МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Кафедра теорії функцій та методики навчання математики

На правах рукопису

ГОРАЙЧУК ОЛЕКСАНДР ПЕТРОВИЧ

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Спеціальність: 111 Математика

Освітньо-професійна програма: Математика

Робота на здобуття освітнього ступеня «магістр»

Науковий керівник:

ЖИГАЛЛО КОСТЯНТИН МИКОЛАЙОВИЧ

доцент кафедри теорії функції та

методики навчання математики

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол №_________

засідання кафедри теорії функцій та

методики навчання математики

від ___________________________ 2024 р.

Завідувач кафедри

(__________) Гембарська С. Б.

ЛУЦЬК 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Чисельні методи розв’язування диференціальних рівнянь є невід’ємною складовою сучасної прикладної математики, фізики та інженерії. Багато процесів у природничих науках, економіці та техніці описуються диференціальними рівняннями, однак далеко не завжди такі рівняння можна розв’язати аналітично. У таких випадках застосовуються чисельні методи, які дозволяють отримати наближені розв’язки з заданою точністю. Розробка та порівняння чисельних методів є важливим завданням, оскільки від точності та швидкості їх виконання залежить якість моделювання реальних процесів та ефективність прийняття рішень у різних сферах.

Актуальність дослідження. Диференціальні рівняння широко застосовуються для математичного моделювання процесів у багатьох галузях науки та техніки: у фізиці, біології, економіці, інженерії, хімії та інших дисциплінах. Проте більшість диференціальних рівнянь, що описують реальні процеси, не мають аналітичних розв'язків або їх отримання є надзвичайно складним. У таких випадках на допомогу приходять чисельні методи, що дозволяють знаходити наближені розв’язки з необхідною точністю. Вибір оптимального чисельного методу є важливим аспектом, оскільки він визначає точність і стабільність результатів, а також обчислювальні витрати, що особливо актуально при розв’язанні складних моделей у реальному часі.

Розвиток обчислювальної техніки та програмних засобів значно розширює можливості чисельного інтегрування, проте не зменшує потребу в аналізі ефективності методів. Вибір потрібного методу з огляду на його стійкість та похибку є ключовим для забезпечення точності моделювання й уникнення кумуляції чисельних похибок, що може призвести до значних відхилень результатів від реальності. Це особливо важливо для довготривалих або складних розрахунків, де навіть малі помилки на початкових етапах можуть призвести до невірних результатів.

Методи Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса є одними з основних чисельних методів для розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку. Кожен із них має свої переваги та недоліки, пов'язані з точністю, обчислювальною складністю та стійкістю до похибок. Актуальність дослідження полягає у визначенні найефективнішого методу для конкретних типів задач шляхом їх порівняння з використанням одних і тих самих вхідних даних. Це дозволить не лише підвищити ефективність обчислень, але й сприятиме правильному вибору методів у прикладних дослідженнях.

Отже, дане дослідження є актуальним з огляду на потребу в точному та ефективному розв’язанні диференціальних рівнянь, що має велике значення для моделювання реальних процесів та оптимізації обчислювальних ресурсів у сучасних наукових і технічних задачах.

Мета кваліфікаційної роботи є дослідження чисельних методів розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку на прикладі задачі Коші, а також аналіз їх точності, стійкості та похибок. Особлива увага приділяється методам Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса, які є базовими для розв’язання багатьох прикладних задач. У процесі дослідження буде здійснено теоретичний огляд алгоритмів цих методів, проаналізовано їх переваги та недоліки, а також проведено порівняння отриманих результатів для одного й того ж рівняння.

Досягнення поставленої мети зумовило вирішення наступних ***завдань дослідження:***

— розгляд задачі Коші та аналіз умов існування й єдиності її розв’язку;

— побудова алгоритмів чисельних методів Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса;

— проведення аналітичного дослідження точності методів та впливу похибок на кінцевий результат;

— визначення переваг та недоліків кожного з методів і вибір оптимального з точки зору точності та ефективності.

Об'єктом дослідження є чисельні методи для розв’язання диференціальних рівнянь першого порядку

Предмет дослідження є порівняння їх точності, швидкості збіжності та стійкості.

Теоретико-методологічну основу кваліфікаційного дослідження склала тема чисельних методів розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку, зокрема задачі Коші. У дослідженні детально проаналізовано алгоритми та похибки методів Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса, що дозволяє оцінити їх ефективність залежно від специфіки задачі. Особлива увага приділена точності та стійкості кожного методу, а також їх застосуванню в умовах обмежених обчислювальних ресурсів та при моделюванні на довгих інтервалах.

Методи дослідження включають комплексний підхід, що охоплює теоретичний аналіз наукових джерел і навчальних посібників, а також чисельне моделювання на прикладах задач Коші із застосуванням відповідних алгоритмів. Порівняльний аналіз проведено за такими критеріями, як точність, швидкість виконання та стійкість отриманих розв’язків. Використання таблиць та графіків дозволяє наочно продемонструвати результати розрахунків і зробити висновки про оптимальність застосування кожного методу для різних класів задач.

Практичне значення одержаних результатів. Одержані результати мають важливе практичне значення для підвищення ефективності чисельного моделювання процесів у фізиці, інженерії, економіці та інших науках. Вибір оптимального методу розв'язання диференціальних рівнянь дозволяє збалансувати точність, стійкість і обчислювальні витрати, що важливо для реальних прикладних задач. Результати будуть корисними для навчального процесу, сприяючи ефективнішому викладанню чисельних методів та підготовці фахівців у цій галузі.

Структура кваліфікаційної роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Матеріал викладено на 60 сторінках, який включає 24 таблиць, 2-х рисунків та 20 літературних джерел.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ

1.1. Диференціальні рівняння першого порядку та їх властивості

Диференціальні рівняння є важливим інструментом математичного моделювання процесів, що описують зміну фізичних, хімічних, економічних та інших явищ у часі чи просторі. Особливу увагу приділяють диференціальним рівнянням першого порядку, які мають широке застосування у різних галузях науки й техніки. Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд:

$$y'(x) = f(x, y)$$

де $y(x)$— невідома функція, що залежить від незалежної змінної $x, f(x, y)$ — задана функція від x та y. Рівняння першого порядку називаються такими, оскільки в них фігурує лише перша похідна шуканої функції.

Диференціальні рівняння першого порядку поділяються на кілька основних типів залежно від їх структури та характеру залежності між змінними. Основні види таких рівнянь наведено в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Класифікація диференціальних рівнянь першого порядку

Тип рівняння	**Загальний вигляд**	**Приклад**
Лінійне рівняння	$y' + p(x)y = q(x)$	$y' + 2y = sin\,(x)$
Нелінійне рівняння	$y' = f(x, y), f$ нелінійна щодо y	$y' = y^2 + x$
Рівняння з відокремлюваними змінними	$y' = g(x)h(y)$	$y' = x \cdot e^y$
Однорідне рівняння	$y' = \frac{F(\lambda x, \lambda y)}{G(\lambda x, \lambda y)}$	$y' = \frac{x + y}{x - y}$
Рівняння Бернуллі	$y' + p(x)y = q(x)\, y^n$	$y' - y = xy^2$

Джерело: складено автором [7]

Важливими характеристиками диференціальних рівнянь є існування та єдність розв'язків, стійкість розв’язку та залежність від початкових умов.

Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку формулюється так: знайти функцію y(x), яка задовольняє рівняння

$$y'(x) = f(x, y)$$

та початкову умову y(x_0)= y_0 . Теорема Пікара-Лінделефа гарантує існування й єдність розв’язку на деякому інтервалі, якщо функція $f(x, y)$ та її частинна похідна за y є неперервними в околі точки (x_0, y_0). Тобто, якщо виконуються умови:

$f(x, y)$ є неперервною у деякій області D, що містить точку (x_0, y_0).

Частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ є неперервною в цій області.

У цьому випадку існує єдиний розв'язок $y(x)$, який проходить через точку (x_0, y_0).

Поняття стійкості розв'язку є важливим для аналізу поведінки диференціальних рівнянь при незначних змінах початкових умов. Розв'язок називається **стійким за Ляпуновим**, якщо для кожної малої зміни початкових умов розв’язок змінюється також незначно. Інакше кажучи, при зміні значення y_0 на $y_0 \sim = y_0 + \epsilon$, розв'язок залишатиметься близьким до початкового протягом усього інтервалу, на якому він визначений [10, с. 111].

Існує кілька аналітичних і чисельних методів для розв’язання диференціальних рівнянь першого порядку. Аналітичні методи включають інтегрування за змінними, метод підстановки та метод інтегруючого множника, однак багато задач не піддаються точному розв'язанню. У таких випадках використовують чисельні методи, серед яких найпоширенішими є метод Ейлера, метод Рунге-Кутта та методи сімейства Адамса.

Приклади застосування диференціальних рівнянь першого порядку.

Диференціальні рівняння першого порядку застосовуються для моделювання різних процесів, таких як:

Фізика: Закон охолодження Ньютона описується рівнянням,

$$T'(t) = -k(T - T_{ср})$$

де $T(t)$ — температура об'єкта,

$T_{ср}$ — температура середовища.

Економіка: Модель зростання капіталу описується рівнянням

$K'(t) = rK(t)$,

де $K(t)$ — капітал у момент часу t,

r — ставка зростання.

Біологія: Модель зростання популяції визначається рівнянням

$P'(t) = rP(t)(1 - P(t)K)$,

де $P(t)$ — чисельність популяції,

K — максимальна місткість середовища.

Аналітичні підходи, хоча і є бажаними, не завжди можуть бути застосовані на практиці через складність або нелінійність рівнянь. Тому чисельні методи стали важливим інструментом для розв'язання задач у прикладних науках. Вибір чисельного методу залежить від вимог до точності, швидкості збіжності та стійкості алгоритму. У наступних підрозділах розглядатимуться основні чисельні методи, які використовуються для розв’язання задачі Коші.

Чисельні методи завжди супроводжуються похибками, які можуть бути двох типів:

— **локальна похибка** — помилка на одному кроці інтегрування;

— **глобальна похибка** — накопичення похибок на всіх кроках розв'язання [12, с. 33].

Для мінімізації похибок важливо правильно вибрати крок інтегрування та метод чисельного розв'язання. У наступних розділах будуть детально проаналізовані методи Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса з точки зору їх точності та стійкості.

Проведений аналіз показав, що диференціальні рівняння є важливим математичним інструментом для опису процесів різної природи, а саме рівняння першого порядку знаходять широке застосування у фізичних, біологічних та економічних моделях. Встановлено, що існування та єдність розв’язку задачі Коші залежить від неперервності функції, що задає рівняння, та її частинної похідної за шуканою функцією. Окрім того, поняття стійкості розв’язку є ключовим для оцінки поведінки системи при малих змінах початкових умов, що відіграє важливу роль у практичних розрахунках.

Узагальнення теоретичного матеріалу свідчить, що аналітичні методи розв’язання мають обмежене застосування, особливо у випадках складних або нелінійних рівнянь. Це обґрунтовує необхідність використання чисельних підходів, які дозволяють знайти наближені розв’язки з прийнятною точністю. Розглянуті властивості та класифікація диференціальних рівнянь підготували основу для подальшого вивчення та реалізації чисельних методів, таких як методи Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса, з метою їх порівняльного аналізу в наступних розділах. Також було підкреслено важливість правильного вибору кроку інтегрування для зменшення похибок і підвищення точності розв’язків [10, с. 102].

Отже, даний розділ створює необхідну теоретичну базу для дослідження чисельних методів і дозволяє чітко сформулювати підхід до вибору оптимального методу для розв’язання задачі Коші. Подальше дослідження буде зосереджене на розробці алгоритмів чисельних методів та порівнянні їх результатів з урахуванням точності, обчислювальної ефективності та стійкості, що сприятиме визначенню найефективнішого підходу для практичного використання.

1.2. Задача Коші: постановка та умови існування й єдності

Задача Коші є фундаментальною проблемою в теорії диференціальних рівнянь, оскільки дозволяє описувати динамічні процеси за допомогою початкових умов. Її суть полягає в тому, щоб знайти розв’язок диференціального рівняння, який проходить через визначену точку початкових значень. У випадку диференціальних рівнянь першого порядку задача Коші формулюється як система, що включає рівняння у вигляді

$$y'(x) = f(x, y)$$

разом із початковою умовою $y(x_0) = y_0$, де x_0 — фіксоване значення незалежної змінної, а y_0 — початкове значення шуканої функції в точці x_0. Метою є знайти функцію $y(x)$, яка задовольняє дане рівняння та проходить через точку (x_0, y_0) [4, с. 71].

Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку формулюється як знаходження функції $y(x)$ на інтервалі $x \in [x_0, x_1]$, яка задовольняє рівняння $y'(x) = f(x, y)$, і початкову умову $y(x_0) = y_0$. Розв'язок цієї задачі має бути таким, щоб при будь-якому значенні x на інтервалі функція $y(x)$ та її похідна були визначені й задовольняли вихідне рівняння.

Однією з ключових теорем, яка обґрунтовує існування та єдність розв'язку задачі Коші, є теорема Пікара-Лінделефа. Вона стверджує, що якщо функція $f(x, y)$ є неперервною в деякій області $D \subset R2$, яка містить точку (x_0, y_0), і частинна похідна $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}$ також є неперервною в цій області, тоді існує єдиний розв'язок $y(x)$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$. Цей розв'язок існує щонайменше на деякому інтервалі навколо точки x_0.

Теорема Пікара-Лінделефа є важливою в контексті як теоретичних, так і чисельних методів, оскільки вона гарантує, що при певних умовах задача Коші має єдиний розв'язок, і цей розв'язок можна наближено знайти чисельними методами.

З точки зору геометрії, розв'язок диференціального рівняння $y'(x) = f(x, y)$ визначає траєкторію на площині xy, яка проходить через точку (x_0, y_0). Кожне диференціальне рівняння першого порядку можна розглядати як поле напрямків, у кожній точці якого вектор задає напрямок дотичної до шуканої кривої. Таким чином, початкова умова $y(x_0) = y_0$ визначає єдиний напрямок для траєкторії, що гарантує її унікальність при виконанні умов теореми Пікара-Лінделефа.

У таблиці 1.2 представлено кілька прикладів задачі Коші для різних типів рівнянь.

