^b K\,(x,t)\,u\,(t)dt \;=\; f\,(x) \tag{1}$$

Називають *лінійним інтегральним рівнянням першого роду*. Функції $K\,(x,t)$ і $f\,(x)$, а також межі інтегрування a і b відомі; потрібно визначити невідому функцію і так, щоб рівняння (1) задовольнялося ідентично для всіх значень x в інтервалі $a \leq x \leq b$. $K\,(x,t)$ називають ядром цього рівняння.

Часто зустрічаються рівняння того ж типу, що і (1), з тією лише різницею, що у них верхньою межею інтегрування є змінна x. Таке рівняння можна розглядати як окремий випадок рівняння (1), коли ядро $K\,(x,t)$ перетворюється в нуль при $t > x$; дійсно, в цьому випадку байдуже, чи брати за верхню межу інтегрування x або b.

Характерною особливістю рівняння (1) є те, що невідома функція u входить під знаком інтеграла; внаслідок цього рівняння (1) називається *інтегральним*. Оскільки, крім того, і входить лінійно, то рівняння (1) називають *лінійним інтегральним рівнянням*.

§2. Завдання Абеля.

Для того щоб показати, як виникають інтегральні рівняння, наведемо тут постановку задачі Абеля.

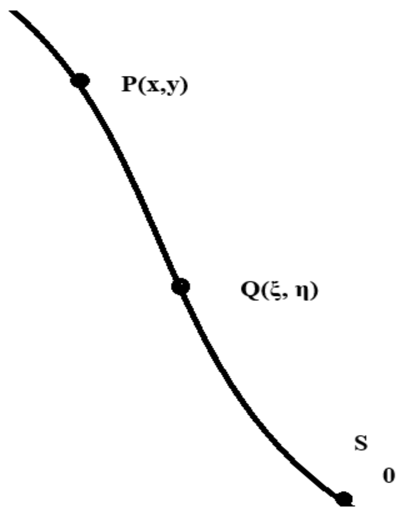

Рис. 1

У вертикальній площині дана деяка плавна крива (рис. 1). Матеріальна частинка, що знаходиться в точці P, виходить зі стану спокою і починає під дією тяжіння землі падати по цій кривій. Визначимо час T, після якого вона досягне найнижчої точки O.

Виберемо O за початок координат, вісь x направимо вертикально вгору, а вісь y —

горизонтально; нехай, далі, координати точки *P* будуть *(x, y)*, точки Q — (ξ, η), а довжина дуги *OQ* буде s (див. рис. 1).

В точці Q матеріальна частинка матиме швидкість

$$\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} = -\sqrt{2g(x-\xi)}.$$

Тому

$$t = -\int_{P}^{Q} \frac{ds}{\sqrt{2g(x-\xi)}},$$

і, значить, повний час падіння

$$T = -\int_{O}^{P} \frac{ds}{\sqrt{2g(x-\xi)}}.$$

Якщо форма кривої задана, то s, а значить, і ds можна виразити через ξ. Нехай

$$ds = u(\xi)\, d\xi.$$

Тоді

$$T = \int_{O}^{\infty} \frac{u\,(\xi)\, d\xi}{\sqrt{2g(x-\xi)}}.$$

Абель поставив завдання: навпаки, знайти криву, для якої час падіння T являє собою дану функцію від x : $T = f(x)$. Очевидно. Це завдання зводиться до визначення невідомої функції u із рівняння :

$$f\,(x) = \int_{O}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2g(x-\xi)}} u\,(\xi)\, d\xi.$$

Це і є лінійне інтегральне рівняння першого роду.

§3. Лінійні інтегральні рівняння другого роду.

Рівняння виду

$$u(x) = f\ (x) + \int_a^b K\ (x,t)\ u\ (t)dt \tag{2}$$

називають *лінійним інтегральним рівнянням другого роду.* Функції *K (x, t) і f(x),* а також межі інтегрування a і b відомі; функція u невідома. Рівняння

$$u\ (x) = f\ (x) + \int_a^\infty K\ (x,t)\ u\ (t)dt$$

називають *лінійним інтегральним рівнянням другого роду типу Вольтерра.*

Якщо *f (x) = 0,* то рівняння (2) приймає вигляд

$$u\ (x) = \int_a^b K\ (x,t)\ u\ (t)dt.$$

Це рівняння називають *однорідним* лінійним рівнянням другого роду.

Іноді для полегшення дослідження вводять параметр λ; саме замість рівняння (2) розглядають більш загальне рівняння

$$u\ (x) = f\ (x)\ +\ \lambda \int_a^b K\ (x,t)\ u\ (t)dt.$$

Це рівняння називають лінійним рівнянням другого роду з *параметром*.

Лінійні інтегральні рівняння першого і другого роду є окремим випадком лінійного інтегрального рівняння третього роду

$$\psi\ (x)\ u(x) = f\ (x)\ +\ \int_a^b K\ (x,t)\ u\ (t)dt.$$

Рівняння (1) виходить, якщо $\psi\ (x)\ \equiv 0$, а рівняння (2) – якщо $\psi\ (x)\ \equiv 1.$

§4. Зв'язок між лінійними диференціальними рівняннями та інтегральним рівнянням типу Вольтерра.

Розглянемо рівняння

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y = \varphi\ (x), \tag{3}$$

Причому припустимо, що в точці x = 0 функції $a_i(x)$ не мають особливостей. Зробимо підстановку

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u\ (x).$$

Тоді ми будемо мати:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_0^\infty u\,(x)dx \; + C_1 \\ \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_0^\infty u\,(x)dx^2 \; + C_1 x + \; C_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y = \int_0^\infty u\,(x)dx^n \; + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \; C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \; + C_n, \end{array}\right\} \tag{4}$$

де $\int_0^\infty u\,(x)dx^n$ позначає n – кратний інтеграл від функції $u(x)$. Підставивши формули (4) в рівняння (3), ми перетворюємо його в

$$u(x) + a_1(x)\int_0^\infty u(x)dx + \cdots + a_n(x)\int_0^\infty u(x)dx^n =$$

$$\varphi(x) + \; \sum_{i=1}^{n} C_i a_i(x), \tag{5}$$

Де

$$a_1(x) = \; a_1(x) + \frac{x}{1} a_{i+1}(x) + \cdots + \; \frac{x^{n-i}}{(n-i)!} a_n(x).$$

Якщо ми зараз покладемо

$$\varphi\,(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i a_i(x) \; = f(x)$$

і застосуємо відому формулу

$$\int_0^\infty u(t)dt^n = \int_0^\infty \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t)dt,$$

то рівняння (5) прийме вигляд

$$u(x) + \int_0^\infty \left[a_1(x) + a_2(x)(x-t) + \cdots + \; a_n(x)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right] u(t)dt = f(x),$$

Що являє собою інтегральне рівняння тіла Вольтерра другого роду.

Для того, щоб права частина рівняння (5) мала певне значення, необхідно, щоб всі коефіцієнти C_i мали певні значення. Тоді, навпаки, розв'язок рівняння Вольтерра (5) буде еквівалентним розв'язанню задачі Коші для лінійного диференціального рівняння (3). Унікальність розв'язання рівняння Вольтерра випливає з того, що задача Коші допускає в точках, що не мають особливостей, одне і тільки одне рішення.

§5. Нелінійні рівняння. У цій роботі ми обмежимося дослідженням лінійних інтегральних рівнянь. Однак буде корисно познайомити перед цим читача і з деякими нелінійними інтегральними рівняннями.

Невідома функція може входити в рівняння в степені n ($n > 1$), як це, наприклад, має місце в рівнянні

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, u^n(t) dt.$$

Вона може входити і більш загальним чином, як, наприклад, в рівнянні

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \varphi[x,t,u(t)] dt.$$

Зокрема, диференціальне рівняння

$$\frac{du}{dx} = \varphi(x,u)$$

Може бути представлене в інтегральній формі

$$u(x) = C + \int_0^\infty \varphi[t,u(t)] dt.$$

Існують також інші типи нелінійних інтегральних рівнянь. Крім того, досліджують системи інтегральних рівнянь як лінійних, так і нелінійних. Ряд досліджень присвячений інтегрованим рівнянням від декількох змінних, наприклад, виду :

$$u(x,y) = f(x,y) + \lambda \int_a^b \int_c^d K(x,y;t_1,t_2)\, u(t_1,t_2) dt_1 dt_2.$$

§6. Особливі рівняння. Інтегральне рівняння називають особливим, якщо або одна, або обидві межі інтегрування нескінченні, наприклад,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{0}^{\infty} sin\,(xt)\,u(t)dt$$

Або ж якщо ядро звертається до нескінченності в одній або декількох точках розглянутого інтервалу, наприклад,

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \frac{H(x,t)}{(x-t)^{a}}\,u(t)dt \qquad (0 < a < 1).$$

Задача Абеля в тому вигляді, в якому воно викладено в §2, належить до цього типу. Сам Абель поставив завдання про розв'язання більш загального рівняння

$$f(x) = \int_{a}^{\infty} \frac{u(t)dt}{(x-t)^{a}} \qquad (0 < a < 1).$$

§7. Типи рішень. Розв'язок лінійного інтегрального рівняння другого роду з параметром λ було отримано за допомогою трьох різних методів, і до того ж в трьох різних формах.

1. Перший метод, а саме метод послідовних підстановок, розроблений Нейманом, Ліувіллем і Вольтером, дає *u(x)* у вигляді степеневого ряду відносно λ, причому коефіцієнти при різних ступенях λ, є функціями від x. Ряд сходиться для всіх значень λ, менших за абсолютною величиною, ніж деяке постійне число.

2. Другий метод, що належить Фредгольму, дає *u(x)* у вигляді відношення двох цілих рядів відносно λ, кожен з яких має нескінченний радіус збіжності. Коефіцієнти при степенях в чисельнику є функціями від x, знаменник не залежить від x. Для тих значень λ, при яких знаменник перетворюється в нуль, рішення, взагалі кажучи, не існує; в тих же виняткових випадках, коли рішення існує, метод Фредгольма дає можливість його отримати. Рішення виходить в результаті того, що інтегральне рівняння розглядається як граничний випадок системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими, коли n нескінченно зростає.

