ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ І МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА ЗАГАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ
ТА МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ ІНФОРМАТИКИ

Лариса РОЙКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА

**Методичні рекомендації до практичних занять для
здобувачів освіти спеціальності 101 Екологія факультету хімії та екології**

ЛУЦЬК-2024

УДК 51(072)
Р 65

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
Волинського національного університету імені Лесі Українки
(протокол № 1 від 25 вересня 2024 року)

Рецензенти:

Швай О.Л. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математичного аналізу та статистики Волинського національного університету імені Лесі Українки

Ройко Л.Л.

Вища математика: методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів освіти спеціальності 101 Екологія факультету хімії та екології. Луцьк, 2024. 55 с.

Навчально-методичне видання призначене для підготовки до практичних занять здобувачів освіти спеціальності 101 Екологія факультету хімії та екології з курсу «Вища математика» та повністю відповідає тематиці силабусу освітнього компонента. Запропоноване видання буде корисним для здобувачів освіти як при підготовці до практичних занять так і до контрольних, самостійних, індивідуальних робіт та слугуватиме вдосконаленню практичних навичок здобувачів освіти.

УДК 51(072)

АНОТАЦІЯ КУРСУ

Сучасна наука характеризується глибоким проникненням математичних методів та моделей у різні сфери наукової думки: від гуманітарних дисциплін (соціологія, прикладна лінгвістика) до дисциплін природно-наукового напрямку (екологія, медицина, біологія, хімія). Для дослідження екологічних процесів здобувачам освіти-екологам необхідна серйозна математична підготовка.

Метою викладання освітнього компонента «Вища математика» є надання здобувачам освіти фундаментальних знань з вищої математики, які дозволяють у подальшому засвоювати фахові освітні компоненти, котрі базуються на математичних поняттях. При цьому значна увага надається виробленню практичних навичок при розв'язуванні конкретних задач, вмінню застосовувати математичні методи для дослідження реальних процесів у сфері екології, охорони довкілля та збалансованого природокористування.

У результаті вивчення курсу здобувачі освіти повинні:

– опанувати основні методи розв'язування систем лінійних рівнянь;

– розвинути навички диференціювання та інтегрування функцій;

– отримати навички обчислення похідних, невизначених і визначених інтегралів;

– навчитись будувати й досліджувати функції, що розглядаються при вивченні фахових освітніх компонентів;

– засвоїти методи розв'язування простіших диференціальних рівнянь.

Основними завданнями вивчення освітнього компонента «Вища математика» є:

Методичні:

– навчити здобувачів освіти неформального, вдумливого, творчого підходу до будь-якої справи;

– навчити здобувачів освіти раціонально розподіляти свій час на виконання поставлених завдань;

– навчити здобувачів освіти робити оцінку очікуваного результату при розв'язуванні задач практичного змісту;

– навчити поєднувати навички самостійної та командної роботи задля отримання результату з акцентом на професійну сумлінність та відповідальність за прийняття рішень;

– виробити уміння доносити результати діяльності до професійної аудиторії та широкого загалу, робити презентації та повідомлення.

Пізнавальні:

– прищепити здобувачам освіти уміння підходити до розв'язування будь-якого питання чи проблеми різними шляхами, оцінювати їх, а потім вибирати оптимальний шлях розв'язку;

– прищепити здобувачам освіти уміння використовувати математичні методи для розв'язання творчих задач та обробки даних наукових досліджень;

– формувати вміння здійснювати аналіз, контроль і оцінку результатів своєї праці.

Практичні:

– сформувати у здобувачів освіти навички комплексного розв'язування математичних задач;

– сформувати у здобувачів освіти бачення тісного дидактичного зв'язку між змістом математики та екології;

– виробити у здобувачів освіти критерій раціонального підходу при розв'язуванні будь-яких задач;

– виховання загальної культури у здобувачів освіти;

– розвиток культури мови, вміння висловлювати свої міркування перед аудиторією.