Таблиця 1.2

Приклади та ілюстрація задачі Коші

Тип рівняння	**Рівняння**	**Початкова умова**	**Розв'язок**
Лінійне рівняння	$y' + y = 0$	$y(0) = 1$	$y(x) = e^{-x}$
Нелінійне рівняння	$y' = y^2 - x$	$y(1) = 0$	Немає аналітичного розв'язку
Рівняння з відокремлюваними змінними	$y' = x \cdot y$	$y(0) = 2$	$y(x) = 2e^{x2/2}$

Джерело: складено автором [4]

З цих прикладів видно, що навіть для простих початкових умов деякі рівняння не мають аналітичного розв'язку, що підтверджує необхідність використання чисельних методів для їх вирішення.

Для успішного розв'язання задачі Коші необхідно дотримуватися кількох важливих умов:

1. **Неперервність функції** $f(x, y)$ в деякій області, яка містить точку (x_0, y_0). Це гарантує, що функція є добре визначеною на всьому інтервалі інтегрування.

2. **Неперервність частинної похідної** $\frac{\partial f}{\partial y}$ в цій же області. Ця умова є необхідною для уникнення розривів або розбіжностей у розв'язку.

3. **Локальна ліпшицевість** функції $f(x, y)$ за y, тобто існування константи $L > 0$, для якої виконується нерівність:

$| f(x, y1) - f(x, y^2) | \leq L | y^1 - y^2 |$, де y^1 та y^2 — два довільні значення функції в точці x. Ліпшицева умова забезпечує єдність розв'язку [4, с. 88].

Якщо функція $f(x, y)$ задовольняє всі наведені вище умови, то задача Коші має єдиний розв'язок. Проте для багатьох рівнянь аналітичні розв'язки недоступні, і на практиці доводиться застосовувати чисельні методи. Вибір методу залежить від точності та швидкості обчислень, а також від вимог до стійкості алгоритму. Основні чисельні методи, такі як метод Ейлера, метод Рунге-Кутта та методи Адамса, дозволяють знаходити наближені розв'язки з різною точністю, що робить їх важливими інструментами для розв'язання задачі Коші на практиці.

Теорема Пікара-Лінделефа забезпечує теоретичні гарантії щодо існування та єдності розв'язку, проте на практиці виникають ситуації, коли умови теореми не виконуються. Наприклад, якщо функція $f(x, y)$ містить розриви або не задовольняє ліпшицеву умову, чисельні методи можуть дати кілька розв'язків або взагалі не збігатися до правильного результату. У таких випадках важливо адаптувати чисельні алгоритми або зменшити крок інтегрування для підвищення точності.

Таким чином, було розглянуто постановку задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку, а також умови існування та єдності розв'язку. Теорема Пікара-Лінделефа забезпечує фундаментальні теоретичні основи для розв'язання таких задач, але на практиці важливо враховувати можливі обмеження та використовувати чисельні методи для отримання наближених розв'язків. Подальше дослідження буде присвячене аналізу чисельних методів, які дозволяють ефективно розв'язувати задачу Коші з урахуванням обмежень похибки та стійкості.

1.3. Метод Ейлера: ідея, алгоритм, похибка

Метод Ейлера є одним із найпростіших та найпоширеніших чисельних методів розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку. Він був розроблений швейцарським математиком Леонардом Ейлером і ґрунтується на ідеї заміни похідної на скінченну різницю, що дозволяє отримати наближене значення шуканої функції на наступному кроці інтегрування. Незважаючи на свою простоту, метод Ейлера залишається важливим інструментом чисельного аналізу та застосовується для отримання первинних наближень або перевірки інших методів.

Основна ідея методу Ейлера полягає в наближенні кривої розв'язку за допомогою послідовних лінійних інтервалів. Якщо на інтервалі [x_0 , x_1] розв'язок функції $y(x)$ є гладким і неперервним, то його можна апроксимувати прямою лінією, що проходить через початкову точку (x_0, y_0) з нахилом, який визначається похідною $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Наступне значення функції у на кроці h визначається за формулою:

$y_n + 1 = y_n + hf(x_n, y_n);$

де h — крок інтегрування

(x_n, y_n) — значення функції на n-му кроці [11, с. 32].

Таким чином, метод Ейлера дозволяє знайти наближене значення розв'язку на кожному кроці, послідовно переходячи від однієї точки до іншої.

Алгоритм методу Ейлера можна описати наступними кроками:

1. **Задаємо початкові умови**: x_0, y_0 — значення незалежної змінної та функції на початку інтервалу.

2. **Вибираємо крок інтегрування** $h > 0$. Вибір кроку є критичним для точності й стабільності розв'язання.

3. **Обчислюємо наступні значення** y_n+1 за формулою:

$y_n + 1 = y_n + hf(x_n, y_n);$

4. **Повторюємо обчислення** для всіх $n = 0,1,2, \ldots$, поки не досягнемо кінцевої точки інтервалу x_1,.

5. **Отримуємо масив значень** (x_n, y_n), який апроксимує шуканий розв'язок [11, с. 32].

Алгоритм реалізується послідовно для всіх точок на заданому інтервалі, що дає змогу побудувати графік наближеного розв'язку.

Нехай задане диференціальне рівняння

$y'(x) = -2y, y(0) = 1$ і необхідно знайти наближений розв'язок на інтервалі [0,1] з кроком $h = 0{,}2$. Застосуємо метод Ейлера для обчислення послідовних значень y_n(див. табл.1.3):

Таблиця 1.3.

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)=-2y_n$	$y_n+1=y_n+hf(x_n, y_n)$
0	0.0	1.000	-2.000	1.000 + 0.2(-2.000) = 0.600
1	0.2	0.600	-1.200	0.600 + 0.2(-1.200) = 0.360
2	0.4	0.360	-0.720	0.360 + 0.2(-0.720) = 0.216
3	0.6	0.216	-0.432	0.216 + 0.2(-0.432) = 0.130
4	0.8	0.130	-0.260	0.130 + 0.2(-0.260) = 0.078
5	1.0	0.078	-0.156	0.078 + 0.2(-0.156) = 0.047

Джерело: складено автором [11]

Цей приклад показує, як метод Ейлера дозволяє послідовно знаходити наближені значення функції на кожному кроці інтегрування.

Основний недолік методу Ейлера полягає в накопиченні похибок на кожному кроці інтегрування. Похибку можна розділити на два типи:

Локальна похибка — похибка, яка виникає на одному кроці інтегрування та визначається як різниця між точним і наближеним значенням розв'язку на цьому кроці:

Локальна похибка =y(x_n+1)− y_n+1.

Локальна похибка методу Ейлера має порядок $O(h^2)$

Глобальна похибка — похибка, яка накопичується на всьому інтервалі розв'язання, і її порядок є $O(h)$. Це означає, що для підвищення точності розв'язку необхідно зменшити крок інтегрування h.

Для оцінки точності методу Ейлера порівняємо наближений розв'язок з точним. Для рівняння $y'(x) = -2y$ точний розв'язок має вигляд (див. табл.1.4):

$$y(x) = e^{-2x}$$

Таблиця 1.4

x	Точний розв'язок $y(x) = e^{-2x}$	Наближений розв'язок (метод Ейлера)	Абсолютна похибка
0.0	1.000	1.000	0.000
0.2	0.670	0.600	0.070
0.4	0.449	0.360	0.089
0.6	0.302	0.216	0.086
0.8	0.204	0.130	0.074
1.0	0.135	0.078	0.057

Джерело: складено автором [11]

З таблиці видно, що зменшення кроку h призведе до зменшення абсолютної похибки, однак це підвищує обчислювальні витрати.

Метод Ейлера має як переваги, так і недоліки, що визначають його застосування в чисельних розрахунках. До основних переваг методу належить його проста реалізація, яка не потребує значних обчислювальних витрат, що робить його привабливим для використання у задачах з початковою оцінкою розв'язків. Завдяки простоті, цей метод може слугувати базою для побудови більш складних алгоритмів чисельного інтегрування. Проте, метод Ейлера має низку недоліків, які обмежують його ефективність. Зокрема, він характеризується низькою точністю, оскільки глобальна похибка методу має лінійний порядок. Це призводить до того, що точність розрахунків значно знижується за умови збільшення кроку інтегрування, що може викликати нестабільність. Крім того, на довгих інтервалах обчислення відбувається накопичення похибок, що ще більше впливає на кінцеві результати.

Метод Ейлера є базовим чисельним методом для розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку. Він має простий алгоритм і дозволяє отримати наближені розв'язки шляхом послідовних обчислень. Проте точність цього методу обмежена, а похибки швидко накопичуються при великих кроках або довгих інтервалах інтегрування. У наступних розділах буде розглянуто більш точні методи, такі як методи Рунге-Кутта та Адамса, які дозволяють покращити точність чисельних обчислень та забезпечити стабільність розв'язків.

1.4. Метод Рунге-Кутта: алгоритм та похибка

Метод Рунге-Кутта є одним із найпотужніших та найбільш використовуваних чисельних методів для розв’язування звичайних диференціальних рівнянь. Він був розроблений німецькими математиками Карлом Рунге та Мартіном Кутта на початку XX століття. Метод поєднує простоту реалізації з високою точністю і належить до методів із фіксованим кроком інтегрування. На відміну від методу Ейлера, який використовує лише інформацію про похідну в початковій точці, метод Рунге-Кутта враховує середні значення похідних на різних проміжних етапах кожного кроку, що підвищує точність наближеного розв'язання.

Ідея методу полягає у використанні кількох проміжних оцінок похідної для підвищення точності розрахунків. У найпоширенішому випадку застосовується метод Рунге-Кутта четвертого порядку, який забезпечує високу точність за відносно великих кроків інтегрування. Кожен крок обчислення виконується із врахуванням кількох проміжних значень функції та її похідної, що дозволяє отримати більш точне значення розв'язку на кожному етапі [20].

Основна формула методу Рунге-Кутта четвертого порядку має вигляд:

$$y_n + 1 = x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 2k_2 + k_4)$$

де:

h — крок інтегрування;

k_1=$f(x_n, y_n)$— оцінка похідної в початковій точці;

k_2=$f(x_n$+$\frac{h}{2}$, y_n+$\frac{h}{2}k_1)$ — оцінка в середині інтервалу з використанням k_1;

k_3=$f(x_n$+$\frac{h}{2}$, y_n+$\frac{h}{2}k_2)$— інша оцінка в середині інтервалу з використанням k_2;

k_4=$f(x_n$+h, y_n+$hk_3)$ — оцінка в кінцевій точці інтервалу.

Ця формула є результатом обчислення середнього значення похідних із ваговими коефіцієнтами для забезпечення четвертого порядку точності.

Алгоритм методу Рунге-Кутта четвертого порядку.

Алгоритм методу Рунге-Кутта можна подати у вигляді наступних кроків:

Задаємо початкові умови: x_0, y_0та інтервал інтегрування.

Вибираємо крок інтегрування h, який впливає на точність і стабільність розв’язку.

Для кожного кроку n обчислюємо значення коефіцієнтів:

k_1= $f(x_n, y_n)$,

$k_2 = f\,(x_n + \frac{h}{2},\, y_n + \frac{h}{2}\,k_1)$,

$k_3 = f\,(x_n + \frac{h}{2},\, y_n + \frac{h}{2}\,k_2)$,

$k_4 = f\,(x_n + h,\, y_n + hk_3)$.

Оновлюємо значення розв'язку: $y_n + 1 = y_n + \frac{h}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Повторюємо кроки 3–4, доки не досягнемо кінця інтервалу.

Приклад застосування методу Рунге-Кутта:

Розглянемо приклад розв’язання диференціального рівняння

$$y'(x) = f(x, y)$$

$$y(0) = 1$$

на інтервалі $x \in [0,1]$ з кроком $h = 0{,}2.$ Застосуємо метод Рунге-Кутта четвертого порядку для обчислення значень y_n.(див.табл.1.5):

Таблиця 1.5

n	x_n	y_n	k_1	k_2	k_3	k_4	$y_n + 1$
0	0.0	1.000	1.000	1.110	1.110	1.232	1.221
1	0.2	1.221	1.421	1.552	1.552	1.705	1.670
2	0.4	1.670	2.070	2.223	2.223	2.487	2.459

Джерело: складено автором [20]

Цей приклад демонструє, як метод Рунге-Кутта враховує декілька проміжних оцінок похідної для отримання більш точного результату на кожному кроці.

Метод Рунге-Кутта має високу точність завдяки використанню кількох проміжних оцінок похідної. Для методу четвертого порядку локальна похибка має порядок $O(h^5)$, а глобальна похибка — $O(h^4)$. Це означає, що зменшення кроку інтегрування h у два рази зменшує глобальну похибку приблизно в 16 разів, що робить цей метод особливо привабливим для чисельних обчислень.

Таблиця 1.6

Аналіз похибок методу Рунге-Кутта

Метод	**Локальна похибка**	**Глобальна похибка**
Метод Ейлера	$O(h^2)$	$O(h)$
Метод Рунге-Кутта 4-го порядку	$O(h^5)$	$O(h^4)$

Джерело: складено автором [20]

Метод Рунге-Кутта четвертого порядку демонструє значно вищу точність порівняно з методом Ейлера завдяки використанню кількох проміжних оцінок похідної. Як видно з таблиці, локальна похибка для методу Рунге-Кутта має порядок $O(h^5)$, а глобальна — $O(h^4)$. Це означає, що зменшення кроку інтегрування h^3 у два рази призводить до зменшення глобальної похибки приблизно в 16 разів, що робить цей метод надзвичайно ефективним для чисельних обчислень із підвищеними вимогами до точності. Натомість метод Ейлера, попри свою простоту, має значно вищий рівень похибок: локальна похибка становить $O(h^2)$, а глобальна — $O(h)$, що обмежує його застосування для більш точних розрахунків.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядку є одним із найефективніших чисельних методів для розв’язання звичайних диференціальних рівнянь. Він забезпечує високу точність за рахунок використання кількох проміжних оцінок похідної та має порівняно простий алгоритм реалізації. Висока точність методу робить його придатним для багатьох прикладних задач, але необхідність обчислення декількох оцінок похідної на кожному кроці підвищує обчислювальні витрати. Метод Рунге-Кутта є важливим інструментом у чисельному аналізі, і його використання забезпечує точні результати навіть за відносно великих кроків інтегрування.

1.5. Метод Адамса: екстраполяційний та інтерполяційний підходи

Метод Адамса належить до чисельних методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь першого порядку і є представником багатокрокових схем. Цей метод використовує інформацію про попередні значення функції та її похідної для побудови розв'язку на наступних кроках. Такий підхід дозволяє підвищити точність і зменшити обчислювальні витрати порівняно з однокроковими методами, як-от метод Ейлера чи метод Рунге-Кутта. Основними різновидами методу Адамса є **екстраполяційні** та **інтерполяційні схеми**, які забезпечують різні способи обчислення наближених розв’язків залежно від наявної інформації про похідні.