3. Третій метод, розроблений Гільбертом і Шмідтом, виражає *u(x)* через так звані власні функції, які зазвичай являють собою розв'язки відповідного однорідного рівняння: $u(x) = \lambda \int_a^b K\,(x,t)\,u\,(t)dt$. Взагалі кажучи, це рівняння не має ніякого розв'язку, крім тривіального: $u(\mathrm{x}) \equiv 0$. Однак існує ряд чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, які називаються власними значеннями, для кожного з яких однорідне рівняння має ненульові розв'язки: $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ Ці рішення і суть власних функцій.

Розв'язок рівняння тоді має вигляд

$$u(x) = \sum C_n u_n(x),$$

Де C_n – довільні постійні числа.

РОЗДІЛ ІІ. РОЗВ'ЯЗОК ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО РОДУ МЕТОДОМ ПОСЛІДОВНИХ ПІДСТАНОВОК

§8. Рішення за допомогою послідовних підстановок. Тепер приступаємо до розв'язання лінійного інтегрального рівняння другого роду з параметром λ.

Розглянемо перш за все випадок, коли обидві межі інтегрування є сталими *(рівняння Фредгольма)*. При цьому ми допустимо, що

a) $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K\,(x,t)\,u\,(t)dt$ (a і b) – постійні числа; (1)

b) функція $K\,(x,t) \neq 0$ дійсна і неперервна в прямокутнику $R(a \leq x \leq b, a \leq t \leq b)$;

c) функція $f\,(x) \neq 0$ дійсна і неперервна в інтервалі $I(a \leq x \leq b)$;

d) λ - постійні числа.

Легко побачити безпосередньо, що якщо існує неперервний розв'язок *u(x)* рівняння (1) і Функція К (x,t) неперервна, то тоді і функція f(x) повинна бути неперервною. Виходячи з цих міркувань, ми включили умову *c)*.

Підставляючи в праву частину рівняння (1) замість функції *u(t)* її значення, що доставляється цим же рівнянням, знаходимо:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\left[f(t) + \lambda \int_a^b K(t,t_1)u(t_1)dt_1\right]dt =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b K(x,t) \int_a^b K(t,t_1)u(t_1)dt_1\,dt.$$

Знову підставим сюди замість $u(t_1)$ його значення із рівняння (1), отримаємо:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,f(t)\,dt +$$

$$+\lambda^2 \int_a^b K(x,t) \int_a^b K(t,t_1) \left[f(t_1) + \lambda \int_a^b K(t_1,t_2) u(t_2) dt_2 \right] dt_1 dt =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K(x,t) \int_a^b K(t,t_1) f(t_1) dt_1 dt +$$

$$+\lambda^3 \int_a^b K(x,t) \int_a^b K(t,t_1) \int_a^b K(t_1,t_2) u(t_2) dt_2 dt_1 dt.$$

Після n – й підстановки ми отримаємо:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, f(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^b K(x,t) \int_a^b K(t,t_1)\, f(t_1) dt_1 dt + \cdots$$

$$\ldots + \lambda^n \int_a^b K(x,t) \int_a^b K(t,t_1) \int_a^b K(t_1,t_2) \ldots$$

$$\ldots + \int_a^b K(t_{n-2},t_{n-1})\, f(t_{n-1}) dt_{n-1} \ldots dt_{n-1} dt + R_{n+1}(x), \qquad (2)$$

де

$$R_{n+1}(x) = \lambda^{n+1} \int_a^b K(x,t) \int_a^b K(t,t_1) \ldots \int_a^b K(t_{n-1},t_n)\, u(t_n) dt_n \ldots dt_1 dt.$$

Це підводить нас до розгляду наступного нескінченного ряду:

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, f(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^b K(x,t) \int_a^b K(t,t_1)\, f(t_1) dt_1 dt + \cdots \qquad (3)$$

За припущенням *b)* і *c)* кожен член цього ряду є функцією від *x,* неперервною в інтервалі *I.* Отже, якщо ряд рівномірно сходиться в *I,* то він сам представляє в цьому інтервалі деяку безперервну функцію.

Оскільки $K(x,t)$ і $f(t)$ неперервні відповідно в R і *I*, то $|K|$ приймає в R деяке максимальне значення *M,* а $|f(x)|$ приймає в *I* деяке максимальне значення *N:*

$$|K(x,t)| \leq M \text{ в } R,$$

$$|f(x)| \leq N \text{ в } I.$$

розглянемо

$$S_n(x) = \lambda^n \int_a^b K(x,t) \int_a^b K(t,t_1) \dots$$

$$\dots \int_a^b K(t_{n-2},t_{n-1})\, f(t_{n-1}) dt_{n-1} \dots dt_1 dt.$$

Відповідно до написаних вище нерівностей, маємо:

$$|S_n(x)| \le |\lambda^n| N M^n (b-a)^n.$$

Таким чином, ми бачимо, що ряд (3) сходиться абсолютно і рівномірно для всіх λ, що задовільнять нерівність

$$|\lambda| \le \frac{1}{M(b-a)}.$$

Якщо рівняння (1) має неперервний розв'язок, то останнє має відповідати формулі (2). Але оскільки за припущенням $u(x)$ безперервно в I, то його абсолютне значення має в цьому інтервалі деякий максимум U. Тоді

$$|R_{n+1}(x)| \le |\lambda^{n+1}| U M^{n+1} (b-a)^{n+1}.$$

Якщо тепер буде виконуватись нерівність

$$|\lambda| M(b-a) < 1,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0.$$

Таким чином, ми бачимо, що функція $u(x)$, задовольняє формулі (2) при будь якому n, розкладається в ряд (3).

Можна переконатися шляхом безпосередньої підстановки, що функція $u(x)$, що представляю суму ряду (3), задовольняє рівняння (1). До того ж результату приводить і такий шлях: позначимо суму ряду (3) через $u(x)$, помножимо обидві частини отриманої рівності на $\lambda K(x,t)$ і проінтегруємо ряд почленно, що ми маємо право зробити. Тоді будемо мати:

$$\lambda \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt =$$

$$= \lambda \int_a^b K(x,t) \left[f(t) + \lambda \int_a^b K(t,t_1)\, f(t_1) dt_1 + \cdots \right] dt =$$

$$= \lambda \int_a^b K(x,t)\, f(t)\, dt +$$

$$+ \lambda^2 \int_a^b K(x,t) \int_a^b K(t,t_1)\, f(t_1) dt_1 dt + \cdots = u(x) - f(x).$$

Отже, ми отримаємо наступну теорему.

Теорема 1. Якщо

a) $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K\,(x,t)\, u(t) dt$ $\;(a$ і $b) -$ постійні числа;

b) функція $K\,(x,t)\; \neq 0$ дійсна і неперервна в прямокутнику R і

$$|K(x,t)| \leq M,$$

c) функція $f\,(x)\; \neq 0$ дійсна і неперервна в інтервалі I,

d) λ - постійні числа і

$$|\lambda| \leq \frac{1}{M(b-a)},$$

То рівняння (1) має один і тільки один розв'язок в *I,* що виражається абсолютно і рівномірно збіжним рядом (3).

Рівняння

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt \tag{4}$$

Є окремим випадком рівняння (1), коли $\lambda = 1$. Всі наші попередні міркування можуть бути повторені для цього випадку без будь-яких змін.

Рівняння (1) і (4) можуть, однак, мати безперервні рішення, навіть якщо припущення *d)*

$$|\lambda| M(b-a) \leq 1$$

не виконується. Правильність цього твердження можна проілюструвати наступним прикладом. Рівняння

$$u(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{3} + \int_0^1 (x+t)\, u(t)\, dt$$

має неперервний розв’язок $u(x) = x$, тоді як

$$|\lambda| M(b-a) = 2 > 1.$$

§9. Рівняння Вольтера. Рівняння

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^\infty K(x,t)\, u(t)\, dt \tag{5}$$

називають *рівнянням Вольтера.*

Підставляючи послідовно замість $u(t)$ його значення із рівняння (5), отримаємо:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^\infty K(x,t)\, f(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^\infty K(x,t) \int_a^t K(t,t_1)\, f(t_1) dt_1 dt + \cdots$$

$$\ldots + \lambda^n \int_a^\infty K(x,t) \int_a^b K(t,t_1) \ldots \int_a^{t_{n-2}} K(t_{n-2},t_{n-1}) f(t_{n-1}) dt_{n-1} \ldots dt_1 dt +$$

$$+ R_{n+1}(x), \tag{6}$$

де

$$R_{n+1}(x) = \lambda^{n+1} \int_a^\infty K(x,t) \int_a^t K(t,t_1) \ldots \int_a^{t_{n-1}} K(t_{n-1},t_n)\, u(t_n) dt_n \ldots dt_1 dt$$

Розглянем нескінченний ряд

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^\infty K(x,t)\, f(t)\, dt +$$

$$+ \lambda^2 \int_a^\infty K(x,t) \int_a^t K(t,t_1)\, f(t_1) dt_1 dt + \cdots \tag{6'}$$

Спільний член цього ряду має вид

$$V_n(x) = \lambda^n \int_a^\infty K(x,t) \int_a^t K(t,t_1) \ldots \int_a^{t_{n-2}} K(t_{n-2},t_{n-1}) f(t_{n-1}) dt_{n-1} \ldots dt_1 dt.$$

Так як $|K(x,t)| \le M$ і $|f(t)| \le N$, то

$$|V_n(x)| = |\lambda^n| N M^n \frac{(x-a)^n}{n!} \leq |\lambda^n| \frac{[M(b-a)^n]}{n!} \qquad (a \leq x \leq b).$$

Ряд з додатнім загальним членом $|\lambda^n| N \frac{[M(b-a)^n]}{n!}$ Сходиться при всіх значеннях чисел $\lambda, N, M < b - a$. Тому ряд $(6')$ сходиться абсолютно і рівномірно.

Якщо рівняння (5) має безперервний розв'язок, то це останнє має виражатися рядом (6). Оскільки при безперервності функції $u(x)$ в I її абсолютне значення досягає в цьому інтервалі деякого максимуму U, то

$$|R_{n+1}(x)| \leq |\lambda^{n+1}| U M^{n+1} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq |\lambda^{n+1}| U \frac{[M(b-a)^{n+1}]}{(n+1)!}$$

$(a \leq x \leq b)$, звідки

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$$

Отже, ми бачимо, що функція $u(x)$, що задовольняє рівнянню (6), являє собою суму ряду $(6')$. Можна, як і вище, показати, що, навпаки, функція $u(x)$, рівна сумі ряду $(6')$, задовольняє рівняння (5). Таким чином, ми маємо наступну теорему.