Структура освітнього компонента

Назви змістових модулів і тем	Усього (год.)	Лек. (год.)	Практ. (год.)	Сам. роб. (год.)	Конс. (год.)	*Форма контролю/ Бали
I.СЕМЕСТР						
Змістовий модуль 1. Елементи лінійної, векторної алгебри та аналітичної геометрії						
Тема 1. Матриці та дії над ними. Визначники та їх основні властивості.	8	2	2	4		*УО, РЗ, СР/* 4 бали
Тема 2. Основні методи розв'язування систем лінійних рівнянь. Дослідження систем лінійних рівнянь на сумісність та визначеність.	8	2	2	4		*УО, РЗ, СР/* 4 бали
Тема 3. Вектори та дії над ними. Скалярний, векторний, мішаний добутки та їх застосування. Лінійна залежність та незалежність системи векторів. Розклад вектора за базисом.	8		2	4	2	*УО, РЗ, СР/* 4 бали
Тема 4. Пряма на площині. Пряма та площина у просторі.	8	2	2	4		*УО, РЗ, СР/* 4 бали
Тема 5. Канонічні рівняння ліній другого порядку.	8	2	2	4		*УО, РЗ, СР/* 4 бали
Разом за модулем 1	40 год	8 год	10 год	20 год	2 год	
Контрольна робота №1						10 балів
Змістовий модуль 2. Вступ до математичного аналізу, елементи диференціального числення функцій однієї та декількох змінних						
Тема 6. Основні числові системи. Границя числової послідовності. Границя функції в точці. Неперервність функції.	8	2	2	4		*УО, РЗ, СР/* 4 бали
Тема 7. Похідна першого та вищих порядків. Диференціал. Застосування диференціалу до наближених обчислень.	8	2	2	4		*УО, РЗ, СР/* 4 бали
Тема 8. Застосування похідної до дослідження функцій.	8		2	4	2	*УО, РЗ, СР/* 4 бали
Тема 9. Функції багатьох змінних. Елементи диференціального числення функцій двох змінних.	8	2	2	4		*УО, РЗ, СР/* 6 балів
Тема 10. Умовний екстремум функції двох незалежних змінних. Метод найменших квадратів.	8	2	2	4		*УО, РЗ, СР/* сам.роб./ 4 бали

Разом за модулем 2	40 год	8 год	10 год	20 год	2 год	
Контрольна робота №2						10 балів
Змістовий модуль 3. Елементи інтегрального числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння						
Тема 11. Первісна функції та невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування невизначених інтегралів.	8		2	4	2	*УО, РЗ, СР/* 4 бали
Тема 12. Інтегрування раціональних, ірраціональних та тригонометричних функцій.	8	2	2	4		*УО, РЗ, СР/* 4 бали
Тема 13. Визначений інтеграл та його застосування. Невласні інтеграли.	8	2	2	4		*УО, РЗ, СР/* 4 бали
Тема 14. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння першого порядку: із відокремленими та з відокремлюваними змінними, однорідні, лінійні.	8	2	2	4		*УО, РЗ, СР/* 4 бали
Тема 15. Диференціальні рівняння другого порядку, основні поняття. Лінійні однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.	8	2	2	2	2	*УО, РЗ, СР/* 4 бали
Разом за модулем 3	40 год	8 год	10 год	18 год	4 год	
Контрольна робота №3						10 балів
Разом за семестр: всього годин	**120год**	**24год**	**30 год**	**58 год**	**8 год**	
Форма контролю	**залік**					**100 балів**

Форма контролю: УО – усне опитування, *РЗ* – розв’язування завдань, *СР* – самостійна

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1

Тема: Матриці та дії над ними. Визначники та їх основні властивості.
Мета: вироблення умінь та удосконалення навичок виконання дій над матрицями та методами обчислення визначників, розвиток продуктивного мислення здобувачів освіти та виховання математичної культури.

При підготовці до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції за темою та відповідну рекомендовану літературу.

Теоретична частина:

1. Поняття матриці, види матриць.
2. Розмірності матриць, дії над матрицями.
3. Поняття визначника 2-го, 3-го та n-го порядків. Властивості визначників.
4. Основні методи обчислення визначників.
5. Мінори та алгебраїчні доповнення.
6. Алгоритм відшукання оберненої матриці.
7. Ранг матриці.

Типові практичні завдання:

1. Дано матриці:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -2\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 3\\ 1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) $A+B$; б) $A-B$; в) $2A-3B$;

г) $A+C$; д) $A\cdot B$; е) $A\cdot B^T$;

є) $C\cdot A$; ж) $A^T\cdot B$; з) $B^T\cdot A$.

2. Знайти добутки матриць:

а) $\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 3 & -2 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix}5 & 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 7\\ 4\end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Перевірити рівність $A \times B = B \times A$ для матриць:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Знайти значення $f(A)$, якщо $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

5. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

6. Знайти обернену матрицю A^{-1}, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7. Знайти матрицю $D = 2A^2 - 3B \cdot C + A^{-1}$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Розв'язати матричне рівняння:

1. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 2. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & -1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ 4. $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ 6. $X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 10. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

9. Розкласти визначник за елементами довільного рядка чи стовпця:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$.