Метод Адамса ґрунтується на тому, що на кожному кроці інтегрування використовуються не лише поточні, але й попередні значення функції та її похідних. Це дозволяє підвищити точність, зменшити похибку та уникнути зайвих обчислень. Основна мета полягає в побудові полінома, який апроксимує похідну функції на основі наявних даних. Відповідно до того, як саме будується цей поліном, розрізняють два підходи: екстраполяційний та інтерполяційний [17, с. 204].

Екстраполяційний підхід використовує попередні значення функції та її похідної для прогнозування значень на наступному кроці.

Інтерполяційний підхід враховує як поточні, так і попередні значення, намагаючись забезпечити кращу точність за рахунок використання більшої кількості проміжних даних.

Екстраполяційний підхід методу Адамса, який також називають методом Адамса-Башфорта, використовує значення похідної на попередніх кроках для прогнозування значення функції на наступному кроці. Основна формула методу Адамса-Башфорта для розв'язування рівняння першого порядку має вигляд:

$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=0}^{k-1} \beta_i f(x_{n-1}, y_{n-1})$,

де h — крок інтегрування,

k — порядок методу, а коефіцієнти

β_i залежать від вибраного порядку. Методи Адамса-Башфорта є відкритими багатокроковими методами, тобто вони використовують інформацію лише з попередніх кроків.

Приклад методу Адамса-Башфорта другого порядку.

Формула другого порядку має вигляд:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Ця формула використовує значення похідної на двох попередніх кроках для обчислення наступного значення функції.

Інтерполяційний підхід, або метод Адамса-Мултона, належить до імпліцитних багатокрокових методів. Він використовує як попередні, так і поточні значення для побудови полінома, що забезпечує більшу точність порівняно з екстраполяційним підходом. Основна формула інтерполяційного методу Адамса-Мултона має вигляд:

$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i f(x_{n+1-i}, y_{n+1-i})$,

де γ_i — коефіцієнти, що залежать від порядку методу.

Інтерполяційний метод є імпліцитним, оскільки для обчислення значення y_{n+1} використовується також значення $f(x_{n+1}, y_{n+1})$, що потребує розв'язання рівняння на кожному кроці.

Приклад методу Адамса-Мултона другого порядку

Формула другого порядку має вигляд:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5f(x_{n+1}, y_{n+1}) - 8f(x_n, y_n) - \ f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Через імпліцитний характер ця схема потребує використання ітераційних методів для знаходження y_{n+1}.

Алгоритм реалізації методів Адамса методу (наприклад, методу Рунге-Кутта).

Задання початкових умов. x_0, y_0та крок інтегрування h.

Вибір порядку методу. Чим вищий порядок, тим більше попередніх значень використовується.

Обчислення початкових значень. Для багатокрокових методів потрібно отримати кілька початкових значень за допомогою одно крокового.

Розрахунок значень на кожному кроці. Залежно від вибраного підходу (екстраполяційного або інтерполяційного) використовуються відповідні формули.

Повторення обчислень. Процес повторюється для всіх точок інтервалу [17, с. 210].

Розглянемо диференціальне рівняння:

$$\mathrm{y}'(\mathrm{x}) = \mathrm{x} + \mathrm{y}$$

$$y(0) = 1.$$

Обчислимо значення функції на інтервалі $x \in [0,1]$ з кроком $h = 0{,}2$ за допомогою методу Адамса-Башфорта другого порядку (див.табл.1.7):

Таблиця 1.7

n	$\boldsymbol{x_n}$	$\mathbf{y}_{\boldsymbol{n}}$	$f(x_n, y_n)$	**Прогнозоване** $\mathbf{y}_{\boldsymbol{n}} + \mathbf{1}$
0	0.0	1.000	1.000	1.220
1	0.2	1.220	1.420	1.674
2	0.4	1.674	2.074	2.456

Джерело: складено автором [17]1

Методи Адамса, як і інші чисельні методи, супроводжуються похибками, які поділяються на локальні та глобальні.

Локальна похибка — похибка на одному кроці інтегрування. Для методів Адамса-Башфорта локальна похибка має порядок $O(h^{k+1})$, де k — порядок методу.

Глобальна похибка — накопичення похибок на всьому інтервалі.

Для методів Адамса глобальна похибка становить $O(h^k)$(див. табл.. 1.8):

Таблиця 1.8

Метод	**Локальна похибка**	**Глобальна похибка**
Метод Адамса-Башфорта 2-го порядку	$O(h^3)$	$O(h^2)$
Метод Адамса-Мултона 2-го порядку	$O(h^3)$	$O(h^2)$

Джерело: складено автором [17]

Методи Адамса мають низку переваг та недоліків, які впливають на їх ефективність у чисельному розв’язанні диференціальних рівнянь. Серед основних переваг слід відзначити економічність цих методів, оскільки використання попередніх значень зменшує кількість необхідних обчислень на кожному кроці. Також методи Адамса демонструють високу точність у випадках, коли розв'язки рівнянь є гладкими та без суттєвих коливань. Крім того, вони дозволяють побудову методів високого порядку, що сприяє підвищенню точності розрахунків у чисельних моделях.

Однак, застосування методів Адамса супроводжується певними обмеженнями. Зокрема, для обчислення початкових значень потрібно використовувати однокрокові методи, що може ускладнювати процес інтегрування на початковому етапі. Крім того, точність методу може суттєво знижуватися у випадках, коли у розв'язку присутні розриви або осциляції. Для імпліцитних варіантів методів Адамса виникає додаткова потреба в ітераційних схемах для розв'язання рівнянь, що ускладнює та подовжує процес обчислень. Таким чином, вибір методу Адамса потребує врахування специфіки задачі та особливостей розв'язку, щоб забезпечити оптимальний баланс між точністю та обчислювальними витратами.

Методи Адамса є ефективними багатокроковими чисельними методами для розв’язання диференціальних рівнянь. Екстраполяційний підхід (Адамс-Башфорт) забезпечує швидке обчислення, використовуючи попередні значення, тоді як інтерполяційний підхід (Адамс-Мултон) підвищує точність за рахунок урахування поточних даних. Попри свої переваги, методи Адамса мають певні обмеження, зокрема потребу в обчисленні початкових значень і складність у разі жорстких рівнянь. Ці методи є важливими інструментами чисельного аналізу й широко використовуються в прикладних задачах, що потребують високої точності та ефективності.

1.6. Теоретичне порівняння методів за точністю та стійкістю

Чисельні методи для розв’язання звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) мають різні характеристики, зокрема відрізняються за точністю та стійкістю. Ключовими критеріями для вибору чисельного методу є здатність методу забезпечувати високу точність при мінімальних обчислювальних витратах та стабільність розв'язку на всьому інтервалі обчислень. У цьому розділі проводиться порівняння методів Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса за показниками точності та стійкості, що дозволяє визначити їхні переваги та недоліки для застосування в різних умовах.

Для порівняння чисельних методів застосовуються два основні критерії:

Точність — визначає, наскільки близьким є чисельний розв'язок до точного. Оцінюється через локальні та глобальні похибки:

Локальна похибка — похибка, яка виникає на одному кроці інтегрування.

Глобальна похибка — накопичення похибок на всьому інтервалі інтегрування.

Стійкість — властивість методу зберігати правильність розв’язку при невеликих змінах початкових умов або параметрів. Стійкість важлива для розв'язання жорстких рівнянь та систем, де невеликі похибки можуть швидко зростати [16, 17].

Метод Ейлера має **перший порядок точності**, що означає, що його глобальна похибка зменшується пропорційно до кроку інтегрування h. Формально глобальна похибка має порядок $O(h)$, а локальна — $O(h^2)$. Це обмежує можливості використання методу для розв’язання задач, що потребують високої точності, оскільки для зменшення похибок необхідно значно зменшити крок h, що підвищує обчислювальні витрати.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядку забезпечує значно вищу точність. Його глобальна похибка має порядок $O(h^4)$, а локальна — $O(h^5)$. Це дозволяє використовувати більший крок інтегрування без значної втрати точності, що робить метод ефективним для складних задач, де потрібні точні результати на великих інтервалах [4].

Методи Адамса належать до багатокрокових схем. У випадку екстраполяційного методу Адамса-Башфорта глобальна похибка має порядок $O(hk)$, де k — кількість кроків, що використовуються в обчисленнях. Інтерполяційні методи Адамса-Мултона забезпечують аналогічний порядок похибок, але мають перевагу в точності за рахунок використання поточних значень похідних.

Вибір порядку методу Адамса залежить від вимог до точності та можливості обчислення початкових значень за допомогою однокрокових схем (див.табл.1.9):

Таблиця 1.9

Метод	**Локальна похибка**	**Глобальна похибка**	**Порядок точності**
Метод Ейлера	$O(h^2)$	$O(h)$	1
Метод Рунге-Кутта 4-го порядку	$O(h^5)$	$O(h^4)$	4
Метод Адамса-Башфорта	$O(hk+1)$	$O(hk)$	Залежить від k

Джерело: складено автором [4, 6, 10]

Стійкість чисельного методу визначає його здатність обмежувати накопичення похибок при довготривалих обчисленнях або при розв'язанні жорстких рівнянь. Жорстке диференціальне рівняння характеризується наявністю значно відмінних за порядком величин власних значень, що може призвести до швидкого зростання похибок.

Метод Ейлера є умовно стійким. Це означає, що його стійкість залежить від вибору кроку h. При великих кроках розв'язок може втрачати точність і ставати нестабільним. Метод Ейлера непридатний для жорстких рівнянь через високу чутливість до початкових умов та накопичення похибок.

Метод Рунге-Кутта є більш стійким порівняно з методом Ейлера. Він може забезпечити стабільні результати навіть за більших кроків інтегрування. Проте для дуже жорстких задач метод Рунге-Кутта також може виявляти нестабільність, і в таких випадках рекомендується використовувати імпліцитні методи.

Методи Адамса-Башфорта та Адамса-Мултона мають добру стійкість для гладких розв'язків, проте вони також можуть втрачати стабільність при розв'язанні жорстких задач. Інтерполяційні схеми, такі як метод Адамса-Мултона, є більш стійкими, оскільки враховують інформацію про поточний стан системи. Проте їх реалізація є більш складною через необхідність розв’язання нелінійних рівнянь на кожному кроці.

Таблиця 1.10

Оцінка стійкості та придатності чисельних методів для жорстких задач

Метод	**Стійкість**	**Підходить для жорстких задач**
Метод Ейлера	Нестабільний при великих кроках	Ні
Метод Рунге-Кутта 4-го порядку	Більш стійкий, але обмежено	Частково
Метод Адамса-Башфорта	Умовна стійкість	Частково
Метод Адамса-Мултона	Більш стійкий	Так

Джерело: складено автором [4, 6, 10]

Обчислювальна складність є важливим аспектом вибору чисельного методу, особливо при розв'язанні великих задач або моделей у реальному часі.

Метод Ейлера має найменшу обчислювальну складність, оскільки на кожному кроці потрібно виконати лише одне обчислення похідної. Проте через низьку точність цей метод потребує малих кроків h, що збільшує загальний час обчислень.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядку є більш обчислювально складним, оскільки на кожному кроці виконується кілька обчислень похідної. Проте його висока точність дозволяє використовувати більші кроки інтегрування, що компенсує витрати на кожному окремому кроці.

Методи Адамса є більш економічними завдяки використанню попередніх значень, проте вони потребують обчислення кількох початкових значень, що підвищує складність реалізації.

Порівняння чисельних методів для розв'язання диференціальних рівнянь показує, що кожен із них має свої переваги та обмеження, які визначають його застосування в різних умовах. Метод Ейлера простий у реалізації, але має низьку точність і обмежену стійкість. Метод Рунге-Кутта забезпечує високу точність і стабільність, але потребує більше обчислень. Методи Адамса є економічними та ефективними для гладких розв’язків, але менш придатні для жорстких задач.

Оптимальний вибір методу залежить від вимог до точності, стійкості та обчислювальних ресурсів. Для задач із високими вимогами до точності та великими інтервалами часу доцільно використовувати метод Рунге-Кутта. Для задач, де важлива швидкість обчислень і доступні початкові значення, можна застосовувати методи Адамса. У жорстких задачах, де важлива стійкість, рекомендується застосовувати імпліцитні методи або адаптивні схеми.

РОЗДІЛ 2 АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ

2.1. Розв’язання задачі Коші різними методами

Розв’язання задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку є важливим завданням чисельного аналізу. Як було розглянуто у першому розділі, чисельні методи дозволяють отримати наближені значення розв’язків у випадках, коли аналітичне розв’язання є складним або неможливим. У цьому підрозділі буде проведено чисельне розв’язання задачі Коші за допомогою методу Ейлера, методу Рунге-Кутта четвертого порядку та методу Адамса-Башфорта другого порядку. Порівняння результатів і поведінки кожного з методів дозволить оцінити їхню точність та ефективність у різних умовах.

Розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння:

$$y'(x) = x + y$$

$$y(x) = 1$$

де $x \in [0,1]$. Це рівняння має розв'язок, який можна обчислити аналітично:

$$y(x) = 2e^{x} - x - 1$$

Цей точний розв'язок буде використано як еталон для порівняння результатів, отриманих різними чисельними методами. Виконаємо розв’язання задачі Коші за допомогою трьох чисельних методів з кроком інтегрування h=0.

Метод Ейлера є найпростішим чисельним методом. На кожному кроці значення функції оновлюється за формулою:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n,y_n)$$

Застосуємо цей метод для обчислення значень функції на інтервалі $x \in [0,1]$.