Теорема 2. Якщо

a) $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^\infty K(x,t)\, u(t) dt$ (a) – постійне число;

b) $K(x,t) \neq 0$ дійсна і неперервна в прямокутнику R і

$$|K(x,t)| \leq M,$$

c) $f(x) \neq 0$ дійсна і неперервна в I,

d) λ - постійні числа,

то рівняння (5) має одне і тільки одне неперервне рішення $u(x)$, яке виражається абсолютно і рівномірно спадним рядом $(6')$.

Результати, отримані в цьому параграфі, можна перенести без змін на рівняння

$$u(x) = f(x) + \int_a^\infty K(x,t)\, u(t)\, dt;$$

для цього достатньо покласти під час всього міркування λ = 1.

§10. Послідовні наближення. Слід зазначити, що метод послідовних наближень відрізняється від методу послідовних підстановок. При методі послідовних наближень ми вибираємо якусь довільну дійсну функцію $u_0(x)$, неперервну в *I*. Підставляючи в праву частину рівняння

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt \tag{1}$$

замість $u(t)$ цю функцію $u_0(t)$,ми отримаємо:

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, u_0(t)\, dt.$$

Визначена таким чином функція $u_1(x)$ також дійсна і неперервна в I. Продовжуючи іти цим шляхом, ми отримаємо послідовність функцій

$$u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots,$$

які задовольнятимуть рівняння

$$\left.\begin{aligned} u_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, u_1(t)\, dt, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{n-1}(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, u_{n-2}(t)\, dt, \\ u_n(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, u_{n-1}(t)\, dt \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Із цих рівнянь находимо:

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, f(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^b K(x,t) \int_a^b K(t,t_1)\, f(t_1)\, dt_1 dt + \cdots$$

$$\dots + \lambda^{n-1} \int_a^b K(x,t) \int_a^b K(t,t_1) \dots \int_a^b K(t_{n-3},t_{n-2})\, f(t_{n-2}) dt_{n-2} \dots dt_1 dt +$$

$$+R_n(x), \tag{8}$$

де

$$R_n(x) = \lambda^n \int_a^b K(x,t) \int_a^b K(t,t_1) \dots \int_a^b K(t_{n-2},t_{n-1})\, u_0(t_{n-1}) dt_{n-1} \dots dt_1 dt.$$

Функція $u_0(x)$ дійсна і неперервна в *I*, значить, її абсолютна величина досягає в *I* деякого максимального значення *U*.

Тоді

$$|R_n| \leq |\lambda^n| U M^n (b-a)^n.$$

Якщо тому $|\lambda| M(b-a) < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Таким чином, зі збільшенням n функції $u_n(x)$ наближаються до граничної функції, що дорівнює сумі ряду, отриманого в правій частині рівності (8) при необмеженому збільшенні n. Але цей ряд збігається з рядом, що стоїть у правій частині рівності $(6')$. Отоже:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) \equiv u(x).$$

У цьому процесі послідовного наближення кожна нова функція $u_n(x)$ залежить від вибору початкової функції $u_0(x)$. Однак гранична функція $u(x)$ не залежить від вибору $u_0(x)$.

Тепер ми можемо дати новий доказ унікальності рішення. Припустимо, що є ще одне рішення $v(x)$. Виберемо тоді за $u_0(x)$ цю функцію $v(x)$, покладемо $u_0(x) \equiv v(x)$. Тоді, очевидно, кожна функція $u_n(x)$ буде ідентично збігатися з $v(x)$, отже, і межа цих функцій буде $\equiv\ v(x)$. Але ми щойно побачили, що межа не залежить від вибору початкової функції $u_0(x)$. Тому

$$v(x) \equiv u(x).$$

Ці міркування можна без будь – яких труднощів поширити на рівняння Вольтера.

§11. Інтегровані ядра. Покладемо

$$K_1(x,t) = K(x,t),$$
$$K_i(x,t) = \int_a^b K(x,s)\, K_{i-1}(s,t) ds\,. \tag{9}$$

Побудовані таким чином функції $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ називаються *інтегрованими ядрами*.

Застосовуючи послідовно формули (9), отримуємо:

$$K_i(x,t) = \int_a^b \dots \int_a^b K(x,s_1)\, K(s_1,s_2) \dots K(s_{i-1},t) ds_{i-1} \dots ds_1. \tag{10}$$

Згідно з формулою (10) $K_n(x,s)$ являє собою $(n-1)$ – кратний інтеграл, а $K_p(s,t)$ $(p-1)$ – кратний. Звідси $\int_a^b K_n(x,s)\, K_p(s,t) ds$ являється $(n+p-1)$ – кратним інтегралом. Легко показати, шляхом простої зміни порядку інтегрування, що він дорівнює $K_{n+p}(x,t)$:

$$K_{n+p}(x,t) = \int_a^b K_n(x,s)\, K_p(s,t) ds. \tag{11}$$

§12. Взаємні ядра. Нехай

$$-k(x,t) = K_1(x,t) + K_2(x,t) + \dots + K_n(x,t) + \dots \tag{12}$$

Легко показати, якщо $K(x,t)$ дійсна і неперервна в R, то при $M(b-a) < 1$ цей ряд є абсолютно і рівномірно збіжним; звідси випливає, що ядро $k(x,t)$ дійсне і неперервне в R. На основі першого з рівнянь (9) і рівняння (11) ми маємо:

$$-k(x,t) - K(x,t) = K_1(x,t) + K_2(x,t) + \dots + K_n(x,t) + \dots =$$
$$= \int_a^b K_1(x,s) K_1(s,t) ds + \dots + \int_a^b K_1(x,s) K_{n-1}(s,t) ds + \dots =$$
$$= \int_a^b K_1(x,s) K_1(s,t) ds + \dots + \int_a^b K_{n-1}(x,s) K_1(s,t) ds + \dots$$

Перепишемо це так:

$$-k(x,t) - K(x,t) = \int_a^b K_1(x,s) [K_1(s,t) + \dots + K_{n-1}(s,t) + \dots] ds =$$
$$= \int_a^b [K_1(x,s) + \dots + K_{n-1}(x,s) + \dots] K_1(s,t) ds.$$

Застосовуючи рівність (12), отримуємо наступну важливу формулу:

$$K(x,t) + k(x,t) = \int_a^b K(x,s)\, k(s,t) ds = \int_a^b k(x,s)\, K(s,t) dt. \tag{13}$$

Два ядра $K(x,t)$ і $k(x,t)$ називаються *взаємними*, якщо вони обидва дійсні і неперервні в R і задовольняють умові (13). Ядро $k(x,t)$, взаємне з $K(x,t)$, існує, якщо ряд у формулі (12) рівномірно сходиться. Але ми бачили, що цей ряд сходиться рівномірно, якщо $M(b-a) < 1$, де M є максимумом виразу $|K(x,t)|$ в R. Таким чином, ми маємо наступну теорему.

Теорема 3. Якщо $K(x,t)$ дійсне і неперервне в R і $M(b-a) < 1$, де M є максимумом $|K(x,t)|$ в R, то взаємне ядро $k(x,t)$, представлене формулою (12), існує.

§13. Розв'язок рівняння Фредгольма, дане Вольтером.

Вольтер показав, як знайти розв'язок рівняння

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt, \tag{4}$$

Якщо відоме ядро $k(x,t)$, взаємне з $K(x,t)$. Якщо рівняння (4) має безперервний розв'язок $u(x)$, то

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(t,t_1)\, u(t_1)\, dt_1.$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на $k(x,t)$, і інтегруючи по t в межах від a до b, знаходимо:

$$\int_a^b k(x,t)\, u(t)\, dt = \int_a^b k(x,t)\, f(t)\, dt + \int_a^b \int_a^b k(x,t)\, K(t,t_1)\, u(t_1) dt_1 dt =$$

$$= \int_a^b k(x,t)\, f(t)\, dt + \int_a^b [K(x,t_1) + k(x,t_1)]\, u(t_1) dt_1,$$

Звідки

$$\int_a^b k(x,t)\, f(t)\, dt + \int_a^b K(x,t_1)\, u(t_1) dt_1 = 0. \tag{14}$$

Але з рівняння (4)

$$\int_a^b K(x,t_1)\, u(t_1) dt_1 = u(x) - f(x).$$

Підставивши в формулу (14) замість другого інтеграла цей вираз, отримаємо:

$$u(x) = f(x) - \int_a^b k(x,t)\, f(t)\, dt. \tag{15}$$

Таким чином, якщо рівняння (4) має безперервний розв'язок, то воно є єдиним і виражається формулою (15).

Щоб переконатися в тому, що функція $u(x)$, визначена формулою (15), дійсно є розв'язком рівняння (4), перепишемо формулу (15) у наступному вигляді:

$$f(x) = u(x) - \int_a^b k(x,t)\, f(t)\, dt.$$

Цю рівність можна розглядати як інтегральне рівняння відносно функції $f(x)$. Далі, $K(x,t)$ є ядром, взаємним з $k(x,t)$. Отже, за щойно тільки доведеним, якщо це рівняння має неперервний розв'язок, то воно є єдиним і виражається формулою

$$f(x) = u(x) - \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt.$$

Але це і є саме рівняння (1), із якого ми виходили. Отже, дійсно рівняння (4) задовольняється функцією $u(x)$, що визначається формулою (15). Таким чином, ми отримуємо наступну теорему.

Теорема 4. Якщо

a) $K\,(x,t)\ \neq 0$ дійсна і неперервна в R,

b) $f\,(x)\ \neq 0$ дійсна і неперервна в I,

c) ядро $k(x,t)$, взаємна з $K(x,t)$, існує, то рівняння (4) має один і тільки один неперервний розв'язок в I і цей розв'язок виражається формулою (15).

Застосовуючи ті самі міркування до рівності (13), розглядаючи її як інтегральне рівняння відносно функції $k(x,t)$, знаходим, що якщо існує неперервне взаємне ядро, то воно є єдиним.