10. Розклавши визначник за рядком або стовпцем, що складається лише з букв, обчислити:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

11. Обчислити визначник методом зведення до трикутного вигляду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

12. Розв’язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} -2 & x-3 \\ x & x-3 \end{vmatrix} = 0$ б) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

13. Знайти ранг матриць:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & -4 & 2 \\ 10 & 14 & -7 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2

Тема: Основні методи розв’язування систем лінійних рівнянь. Дослідження систем лінійних рівнянь на сумісність та визначеність.
Мета: засвоїти методи розв’язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера, матричним способом (з допомогою оберненої матриці), методом Гауса та алгоритм дослідження систем лінійних рівнянь на сумісність та визначеність.

При підготовці до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції за темою та відповідну рекомендовану літературу.

Теоретична частина:

1. Яка система лінійних алгебраїчних рівнянь називається сумісною, несумісною, визначеною, невизначеною?
2. Суть методу розв’язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера.
3. Суть матричного способу розв’язування систем лінійних рівнянь.
4. Суть методу Гауса.
5. Дослідження систем лінійних рівнянь на сумісність та визначеність.

Типові практичні завдання:

1. Розв’язати системи лінійних рівнянь: а) за формулами Крамера; б) матричним способом (з допомогою оберненої матриці); в) методом Гауса.

1. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -5, \\ x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

2. Дослідити систему на сумісність. Якщо система сумісна, то знайти її розв'язок:

1. $\begin{cases} -2x_1+2x_2+x_3=1, \\ -3x_1+3x_2=1, \\ 2x_1-x_2-5x_3=1. \end{cases}$

Відповідь: $\left(3;\dfrac{10}{3};\dfrac{1}{3}\right)$

2. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=2, \\ x_1-3x_2+2x_3=-3, \\ 3x_1+x_2=1. \end{cases}$

Відповідь: несумісна

3. $\begin{cases} 5x_1+8x_2+x_3=2, \\ 3x_1-2x_2+6x_3=-7, \\ 2x_1+x_2-x_3=-5. \end{cases}$

Відповідь: $(-3;2;1)$

4. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4, \\ 3x_1-5x_2+3x_3=1, \\ 2x_1+7x_2-x_3=8. \end{cases}$

Відповідь: $(1;1;1)$

5. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2, \\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=3, \\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5=9, \\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5=4. \end{cases}$

Відповідь: $\begin{cases} x_1, x_2 \in R, \\ x_3=5-8x_1+4x_2, \\ x_4=-3, \\ x_5=1+2x_1-x_2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2. \end{cases}$

Відповідь: $\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{11}(-2+x_3-9x_4), \\ x_2=\dfrac{1}{11}(10-5x_3+x_4), \\ x_3, x_4 \in Z. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-3x_4=2, \\ 4x_1+x_3-7x_4=3, \\ 2x_2-3x_3+x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-4x_3-2x_4=3. \end{cases}$

Відповідь: $\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{4}(3-x_3+7x_4), \\ x_2=\dfrac{1}{2}(1+3x_3-x_4), \\ x_3, x_4 \in Z. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2, \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5, \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3. \end{cases}$

Відповідь: несумісна

9. $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3, \\ x_1+2x_2-4x_4=-3, \\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22. \end{cases}$

Відповідь: $(-1;3;-2;2)$

10. $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=2. \end{cases}$

Відповідь: несумісна

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3

Тема: Вектори та дії над ними. Скалярний, векторний, мішаний добутки та їх застосування. Лінійна залежність та незалежність системи векторів. Розклад вектора за базисом.
Мета: **повторити поняття векторної та скалярної величини, поняття вектора та дій над векторами; показати застосовування скалярного, векторного та мішаного добутків до розв'язування задач, навчитись розкладати вектор по базису.**

При підготовці до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції за темою та відповідну рекомендовану літературу.

Теоретична частина:

1. Поняття вектора. Види векторів.
2. Лінійні операції над векторами, їх властивості.
3. Скалярний добуток двох векторів, його властивості.
4. Застосування скалярного добутку.
5. Алгебраїчні та геометричні властивості векторного добутку.
6. Застосування векторного добутку до обчислення площ.
7. Алгебраїчні та геометричні властивості мішаного добутку.
8. Застосування мішаного добутку до обчислення об'єму.
9. Поняття лінійної комбінації векторів.
10. Означення та властивості лінійної залежності векторів.
11. Означення лінійної незалежності векторів.
12. Умова колінеарності двох та компланарності трьох векторів.
13. Теорема про лінійну залежність будь-яких чотирьох векторів простору.
14. Поняття базису простору. Ортонормований базис.
15. Теорема про розклад вектора за базисними векторами.
16. Поняття координат вектора в даному базисі.
17. Координати суми векторів і добутку вектора на число.
18. Умова колінеарності двох векторів в координатах.
19. Умова компланарності трьох векторів в координатах.