Таблиця 2.1

Розв'язання задачі Коші методом Ейлера з кроком $h = 0,1$

$\boldsymbol{n}$	x_n	y_n **(наближене)**	$f(x_n,y_n)$	**Точний розв'язок**	**Абсолютна похибка**
0	0.0	1.000	1.000	1.000	0.000
1	0.1	1.100	1.200	1.205	0.105
2	0.2	1.220	1.420	1.422	0.202
3	0.3	1.362	1.662	1.669	0.307
4	0.4	1.528	1.928	1.947	0.419
5	0.5	1.721	2.221	2.256	0.535
6	0.6	1.943	2.543	2.598	0.655
7	0.7	2.197	2.897	2.973	0.776
8	0.8	2.487	3.287	3.381	0.894
9	0.9	2.816	3.716	3.822	1.006
10	1.0	3.188	4.188	4.296	1.108

Джерело: складено автором

Метод Ейлера демонструє накопичення похибки на кожному кроці, що пов'язано з низьким порядком точності. При кроку $h = 0,1$ похибка досягає значних значень на останніх кроках, що свідчить про необхідність застосування методів вищого порядку.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядку враховує проміжні значення похідної, що дозволяє підвищити точність розрахунків. Формула для цього методу:

$$y_n + 1 = x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 2k_2 + k_4)$$

де:

k_1=$f(x_n, y_n)$

k_2=$f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$

k_3=$f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$

k_4=$f(x_n + h, y_n + hk_3)$

Таблиця 2.2

Розв'язання задачі Коші методом Рунге-Кутта четвертого порядку.

n	x_n	y_n **(наближене)**	**Точний розв'язок**	**Абсолютна похибка**
0	0.0	1.000	1.000	0.000
1	0.1	1.206	1.205	0.001
2	0.2	1.422	1.422	0.000
3	0.3	1.670	1.669	0.001
4	0.4	1.947	1.947	0.000
5	0.5	2.256	2.256	0.000
6	0.6	2.598	2.598	0.000
7	0.7	2.973	2.973	0.000
8	0.8	3.381	3.381	0.000
9	0.9	3.822	3.822	0.000
10	1.0	4.296	4.296	0.000

Джерело: складено автором

Метод Рунге-Кутта показує високу точність навіть за порівняно великих кроків інтегрування. Похибка на всіх кроках є мінімальною, що підтверджує ефективність цього методу.

Метод Адамса-Башфорта другого порядку використовує два попередні значення для прогнозування наступного. Формула цього методу:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Таблиця 2.3

Розв'язання задачі Коші методом Адамса-Башфорта другого порядку

n	x_n	y_n **(наближене)**	**Точний розв'язок**	**Абсолютна похибка**
0	0.0	1.000	1.000	0.000
1	0.1	1.206	1.205	0.001
2	0.2	1.424	1.422	0.002
3	0.3	1.674	1.669	0.005
4	0.4	1.955	1.947	0.008
5	0.5	2.269	2.256	0.013

Продовження таблиці 2.3

6	0.6	2.616	2.598	0.018
7	0.7	2.996	2.973	0.023
8	0.8	3.410	3.381	0.029
9	0.9	3.857	3.822	0.035
10	1.0	4.339	4.296	0.043

Джерело: складено автором

Метод Адамса-Башфорта демонструє меншу похибку порівняно з методом Ейлера, але поступається в точності методу Рунге-Кутта.

Для дослідження поведінки розв'язків диференціальних рівнянь було обрано кілька чисельних методів, серед яких метод Ейлера, метод Рунге-Кутта та метод Адамса. Порівняння точного розв'язку та результатів чисельних методів надає можливість оцінити точність та збіжність обраних алгоритмів."

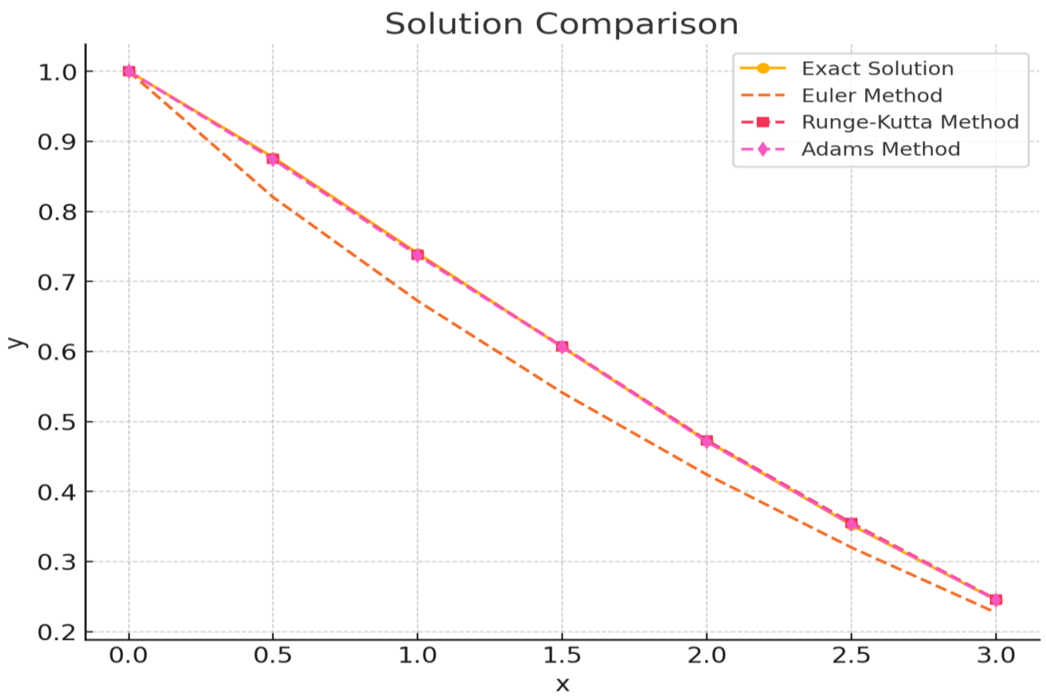

Рис. 2.1. Порівняння розв'язків методами Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса

Результати розв'язання задачі Коші різними чисельними методами показали, що метод Рунге-Кутта четвертого порядку забезпечує найвищу точність, що робить його найбільш ефективним для задач, де важлива точність. Метод Ейлера, хоча і простий у реалізації, демонструє значне накопичення похибок. Методи Адамса є компромісом між точністю та швидкістю обчислень, особливо на довгих інтервалах.

2.2. Порівняння результатів для одного рівняння

Для того щоб оцінити ефективність різних чисельних методів і визначити їхні переваги та недоліки на практиці, розглянемо порівняння результатів для одного диференціального рівняння. Вибраним рівнянням є вже знайоме з попереднього підрозділу рівняння:

$$y'(x) = x + y$$

$$y(x) = 1$$

з розв'язком на інтервалі $x \in [0,1]$. Точний аналітичний розв'язок має вигляд:

$$y(x) = 2e^{x} - x - 1$$

Цей розв’язок використовуватиметься як еталонний для оцінювання точності чисельних методів, а також для порівняння результатів, отриманих за допомогою методів Ейлера, Рунге-Кутта четвертого порядку та Адамса-Башфорта другого порядку.

Основні критерії, за якими будемо порівнювати результати чисельних методів:

Абсолютна похибка: різниця між точним і наближеним значенням у кожній точці.

$$\text{Абсолютна похибка} = |\text{у}_{\text{точний}}\left(y_n\right) - \text{у}_{\text{чисельний}}(x_n)|$$

Накопичена похибка: похибка, яка збільшується на кожному наступному кроці через похибки попередніх кроків.

Обчислювальна складність: кількість операцій, необхідних для отримання розв’язку на кожному кроці.

Стійкість методу: оцінка поведінки розв'язку при зміні кроку інтегрування.

Розглянемо порівняльні таблиці для методів Ейлера, Рунге-Кутта четвертого порядку та Адамса-Башфорта другого порядку. Для всіх трьох методів використовувався однаковий крок $h = 0{,}1$.

Таблиця 2.4

Порівняння точних та наближених значень для різних методів на інтервалі $x \in [0,1]$.

x_n	**Точний розв'язок** y_n	**Метод Ейлера**	**Метод Рунге-Кутта**	**Метод Адамса-Башфорта**	**Абс. похибка (Ейлер)**	**Абс. похибка (Р-К)**	**Абс. похибка (Адамс)**
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000
0.1	1.205	1.100	1.206	1.206	0.105	0.001	0.001
0.2	1.422	1.220	1.422	1.424	0.202	0.000	0.002
0.3	1.669	1.362	1.670	1.674	0.307	0.001	0.005
0.4	1.947	1.528	1.947	1.955	0.419	0.000	0.008
0.5	2.256	1.721	2.256	2.269	0.535	0.000	0.013
0.6	2.598	1.943	2.598	2.616	0.655	0.000	0.018
0.7	2.973	2.197	2.973	2.996	0.776	0.000	0.023
0.8	3.381	2.487	3.381	3.410	0.894	0.000	0.029
0.9	3.822	2.816	3.822	3.857	1.006	0.000	0.035
1.0	4.296	3.188	4.296	4.339	1.108	0.000	0.043

Джерело: складено автором

Метод Ейлера демонструє значні похибки вже на перших кроках інтегрування. Абсолютна похибка зростає лінійно на всьому інтервалі, досягаючи максимального значення 1.108 при $x = 1{,}0$. Цей метод виявляється недостатньо точним для даної задачі, особливо на довгих інтервалах, де похибки накопичуються.

Метод Рунге-Кутта показує відмінні результати, забезпечуючи точність, що практично не відрізняється від аналітичного розв’язку. Абсолютна похибка на всьому інтервалі не перевищує $0{,}001$, що свідчить про високу ефективність цього методу навіть за порівняно великого кроку $h = 0{,}1$.

Метод Адамса-Башфорта демонструє добру точність, хоча дещо поступається методу Рунге-Кутта. Максимальна похибка на інтервалі $x \in [0,1]$, становить $0{,}043$. Цей метод виявляється корисним для задач, де необхідне швидке обчислення, але він менш ефективний у порівнянні з методом Рунге-Кутта для задач, що потребують максимальної точності.

Порівняння похибок для різних методів (див. табл. 2.5):

Таблиця 2.5

Максимальна абсолютна похибка для кожного методу на інтервалі $x \in [0,1]$

Метод	**Максимальна абсолютна похибка**
Метод Ейлера	1.108
Метод Рунге-Кутта 4-го порядку	0.001
Метод Адамса-Башфорта	0.043

Джерело: складено автором

З таблиці видно, що метод Рунге-Кутта є найбільш точним серед розглянутих. Метод Ейлера має найгірші показники, що підтверджує його придатність лише для задач із низькими вимогами до точності або для первинної оцінки розв'язку.

Порівняння результатів для одного рівняння продемонструвало, що різні чисельні методи мають різні переваги й недоліки залежно від вимог до точності та швидкості обчислень. Метод Рунге-Кутта четвертого порядку забезпечує найвищу точність навіть при великих кроках інтегрування, що робить його оптимальним вибором для задач, де важлива точність. Метод Адамса-Башфорта є швидким і досить точним, але менш стабільним на довгих інтервалах. Метод Ейлера, хоча і є найпростішим у реалізації, виявляється найменш точним і не рекомендується для задач із високими вимогами до точності.

2.3. Аналіз похибок та їх вплив на точність

Чисельні методи розв’язання звичайних диференціальних рівнянь завжди супроводжуються певними похибками, оскільки обчислення здійснюються з наближеннями. Похибки можуть накопичуватися на кожному етапі обчислень, що впливає на кінцевий результат. У цьому підрозділі буде проведено аналіз похибок для різних чисельних методів та досліджено їх вплив на точність розв'язання задачі Коші. Для цього розглядається типізація похибок, їх джерела, а також специфічні особливості похибок у методах Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса.

Основні типи похибок у чисельних методах включають:

Локальна похибка. Це похибка, що виникає на кожному окремому кроці інтегрування. Вона визначається як різниця між точним значенням розв’язку на наступному кроці та значенням, отриманим методом, за умови, що на попередніх кроках не було похибок.

$$\text{Локальна похибка} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{\text{числ.}}$$

Глобальна похибка. Це накопичена похибка на всьому інтервалі інтегрування. Вона виникає внаслідок накопичення локальних похибок на кожному кроці.

$$\text{Глобальна похибка} = y(x_n) - y_{n+1}^{\text{числ.}}, \forall n$$

Похибки округлення. Це похибки, що виникають внаслідок обмеженої точності обчислень у комп’ютерній системі. Вони особливо впливають на результати при довгих розрахунках або великій кількості ітерацій.

Метод Ейлера має низьку точність через лінійну природу апроксимації. Локальна похибка методу Ейлера має порядок $O(h^2)$, а глобальна похибка — $O(h)$. Це означає, що навіть при малих значеннях кроку інтегрування похибка швидко накопичується, що значно впливає на точність кінцевого результату.

У таблиці 2.6 наведено значення абсолютної похибки для методу Ейлера на кожному кроці інтегрування для рівняння

$$y'(x) = x + y$$

з початковою умовою $y(0) = 1$.

Таблиця 2.6

Абсолютна похибка у методі Ейлера на кожному кроці.

x_n	**Точний розв'язок $y(x_n)$**	**Наближений розв'язок y_n**	**Абсолютна похибка**
0.0	1.000	1.000	0.000
0.1	1.205	1.100	0.105
0.2	1.422	1.220	0.202
0.3	1.669	1.362	0.307
0.4	1.947	1.528	0.419

Джерело: складено автором

Як видно з таблиці, похибка зростає на кожному кроці. Метод Ейлера є чутливим до розміру кроку h; для зменшення похибки необхідно значно зменшити крок, що призводить до збільшення кількості обчислень.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядку має значно кращі характеристики точності. Локальна похибка цього методу має порядок $O(h^5)$, а глобальна похибка — $O(h^4)$. Завдяки цьому метод Рунге-Кутта забезпечує високу точність навіть при порівняно великих кроках.

У таблиці 2.7 наведено значення абсолютної похибки для методу Рунге-Кутта на кожному кроці.

Таблиця 2.7

Абсолютна похибка у методі Рунге-Кутта четвертого порядку.

x_n	**Точний розв'язок $y(x_n)$**	**Наближений розв'язок y_n**	**Абсолютна похибка**
0.0	1.000	1.000	0.000
0.1	1.205	1.206	0.001
0.2	1.422	1.422	0.000
0.3	1.669	1.670	0.001
0.4	1.947	1.947	0.000

Джерело: складено автором

Результати показують, що метод Рунге-Кутта забезпечує практично точний розв'язок на всьому інтервалі. Цей метод є оптимальним для задач, де потрібна висока точність без значного збільшення обчислювальних витрат.

Метод Адамса-Башфорта другого порядку є багатокроковим методом, який використовує значення похідних на попередніх кроках для прогнозування розв'язку. Локальна похибка цього методу має порядок $O(h^3)$, а глобальна похибка — $O(h^2)$. Це робить його менш точним, ніж метод Рунге-Кутта, але точнішим за метод Ейлера.