§14. Розривні рішення. Ми показали, що при виконанні умов існує єдиний неперервний розв'язок лінійного інтегрального рівняння другого роду. Однак це інтегральне рівняння може мати, крім того, також розривні розв’язки. Щоб показати це, візьмемо рівняння 1)

$$u(x) = \int_{0}^{\infty} t^{x-t}\, u(t)\, dt,$$

яке має одне і тільки одне неперервне рішення, а саме тривіальне

$$u(x) \equiv 0.$$

Безпосередньою підстановкою переконуємося в тому, що це рівняння має, крім того, нескінченну кількість розривних рішень виду:

$$u(x) = Cx^{x-1},$$

де C – довільна константа, що не дорівнює нулю.

РОЗДІЛ ІІІ. РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА У ВИГЛЯДІ ВІДНОШЕНЬ ДВОХ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ВІД λ.

§15. Рівняння Фредгольма як межа систем скінченного числа лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язок рівняння

$$u(x) = f(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\,u(t)\,dt, \tag{1}$$

дане в попередньому розділі, має той недолік, що він має силу для обмеження значень параметра λ. Бажано мати, якщо це можливо, таке рішення, яке було б справедливим при всіх λ. Таке рішення було дано Фредгольмом у формі

$$u(x) = \frac{\beta_0(x) + \beta_1(x)\lambda + \cdots}{\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots},$$

де чисельник і знаменник – степеневі ряди, що збігаються при всіх значеннях λ.

а) Система лінійних алгебраїчних рівнянь, що замінюють інтегральне. Перш ніж викладати повністю і строго отримані Фредгольмом результати, ми окреслимо в загальних рисах ті підстави, які призвели до їх відкриття.

Розділимо інтервал $[a,b]$ на n рівних частин і позначимо точки поділу через $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$. Тоді

$$t_0 = a, t_1 = a + h, t_2 = a + 2h, \dots, t_n = a + nh, h = \frac{b-a}{n}. \tag{2}$$

Якщо ми замінимо певний інтеграл рівняння (1) сумою, що відповідає точкам поділу (2), границею якою він є, то отримаємо наближене рівняння:

$$u(x) - \lambda h[K(x,t_1)\,u(t_1) + K(x,t_2)\,u(t_2) + \cdots + K(x,t_n)\,u(t_n)] = f(x).$$

Оскільки це рівняння має значення для всіх x, то воно повинно задовольнятися, зокрема, і для $x = t_1, t_2, \dots, t_n$. Таким чином ми отримаємо наступну систему n лінійних рівнянь відносно невідомих $u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_n)$:

$$\left.\begin{array}{l} u(t_1) - \lambda h[K(t_1,t_1)\,u(t_1) + K(t_1,t_2)\,u(t_2) + \cdots + K(t_1,t_n)\,u(t_n)] = f(t_1), \\ u(t_2) - \lambda h[K(t_2,t_1)\,u(t_1) + K(t_2,t_2)\,u(t_2) + \cdots + K(t_2,t_n)\,u(t_n)] = f(t_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u(t_n) - \lambda h[K(t_n,t_1)\,u(t_1) + K(t_n,t_2)\,u(t_2) + \cdots + K(t_n,t_n)\,u(t_n)] = f(t_n). \end{array}\right\} \tag{3}$$

Вирішивши цю систему відносно $u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_n)$, ми можемо нанести найдені значення як ординати, і провести через вершини цих ординат інтерполяційну криву $u(x)$ (рис. 2). Ми маємо право очікувати, що ця крива буде приблизно представляти дійсне рішення.

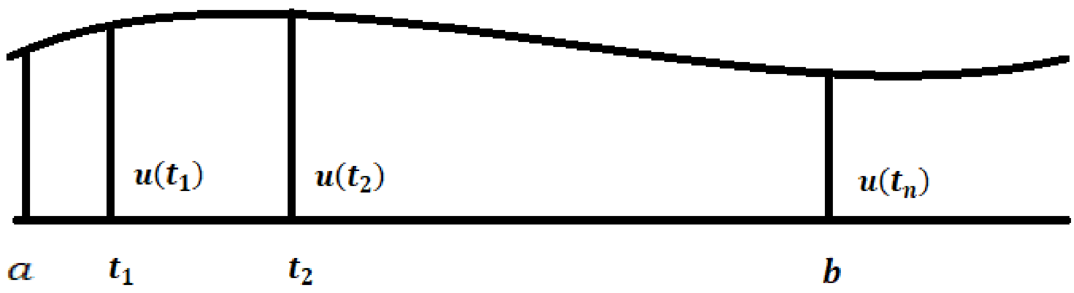

Рис. 2

Будемо писати для скорочення

$$f(t_i) = f_i, \qquad u(t_i) = u_i, \qquad K\left(t_i, t_j\right) = K_{i,j}$$

і позначимо через Δ визначник, що складається з коефіцієнтів, що стоять при невідомих u_i в написаній вище системі рівнянь:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda h K_{11} & -\lambda h K_{12} & \dots\dots\dots & -\lambda h K_{1n} \\ -\lambda h K_{21} & 1-\lambda h K_{22} & \dots\dots\dots & -\lambda h K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda h K_{n1} & -\lambda h K_{n2} & \dots\dots\dots & 1-\lambda h K_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо ми позначимо через $\Delta_{\nu\mu}$ алгебраїчне доповнення елемента, що знаходиться на перетині ν-го рядка і μ-го стовпця визначника Δ, то, вирішуючи систему рівнянь (3) відносно u_k, ми отримаємо за формулою Крамера

$$u_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \Delta_{ik}}{\Delta} \qquad (k = 1,2,\dots,n) \tag{4}$$

припускаючи , що $\Delta \neq 0$.

b) Межі визначника Δ. Розгортаючи Δ за степенями λ, отримуємо:

$$\Delta = 1 - \lambda \sum_{i=1}^{n} K_{ii} h + \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} h^2 \begin{vmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^n h^n \lambda^n \begin{vmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \dots & & \dots \\ K_{n1} & \dots & K_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо ми тепер будемо безмежно збільшувати *n*, то кожен член цього ряду буде йти до певної границі. Таким чином, принаймні формально, отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\Delta = 1-\lambda\int_a^b k(t,t)dt+\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) \end{vmatrix} dt_1\,dt_2 +$$

$$+\frac{\lambda^3}{3!}\int_a^b\int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & K(t_1,t_3) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & K(t_2,t_3) \\ K(t_3,t_1) & K(t_3,t_2) & K(t_3,t_3) \end{vmatrix} td_1\,dt_2\,dt_3+\cdots\equiv D(\lambda). \qquad (5)$$

$D(\lambda)$ називають *визначником Фредгольма* ядра *K*.

c) Границю Δ_{ik}. Визначник $\Delta_{\mu\mu}$ розгортається за ступенями λ абсолютно аналогічно тому, як це має місце для Δ:

$$\Delta_{\mu\mu}=1-\lambda\sum_{i=1}^{n}{}'\,-K_{ii}h+\frac{\lambda^2}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}{}'\begin{vmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{vmatrix} h^2-\cdots,$$

де знак ′ означає, що сума не поширюється на члени з індексом $i=\mu$. Переходячи до границі, отримуємо:

$$\lim_{n\to\infty}\Delta_{\mu\mu}=D(\lambda). \qquad (6)$$

Далі, згідно правил розкладу визначників

$$\Delta_{\nu\mu}=\lambda h\left\{K_{\mu\nu}-\lambda\sum_{i=1}^{n}h\begin{vmatrix} K_{\mu\nu} & K_{\mu i} \\ K_{i\nu} & K_{ii} \end{vmatrix}+\frac{\lambda^2}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}h^2\begin{vmatrix} K_{\mu\nu} & K_{\mu i} & K_{\mu j} \\ K_{i\nu} & K_{ii} & K_{ij} \\ K_{j\nu} & K_{ji} & K_{jj} \end{vmatrix}-\cdots\right\}$$

Положим $hD_{\mu\nu}=\Delta_{\mu\nu}$. Якщо при нескінченному збільшенні *n* ми будемо заміняти (t_μ,t_ν) так, щоб $\lim(t_\mu,t_\nu)=(x,y)$, то формально, отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}D_{\mu\nu}=\lambda K(x,y)-\lambda^2\int_a^b\begin{vmatrix} K(x,y) & K(x,t) \\ K(t,y) & K(t,t) \end{vmatrix}dt+$$

$$+\frac{\lambda^3}{2!}\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(x,y) & K(x,t_1) & K(x,t_2)\\ K(t_1,y) & K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2)\\ K(t_2,y) & K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2)\end{vmatrix} td_1\,dt_2-\cdots \tag{7}$$

$$\equiv D(x,y;\lambda). \tag{8}$$

Цей вираз називають *першим мінором Фредгольма*.

d) Границя u_k. Вираз (4) можна переписати у формі

$$u_k=f_k\frac{\Delta_{kk}}{\Delta}+\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i\Delta_{ik}}{\Delta}=f_k\frac{\Delta_{kk}}{\Delta}+\sum_{i=1}^{n}\frac{f_ihD_{ki}}{\Delta},$$

що в границі, при $n\to\infty$, переходить в

$$u(t_k)=f(t_k)+\frac{1}{D(\lambda)}\int_a^b f(t)D(t_k,t;\lambda)dt.$$

Де t_k є люба точка поділу. Тому ми можемо замінити t_kна x і написати:

$$u(x)=f(x)+\frac{1}{D(\lambda)}\int_a^b f(t)D(x,t;\lambda)dt. \tag{9}$$

Шлях, яким ми отримали цей результат, не є строго математичним шляхом. Тим не менш, здається дуже ймовірно, що вираз (9) для $u(x)$ дійсно є розв'язком рівняння (1). Нижче ми наведемо що це дійсно так.