Типові практичні завдання:

1. Дано вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Знайти: а) $\vec{a}+\vec{b};$ б) $\vec{a}-\vec{b};$ в) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$; г) скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$; д) векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$.

1. $\vec{a}\,(3;\ -2;1)$, $\vec{b}\,(-5;4;2);$
2. $\vec{a}\,(-4;\ -1;3)$, $\vec{b}\,(2;-4;1);$
3. $\vec{a}\,(-3;\ 2;4)$, $\vec{b}\,(1;-3;5);$
4. $\vec{a}\,(2;\ -1;4)$, $\vec{b}\,(3;-1;5);$
5. $\vec{a}\,(-6;\ 2;3)$, $\vec{b}\,(2;1;-4);$

2. Задано координати точок $A(0;\,-3;\,2)$, $\mathrm{B}(4;\,-2;\,3)$, $\mathrm{C}(1;\,-5;\,2)$, $\mathrm{D}(3;\,-4;\,4)$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, і $\overrightarrow{AD}$ і їх абсолютні величини;

б) координати вектора $3\,\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}} + 4\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$;

в) проекцію вектора $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ на вектор;

г) величину кута ABC.

3. Знайти площу трикутника *ABC*, що заданий координатами вершин:

1.	*A* (-5;2;-3)	*B* (-4;4;-5)	*C* (6;12;-1)
2.	*A* **(**-1;-4;-1**)**	*B* (0;-2;-3)	*C* (2;-3;1)
3.	*A* (0;-2;1)	*B* (1;0;-1)	*C* (11;8;3)
4.	*A* (-2;-1;8)	*B* (-4;0;6)	*C* (0;10;-2)
5.	*A* (-2;1;0)	*B* (3;-6;0)	*C* (4;11;2)
6.	*A* (1;6;-1)	*B* (0;3;1)	*C* (2;13;4)
7.	*A* (3;3;4)	*B* (2;0;-9)	*C* (5;6;12)
8.	*A* (0;-2;1)	*B* (2;-3;1)	*C* (4;-15;12)
9.	*A* (-4;4;-5)	*B* (0;-2;1)	*C* (6;-10;7)
10.	*A* (2;-3;1)	*B* (-2;-1; 8)	*C* (2;-3;1)

4. Знайти об’єм піраміди *ABCD*:

1. A (-3;4;-3);	B (3;-6; 0);	C (0;-2;1);	D (5;8;5).
2. A (-2;-3;-2);	B (-1;-5; -4);	C (5;6;12);	D (0;-2;1).
3. A (-4;5;-5);	B (0;-2;1);	C (2;-3;1);	D (-1;-5;-4).
4. A (5;6;12);	B (2;-3;1);	C (13;1;6);	D (-2;-1;8).
5. A (3;-6;0);	B (4;-15;12);	C (2;-3;1);	D (-3;4;-3).
6. A (0;-2;1);	B (5;6;12);	C (5;8;5);	D (-4;4;-5).
7.A (2;-3;1);	B (0;-2;1);	C (5;8;5);	D (2;-4;3).
8. A (5;6;12);	B (2;-3;1);	C (-4;5;-5);	D (-1;2;5).
9.A (-3;4;-3);	B (2;-3;1);	C (-3;4;-3);	D (0;-2;1).
10.A (4;-15;12)	B (0;-2;1);	C (2;-4;3);	D(5;6;12).

5. Встановити колінеарність векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і компланарність векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

а) $\overline{a}(3;6;3), \overline{b}(1;2;1), \overline{c}(2;3;1)$;   б) $\overline{a}(-2;1;2), \overline{b}(1;2;1), \overline{c}(-1;2;3)$

6. Знайти лінійно незалежні системи векторів:

а) $\vec{a}_1 = (1,\quad 2,\quad 3,\quad 4), \vec{a}_2 = (2,\quad 3,\quad 4,\quad 5), \vec{a}_3 = (3,\quad 4,\quad 5,\quad 6)$,

$\vec{a}_4 = (4, \quad 5, \quad 6, \quad 7).$

б) $\vec{a}_1 = (1, \quad 2, \quad 3), \vec{a}_2 = (2, \quad 3, \quad 4), \vec{a}_3 = (3, \quad 2, \quad 3), \vec{a}_4 = (4, \quad 3, \quad 4),$ $\vec{a}_5 = (1, \quad 1, \quad 1).$