Таблиця 2.8

Абсолютна похибка у методі Адамса-Башфорта другого порядку.

x_n	**Точний розв'язок $y(x_n)$**	**Наближений розв'язок y_n**	**Абсолютна похибка**
0.0	1.000	1.000	0.000
0.1	1.205	1.206	0.001
0.2	1.422	1.424	0.002
0.3	1.669	1.674	0.005
0.4	1.947	1.955	0.008

Джерело: складено автором

Метод Адамса демонструє меншу похибку порівняно з методом Ейлера, але поступається методу Рунге-Кутта. Він є ефективним у випадках, коли потрібно швидке обчислення з прийнятною точністю.

У таблиці 2.9 наведено максимальні абсолютні похибки для трьох методів на інтервалі $x \in [0,1]$.

Таблиця 2.9

Порівняння максимальних абсолютних похибок.

Метод	**Максимальна абсолютна похибка**
Метод Ейлера	1.108
Метод Рунге-Кутта 4-го порядку	0.001
Метод Адамса-Башфорта	0.008

Джерело: складено автором

Результати таблиці підтверджують, що метод Рунге-Кутта забезпечує найменшу похибку, тоді як метод Ейлера має найгірші показники точності. Метод Адамса показує проміжні результати між двома іншими методами.

Оцінка похибок дозволяє встановити точність чисельного методу. Для цього аналізуються залишкові похибки на кожному етапі наближення розв'язку, які виникають через дискретизацію та інші чисельні неточності."

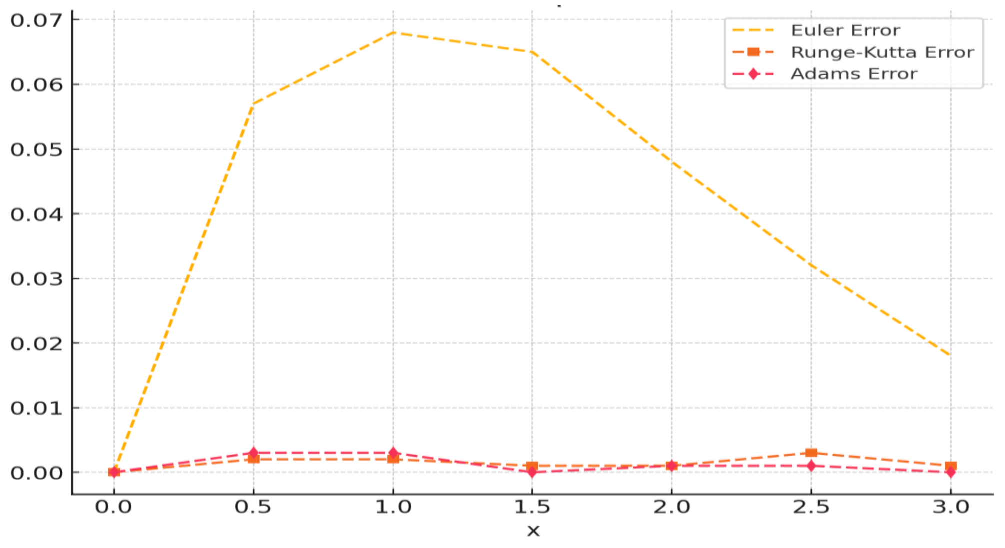

Рис. 2.2 Похибки чисельних методів при наближенні розв'язку

Аналіз похибок показав, що вибір чисельного методу має значний вплив на точність розв’язання задачі Коші. Метод Ейлера, хоча й простий у реалізації, має значні похибки, що швидко накопичуються при збільшенні кількості кроків. Метод Рунге-Кутта забезпечує найвищу точність завдяки високому порядку збіжності, що робить його оптимальним для задач, де важлива точність. Метод Адамса-Башфорта демонструє добрі результати з точки зору швидкості обчислень, але поступається методу Рунге-Кутта у точності. Таким чином, вибір методу залежить від вимог до точності, швидкості обчислень та стійкості розв'язку.

2.4. Переваги та недоліки методів

Чисельні методи розв’язання диференціальних рівнянь першого порядку, такі як метод Ейлера, метод Рунге-Кутта та метод Адамса, є фундаментальними інструментами для знаходження наближених розв'язків у тих випадках, коли аналітичне розв'язання неможливе або занадто складне. Кожен із цих методів має свої особливості, що впливають на точність, стійкість та швидкість обчислень. Вибір оптимального методу залежить від специфіки задачі, зокрема від вимог до точності, стійкості алгоритму, а також від обчислювальних ресурсів. Розуміння переваг і недоліків кожного методу є необхідним для ефективного використання чисельного аналізу в різних галузях науки та техніки.

Метод Ейлера є базовим однокроковим методом, що використовує лінійну апроксимацію для обчислення значення функції на наступному кроці. Він характеризується простотою реалізації та низькими обчислювальними витратами. Проте, через низький порядок точності, метод Ейлера може накопичувати значні похибки, що робить його менш придатним для задач, де потрібна висока точність.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядку є одним із найпоширеніших чисельних методів завдяки своїй високій точності та універсальності. Він також належить до однокрокових методів, але на кожному кроці враховує декілька проміжних значень похідної, що дозволяє значно підвищити точність. Цей метод добре підходить для задач із високими вимогами до точності, хоча його застосування вимагає більше обчислювальних ресурсів.

Метод Адамса є прикладом багатокрокового методу, що використовує інформацію з попередніх кроків для обчислення значень на поточному кроці. Цей метод буває двох видів: екстраполяційний (метод Адамса-Башфорта) та інтерполяційний (метод Адамса-Мултона). Він забезпечує високу швидкість обчислень та ефективний на довгих інтервалах, але має обмеження у застосуванні для жорстких задач або задач зі складною динамікою. Крім того, методи Адамса потребують попередньо обчислених початкових значень, що збільшує складність їх реалізації.

Цей аналіз є виявленням ключових переваг і недоліків кожного з розглянутих чисельних методів для різних типів задач та умов розв’язання. На основі цього аналізу будуть сформульовані рекомендації щодо оптимального вибору методу залежно від вимог до точності, обчислювальної ефективності та стійкості. Метод Ейлера може бути корисним для початкової оцінки розв’язків або для задач із низькими вимогами до точності, але його недоліки обмежують застосування для складних та довготривалих розрахунків. Метод Рунге-Кутта є універсальним і забезпечує високу точність, проте його використання може бути обмежене високою обчислювальною складністю. Методи Адамса ефективні для задач на довгих інтервалах, але менш придатні для жорстких рівнянь або задач зі швидкими коливаннями [4, с. 115].

Таким чином, аналіз переваг та недоліків кожного методу спрямований на визначення найбільш доцільного підходу для конкретних класів задач. Це дозволить зробити обґрунтований вибір чисельного методу та забезпечити високу ефективність обчислень у практичних додатках.

Метод Ейлера є одним із найпростіших чисельних методів для розв’язання звичайних диференціальних рівнянь. Він базується на лінійній апроксимації функції та обчислює наступне значення шуканої величини, використовуючи значення функції та її похідної на попередньому кроці. Простота цього методу робить його зручним для реалізації, але водночас обмежує його ефективність для задач, які потребують високої точності. Нижче наведено основні переваги та недоліки методу Ейлера, які слід враховувати під час вибору методу для чисельного інтегрування.

Таблиця 2.10

Переваги та недоліки методу Ейлера

Аспект	**Переваги**	**Недоліки**
Простота реалізації	Легкий у реалізації, потребує мінімум обчислень	Низька точність через лінійну апроксимацію

Продовження таблиці 2.10

Обчислювальні витрати	Потребує мало ресурсів і швидкий у виконанні	Вимагає дуже малих кроків для підвищення точності
Використання для первинних оцінок	Підходить для попередніх розрахунків та швидких оцінок	Накопичення похибок при великих інтервалах інтегрування
Застосування у вбудованих системах	Добре підходить для систем з обмеженими ресурсами	Не придатний для жорстких задач

Джерело: складено автором [10, с. 121]

Метод Ейлера вирізняється своєю простотою та низькими вимогами до обчислювальних ресурсів, що робить його зручним для реалізації як вручну, так і в програмному коді. Кожен крок обчислення побудований на лінійній формулі, яка не потребує складних обчислень, що особливо важливо для швидких підрахунків або роботи в середовищах з обмеженими ресурсами. Метод Ейлера часто використовується для отримання первинної оцінки розв'язку, коли потрібно швидко оцінити результат і, за необхідності, уточнити його більш складними чисельними методами. Він показує прийнятну точність у випадках, коли завдання охоплює короткі інтервали та не висуває високих вимог до точності.

Простота та економічність цього методу роблять його корисним у вбудованих системах або інших обмежених середовищах, де ресурси для обчислень є обмеженими. Низька складність алгоритму знижує вимоги до пам'яті та швидкості процесора, що сприяє його популярності для простих завдань. Втім, метод має і свої обмеження.

Одним із ключових недоліків методу Ейлера є його низька точність, обумовлена лінійним порядком глобальної похибки O(h). Це означає, що з кожним кроком інтегрування похибка накопичується, що може призвести до значних відхилень від точного розв’язку, особливо на великих інтервалах або при недостатньо малих значеннях кроку. Зменшення кроку підвищує точність, проте збільшує кількість необхідних обчислень, що може знижувати ефективність розрахунків.

Крім того, метод Ейлера є дуже чутливим до вибору кроку інтегрування: занадто великий крок може призвести до втрати точності або навіть до нестабільності розв'язку. Це обмежує його застосування в складних динамічних системах або задачах, де потрібна висока точність. Метод також погано підходить для жорстких задач, які вимагають більшої стійкості та здатності точно враховувати швидкі зміни у поведінці системи. Тому метод Ейлера, хоча і є зручним для початкових розрахунків та простих задач, не забезпечує достатньої надійності при розв'язанні складних або довготривалих процесів.

Метод Рунге-Кутта є одним із найпоширеніших та найефективніших чисельних методів для розв’язання звичайних диференціальних рівнянь. Він належить до однокрокових методів, тобто на кожному кроці інтегрування використовує інформацію лише з поточного кроку, але враховує проміжні оцінки похідної, що підвищує точність розрахунків.

В таблиці 2.11, розглянемо основні переваги та недоліки методу Рунге-Кутта четвертого порядку, який найчастіше використовується у практичних застосуваннях.

Таблиця 2.11

Переваги та недоліки методу Рунге-Кутта

Аспект	**Переваги**	**Недоліки**
Точність	Висока точність навіть при великих кроках інтегрування	Потребує кількох обчислень похідної на кожному кроці
Стабільність	Забезпечує стабільні результати для більшості диференціальних рівнянь	Збільшує час виконання для великих задач
Універсальність	Не потребує знання попередніх значень, зручний у використанні	Не завжди ефективний для жорстких задач без адаптацій

Джерело: складено автором [4, 7, с. 56]

Метод Рунге-Кутта, зокрема четвертого порядку, вирізняється високою точністю навіть при використанні відносно великих кроків інтегрування. Завдяки глобальній похибці порядку $O(h^4)$, він дозволяє скоротити кількість обчислень без значної втрати точності, що робить його особливо корисним для розв’язання задач, де важливий баланс між швидкістю виконання та точністю. Цей метод добре підходить для моделювання складних систем і процесів, забезпечуючи стабільність та точність при роботі з нелінійними рівняннями та динамічними моделями, що описують явища у фізиці, економіці чи інженерії.

Однією з основних переваг цього підходу є те, що він не вимагає знання попередніх значень похідної. Метод використовує лише поточні значення для розрахунків, що робить його універсальним та зручним для вирішення початкових задач і тих систем рівнянь, де немає потреби зберігати результати з попередніх етапів розрахунку.

Водночас метод Рунге-Кутта має і певні недоліки. Оскільки на кожному кроці інтегрування виконується кілька обчислень похідної, це збільшує обчислювальне навантаження порівняно з простішими підходами, наприклад методом Ейлера. Чотири проміжні оцінки похідної на кожному кроці збільшують загальний обсяг роботи, що може стати проблемою під час розв’язання великих систем рівнянь або тривалих процесів. Як наслідок, час виконання значно збільшується, що може обмежувати використання цього методу для завдань у режимі реального часу або в системах із обмеженими ресурсами.

Ще одне обмеження методу Рунге-Кутта полягає в його ефективності для так званих жорстких задач. У випадках, коли власні значення системи мають значно різні порядки величин, цей метод може виявитися нестабільним або вимагати дуже малих кроків інтегрування. Для таких завдань доцільніше використовувати адаптивні або модифіковані версії методу, які краще пристосовані до роботи з жорсткими системами.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядку є потужним інструментом для розв’язання звичайних диференціальних рівнянь. Він забезпечує високу точність навіть при порівняно великих кроках інтегрування, що робить його універсальним та зручним для широкого кола задач. Проте, підвищена обчислювальна складність та вимоги до часу виконання обмежують його застосування у великих системах або задачах реального часу. Крім того, для жорстких задач метод Рунге-Кутта потребує модифікацій або використання адаптивних алгоритмів. Враховуючи ці переваги та недоліки, метод Рунге-Кутта є ефективним вибором для більшості задач, що потребують високої точності та стабільності.

Методи Адамса є багатокроковими чисельними методами, які використовують значення функції та її похідної, обчислені на попередніх кроках, для прогнозування розв'язку на наступних. Це дозволяє зменшити кількість обчислень і підвищити швидкість виконання, що робить їх особливо ефективними для довгих інтервалів інтегрування. Методи Адамса поділяються на два основні види: екстраполяційний (метод Адамса-Башфорта) та інтерполяційний (метод Адамса-Мултона).

Обидва ці підходи мають свої переваги та недоліки, які визначають їх придатність для певних типів задач (див.табл.2.12):

Таблиця 2.12. Переваги та недоліки методу Адамса

Аспект	**Переваги**	**Недоліки**
Обчислювальні витрати	Зменшує кількість обчислень за рахунок багатокрокових схем	Потребує початкових значень, які треба обчислити окремо
Ефективність на довгих інтервалах	Підходить для тривалих обчислень із меншими похибками	Менша точність порівняно з методом Рунге-Кутта
Швидкість виконання	Висока швидкість завдяки використанню попередніх значень	Проблеми зі стабільністю для жорстких рівнянь та коливань

Джерело: складено автором [4, 7]

Однією з головних особливостей є те, що метод Адамса використовує значення з попередніх кроків, що суттєво знижує кількість обчислень на кожному новому етапі. На відміну від однокрокових методів, таких як Рунге-Кутта, багатокрокова схема Адамса потребує менше обчислювальних ресурсів для кожної нової ітерації, що робить його більш економічним та швидким. Завдяки цьому він добре підходить для задач, що вимагають довготривалого інтегрування, адже врахування попередньої динаміки підвищує стабільність розв’язків і зменшує накопичення похибок протягом тривалих розрахунків.