е) Фундаментальні співвідношення Фредгольма. Бачимо тепер два співвідношення, які знадобляться нам далі для отримання розв'язку інтегрального рівняння (1). Нагадаємо одну з фундаментальних теорем теорії визначників, яка говорить, що сума добутку елементів деякого стовпця на деякі алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого стовпця дорівнює нулю. Ця теорема в застосуванні до визначника Δ дає:

$$\left(1-\lambda hK_{jj}\right)\Delta_{jk}-\lambda hK_{kj}\Delta_{kk}-\sum_{i=1}^{n}{}'' \lambda hK_{ij}\Delta_{ik}=0,$$

де знак $''$ означає, що сума не поширюється на значення $i = j, k$. Застосовуючи відношення $\Delta_{\nu\mu} = hD(t_\mu, t_\nu)$, находимо:

$$\left(1 - \lambda h K_{jj}\right) D_{jk} - \lambda h K_{kj} \Delta_{kk} - \sum_{i=1}^{n}{}'' \lambda h K_{ij} D_{ik} = 0,$$

розділимо обидві частини цієї рівності на h, що ми можемо зробити, раз $h \neq 0$. При $n \to \infty$ отримане після ділення на h рівняння перейде відповідно до формул (6) і (7) в

$$D\left(t_k, t_j; \lambda\right) - \lambda K\left(t_k, t_j\right) D(\lambda) - \lambda \int_a^b K\left(t, t_j\right) D(t_k, t; \lambda) dt = 0.$$

Останнє рівняння має місце для будь яких двох значень t_k, t_j, що лежать в інтервалі $[a, b]$. Тому ми можемо поставити $t_k = x$, $t_j = y$ і написати:

$$D(x, y; \lambda) - \lambda K(x, y) D(\lambda) - \lambda \int_a^b K(t, y) D(x, t; \lambda) dt. \qquad (10)$$

Це і є *перше фундаментальне відношення Фредгольма*.

Застосуємо тепер теорему: сума добутків елементів деякого рядка на алгебраїчне доповнення відповідних елементів будь-якого іншого рядка дорівнює нулю. Ця теорема в застосуванні до визначника Δ дає:

$$\left(1 - \lambda h K_{jj}\right) D_{kj} - \lambda h K_{jk} \Delta_{kk} - \sum_{i=1}^{n}{}'' \lambda h K_{ji} \Delta_{ki} = 0.$$

Робимо як вище, находимо:

$$D\left(t_j, t_k; \lambda\right) - \lambda K\left(t_j, t_k\right) D(\lambda) - \lambda \int_a^b K\left(t_j, t\right) D(t, t_k; \lambda) dt = 0.$$

Це рівняння має місце для будь яких двох значень t_j, t_k, що лежать в інтервалі $[a, b]$. Тому ми можемо поставити $t_k = x$, $t_j = y$ і написати:

$$D(x, y; \lambda) - \lambda K(x, y) D(\lambda) - \lambda \int_a^b K(x, t) D(t, y; \lambda) dt = 0. \tag{11}$$

Це і є *друге фундаментальне відношення Фредгольма*.

§16. Теорема Адамара. Для суворого обґрунтування результатів попереднього розділу нам потрібна теорема Адамара. При доведені цієї теореми ми будемо спиратися на наступну лему.

Лема. Якщо всі елементи a_{ik} *визначника*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Дійсні і відповідають умовам

$$a^2{}_{r1} + a^2{}_{r2} + \dots + a^2{}_{rn} = 1 \qquad (r = 1,2, \dots, n), \tag{12}$$

то

$$|A| \leq 1.$$

Наведемо спочатку два окремих випадки цієї леми, що допускають геометричну інтерпретацію.

1. $n = 2$. Паралелограм $OP_1P_3P_2$ (рис. 3) має вершину O на початку прямокутної системи координат. Координати вершин P_1 і P_2 позначені на креслені. Площа паралелограма $OP_1P_3P_2$ виражається формулою

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Якщо $OP_1 = 1$, $OP_2 = 1$, тобто якщо

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1,$$

то геометрично очевидно, що найбільша площа вийде, наш паралелограм перетвориться на прямокутник, причому в цьому випадку вона буде дорівнювати 1. Тому взагалі $|A| \leq 1$.

2. $n = 3$. Одна вершина паралелограма $OP_1P_3P_2$ (рис. 4) знаходиться на початку прямокутної системи координат. Координати вершин P_1, P_2, P_3 позначені на креслені.

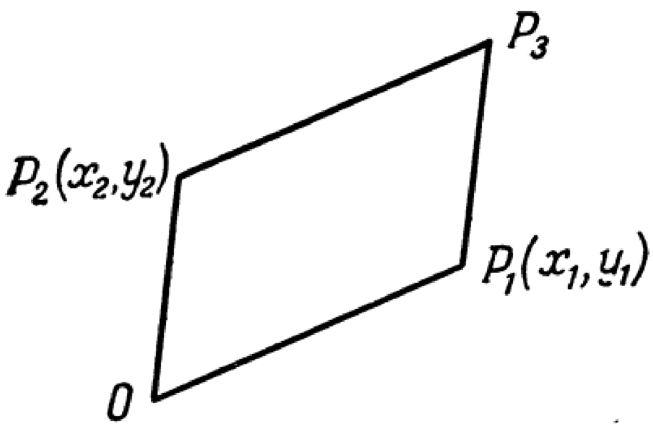

Рис. 3

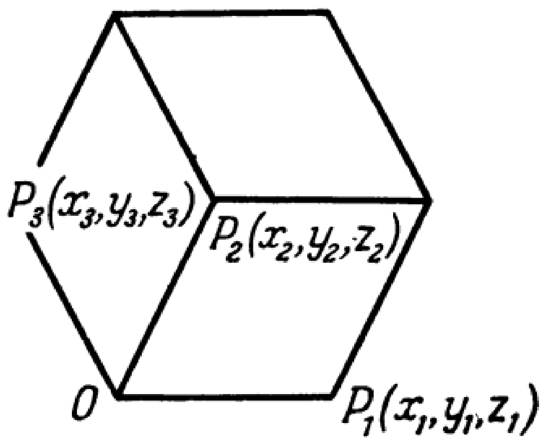

Рис. 4

Об'єм паралелепіпеда $OP_1P_3P_2$ виражається формулою

$$v = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Якщо $OP_1 = OP_2 = OP_3 = 1$, тобто

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = 1,$$

то геометрично очевидно, що об’єм буде найбільшим, коли паралелепіпед стане прямокутником, причому у цьому випадку об’єм буде дорівнювати одиниці. Тому взагалі $|v| \leq 1$.

Доказ леми. $A(a_{11}, \dots, a_{nn})$ є функцією від аргументів a_{rs}, неперервна в області U, визначеної рівнянням (12). З цих умов відразу видно, що $|a_{rs}| \leq 1$ і що область U обмежена і замкнута. Тому в цій області визначник A має максимум і мінімум. Ці максимум і мінімум, які ми хочемо визначити, являють собою так звані абсолютні максимум і мінімум. Але якщо деяка система значень дає абсолютний максимум (мінімум) для A, то вона також дає відносний максимум (мінімум). Тому для визначення останнього можуть бути застосовані звичайні методи диференціального числення.

Тепер. Якщо функція

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

від n змінних, пов'язаних h різними співвідношеннями

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \varphi_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \varphi_3(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, \varphi_h(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

приймає максимальне або мінімальне значення, то n перших приватних похідних від допоміжної функції

$$F = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_h\varphi_h,$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ - постійні числа, повинні перетворитись на нуль.

В даному випадку $f = A, x_r = a_{rs}$,

$$\varphi_r = \sum_{s=1}^{n} a_{rs}^2 - 1 \quad (r = 1,2, \dots, n),$$

а, отже, допоміжна функція F має вигляд

$$F = A + \sum_{s=1}^{n} \frac{\lambda_s}{2} \left(a_{s1}^2 + a_{s2}^2 + \cdots + a_{sn}^2 - 1\right).$$

За щойно наведеною теоремою в точці, в якій A має максимум (мінімум), повинні виконуватись співвідношення

$$\frac{dF}{da_{jk}} = \frac{dA}{da_{jk}} + \lambda_j a_{jk} = 0$$

або

$$A_{jk} + \lambda_j a_{jk} = 0 \quad (j, k = 1,2, \dots, n) \tag{13}$$

де A_{jk} позначає алгебраїчне доповнення елемента a_{jk} у визначнику A. Помножимо обидві частини цього рівняння на a_{jk} і просумуємо по k від 1 до n. Так як $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2 = 1$, то ми отримаємо:

$$A + \lambda_j = 0$$

або

$$\lambda_j = -A \quad (j = 1,2,\dots,n).$$

Підставим в рівняння (13) замість λ_j ці значення; тоді ми отримаємо:

$$A_{jk} = Aa_{jk} \quad (j,k = 1,2,\dots,n).$$

Тому визначник

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

спряжений з A, буде дорівнювати

$$\begin{vmatrix} Aa_{11} & Aa_{12} & \dots & Aa_{1n} \\ Aa_{21} & Aa_{22} & \dots & Aa_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Aa_{n1} & Aa_{n2} & \dots & Aa_{nn} \end{vmatrix}.$$

Перший з цих визначників дорівнює A^{n-1}, а другий, як це неважко обчислити, приводиться до A^{n+1}. Отже

$$A^{n-1} = A^{n+1}.$$

Оскільки це рівняння повинні задовольняти і максимум, і мінімум визначника, тому максимум визначника A дорівнює $+1$, а мінімум дорівнює -1. Отож

$$|A| \le 1.$$

Теорема Адамара. Тепер ми можемо доказати більш загальну теорему Адамара.

Якщо елементи b_{jk} визначника

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

дійсні і задовольняють нерівність

$$b_{jk} \leq M,$$

тоді

$$|B| \leq M^n \sqrt{n^n}.$$

Доведення. Нехай

$$b^2{}_{i1} + b^2{}_{i2} + \dots + b^2{}_{in} = s_i \qquad (i = 1,2, \dots, n).$$

Випадок 1. Одна або кілька величин s_i стають нулями, наприклад $s_k = 0$. Тоді $b_{ki} = 0$ $(i = 1,2, \dots, n)$, отже також і $B = 0$, і теорема в цьому випадку доведена.

Випадок 2. Ні одна із величин s_i не дорівнює нулю. Тоді кожне s_i додатне тобто.

$$s_1 > 0, s_2 > 0, \dots, s_n > 0.$$

Розглянемо тепер визначник

$$\frac{B}{\sqrt{s_1 s_2 \dots s_n}} = \begin{vmatrix} \frac{b_{11}}{\sqrt{s_1}} & \dots & \frac{b_{1n}}{\sqrt{s_1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{b_{n1}}{\sqrt{s_n}} & \dots & \frac{b_{nn}}{\sqrt{s_n}} \end{vmatrix}.$$

В ньому

$$\left(\frac{b_{i1}}{\sqrt{s_i}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{b_{in}}{\sqrt{s_i}}\right)^2 = 1 \qquad (i = 1,2, \dots, n),$$

а, значить, він задовольняє умови леми. Тому

$$|B| \leq \sqrt{s_1 s_2 \dots s_n}.$$

але так як $|b_{ki}| \leq M$, то з рівності

$$s_i = b^2{}_{i1} + b^2{}_{i2} + \dots + b^2{}_{in}$$

випливає, що

$$s_i \leq nM^2 \qquad (i = 1,2, \dots, n).$$

Тому

$$|B| \leq M^n \sqrt{n^n}.$$

§17. Доказ збіжності. За допомогою теореми Адамара ми можемо тепер довести збіжність рядів $D(\lambda)$ і $D(x, y; \lambda)$.