в) $\vec{a}_1 = (5, \quad 2, \quad -3, \quad 1), \vec{a}_2 = (4, \quad 1, \quad -2, \quad 3), \vec{a}_3 = (1, \quad 1, \quad -1, \quad -2),$ $\vec{a}_4 = (3, \quad 4, \quad -1, \quad 2).$

г) $\vec{a}_1 = (2, \quad 1, \quad -3, \quad 1), \vec{a}_2 = (4, \quad 2, \quad -6, \quad 2), \vec{a}_3 = (6, \quad 3, \quad -9, \quad 3),$ $\vec{a}_4 = (1, \quad 1, \quad 1, \quad 1).$

Відповідь:

а) будь-які вектори;

б) будь-які три вектори, крім $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_5$ і $\vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5$;

в) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$, тому що $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$;

г) 1) $\vec{a}_1, \vec{a}_1$; 2) $\vec{a}_2, \vec{a}_4$; 3) $\vec{a}_3, \vec{a}_4$.

4. Дано чотири вектори $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, $\vec{d}(d_1, d_2, d_3)$ у деякому базисі. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі:

1.$\vec{a}(2,1,0), \vec{b}(4,3,-3), \vec{c}(-6,5,7), \vec{d}(3,5,-2)$;

2.$\vec{a}(1,0,5), \vec{b}(3,2,7), \vec{c}(5,0,9), \vec{d}(-4,2,-12)$;

3.$\vec{a}(-2,1,7), \vec{b}(3,-3,8), \vec{c}(5,4,-1), \vec{d}(18,25,1)$;

4.$\vec{a}(3,4,-3), \vec{b}(-5,5,0), \vec{c}(2,1,-4), \vec{d}(8,-16,17)$;

5.$\vec{a}(4,3,-1), \vec{b}(5,0,4), \vec{c}(2,1,2), \vec{d}(0,12,-6)$;

6.$\vec{a}(2,4,-6), \vec{b}(1,3,5), \vec{c}(0,-3,7), \vec{d}(3,2,52)$;

7.$\vec{a}(1,3,5), \vec{b}(0,2,0), \vec{c}(5,7,9), \vec{d}(0,4,16)$;

8.$\vec{a}(-2,3,5), \vec{b}(1,-3,4), \vec{c}(7,8,-1), \vec{d}(1,20,1)$;

9.$\vec{a}(3,-5,2), \vec{b}(4,5,1), \vec{c}(-3,0,-4), \vec{d}(-4,5,-16)$;

10.$\vec{a}(4,5,2), \vec{b}(3,0,1), \vec{c}(-1,4,2), \vec{d}(5,7,8)$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4

Тема: Пряма на площині. Пряма та площина у просторі.
Мета: вивчити різні рівняння прямої на площині, прямої та площини у просторі; навчитися складати їх рівняння та встановлювати взаємне розташування, розвиток продуктивного мислення здобувачів освіти та виховання математичної культури.

При підготовці до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції за темою та відповідну рекомендовану літературу.

Теоретична частина:

1. Рівняння прямої, що проходить через задану точку паралельно даному вектору (канонічне рівняння прямої).
2. Параметричне рівняння прямої
3. Рівняння прямої, що проходить через задану точку, або рівняння пучка прямих.
4. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
5. Рівняння прямої, що проходить через дві точки.
6. Рівняння прямої у відрізках на осях.
7. Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.
8. Нормальне рівняння прямої.
9. Загальне рівняння прямої.
10. Зведення загального рівняння прямої до нормального вигляду.
11. Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.
12. Відхилення та відстань точки до прямої.
13. Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.
14. Параметричне рівняння площини.
15. Загальне рівняння площини. Дослідження неповного рівняння площини.
16. Рівняння площини, що проходить через три точки.
17. Рівняння площини у відрізках на осях.
18. Нормальне рівняння площини.
19. Зведення загального рівняння площини до нормального вигляду.
20. Кут між двома площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин.
21. Відхилення та відстань точки від площини.
22. Рівняння прямої, що проходить через задану точку паралельно заданому вектору.
23. Параметричне рівняння прямої.
24. Пряма лінія як перетин двох площин.

25. Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих у просторі.

26. Умова перетину двох прямих у просторі.

27. Перетин прямої з площиною.

28. Кут між прямою та площиною. Умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини.

Типові практичні завдання:

1. Дано координати вершин трикутника ABC . Знайти: 1) рівняння сторони AB ; 2) рівняння висоти CH ; 3) рівняння медіани BM ; 4) точку перетину медіани BM і висоти CH .