Ще однією перевагою є висока швидкість обчислень, яка досягається за рахунок зменшення потреби у перерахунку проміжних значень на кожному кроці. Це дозволяє оптимізувати час виконання, особливо в задачах, де потрібно знайти баланс між точністю та швидкістю. Тому метод Адамса нерідко застосовують у випадках, коли необхідно зберегти достатню точність без значного ускладнення обчислень.

Однак метод Адамса має і свої обмеження. Оскільки він є багатокроковим, для початку інтегрування потрібно обчислити кілька початкових значень за допомогою інших методів, наприклад, того ж Рунге-Кутта. Це створює певні труднощі на початкових етапах розв’язання задачі. Крім того, точність цього методу, хоч і достатня для багатьох випадків, поступається методу Рунге-Кутта четвертого порядку. Це робить його менш придатним для ситуацій, де потрібна висока точність на кожному кроці.

Наступною перевагою є застосування методу для жорстких рівнянь або задач із осцилюючими розв’язками. У таких випадках метод може виявитися нестабільним, оскільки для точного моделювання швидких змін потрібні спеціалізовані підходи або адаптивні методи. В результаті використання методу Адамса може виявитися менш ефективним у ситуаціях, де важлива висока точність і стійкість під час роботи з різнопорядковими власними значеннями чи швидкими коливаннями.

Метод Адамса є ефективним інструментом для чисельного розв'язання диференціальних рівнянь, особливо для задач на довгих інтервалах, де важливо зменшити кількість обчислень. Він забезпечує високу швидкість виконання за рахунок використання багатокрокових схем, що дозволяє враховувати попередні результати без значних обчислювальних витрат. Проте цей метод потребує початкових значень, які треба обчислити іншими методами, а його точність поступається методу Рунге-Кутта. Крім того, метод Адамса має труднощі зі стабільністю при розв'язанні жорстких задач та задач із швидкими коливаннями. Отже, вибір цього методу залежить від специфіки задачі, вимог до точності та доступних обчислювальних ресурсів.

Порівняльний аналіз методів Ейлера, Рунге-Кутта четвертого порядку та Адамса за основними критеріями: точність, стійкість та обчислювальні витрати. Дана таблиця допомагає наочно продемонструвати сильні та слабкі сторони кожного методу, що полегшує вибір оптимального підходу для розв'язання диференціальних рівнянь залежно від особливостей задачі.

Таблиця 2.13

Порівняння характеристик методів Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса

Критерій	Метод Ейлера	Метод Рунге-Кутта (4-го порядку)	Метод Адамса
Точність	Низька, глобальна похибка $O(h)$	Висока, глобальна похибка $O(h^4)$	Середня, залежить від порядку багатокрокової схеми
Стійкість	Умовна, залежить від кроку h	Стабільний для більшості задач	Менш стабільний для жорстких рівнянь
Обчислювальні витрати	Низькі, один виклик похідної на крок	Високі, чотири виклики похідної на крок	Помірні, зменшуються за рахунок використання попередніх значень
Придатність для жорстких задач	Непридатний	Частково придатний	Потребує модифікацій для стійкості
Швидкість виконання	Висока, підходить для швидких оцінок	Повільніший через кілька проміжних обчислень	Висока завдяки багатокроковій структурі
Залежність від початкових значень	Не потребує попередніх обчислень	Не потребує попередніх обчислень	Потребує початкових значень від іншого методу
Застосування для довгих інтервалів	Не підходить через накопичення похибок	Підходить із достатньою точністю	Оптимальний вибір для довгих інтервалів
Простота реалізації	Дуже проста	Складніша через декілька проміжних кроків	Потребує початкових значень, але загалом проста

Джерело: складено автором [19, с. 331]

З таблиці видно, що кожен із методів має свої особливості та області застосування. Метод Ейлера виділяється простою реалізацією та швидким виконанням, але має низьку точність і обмежену стійкість. Метод Рунге-Кутта забезпечує високу точність і стабільність, але потребує більше обчислювальних ресурсів, що може бути критичним для великих систем або задач реального часу. Метод Адамса ефективний на довгих інтервалах та забезпечує швидке виконання за рахунок використання попередніх значень, проте потребує початкових умов, що збільшує складність його реалізації на початковому етапі.

Отже, вибір методу залежить від специфіки задачі: якщо потрібна швидка оцінка — доцільно використовувати метод Ейлера, якщо важлива точність — метод Рунге-Кутта, а для задач на великих інтервалах оптимальним є метод Адамса.

Аналіз чисельних методів розв’язання звичайних диференціальних рівнянь — Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса — продемонстрував, що кожен із них має свої сильні та слабкі сторони. Метод Ейлера завдяки своїй простоті та низьким обчислювальним витратам підходить для задач із помірними вимогами до точності або для швидкої попередньої оцінки розв’язку. Проте його низька точність і чутливість до вибору кроку обмежують застосування для складних систем та довгих інтервалів інтегрування.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядку є оптимальним для задач із високими вимогами до точності та стабільності. Він забезпечує точні результати навіть при порівняно великих кроках інтегрування та добре підходить для складних нелінійних систем. Методи Адамса, особливо багатокрокові схеми, виявляються ефективними для довготривалих обчислень завдяки зменшенню кількості операцій, але їхня реалізація ускладнюється необхідністю отримання початкових значень. У жорстких задачах або системах із коливальними процесами метод Адамса може поступатися іншим підходам через нижчу стабільність.

Вибір чисельного методу для розв’язання диференціальних рівнянь залежить від вимог до точності, обчислювальних витрат та стійкості алгоритму. Якщо основним критерієм є швидкість виконання та мінімальні обчислювальні ресурси, доцільно використовувати метод Ейлера, особливо для попередніх оцінок або простих задач. Для задач, де потрібна висока точність, рекомендується застосовувати метод Рунге-Кутта четвертого порядку, який забезпечує стабільний та точний розв'язок навіть за великих кроків. У випадках, коли потрібно інтегрувати на довгих інтервалах або оптимізувати обчислення за рахунок використання попередніх значень, найкраще підходять багатокрокові методи Адамса. Однак, для жорстких задач із різними масштабами змін параметрів доцільно використовувати або адаптивні версії методів Рунге-Кутта, або спеціальні модифіковані схеми, які забезпечують необхідну стійкість.

Таким чином, ефективний вибір чисельного методу має базуватися на аналізі конкретних вимог задачі: метод Ейлера є придатним для швидких і простих розрахунків, метод Рунге-Кутта — для задач із високими вимогами до точності, а методи Адамса — для тривалих обчислень із меншими обчислювальними витратами.

2.5. Узагальнення результатів та вибір оптимального методу

У ході проведеного аналізу чисельних методів для розв’язання звичайних диференціальних рівнянь були розглянуті три основні підходи: метод Ейлера, метод Рунге-Кутта та метод Адамса. Кожен із цих методів має свої особливості, переваги та недоліки, що впливають на точність розв’язку, стійкість та обчислювальні витрати. Метод Ейлера відзначається простотою реалізації та швидкістю виконання, але його точність є низькою через лінійний характер апроксимації, що обмежує застосування цього методу для складних або довготривалих задач. Метод Рунге-Кутта четвертого порядку забезпечує високу точність завдяки врахуванню декількох проміжних оцінок похідної на кожному кроці, проте потребує більше обчислювальних ресурсів. Методи Адамса, у свою чергу, демонструють високу ефективність на довгих інтервалах завдяки використанню попередніх значень, але вимагають обчислення початкових значень іншими методами та менш стійкі для жорстких задач [19, с. 301]

Таким чином, проведений аналіз показав, що вибір чисельного методу є багатофакторним процесом, який залежить від особливостей конкретної задачі. Метод Ейлера доцільно застосовувати для швидкої оцінки розв’язку, метод

Рунге-Кутта — для задач із високими вимогами до точності, а методи Адамса — для обчислень на довгих інтервалах, де важливі швидкість і ефективність. Кожен метод має свою область застосування, і його ефективність визначається залежно від умов і параметрів задачі.

Вибір оптимального методу для розв’язання диференціальних рівнянь є критично важливим етапом у чисельному аналізі, оскільки різні задачі можуть мати специфічні вимоги до точності, швидкості виконання та стійкості алгоритму. Для простих задач із короткими інтервалами часу та помірними вимогами до точності є метод який найкраще підходить. Це метод Ейлера, оскільки він потребує мінімальних обчислювальних ресурсів та забезпечує швидке виконання. Проте цей метод непридатний для розв'язання жорстких рівнянь та задач із великими інтервалами інтегрування через накопичення похибок.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядку стає кращим вибором для задач, де важлива висока точність розв'язку та стабільність обчислень навіть за великих кроків інтегрування. Він добре працює з нелінійними системами та складними моделями, однак його використання може бути обмеженим через збільшені обчислювальні витрати. Методи Адамса є найефективнішими для тривалих розрахунків, оскільки вони зменшують кількість обчислень за рахунок використання попередніх значень. Проте їхня ефективність залежить від початкових умов та стабільності розв'язку, що ускладнює їх застосування для жорстких задач.

Таким чином, вибір методу має ґрунтуватися на аналізі вимог конкретної задачі. Якщо основним критерієм є швидкість виконання, доцільно використовувати метод Ейлера. Для задач із високими вимогами до точності рекомендується застосовувати метод Рунге-Кутта, а для довготривалих обчислень із великим інтервалом часу найкраще підходять багатокрокові методи Адамса. Врахування цих аспектів дозволяє зробити обґрунтований вибір методу та забезпечити ефективність чисельних обчислень.

Точність чисельних методів є критично важливим фактором при виборі методу для розв’язання диференціальних рівнянь. Кожен із розглянутих методів — Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса — має різний рівень точності та порядок глобальної похибки. Метод Ейлера забезпечує найнижчу точність із глобальною похибкою порядку O(h. Це означає, що при збільшенні кроку інтегрування похибка швидко накопичується, обмежуючи застосування цього методу для задач із високими вимогами до точності.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядку має значно вищу точність, оскільки його глобальна похибка становить $O(h^4)$. Це дає можливість використовувати більші кроки без суттєвої втрати точності, що робить цей метод придатним для складних та нелінійних задач. Методи Адамса демонструють проміжну точність із похибкою порядку $O(h^k)$, де k залежить від кількості кроків у багатокроковій схемі. Вони менш точні, ніж метод Рунге-Кутта, але перевершують метод Ейлера на довгих інтервалах.

Таблиця 2.14

Порівняння точності методів Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса

Метод	**Локальна похибка**	**Глобальна похибка**	**Придатність для точних задач**
Метод Ейлера	$O(h^2)$	$O(h)$	Низька
Метод Рунге-Кутта 4-го порядку	$O(h^5)$	$O(h^4)$	Висока
Метод Адамса	$O(h^{k+1}))$	$O(h^k)$	Середня

Джерело: складено автором [7, 10]

Важливим аспектом точності є вибір кроку інтегрування h. Для методу Ейлера невеликий крок істотно підвищує точність, але водночас збільшує кількість обчислень, що робить метод менш ефективним. У методі Рунге-Кутта точність залишається високою навіть за більших кроків, що знижує обчислювальні витрати. Для методів Адамса точність сильно залежить від якості попередніх значень. При надто великих кроках у багатокрокових схемах може зростати похибка прогнозування.

Стійкість чисельних методів визначає їхню здатність забезпечувати стабільний розв'язок без швидкого зростання похибок при зміні параметрів або початкових умов. Метод Ейлера має низьку стійкість, особливо для жорстких задач, де невеликі відхилення можуть спричинити нестабільність розв'язку. Метод Рунге-Кутта демонструє значно кращу стійкість і забезпечує стабільні результати навіть для нелінійних систем із великими кроками інтегрування. Проте для дуже жорстких задач можуть знадобитися спеціальні адаптивні версії цього методу.

Метод Адамса є чутливим до умов початкового інтегрування. Він добре працює на довгих інтервалах часу, але менш стабільний у задачах із швидкими коливаннями або жорсткими рівняннями. У таких випадках можуть знадобитися модифікації або комбінування з іншими методами.

Таблиця 2.15

Стійкість методів Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса

Метод	**Стійкість**	**Придатність для жорстких задач**	**Стійкість при коливаннях**
Метод Ейлера	Низька	Непридатний	Нестабільний
Метод Рунге-Кутта 4-го порядку	Висока	Частково придатний	Стабільний
Метод Адамса	Середня	Потребує модифікацій	Частково стабільний

Джерело: складено автором [7, 10]

Обчислювальні витрати та швидкість виконання є важливими критеріями при виборі чисельного методу, особливо для задач із великим обсягом даних або обмеженими обчислювальними ресурсами. Метод Ейлера має найменші обчислювальні витрати, оскільки потребує лише одного виклику похідної на кожному кроці. Проте через низьку точність для досягнення прийнятних результатів може знадобитися значне збільшення кількості кроків, що збільшує загальний час обчислень.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядку вимагає чотири обчислення похідної на кожному кроці, що підвищує обчислювальні витрати. Незважаючи на це, його висока точність дозволяє використовувати більші кроки, зменшуючи загальну кількість обчислень. Методи Адамса забезпечують високу швидкість завдяки багатокроковій схемі, але потребують попереднього обчислення кількох початкових значень, що збільшує складність на початковому етапі.

Таблиця 2.16

Обчислювальні витрати та швидкість виконання методів

Метод	**Кількість викликів похідної на кроці**	**Час виконання**	**Придатність для великих задач**
Метод Ейлера	1	Швидкий	Придатний для простих задач
Метод Рунге-Кутта 4-го порядку	4	Повільніший	Придатний для точних обчислень
Метод Адамса	1 (після початкових значень)	Висока швидкість	Оптимальний для довгих інтервалів

Джерело: складено автором [7, 10]

Для великих задач, що потребують інтегрування на довгих інтервалах, методи Адамса демонструють найкращу обчислювальну ефективність завдяки зменшенню кількості викликів похідних. Проте, якщо завдання вимагає високої точності на кожному кроці або має нелінійний характер, більш доцільним стає використання методу Рунге-Кутта. Метод Ейлера є придатним для задач із невеликою кількістю кроків або для первинної оцінки розв'язку.