а) Збіжність ряду $D(\lambda)$.

$D(\lambda)$ виражається рядом

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} A_n \tag{14}$$

де

$$A_n = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n \quad (n > 0). \tag{15}$$

В §8 ми припускали, що $|K(x, t)| \leq M$. Тоді визначник, що входить в A_n, задовольняє всі умови теореми Адамара. Тому

$$A_n \leq \int_a^b \dots \int_a^b M^n \sqrt{n^n} dt_1 \dots dt_n = \sqrt{n^n} M^n (b - a)^n$$

а, отже

$$\left| (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} A_n \right| \leq M^n (b - a)^n |\lambda^n| \frac{\sqrt{n^n}}{n!} \equiv C_n.$$

Покажемо тепер, що ряд із загальним членом C_n збігається. Застосовуючи відомий критерій збіжності, знаходимо:

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = M(b-a)|\lambda| \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Коли n нескінченно зростає, його відношення наближається до нуля. Тому ряд із загальним членом C_n збігається; отже, ряд $D(\lambda)$ збігається абсолютно при всіх λ. Ми напишемо результат у вигляді наступної теореми.

Теорема 1. Степеневий ряд $D(\lambda)$ абсолютно збігається при всіх значеннях параметра λ.

b) Збіжність ряду $D(x, y; \lambda)$.

Маємо

$$D(x, y; \lambda) = \lambda K(x, y) + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{n+1}}{n!} B_n(x, y), \tag{16}$$

де

$$B_n(x, y) = \textstyle\int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(x, y) & K(x, t_1) \dots & K(x, t_n) \\ K(t_1, y) & K(t_1, t_1) \dots & K(t_1, t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, y) & K(t_n, t_1) \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n. \tag{17}$$

Іноді зручно буде писати

$$D(x, y; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{n+1}}{n!} B_n(x, y),$$

де ми припускаємо $B_0(x, y) = K(x, y)$ і $0! = 1$. Визначник, який входить в B_n, задовольняє усі умови теореми Адамара; тому

$$|B_n| \leq \int_a^b \dots \int_a^b \sqrt{(n+1)^{n+1}} M^{n+1} dt_1 \dots dt_n = \sqrt{(n+1)^{n+1}} M^{n+1} (b-a)^n,$$

звідки

$$\left|(-1)^n \frac{\lambda^{n+1}}{n!} B_n\right| \leq M^{n+1}(b-a)^n |\lambda^{n+1}| \frac{\sqrt{(n+1)^{n+1}}}{n!} \equiv E_n.$$

Докажемо тепер, що ряд з спільним членом E_n збігається. Застосовуючи той самий критерій збіжності, що і в попередньому випадку, знаходимо:

$$\frac{E_n}{E_{n-1}} = M(b-a)|\lambda| \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \times \frac{1}{\sqrt{n+1}} \times \frac{n+1}{n}.$$

Коли n безмежно зростає, це відношення прямує до нуля. Тому ряд із загальним членом E_n збігається, отже, ряд $D(x,y;\lambda)$ абсолютно сходиться при всіх значеннях λ. Більше того, він рівномірно сходиться відносно всіх x та y, що знаходяться в області R. Таким чином, ми маємо наступну теорему.

Теорема 2. Ряд $D(x,y;\lambda)$ абсолютно сходиться при всіх значеннях параметра λ; крім того, він рівномірно сходиться в області R.

§18. Фундаментальні співвідношення Фредгольма. Доведемо тепер два відношення:

$$D(x,y;\lambda) - \lambda K(x,y) D(y) = \lambda \int_a^b D(x,t;\lambda)\, K(t,y) dt = \tag{18}$$

$$= \lambda \int_a^b K(x,t)\, D(t,y;\lambda)\, dt, \tag{19}$$

отримані нами раніше, однак не суворим шляхом.

а) Співвідношення між коефіцієнтами A_n і $B_n(x,y)$. Підставимо в формулу (18) замість $D(x,y;\lambda)$ і $D(\lambda)$ їх вирази через відповідні ряди. Тоді в обох частинах формули (18) будуть стояти степеневі ряди від λ. Тому, якщо формула (18) має місце, то коефіцієнти, що стоять при однакових степенях λ в обох частинах рівності, повинні бути рівними. І навпаки, якщо ми покажемо, що ці коефіцієнти рівні, то тим самим формула (18) буде доведена. Роблячи підстановку, отримуємо:

$$\lambda K(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\lambda^{n+1}}{n!} B_n(x,y) - \lambda K(x,y)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n \frac{\lambda^n}{n!}\right] =$$

$$= \lambda \int_a^b K(t,y)\left[\lambda K(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\lambda^{n+1}}{n!} B_n(x,y)\right] dt.$$

Ряд, що стоїть в підінтегральному виразі в правій частині рівності, являється рівномірно збіжним і лишається таким, якщо ми помножимо кожен його член на $\lambda K(t,y)$. Тому ми можемо, зробивши це множення, інтегрувати його почленно і написати у вигляді.

$$\lambda^2 \int_a^b K(x,t)K(t,y)dt + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\lambda^{n+2}}{n!} \int_a^b B_n\,(x,t)K(t,y)dt.$$

Якщо ми замінимо в другому інтегралі $n+1$ на n, то отримаємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\lambda^{n+1}}{n!} B_n(x,y) - K(x,y)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\lambda^{n+1}}{n!} A^n =$$

$$= \lambda^2 \int_a^b K(x,t)K(t,y)dt + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \int_a^b B_{n-1}(x,t)K(t,y)\,dt.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях λ в обох частинах рівняння, ми отримаємо:

$$B_n(x,y) = A^n K(x,y) - n\int_a^b B_{n-1}(x,t)\,K(t,y)dt. \qquad (20)$$

Доказавши цю формулу, ми цим самим і доведем формулу (18). Таким же точно шляхом ми прийдемо від формули (19) до формули

$$B_n(x,y) = A^n K(x,y) - n\int_a^b K(x,t)B_{n-1}(t,y)\,dt, \qquad (21)$$

довівши яку, ми доведемо формулу (19).

b) Доведення формул (20) і (21). Візьмем повний вираз для $B_n(x,y)$ в вигляді кратного інтеграла і постараємось перетворити його до виду (20) або (21).

Згідно формули (17)

$$B_n(x,y) = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(x,y) & K(x,t_1) \dots & K(x,t_n) \\ K(t_1,y) & K(t_1,t_1) \dots & K(t_1,t_n) \\ \dots & \dots \quad \dots & \dots \\ K(t_n,y) & K(t_n,t_1) \dots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n.$$

Розкладемо визначник, який входить в підінтегральний вираз, по елементам першого стовпця. Тоді ми будемо мати:

$$B_n(x,y) = \int_a^b \dots \int_a^b K(x,y) \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & \dots & K(t_1,t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K(t_n,t_1) & \dots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \int_a^b \dots \int_a^b K(t_i,y) \begin{vmatrix} K(x,t_1) & \dots & K(x,t_n) \\ K(t_1,t_1) & \dots & K(t_1,t_n) \\ \dots & \vdots & \dots \\ K(t_{i-1},t_1) & \vdots & K(t_{i-1},t_n) \\ K(t_{i+1},t_1) & \dots & K(t_{i+1},t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(t_1,t_n) & \dots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n.$$

Перший елемент в правій частині наводиться, по (15), до $K(x,y) \times A_n$. Замінюючи в елементах, вхідний під знак суми,

$$t_1, t_{i+1}, \dots, t_n$$

відповідно на

$$t, t_i, \dots, t_{n-1},$$

що буде простою заміною позначень і, отже, не відобразиться на величині кратного визначеного інтеграла, ми отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \int_a^b \dots \int_a^b K(t,y) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} K(x,t_1) & \dots\dots\dots & K(x,t_{i-1}) & K(x,t) & K(x,t_i) & \dots\dots\dots & K(t_1,t_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K(t_{n-1},t_1) & \dots & K(t_{n-1},t_{i-1}) & K(t_{n-1},t) & K(t_{n-1},t_i) & \dots & K(t_{n-1},t_{n-1}) \end{vmatrix} dt dt_1 \dots dt_{n-1}.$$

якщо ми перенесемо стовпець з t на перше місце, то цей вираз прийме вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{2i-1}\int_a^b\dots\int_a^b K(t,y)\times$$

$$\times\begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1)\dots & K(x,t_{n-1}) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1)\dots & K(t_1,t_{n-1}) \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ K(t_{n-1},t) & K(t_{n-1},t_1)\dots & K(t_{n-1},t_{n-1}) \end{vmatrix} dtdt_1\dots dt_{n-1}.$$

З останнього виразу зрозуміло, що всі n доданки нашої суми рівні між собою. Далі, виходячи з того, що інтегрування може бути виконано в будь-якому порядку, інтегруємо спочатку по $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$. При цьому $K(t,y)$ можна буде розглядати як постійний множник і винести з-під знаку $(n-1)$ – кратного інтеграла. Ми отримаємо:

$$-n\int_a^b k(t,y)\left\{\int_a^b\dots\int_a^b \begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1)\dots & K(x,t_{n-1}) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1)\dots & K(t_1,t_{n-1}) \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ K(t_{n-1},t) & K(t_{n-1},t_1)\dots & K(t_{n-1},t_{n-1}) \end{vmatrix} dt_1\dots dt_{n-1}\right\}dt.$$

що, за (17), зводиться до

$$-n\int_a^b B_{n-1}(x,t)\,K(t,y)dt.$$

Таким чином, перетворюючи $B_n(x,y)$, ми отримали формулу:

$$B_n(x,y)=A_nK(x,y)-n\int_a^b K(x,t)\,B_{n-1}(t,y)dt,$$

Але це і є як раз формула (20), з якої, далі, справедливість формули (18), тобто першого співвідношення Фредгольма.