1. A (7;3);	B (3;-1);	C (3;5);
2. A (1;-1);	B (2;5);	C (-3;3);
3. A (3;6);	B (6;1);	C (6;2);
4. A (1;3);	B (1;6);	C (6;2);
5. A (4;5);	B (2;3);	C (-3;4);

2. Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти: 1) довжину сторони A_1A_2; 2) рівняння прямої A_1A_2; 3) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 4) рівняння висоти A_4O.

1. A_1 (4; 2; 5);	A_2 (0;7; 2);	A_3 (0; 2; 7);	A_4 (1; 5; 0).
2. A_1 (4; 4; 10);	A_2 (4; 10; 2);	A_3 (2; 8; 4);	A_4 (9; :4; 9).
3. A_1 (4; 6; 5);	A_2 (6; 9; 4);	A_3 (2; 10; 10);	A_4 (7; 5; 9).
4. A_1 (3; 5; 4);	A_2 (8; 7; 4);	A_3 (5; 10; 4);	A_4 (4; 7; 8).
5. A_1 (10; 6; 6);	A_2 (-2; 8; 2);	A_3 (6; 8; 9);	A_4 (7; 10; 3).

3. Дано координати вершин трикутної піраміди ABCD. Знайти:

1. Загальне рівняння площини ABC та координати її нормального вектора;
2. Рівняння площини ABC у відрізках;
3. Канонічні та параметричні рівняння прямої AB;
4. Кут між площинами ABC та ABD;
5. Відстань від точки D до грані ABC;
6. Кут між прямими AB і AC;
7. Канонічні рівняння висоти DH піраміди ABCD;
8. Координати точки перетину висоти DH з гранню ABC;
9. Кут між ребром AD і гранню ABC.

1. A (-3;4;-3); B (3;-6; 0); C (0;-2;1); D (5;8;5).
2. A (-2;-3;-2); B (-1;-5; -4); C (5;6;1); D (0;-2;1).
3. A (-4;5;-5); B (0;-2;1); C (2;-3;1); D (-1;-5;-4).
4. A (5;6;1); B (2;-3;1); C (3;1;6); D (-2;-1;8).
5. A (3;-6;0); B (4;-5;2); C (2;-3;1); D (-3;4;-3).
6. A (0;-2;1); B (5;6;2); C (5;8;5); D (-4;4;-5).
7. A (2;-3;1); B (0;-2;1); C (5;8;5); D (2;-4;3).
8. A (5;6;1); B (2;-3;1); C (-4;5;-5); D (-1;2;5).
9. (-3;4;-3); B (2;-3;1); C (-3;4;-3); D (0;-2;1).
10. A (4;-15;2) B (0;-2;1); C (2;-4;3); D(5;6;1).

4. Знайти координати чотирикутника обмеженого лініями. Зробити рисунок:

1. $7x + 3y + 21 = 0,\quad x + 3y - 3 = 0,\quad x = 0,\quad y = -2$.
2. $x - y + 4 = 0,\quad 4x + y - 4 = 0,\quad x = -2,\quad y = 0.$
3. $5x + 3y + 15 = 0,\quad 2x - y - 2 = 0,\quad x = 0,\quad y = 1.$
4. $5x - 4y - 20 = 0,\quad x + y + 2 = 0,\quad x = 2,\quad y = 0.$
5. $3x + y + 3 = 0,\quad 5x - 3y - 15 = 0,\quad x = 0,\quad y = -1.$
6. $2x + 3y - 6 = 0,\quad 6x - 5y + 30 = 0,\quad x = 0,\quad y = -7.$
7. $x - y + 6 = 0,\quad 5x + y - 5 = 0,\quad x = -2,\quad y = 0.$
8. $4x - 5y - 20 = 0,\quad x + y + 1 = 0,\quad x = 3,\quad y = 0.$
9. $x + 3y + 9 = 0,\quad 3x - 2y - 6 = 0,\quad x = 0,\quad y = 2.$
10. $7x + 2y + 14 = 0,\quad 5x - 4y + 20 = 0,\quad x = -1,\quad y = 0.$

5. З'ясувавши, що прямі $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{4}$ та $x + 7y + z - 2 = 0$ паралельні, обчислити відстань d між ними.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 5

Тема: Лінії другого порядку. Їх форма та канонічне рівняння. Дослідження загального рівняння лінії другого порядку.

Мета: ознайомитись із кривими другого порядку: колом, еліпсом, гіперболою та параболою.

При підготовці до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції за темою та відповідну рекомендовану літературу.