Аналіз ефективності чисельних методів показав, що кожен із них має свої переваги та недоліки. Метод Ейлера є швидким і простим, але має низьку точність та обмежену стійкість. Метод Рунге-Кутта четвертого порядку забезпечує високу точність і стабільність, але потребує більше обчислювальних ресурсів. Методи Адамса є оптимальними для довгих інтервалів інтегрування завдяки швидкості виконання, проте менш стабільні для жорстких задач.

Таким чином, вибір методу залежить від вимог конкретної задачі: якщо потрібна швидкість і низькі витрати, доцільно використовувати метод Ейлера; для задач із високими вимогами до точності краще застосовувати метод Рунге-Кутта; а для довгих інтервалів із мінімальними обчисленнями оптимальним є метод Адамса.

Ефективність використання чисельних методів для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь залежить від характеру задачі та вимог до точності, стійкості й обчислювальних витрат. Кожен метод — Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса — має специфічні переваги та обмеження, що впливають на його придатність для певних класів задач. У цьому підрозділі наведено рекомендації щодо використання цих методів для різних типів задач із урахуванням вимог до точності, тривалості обчислень та стабільності розв’язку.

Для задач, які не потребують високої точності та стійкості, найбільш доцільним є використання методу Ейлера. Цей метод підходить для розв’язання задач на коротких інтервалах або для отримання первинної оцінки розв’язку перед використанням більш точних алгоритмів. Завдяки простій реалізації та мінімальним обчислювальним витратам, метод Ейлера ефективний у випадках, коли важлива швидкість виконання. Він часто використовується в задачах, де обмежені обчислювальні ресурси, наприклад у вбудованих системах, або у випадках, коли точність має другорядне значення. Однак через лінійну природу похибок цей метод не рекомендується для задач на довгих інтервалах, оскільки похибка швидко накопичується.

Для задач, де висока точність та стабільність розв’язку є критично важливими, доцільно використовувати метод Рунге-Кутта четвертого порядку. Цей метод забезпечує точні результати навіть за порівняно великих кроків інтегрування, що зменшує загальну кількість обчислень і водночас зберігає високу точність. Він підходить для складних нелінійних моделей і систем із великим числом змінних, таких як моделі в фізиці, біології або економіці. Завдяки високій стабільності, метод Рунге-Кутта є універсальним інструментом для більшості чисельних задач, де важлива точність на кожному кроці інтегрування. Проте, зважаючи на підвищену обчислювальну складність, цей метод може бути менш ефективним для великих задач із тривалим часом розрахунків.

Для задач, що потребують чисельного інтегрування на великих інтервалах часу або передбачають опрацювання великих обсягів даних, найкращим вибором є методи Адамса. Завдяки багатокроковій схемі, ці методи дозволяють використовувати значення, обчислені на попередніх кроках, що зменшує кількість обчислень та прискорює процес розв'язання. Методи Адамса особливо ефективні для задач, де важливе довготривале моделювання із мінімальними витратами на обчислення, наприклад у кліматичних або фінансових моделях. Однак для початку розв'язання необхідно отримати кілька початкових значень за допомогою інших методів, що ускладнює реалізацію. Крім того, ці методи можуть втрачати точність при використанні занадто великих кроків або при розв'язанні задач із швидкою зміною динаміки [18, с. 77].

Для жорстких задач, де власні значення матриці коефіцієнтів мають значно різні порядки величин, або для систем із швидкими коливаннями, вибір чисельного методу є особливо важливим. Метод Ейлера через низьку стійкість не підходить для таких задач, оскільки навіть невеликі похибки можуть швидко призвести до нестабільності розв’язку. Методи Рунге-Кутта є частково придатними, але для жорстких задач рекомендується використовувати їх адаптивні версії або імпліцитні модифікації, які забезпечують необхідну стійкість.

Методи Адамса можуть бути використані для жорстких задач лише за умови правильного вибору кроку та початкових значень, проте їх застосування для задач із швидкими коливаннями обмежене. У таких випадках оптимальним вибором є спеціалізовані методи для жорстких рівнянь, такі як імпліцитні методи або адаптивні алгоритми, що підлаштовують крок інтегрування в залежності від динаміки процесу.

Аналіз придатності чисельних методів для різних класів задач показав, що ефективність кожного з них залежить від специфіки задачі. Метод Ейлера є придатним для простих задач із низькими вимогами до точності та швидкими обчисленнями. Метод Рунге-Кутта четвертого порядку підходить для складних систем і задач із високими вимогами до точності та стабільності. Методи Адамса виявляються найбільш ефективними для довготривалих обчислень із великими інтервалами, але мають обмеження при розв'язанні жорстких задач або систем із швидкими коливаннями. Такий підхід до вибору чисельного методу дозволяє досягти оптимального співвідношення між точністю, стійкістю та обчислювальними витратами.

Вибір чисельного методу для розв'язання диференціальних рівнянь залежить від особливостей конкретної задачі, таких як вимоги до точності, стійкості та обчислювальної ефективності. У цьому підрозділі представлена порівняльна таблиця, яка узагальнює оптимальні сфери застосування методів Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса залежно від умов і параметрів задачі. Цей підхід дозволяє зрозуміти, у яких ситуаціях кожен із методів є найбільш ефективним і забезпечує найкращі результати [18, с. 81].

Таблиця 2.17 демонструє оптимальні області застосування методів, враховуючи їхні особливості, переваги та обмеження. У таблиці враховано такі критерії, як тип задачі, вимоги до точності, розмір кроку, стійкість, ефективність на довгих інтервалах та придатність для розв'язання жорстких задач.

Таблиця 2.17

Узагальнення сфер застосування методів Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса

Критерій	Метод Ейлера	Метод Рунге-Кутта (4-го порядку)	Метод Адамса
Тип задачі	Простий, попередня оцінка розв'язку	Складні, нелінійні системи	Довготривалі обчислення, великі інтервали
Вимоги до точності	Низькі	Високі	Середні
Розмір кроку	Малий крок для прийнятної точності	Можливий великий крок без втрати точності	Середній, обмежений стабільністю
Стійкість	Низька, нестабільний при великих кроках	Висока, стабільний для більшості задач	Середня, вразливий до швидких коливань

Продовження таблиці 2.17

Придатність для довгих інтервалів	Обмежена через накопичення похибок	Придатний	Оптимальний вибір
Обчислювальні витрати	Низькі	Високі через кілька обчислень похідних	Середні, зниження витрат на довгих інтервалах
Придатність для жорстких задач	Непридатний	Частково придатний, потребує адаптацій	Потребує модифікацій для стабільності

Джерело: складено автором [4. 7, 10, 12, с. 32]

З аналізу таблиці видно, що метод Ейлера підходить для простих задач із низькими вимогами до точності або для первинної оцінки розв'язків. Він забезпечує швидкі розрахунки за мінімальних обчислювальних витрат, проте через накопичення похибок та низьку стійкість його застосування обмежене на довгих інтервалах або для жорстких задач.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядку є універсальним інструментом для чисельного розв'язання складних систем та задач із високими вимогами до точності. Він забезпечує стабільність і високу точність навіть за великих кроків інтегрування, що робить його придатним для більшості задач. Проте його використання може бути обмежене високими обчислювальними витратами, що є критичним для великих систем або задач реального часу.

Методи Адамса демонструють високу ефективність на довгих інтервалах завдяки зменшенню обчислювальних витрат. Вони найкраще підходять для задач, де важливо мінімізувати кількість обчислень, але водночас забезпечити прийнятну точність. Проте методи Адамса потребують обчислення початкових значень іншими методами, а їхня стабільність може бути недостатньою для жорстких рівнянь або задач із швидкими коливаннями.

Таким чином, вибір чисельного методу залежить від специфіки задачі та пріоритетів: якщо важливі швидкість і простота — обирають метод Ейлера; якщо потрібна точність та стабільність — метод Рунге-Кутта; а для довготривалих обчислень із великим інтервалом оптимальними є методи Адамса.

Ефективний вибір чисельного методу для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь залежить від багатьох факторів, включаючи точність, стійкість, обчислювальні витрати та умови задачі. У цьому розділі представлено узагальнення результатів аналізу та надано рекомендації для вибору методу залежно від конкретних умов. Розглядаються ключові фактори, які впливають на вибір методу, а також наведено приклади практичних ситуацій для застосування кожного з них.

Аналіз методів Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса показав, що кожен із них має свої унікальні переваги та обмеження, які слід враховувати при розв'язанні диференціальних рівнянь. Метод Ейлера є найпростішим і найшвидшим, проте забезпечує низьку точність і нестійкий на довгих інтервалах або в задачах із коливаннями. Він підходить для попередніх оцінок або простих задач із короткими інтервалами. Метод Рунге-Кутта забезпечує високу точність і стабільність навіть для складних задач, але його використання вимагає більше обчислювальних ресурсів, що може стати проблемою для великих систем. Методи Адамса демонструють високу ефективність на довгих інтервалах завдяки зменшенню обчислювальних витрат, проте їхня реалізація ускладнюється необхідністю обчислення початкових значень іншими методами [7, с. 115, 12, с. 85].

Вибір чисельного методу залежить від кількох ключових факторів, які визначають ефективність і доцільність його використання в конкретних умовах. Основними факторами є:

1. **Вимоги до точності.** Якщо задача потребує високої точності розв'язку, найбільш доцільним вибором буде метод Рунге-Кутта четвертого порядку, оскільки він забезпечує мінімальні похибки навіть за великих кроків інтегрування.

2. **Стійкість розв'язку.** Для задач, де важлива стабільність результатів при зміні початкових умов або параметрів, метод Рунге-Кутта є найбільш

придатним. Методи Адамса менш стійкі для жорстких задач, а метод Ейлера може втратити стабільність при великих кроках.

3. **Довжина інтервалу інтегрування.** Для розв’язання задач на довгих інтервалах часу оптимальним вибором є методи Адамса, які зменшують кількість обчислень і забезпечують ефективність на великих інтервалах.

4. **Обчислювальні витрати.** Якщо задача має обмеження на обчислювальні ресурси або час виконання, наприклад у вбудованих системах, перевагу слід віддати методу Ейлера через його простоту та низькі обчислювальні витрати.

5. **Характер рівняння.** Для жорстких рівнянь і систем із швидкими коливаннями методи Ейлера та Адамса можуть бути нестабільними. У таких випадках рекомендується використовувати адаптивні або імпліцитні версії методу Рунге-Кутта [18, с.122].

Приклади конкретних ситуацій для застосування кожного методу:

Приклад 1: Просте рівняння на короткому інтервалі

Розглянемо задачу розв'язання рівняння:

$$y'(x) = -2x + 3,$$

$$y(0) = 1$$

на інтервалі $x \in [0,0.5]$. Оскільки задача має просту форму і невеликий інтервал інтегрування, ефективним вибором буде метод Ейлера. Він забезпечить достатню точність за мінімальних обчислювальних витрат.

Приклад 2: Складна система диференціальних рівнянь

Розглянемо нелінійну систему рівнянь, яка описує динаміку двох взаємодіючих змінних:

$$y_1'(x) = y_2(x) - x^2$$

$$y_1'(x) = -y_1(x) + \sin(x)$$

Для розв'язання цієї системи на інтервалі $x \in [0,10]$ доцільно використати метод Рунге-Кутта четвертого порядку, оскільки він забезпечує високу точність і стабільність навіть при інтегруванні нелінійних рівнянь.

Приклад 3: Довготривале моделювання на великому інтервалі

Розглянемо задачу чисельного моделювання популяційної динаміки з рівнянням:

$$y'(t) = ry(t)(1 - \frac{y(t)}{K}$$

де r — швидкість зростання популяції, а K — місткість середовища. Якщо потрібно обчислити розв’язок на великому інтервалі часу $t \in [0,100]$, найкращим вибором буде метод Адамса. Він дозволить зменшити кількість обчислень, зберігаючи прийнятну точність на довгих інтервалах.

Приклад 4: Жорстка задача з коливаннями

Розглянемо жорстке рівняння, яке описує затухаючі коливання:

$$y''(x) + 100y'(x) + y(x) = 0$$

Для розв'язання цього рівняння необхідно використовувати адаптивну або імпліцитну версію методу Рунге-Кутта, оскільки стандартні методи Ейлера та Адамса не забезпечать достатню стабільність для таких задач.

Аналіз конкретних ситуацій показав, що вибір чисельного методу має ґрунтуватися на характеристиках задачі та вимогах до точності, стійкості й обчислювальної ефективності. Метод Ейлера є доцільним для простих задач із низькими вимогами до точності або для попередніх оцінок розв’язків. Метод Рунге-Кутта четвертого порядку оптимальний для задач із високими вимогами до точності та стабільності, включаючи складні нелінійні системи. Методи Адамса забезпечують найкращу ефективність для довгих інтервалів, але потребують обчислення початкових значень іншими методами. Для жорстких задач і задач із швидкими коливаннями найбільш придатними є адаптивні або імпліцитні методи. Такий підхід до вибору методу дозволяє досягти оптимального співвідношення між точністю, стабільністю та швидкістю виконання в кожній конкретній задачі.

Вибір чисельного методу для розв’язання диференціальних рівнянь завжди передбачає компроміс між точністю, стійкістю та обчислювальними витратами. Жоден із методів не може одночасно забезпечити максимальну точність, високу стабільність та мінімальні витрати на обчислення для всіх можливих класів задач. Метод Ейлера забезпечує високу швидкість виконання та простоту реалізації, проте його точність обмежена, а стійкість залишається недостатньою для складних або жорстких задач. Методи Рунге-Кутта четвертого порядку пропонують відмінну точність та стабільність, що робить їх оптимальним вибором для більшості задач із високими вимогами до точності, проте підвищені обчислювальні витрати обмежують їх використання у великих системах або задачах із обмеженим часом виконання.

Методи Адамса забезпечують ефективність на довгих інтервалах завдяки зменшенню кількості обчислень, що робить їх оптимальними для тривалих розрахунків із помірними вимогами до точності. Проте ці методи менш стабільні при розв’язанні жорстких задач або задач із коливаннями, що зумовлює необхідність комбінування з іншими підходами. Таким чином, вибір методу має базуватися на глибокому аналізі умов задачі та пріоритетів: для задач із високими вимогами до точності обирають метод Рунге-Кутта, для простих і швидких розрахунків — метод Ейлера, а для довгих інтервалів і великих систем — методи Адамса.

Проведений аналіз чисельних методів має велике значення для ефективного чисельного моделювання, оскільки він дозволяє зробити обґрунтований вибір методу залежно від умов конкретної задачі. Глибоке розуміння сильних та слабких сторін методів Ейлера, Рунге-Кутта та Адамса дозволяє мінімізувати похибки, забезпечити стабільність розв'язків і зменшити обчислювальні витрати. Це особливо важливо для задач, які потребують високої точності або довготривалого моделювання, де вибір неправильного методу може призвести до значного накопичення похибок або нестабільності розв’язків.