Візьмемо знову повний вираз для $B_n(x,y)$, розложимо тепер визначник, який входить в підінтегральний вираз, по елементам не першого стовпця. А першого рядка. Тоді, роблячи як в попередньому прикладі, ми отримаємо для $B_n(x,y)$ вираз

$$B_n(x,y)=A_nK(x,y)-n\int_a^b K(x,t)B_{n-1}\,(t,y)\,dt,$$

тобто формулу (21). Звідси далі буде слідувати справедливість формули (19), тобто другого відношення Фредгольма. Таким чином, ми доказали наступну теорему.

Теорема 3. *Між визначником Фредгольма* $D(x)$ *і першим мінором Фредгольма* $D(x, y; \lambda)$ *є такі відношення:*

$$D(x, y; \lambda) - \lambda K(x, y) D(\lambda) = \int_a^b K(x, t; \lambda)\, K(t, y) dt = \tag{18}$$

$$= \lambda \int_a^b K(x, t)\, D(t, y; \lambda) dt, \tag{19}$$

справедливе при любому значенні λ, *і для всіх значень* x *і* y *в області* R.

§19. Рішення інтегрального рівняння, даного Фредгольмом при $\boldsymbol{D(\lambda) \neq 0}$.

Фундаментальне відношення Фредгольма, тобто формули (18) і (19), дозволяють нам тепер отримати рішення інтегрального рівняння.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, u(t) dt. \tag{1}$$

Наведенням на метод рішення цього інтегрального рівняння служить метод вирішення кінцевої системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$u_i - \lambda h = \sum_{i=1}^{n} K_{ij}\, u_j = f_i, \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{2}$$

Як відомо, для знаходження u_k із цієї системи рівнянь кожне рівняння домножають на Δ_{ik} і потім всі їх складають, тобто сумують по i від 1 до n. Тоді виходить:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i\, \Delta_{ik} - \lambda h_i \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\, u_j \Delta_{ik} = \sum_{i=1}^{n} f_i\, \Delta_{ik}.$$

звідки

$$\Delta u_k = \sum_{i=1}^{n} f_i\, \Delta_{ik}. \tag{3}$$

Але тепер, по визначенню (§15),

$$\Delta_{ik} = hD_{ki},$$

і по формулі (7)

$$\lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} hD_{ki} = \int_a^b D(x,t;\lambda)dt.$$

Це природно наводить на думку аналогічним чином зробити з нашим інтегральним рівнянням (1). Напишемо його у формі

$$u(t) = f(t) + \lambda\int_a^b K(t,\xi)\,u(\xi)d\xi.$$

Припускаючи, що це рівняння задовольняється деякою безперервною функцією $u(t)$ помножимо обидві його частини на $D(x,t;\lambda)$ і проінтегруємо потім по t в межах від a до b. Тоді ми отримаємо:

$$\int_a^b D(x,t;\lambda)\,u(t)dt = \int_a^b D(x,t;\lambda)\,f(t)dt +$$

$$+\lambda\int_a^b\int_a^b D(x,t;\lambda)\,K(t,\xi)u(\xi)d\xi dt. \tag{22}$$

Підінтегральний вираз у подвійному інтегралі безперервно відносно t і ξ, тому ми можемо змінити порядок інтегрування та написати цей подвійний інтеграл так:

$$\int_a^b u(\xi)\left[\lambda\int_a^b D(x,t;\lambda)\,K(t,\xi)dt\right]d\xi,$$

що за формулою (18) переходить у

$$\int_a^b [D(x,\xi;\lambda) - \lambda D(\lambda)K(x,\xi)]u(\xi)d\xi.$$

Тому формулу (22) можна написати у вигляді

$$\int_a^b D(x,t;\lambda)u(t)dt = \int_a^b D(x,t;\lambda)f(t)dt$$

$$+\lambda\int_a^b D(x,\xi;\lambda)u(\xi)d\xi - \lambda D(\lambda)\int_a^b K(x,\xi)u(\xi)d\xi,$$

що згідно з рівнянням (1) призводить до

$$\int_a^b D(x,t;\lambda)f(t)dt - D(\lambda)[u(x) - f(x)] = 0.$$

Розв'язуючи тепер це рівняння відносно $u(x)$, коли $D(\lambda) \neq 0$, ми отримаємо:

$$u(x) = f(x) + \int_a^b \frac{D(x,t;\lambda)f(t)}{D(\lambda)}dt. \tag{23}$$

Таким чином, якщо u є неперервна функція від x, задовольняючий рівняння (1), і якщо $D(\lambda) \neq 0$, то і $u(x)$ виражається формулою (23).

Нам остається показати, що , зворотньо, функція $u(x)$, яка визначається формулою (23), являється рішенням рівняння (1). В цьому можна переконатись простою підстановкою. Підставляючи значення $u(x)$ із формули (23) в рівняння (1) отримаємо:

$$f(x) + \int_a^b \frac{D(x,t;\lambda)f(t)}{D(\lambda)}dt =$$

$$= f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)\left\{f(t) + \int_a^b \frac{D(t,\xi;\lambda)f(\xi)}{D(\lambda)}d\xi\right\}dt.$$

Розбиваючи останній член на дві частини і міняючи порядок інтегрування в подвійному інтегралі находимо:

$$\int_a^b \frac{D(x,t;\lambda)f(t)}{D(\lambda)}dt = \lambda\int_a^b K(x,t)f(t)dt +$$

$$+\frac{1}{D(\lambda)}\int_a^b f(\xi)\left[\lambda\int_a^b K(x,t)D(t,\xi;\lambda)dt\right]d\xi,$$

що згідно формулі (19) може бути написано в вигляді

$$\int_a^b \frac{D(x,t;\lambda)f(t)}{D(\lambda)}dt = \lambda\int_a^b K(x,t)f(t)dt +$$

$$+\frac{1}{D(\lambda)}\int_a^b f(\xi)\,[D(t,\xi;\lambda)dt - \lambda K(x,\xi)D(\lambda)]d\xi.$$

Але останнє рівняння, як в цьому не важко переконатися, являє собою насправді тотожність. Отже, функція $u(x)$, виражена формулою (23), дійсно задовольняє рівняння (1). Таким чином ми довели наступну теорему, яка називається *першою фундаментальною теоремою Фредгольма*.

Теорема 4. *Якщо:*

a) $D(\lambda) \neq 0$,

b) $K(x,t)$ неперервна в R,

c) $f(x)$ неперервна в I, то рівняння

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)\,u(t)\,dt \tag{1}$$

має одне і тільки одне неперервне рішення, воно виражається формулою

$$u(x) = f(x) + \int_a^b \frac{D(x,t;\lambda)f(t)}{D(\lambda)}dt, \tag{23}$$

де $D(x,t;\lambda)$ і $D(\lambda)$ степеневі ряди, що сходяться при значеннях параметра λ, а ряд $D(x,t;\lambda)$, крім того, сходиться рівномірно по x і t в області R.

Звідси відразу випливає для випадку $f \equiv 0$

Звідки. $D(\lambda) \neq 0$, *то однорідне рівняння*

$$u(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)\,u(t)\,dt \tag{24}$$

має одне і тільки одне неперервне рішення, а саме тривіальне.

$$u(x) \equiv 0.$$

Відзначимо аналогію з кінцевою системою лінійних алгебраїчних рівнянь

$$u_i - \lambda h\sum_{i=1}^{n} K_{ij}\,u_j = f_i, \qquad (i = 1, \dots, n)$$

з визначником Δ.

Якщо $\Delta \neq 0$, то система має один і тільки один розв'язок.

Якщо $f_i \equiv 0$, то єдиним рішенням являється тривіальне

$$u_1 = u_2 = \cdots = u_n \equiv 0.$$

Але $D(\lambda)$ є межею визначника Δ. Тому за аналогією з скінченною системою лінійних алгебраїчних рівнянь ми як раз і повинні були очікувати, що мають місце теорема **4** і її наслідок**.**

§20. Рішення однорідного рівняння для випадку, коли $\boldsymbol{D(\lambda) = 0}$, $\boldsymbol{D'(\lambda) \neq 0}$.

Досі ми припускали, що $D'(\lambda) \neq 0$. Давайте тепер подивимось, що буде, якщо $D(\lambda) = 0$, причому спочатку розглянемо однорідне рівняння (24).

Нехай λ_0 буде значення λ, для якого

$$D(\lambda_0) = 0. \tag{25}$$

Будемо тепер вирішувати однорідне інтегральне рівняння (24) для цього часткового випадку значення параметра λ :

$$u(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt. \tag{26}$$

Розв'язок рівняння (26) ми отримаємо за допомогою другого фундаментального співвідношення (19) Фредгольма, котре має місце для всіх значень λ і, відповідно, для $\lambda = \lambda_0$. При цьому значенні параметра λ формула (19) переходить, по (25), в

$$D(x,y;\lambda_0) = \lambda_0 \int_a^b K(x,t)\, D(t,y;\lambda_0)\, dt.$$

Ця рівність має місце для всіх значень y в інтервалі $[a,b]$, отже, зокрема, і для $y = y_0$:

$$D(x,y_0;\lambda_0) = \lambda_0 \int_a^b K(x,t)\, D(t,y_0;\lambda_0)\, dt.$$

Але це і є якраз рівняння (26), де $u(x)$ замінено на $D(x, y_0; \lambda_0)$. Таким чином, ми бачимо, що $u(x) = D(x, y_0; \lambda_0)$ є розв'язком рівняння (26). Більше того, це рішення є неперервним, оскільки ряд $D(x, y; \lambda)$ сходиться рівномірно відносно x та y і його члени неперервні. Але $D(x, y_0; \lambda)$ може дорівнювати нулю для всіх x або при спеціальному виборі значення y_0 – і в цьому випадку ми можемо взяти яке-небудь інше значення для y_0, при якому цього тотожного перетворення в нуль вже не буде, - або якщо $D(x, y; \lambda_0) \equiv 0$ для всіх x та y і в цьому випадку наведене рішення зводиться до тривіального $u \equiv 0$, незалежно від вибору y_0. Таким чином, ми доказали наступну теорему.