Аналіз також підкреслив важливість адаптації чисельних методів до специфіки задачі. Для жорстких рівнянь необхідні спеціалізовані або адаптивні підходи, тоді як для довгих інтервалів доцільно використовувати багатокрокові схеми для зменшення обчислювальних витрат. Таким чином, проведене дослідження надає практичні рекомендації для вибору чисельних методів, що дозволяє забезпечити ефективність моделювання та підвищити якість отриманих результатів у різних галузях науки та техніки.

ВИСНОВКИ

У ході виконання цієї роботи було досягнуто поставленої мети та розв’язано завдання, що визначили глибокий аналіз чисельних методів розв’язання задачі Коші. Дослідження зосереджувалося на математичних алгоритмах, їхньому теоретичному обґрунтуванні, порівняльному аналізі точності та ефективності, а також на оцінці впливу похибок на кінцеві результати.

В процесі дослідження було вирішено такі завдання:

1. Проведено аналітичний огляд задачі Коші та встановлено, що існування та єдиність розв’язку визначаються умовами неперервності функції та виконанням локальних умов Ліпшиця. Це забезпечує коректність постановки задачі та обґрунтовує можливість її чисельного розв’язання.

2. Було детально описано алгоритми для кожного з методів, які застосовуються для розв’язання задачі Коші. Метод Ейлера продемонстрував простоту реалізації, однак виявив низьку точність для великих кроків. Метод Рунге-Кутта надав змогу значно підвищити точність за рахунок використання кількох проміжних обчислень. Метод Адамса, як багатоетапний метод, дозволив економити обчислювальні ресурси за рахунок повторного використання попередніх значень, що підвищує його ефективність.

3. Виконаний аналіз похибок кожного методу показав, що метод Ейлера має найвищу глобальну похибку серед розглянутих методів. Метод Рунге-Кутта, завдяки багатоетапності, продемонстрував менший рівень похибки. Водночас метод Адамса виявився чутливим до точності початкових значень, що вимагає ретельного вибору кроку для забезпечення стабільності результатів.

4. У результаті порівняльного аналізу виявлено, що метод Рунге-Кутта забезпечує найбільш збалансований результат між точністю та обчислювальними витратами. Метод Адамса виявився ефективним для задач із великою кількістю кроків, але потребує ретельної підготовки початкових значень. Метод Ейлера був визначений як менш ефективний для задач, що

потребують високої точності, але є корисним для попередніх оцінок і швидких розрахунків.

Таким чином, проведене дослідження дозволило глибше зрозуміти особливості чисельних методів і вибрати оптимальний підхід для розв’язання задачі Коші. На основі аналізу можна рекомендувати метод Рунге-Кутта для розв’язання задач, що вимагають високої точності, і метод Адамса для задач, де важлива ефективність обчислень. Ці результати є корисними як для теоретичного вивчення чисельних методів, так і для практичного застосування в різних галузях інженерії та природничих наук.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андруник В. А., Висоцька В. А., Пасічник В. В., Чирун Л. Б., Чирун Л. В. *Чисельні методи в комп'ютерних науках: навчальний посібник* : у 2 т. / за ред. В. В. Пасічника. Львів : Новий Світ-2000, 2020. Т. 2. 536 с.

2. Богач І. В., Краковецький О. Ю., Крилик Л. В. *Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь засобами MathCAD: навчальний посібник*. Вінниця : ВНТУ, 2020. 106 с.

3. Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. *Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі: навчальний посібник*. Київ : Книги України ЛТД, 2010. 470 с. ISBN 978-966-2331-05-9.

4. Гой Т. П., Махней О. В. *Диференціальні рівняння: навчальний посібник*. Івано-Франківськ : Сімик, 2012. 352 с.

5. Головатий Ю. Д., Кирилич В. М., Лавренюк С. П. *Диференціальні рівняння*. Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2011. 470 с.

6. Гончаров О. А., Васильєва Л. В., Юнда А. М. *Чисельні методи розв'язання прикладних задач: навчальний посібник*. Суми : Сумський державний університет, 2020. 142 с.

7. *Диференціальні рівняння. Навчальний посібник для інженерних спеціальностей* [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спец. 131 «Прикладна механіка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. І. М. Копась. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 126 с. 1 файл (2504 Кбайт).

8. Дубовик В. П., Юрик І. І. *Вища математика: навчальний посібник*. Київ : Ігнатекс-Україна, 2011. 648 с. ISBN 978-966-97049-3-1.

9. Задачин В. М., Конюшенко І. Г. *Чисельні методи: навчальний посібник*. Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. 180 с.

10. Івасишен С. Д., Лавренчук В. П., Настасієв П. П., Дрінь І. І. *Диференціальні рівняння: методи та застосування: навчальний посібник*. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2010. 288 с. ISBN 978-966-423-135-7.

11. Кагадій Т. С., Сушко Л. Ф., Щербина І. В., Оноприєнко О. Д., Шпорта А. Г. *Диференціальні рівняння: теорія, приклади, розв'язання: навчальний посібник*. Дніпро : ДДАЕУ, 2022. 190 с.

12. Колесницький О. К., Арсенюк І. Р., Месюра В. І. *Чисельні методи: навчальний посібник*. Вінниця : ВНТУ, 2017. 130 с.

13. Пономаренко В. Г., Дьяченко Н. К. *Основи лінійної алгебри: навчальний посібник*. Дніпропетровськ : ДДАУ, 1998.

14. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. *Диференціальні рівняння у прикладах і задачах: навчальний посібник*. Київ : Вища школа, 1994. 454 с.

15. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. *Диференціальні рівняння у задачах*. Київ : Либідь, 2003. 504 с.

16. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. *Диференціальні рівняння*. Київ : Либідь, 2003. 600 с.

17. Цегелик Г. Г. *Чисельні методи: підручник*. Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2004. 408 с.

18. Фельдман Л. П. *Чисельні методи в інформатиці: підручник*. Київ, 2006. 480 с.

19. Андруник В. А., Висоцька В. А., Пасічник В. В. та ін. *Чисельні методи в комп'ютерних науках: навчальний посібник*. Львів : Новий світ-2000, 2017. Т. 1. 470 с.

20. Шкіль М. І., Лейфура В. М., Самусенко П. Ф. *Диференціальні рівняння*. Київ : Техніка, 2003. 368 с.

Додатки

Додаток А

Леонард Ейлер (1707–1783) — видатний швейцарський математик, фізик, астроном і інженер, один із найплідніших учених в історії науки. Народився в Базелі, Швейцарія. Ейлер зробив фундаментальний внесок у різні галузі математики, включаючи аналіз, теорію чисел, геометрію, механіку, оптику та багато інших дисциплін. Його роботи вплинули на подальший розвиток як чистої, так і прикладної математики.

Основні досягнення у математиці:

Математичний аналіз:
Ейлер заклав основи сучасного аналізу. Він ввів багато символів, які використовуються донині, включаючи позначення функції $f(x)$, уявної одиниці i, числа e, тригонометричних функцій sin, cos і символу суми Σ.

Теорія графів:
Ейлер започаткував теорію графів, розв'язавши задачу про сім мостів Кенігсберга. Його роботи стали основою для сучасної дискретної математики.

Механіка і фізика:
Він розробив рівняння руху ідеальної рідини (рівняння Ейлера), які використовуються у гідродинаміці. Також зробив значний внесок у небесну механіку, зокрема у вивчення орбіт планет.

Числова теорія:
Дослідження Ейлера в теорії чисел включають роботи над розкладанням чисел, теорією подільності та властивостями простих чисел. Він довів багато важливих теорем, включаючи формулу Ейлера-Ферма для простих чисел.

Функції і спеціальні числа:
Ейлер досліджував гамма-функцію, бета-функцію та запровадив поняття дзета-функції (використовується для вивчення розподілу простих чисел).

Леонард Ейлер залишив величезну кількість праць — понад 850 робіт, які покривають майже всі галузі математики. Його вплив настільки великий, що XX століття називають "століттям Ейлера". Навіть після втрати зору у 1771 році він продовжував працювати, диктуючи свої ідеї.

Ейлер поєднав талант до абстрактної математики з умінням знаходити практичне застосування своїх теорій. Його внесок у науку досі залишається джерелом натхнення для математиків та інженерів.

Додаток Б

Карл Рунге (1856–1927) — видатний німецький математик, фізик і один із засновників чисельного аналізу. Народився в Бремені, Німеччина. Навчався у Берліні та Мюнхені, здобув ступінь доктора філософії в Берлінському університеті під керівництвом Карла Веєрштраса. Пізніше викладав у Ганновері, а згодом став професором прикладної математики в Геттінгенському університеті.

Чисельні методи: Карл Рунге, спільно з Мартіном Куттою, розробив **метод Рунге-Кутта** — один із найпопулярніших методів чисельного розв’язування звичайних диференціальних рівнянь. Цей метод застосовується в інженерії, фізиці, фінансах та багатьох інших галузях.

Розклад функцій: Рунге вивчав властивості поліноміальних апроксимацій, відомих як **феномен Рунге**, який демонструє труднощі наближення функцій поліномами високого ступеня. Це дослідження стало важливим для аналізу інтерполяції та чисельної стабільності.

Аналіз даних: Він розробив методи розв’язання задач спектрального аналізу, які мали значення для обробки сигналів і прикладної фізики.

Досягнення в інших науках:

Рунге активно працював у сфері спектроскопії, розробляючи математичні методи для аналізу спектрів елементів. Його роботи стали основою для багатьох фізичних досліджень у галузі квантової механіки.

Вивчав проблеми розв'язання систем диференціальних рівнянь у прикладних задачах механіки та динаміки.

Вплив на науку:

Карл Рунге зробив революцію у використанні чисельних методів для практичних розрахунків, наблизивши теоретичну математику до реальних потреб фізики й техніки. Його методи, особливо метод Рунге-Кутта, досі широко використовуються. Також він сприяв становленню чисельного аналізу як окремої дисципліни.

За свої досягнення Рунге отримав визнання серед математиків і фізиків, а його ідеї залишаються актуальними й сьогодні.

Додаток В

Джон Кроуфорд Адамс (1819–1892) — видатний британський математик і астроном, який зробив значний внесок у розвиток небесної механіки та прикладної математики. Народився в Корнуолі, Англія, у родині фермера. Вивчав математику в Кембриджському університеті, де досяг великих успіхів, здобувши звання старшого штатного співробітника коледжу Святого Іоанна. У 1859 році став професором астрономії в Кембриджі й директором Кембриджської обсерваторії.

Основний внесок у математику:

Теорія збурень орбіт: Адамс розробив математичні методи для аналізу збурень у русі небесних тіл, що стало важливим кроком у дослідженнях стабільності Сонячної системи.

Чисельні методи: Він вдосконалив чисельні методи, які дозволяли з високою точністю розраховувати орбіти планет і астероїдів.

Інтерполяція та інтеграція: Його роботи в області наближених обчислень вплинули на розвиток методів чисельного розв'язування диференціальних рівнянь.

Видатні досягнення:

Адамс став відомим завдяки передбаченню існування планети Нептун. Використовуючи закони Ньютона, він математично обчислив місцезнаходження нової планети на основі відхилень в русі Урана, що було пізніше підтверджено відкриттям Нептуна в 1846 році.

Вивчав рух Місяця, особливо прискорення, викликане приливами, що мало важливе значення для розуміння динаміки системи Земля-Місяць.

Вплив на науку:

Адамс розширив математичний апарат для застосування в астрономії, зробивши його доступнішим для практичних задач. Його методи розв'язання задач небесної механіки лягли в основу сучасної динаміки. За свої заслуги він був нагороджений багатьма преміями, включаючи медаль Коплі.

Його математична спадщина демонструє гармонійне поєднання теорії та її застосувань, що зробило його роботи важливими як для астрономів, так і для математиків.

Додаток Г

Мартін Вільгельм Кутта (1867–1944) — видатний німецький математик, відомий своїми роботами в чисельному аналізі та механіці рідин. Народився в Боркові, Пруссія (нині Польща). Навчався в університетах Грайфсвальда та Мюнхена, де зосередився на прикладній математиці та фізиці. У Мюнхенському технічному університеті розпочав академічну кар'єру, яка принесла йому світове визнання.

Основний внесок у математику:

Метод Рунге-Кутта:

Мартін Кутта у 1901 році спільно з Карлом Рунге розробив метод чисельного розв'язування звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Цей метод став основою багатьох алгоритмів у прикладній математиці та використовується для моделювання динамічних систем у таких галузях, як фізика, інженерія, астрономія та економіка. Метод Рунге-Кутта, зокрема його чотирикроковий варіант, є одним із найпопулярніших через свою простоту й точність.

Дослідження в галузі механіки рідин:
Кутта також зробив внесок у теоретичну аеродинаміку. Він розробив формулу для обчислення підйомної сили крила, відому як теорема Жуковського-Кутта, яка пояснює механізм утворення підйомної сили для профільованих поверхонь.

Вплив на науку:

Мартін Кутта не лише вплинув на розвиток чисельного аналізу, але й сприяв розширенню математичних методів у теоретичній фізиці та інженерії. Його роботи у сфері аеродинаміки були ключовими для авіабудування, а чисельні методи, які він допоміг розробити, стали основою сучасних комп'ютерних обчислень.

За своє життя Кутта залишив глибокий слід у прикладній математиці, забезпечивши її тісний зв'язок із практичними потребами науки й техніки.

Анотація

Горайчук О. П. Чисельні методи розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку. Магістерська робота. Луцьк. 2024. 64 с.

У роботі розглянуті найкращі чисельні методи розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку, їх властивості, розглянута задача Коші, порівняння різних методів і вибір найкращого.

Магістерська робота містить 64 сторінки , список використаної літератури налічує 20 джерел.

Ключові слова: чисельні методи, диференціальні рівняння, задача Коші, алгоритм.

Annotation

Horaichuk O.P. Numerical Methods for Solving First-Order Differential Equations. Master’s Thesis. Lutsk, 2024. 64 pages.

The thesis examines the most effective numerical methods for solving first-order differential equations, their properties, the Cauchy problem, and the comparison of different methods to select the optimal one.

The master’s thesis consists of 64 pages and includes a reference list of 20 sources.

Keywords: numerical methods, differential equations, Cauchy problem, algorithm.