Теорема 5. *Якщо* $D(\lambda_0) = 0$ *і* $D(x, y; \lambda) \neq 0$*, то функція* $u(x) = D(x, y_0; \lambda_0)$ *при відповідному підборі значення* y_0 *буде неперервним рішенням рівняння*

$$u(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x, t)\, u(t)\, dt,$$

не дорівнює тотожно нулю.

У щойно встановленій теоремі умову $D(x, y; \lambda) \neq 0$ можна замінити умовою $D'(\lambda) \neq 0$. Для того щоб це доказати, виведемо наступну формулу:

$$\int_a^b D(x, x; \lambda) dx = -\lambda D'(\lambda). \tag{27}$$

Для доведення цієї формули представимо $D'(\lambda)$ і $D(x, y; \lambda)$ в вигляді степеневих рядів. По формулі (14)

$$D(\lambda) = 1 - \lambda A_1 + \frac{\lambda^2}{2!} A_2 - \frac{\lambda^3}{3!} A_3 + \cdots,$$

Де A_n визначається формулою (15). Звідси

$$D'(\lambda) = A_1 - \lambda A_2 + \frac{\lambda^2}{2!} A_3 + \cdots = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} A_{n+1}.$$

В повному виразу для A_{n+1}:

$$A_{n+1}=\int_a^b\dots\int_a^b\begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2)\dots & K(t_1,t_{n+1})\\ \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots\\ K(t_{n+1},t_1) & K(t_{n+1},t_2)\dots & K(t_{n+1},t_{n+1})\end{vmatrix}dt_1\dots dt_{n+1}$$

замість

$$t_1,t_2,t_3,\dots,t_n,t_{n-1}$$

підставимо

$$x,t_1,t_2,\dots,t_{n-1},t_n.$$

тоді отримаємо

$$A_{n+1}=\int_a^b\dots\int_a^b\begin{vmatrix} K(x,x) & K(x,t_1)\dots & K(x,t_n)\\ K(t_1,x) & K(t_1,t_1)\dots & K(t_1,t_n)\\ \dots & \dots & \dots\\ K(t_n,x) & K(t_n,t_1)\dots & K(t_n,t_n)\end{vmatrix}dx\,dt_1\dots dt_n.$$

Міняючи порядок інтегрування, а саме інтегруючи спочатку по $dt_1,\dots,dt_n$, отримаємо:

$$A_{n+1}=\int_a^b\left\{\int_a^b\dots\int_a^b\begin{vmatrix} K(x,x) & K(x,t_1)\dots & K(x,t_n)\\ K(t_1,x) & K(t_1,t_1)\dots & K(t_1,t_n)\\ \dots & \dots & \dots\\ K(t_n,x) & K(t_n,t_1)\dots & K(t_n,t_n)\end{vmatrix}\,dt_1\dots dt_n\right\}dx,$$

що згідно формули (17) переходить в

$$A_{n+1}=\int_a^b B_n(x,x)dx.$$

тому

$$D'(\lambda)=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\int_a^b B_n(x,x)dx.$$

але

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}B_n(x,x)$$

є ряд, рівномірно спадний відносно x. Тому ми можемо в виразі для $D'(\lambda)$ змінити порядок сумування і інтегрування і написати:

$$D'(\lambda) = -\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} B_n(x,x)dx.$$

Перемножуючи обидві частини рівності на $-\lambda$ і приймаючи в увагу формулу (16), переконуємося в тому, що дійсно

$$\int_a^b D(x,x;\lambda)dx = -\lambda D'(\lambda). \quad (27)$$

Допустимо що, $D(\lambda_0) = 0$ і $D'(\lambda_0) \neq 0$. Тоді, $\lambda_0 \neq 0$ так як $D(0) = 1$. Тому якщо ми положимо в формулі (27) $\lambda = \lambda_0$, то права частина рівності буде відмінна від нуля, а значить і ліва не буде дорівнювати нулю. Із цього випливає, що $D(x,x;\lambda) \neq 0$ і відповідно, $D(x,y;\lambda) \neq 0$. Значить, дійсно умова $D(x,y;\lambda) \neq 0$ в теоремі 5 можна замінити умовою $D'(\lambda_0) \neq 0$.

Помітимо далі, що якщо $u(x) = D(x,y_0;\lambda_0)$ є розв'язок однорідного інтегрального рівняння (26) тобто, Cu, де C є випадковий постійний множник, також являється рішенням цього рівняння. Таким чином, мається нескінченна множина розв'язків, які відрізняються одне від одного лише постійним множником.

Це знаходиться в повній аналогії з положенням справ для кінцевої системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$u_i - \lambda h \sum_{j=1}^{n} K_{ij}u_j = 0 \qquad (i = 1, \dots, n)$$

з визначником Δ. Дійсно, якщо $\Delta = 0$, при чому по крайній мірі, один із перших мінорів не дорівнює нулю, то ці рівняння визначають єдиним чином відношення величин $u_1, u_2, \dots, u_n$ тобто $u_i = C_j u_n$ $(j = 1, \dots, n;\ C_j = 1)$. Проте рівність $\Delta = 0$ відповідає переходу $D(\lambda)$ в нуль, а не зникання по крайній мірі одного із перших мінорів відповідає умові $D(x,y;\lambda_0) \neq 0$.

ВИСНОВОК

У даній магістерській роботі було здійснено дослідження інтегральних рівнянь Фредгольма. Результати роботи відображають значущість та актуальність вивчення інтегральних рівнянь у прикладній математиці.

У першому розділі було розглянуто основні теоретичні положення, що лежать в основі теорії інтегральних рівнянь. Здійснено аналіз фундаментальних тверджень та допоміжних фактів, що використовуються для розв'язання таких рівнянь. Ці положення є необхідною базою для подальших досліджень і розробок у цій галузі.

Другий розділ присвячено детальному аналізу методу послідовних підстановок, який є одним з ефективних методів для розв'язання інтегральних рівнянь другого роду. Проведено аналіз алгоритму застосування цього методу, а також його ефективності на прикладах конкретних задач. Результати показали, що метод послідовних підстановок є дієвим інструментом для розв'язання широкого спектру інтегральних рівнянь. Було проаналізовано властивості інтегральних рівнянь Фредгольма першого та другого роду. Виявлено основні особливості цих рівнянь, що дозволяють ефективно застосовувати методи розв'язання до різних типів задач. Проведене дослідження властивостей рівнянь Фредгольма сприяє більш глибокому розумінню їх структури та поведінки у різних умовах.

У заключному розділі було досліджено теоретичні основи розв'язування рівнянь Фредгольма у вигляді відношень двох цілих функцій від λ. Проведено аналіз теоретичних підходів до побудови таких розв'язків, а також розроблено алгоритмічні методи для їх знаходження. Результати дослідження демонструють ефективність запропонованих підходів та їх потенціал для вирішення складних задач у різних галузях науки і техніки.

Загалом, проведене дослідження показало, що інтегральні рівняння Фредгольма мають широкий спектр застосувань і є важливим інструментом для моделювання різних фізичних процесів. Розроблені методи та алгоритми, а також проведений аналіз, дозволяють ефективно розв'язувати інтегральні рівняння та відкривають нові можливості для подальших досліджень і розробок у цій галузі.

Робота значно підвищує розуміння інтегральних рівнянь Фредгольма, сприяє удосконаленню методів їх розв'язання і демонструє практичне значення отриманих результатів. Впровадження цих методів може бути корисним у багатьох прикладних задачах, що підтверджує актуальність і значущість дослідження.

ВИКОРИСТАНІ ДЖЕРЕЛА

1. Березанский, Ю. М. Функціональний аналіз: Курс лекцій / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. – К.: Вища шк., 1990. – 600 с.
2. Вакал Є., Вакал Ю., Вакал Л. Найкраща апроксимація ядра інтегрального рівняння Фредгольма з використанням генетичного алгоритму. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. 2016. Вип. 2 (36). С. 17–22.
3. Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Федорова, Л. Б., Алєксєєва, І. В. Математика в технічному університеті: підручник для студентів інженерно-технічних спеціальностей. – Київ: Кондор, 2018. – 496 с.
4. Гой Т. П. Диференціальні та інтегральні рівняння / Т. П. Гой, О. В. Махней. – Івано-Франківськ: Видавничо-дизайнерський відділ ЦІТ Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2011. – 250 с.
5. Колмогоров А. М., Фомін С. В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу – К: Вища школа, 1974. – 456 с.
6. Коровкін В. М. Лінійні і інтегральні рівняння. Київ: Видавництво «Наукова думка», 2020. – 256 с.
7. Свідзинський А. В. Математичні методи теоретичної фізики. У 2 т. Т. 1 : [підручник] / НАН України, Ін-т теорет. фізики ім. М. М. Боголюбова. – Вид. 4-е, допов. і перероб. – Київ : Ін-т теорет. фізики ім. М. М. Боголюбова, 2009. – 396 с. : іл. – Бібліогр.: с. 392.
8. Свідзинський А. В. Математичні методи теоретичної фізики. У 2 т. Т. 2: [підручник] / НАН України, Ін-т теорет. фізики ім. М. М. Боголюбова. – Вид. 4-е, допов. і перероб. – Київ: Ін-т теорет. фізики ім. М. М. Боголюбова, 2009. – 436 с. – Бібліогр.: с. 432–433.
9. Федак І. В., Гой Т. П. Лінійні інтегральні рівняння: Навчальний посібник. Івано-Франківськ: Голіней, 2011. – 152с.

Анотація

Юхимчук Р. Ю. Інтегральні рівняння Фредгольма. Магістерська робота. Луцьк, 2024. 50с.

Магістерська робота присвячена вивченню інтегральних рівнянь Фредгольма, основних теоретичних положень, що лежать в основі теорії інтегральних рівнянь.

Розглянуто теоретичні основи розв’язування рівнянь Фредгольма у вигляді відношень двох цілих функцій від λ, та метод послідовних підстановок.

Ключові слова: інтегральні рівняння, рівняння Фредгольма, метод послідовних підстановок.

Abstract

Yukhymchuk R. Yu. Fredholm Integral Equations. Master's Thesis. Lutsk, 2024. 50 pages.

This master's thesis is dedicated to the study of Fredholm integral equations, covering the fundamental theoretical principles underlying the theory of integral equations.

The theoretical foundations for solving Fredholm equations in the form of ratios of two entire functions of λ and the method of successive substitutions are examined.

Keywords: integral equations, Fredholm equations, method of successive substitutions.