Теоретична частина:

1. Коло. Канонічне та загальне рівняння.
2. Еліпс. Канонічне рівняння еліпса. Ексцентриситет та директриси еліпса.
3. Теорема про відношення фокальних радіусів довільної точки еліпса до відстаней цієї точки від відповідних директрис.
4. Дотична до еліпса.
5. Оптична властивість еліпса.
6. Гіпербола. Канонічне рівняння гіперболи
7. Теорема про асимптоти гіперболи.
8. Ексцентриситет та директриси гіперболи.
9. Теорема про відношення фокальних радіусів довільної точки еліпса до відстаней цієї точки до відповідних директрис.
10. Дотична до гіперболи.
11. Парабола. Канонічне рівняння параболи.
12. Дотична до параболи.
13. Оптична властивість параболи.
14. Спільне означення та спільне рівняння кривих другого порядку.

Типові практичні завдання:

1. Знайти координати центра і радіус кола. Побудувати його.

1. $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$
2. $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$
3. $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$
4. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$
5. $x^2 + y^2 + 4y = 0$
6. $x^2 + y^2 + 10x - 6y - 2 = 0$
7. $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$
8. $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$
9. $x^2 + y^2 - 12x = 0$
10. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

2. Знайти довжини осей, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис (для еліпса), рівняння асимптот (для гіперболи). Зробити рисунок.

1. $36x^2 + 24y^2 - 864 = 0$
2. $25x^2 - 16y^2 - 400 = 0$
3. $26x^2 + 25y^2 - 650 = 0$
4. $9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$
5. $16x^2 + 9y^2 - 144 = 0$
6. $x^2 + 36y^2 - 36 = 0$
7. $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$
8. $49x^2 - 16y^2 - 784 = 0$
9. $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$
10. $4y^2 - 9x^2 - 36 = 0$

3. Визначити тип кривої, що задана рівнянням:

1. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0.$
2. $5x^2 + 9y^2 + 10x - 36y - 4 = 0.$
3. $9x^2 - 2y^2 + 18x + 8y + 4 = 0.$
4. $y^2 - 6x - 4y + 4 = 0.$
5. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0.$

4. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, якщо :

а) парабола розташована симетрично відносно осі *Ox* і проходить через точку (9; 6);

б) парабола розташована симетрично відносно осі *Ox* і проходить через точку (-2; 4);

в) парабола розташована симетрично відносно осі *Oy* і проходить через точку (1; 2);

г) парабола розташована симетрично відносно осі *Oy* і проходить через точку (2; -2).

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 6

Тема: Основні числові системи. Границя числової послідовності. Границя функції в точці. Неперервність функції.
Мета: вироблення умінь та удосконалення навичок знаходження границь функцій; навчитись розкривати невизначеності; ознайомитись із застосуванням чудових границь; вироблення умінь та удосконалення навичок дослідження функцій на неперервність, визначення характеру точок розриву, побудови графіків функцій на основі дослідження.

При підготовці до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції за темою та відповідну рекомендовану літературу.

Теоретична частина:

1. Поняття функції, способи задання функції. Область визначення та значень функції.
2. Границя функції в точці, геометрична інтерпретація границі.
3. Односторонні границі.
4. Розкриття невизначених виразів типу $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty-\infty]$ для алгебраїчних функцій (Невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ для раціональних функцій, невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ для ірраціональних функцій).
5. Застосування границь: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$
6. Поняття неперервності функції у точці, на інтервалі. Теорема про арифметичні дії над неперервними функціями.
7. Класифікація точок розриву функції.
8. Властивості функцій неперервних на відрізку.

Типові практичні завдання:

1. Знайти границі:
2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x^3-3x}{2-x^2+8x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+6}-\sqrt{8-x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} tg4xctg2x$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-3x}{5-3x}\right)^{x-4}$
3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^6+x^4-7}{7x^6-3x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-1}{xtg2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+2}{4x-3}\right)^{-2x+3}$
4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-4}{2x^4+5x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{x+4}$
5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+x}{4-x^4+2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{2\sin^2 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-x-2}{-x+4}\right)^{4x+4}$
6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+1}{3x^2+4x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{3x^2-x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-7}\right)^{x+3}$
7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{xtg5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5+2x}{2x-3}\right)^{x+5}$

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{4x^2+3x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{-2-x}}{x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{1-\cos 6x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5+x}{x-3}\right)^{3x-2}$

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+4}{4x^4+2x^2+3}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 3x}{xtgx}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^2+4}$

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x-3}{x-4x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 4x}{tg^2 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{3x+2}$

2. Дослідити функцію на неперервність вияснити характер точок розриву, побудувати графік:

1. $f(x)=\begin{cases} x, \text{ якщо } x\le 0, \\ x^2+1, \text{ якщо } x>0. \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x<0, \\ 3x^2+1, \text{ якщо } x\ge 0. \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ якщо } x\le 2, \\ x^3+2, \text{ якщо } x>2. \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} -x, \text{ якщо } x\le 0, \\ x, \text{ якщо } 0<x\le 1, \\ -x+3, \text{ якщо } x>1. \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} -x, \text{ якщо } x\le 0, \\ x^2+1, 0<x\le 1, \\ 2, x>1. \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} -3, \text{ якщо } x<-2, \\ -x^2+1, \text{ якщо } -2\le x<2, \\ 3, \text{ якщо } x\ge 2. \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} -x, \text{ якщо } x\le 0, \\ x^2, \text{ якщо } 0<x\le 2, \\ x+1, \text{ якщо } x>2. \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ якщо } 0\le x\le 1; \\ 2-x, \text{ якщо } 1<x\le 2. \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, \text{ якщо } 0\le x\le 1; \\ 4-2x, \text{ якщо } 1<x<2{,}5; \\ 2x-7, \text{ якщо } 2{,}5\le x<\infty. \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} x+4, \text{ якщо } x<-1, \\ x^2+2, \text{ якщо } -1\le x<1, \\ 2x, \text{ якщо } x\ge 1. \end{cases}$

3. Дослідити функцію на неперервність вияснити характер точок розриву:

1. $y=\dfrac{-6x}{(x+3)^2}$ $\qquad y=e^{\frac{x}{x+2}}$

2. $y=\dfrac{3-x}{(x+1)^3}$ $\qquad y=2^{\frac{2x}{3-x}}$

3. $y=\dfrac{5+2x}{(x-2)^4}$ $\qquad y=3^{\frac{1}{2x+1}}$

4. $y=\dfrac{-2x+1}{(x-1)^2}$ $\qquad y=e^{\frac{x+1}{x-2}}$

5. $y=\dfrac{4-3x}{(x-3)^3}$ $\qquad y=4^{\frac{2x}{x-1}}$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 7

Тема: Похідна першого та вищих порядків. Диференціал. Застосування диференціалу до наближених обчислень.

Мета: узагальнити та систематизувати знання здобувачів освіти стосовно поняття похідної функції, правил диференціювання, засвоїти техніку застосування диференціалу до наближених обчислень.

При підготовці до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції за темою та відповідну рекомендовану літературу.

Теоретична частина:

1. Поняття похідної. Задачі, які приводять до поняття похідної. Геометричний та механічний зміст похідної.
2. Таблиця похідних. Основні правила диференціювання.
3. Диференціал функції.
4. Похідна від складної, неявної, оберненої, степенево-показникової та параметрично заданої функцій.
5. Похідні та диференціали вищих порядків.
6. Застосування диференціалу до наближених обчислень.

Типові практичні завдання:

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні функцій:

1. а) $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; б) $y = \dfrac{1+tgx}{1-tgx}$; в) $x\sin y - y\cos x = 0$; г) $y = x^{\frac{2}{x}}$;

2. а) $y = \dfrac{3x}{\sqrt[3]{2+x}} - 6\sqrt[3]{2+x}$; б) $y = \sin^3\sqrt{2x+1}$; в) $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$; г) $y = x^{e^x}$;

3. а) $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; б) $y = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$; в) $y\sin x + \cos(x-y)$; г) $y = x^{\arcsin x}$;

4. а) $y = \sqrt[3]{x^4+5x} - \sqrt[4]{(5x-1)^3}$; б) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$; в) $\cos(x-y) - 2x + 4y = 0$; г) $y = x^{\cos^2 x}$;

5. а) $y = x + \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$; б) $y = \sin\sqrt{x^2+x}$; в) $xe^y + ye^x = xy$; г) $y = x^{\frac{1}{x^2}}$;

6. а) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \dfrac{5}{\sqrt[4]{(x^3+2)^3}}$; б) $y = \left(e^{\sin x} - x\right)^2$; в) $\cos(xy) = \dfrac{y}{x}$; г) $y = 2x^{\sqrt{x}}$;

7. а) $y = x\sqrt[3]{\dfrac{2}{1+x}}$; б) $y = \dfrac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$; в) $xy + \ln y - 2\ln x = 0$; г) $y = (\ln x)^x$;

8. а) $y = \sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$; б) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$; в) $e^{x+y} = \sin\dfrac{y}{x}$; г) $y = (\sin x)^{\cos x}$;

9. а) $y=\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$; б) $y=x\arcsin\dfrac{2x+1}{3}$; в) $(x+y)^2=(x-2y)^3$; г) $y=(arctg2x)^{\sin 3x}$;

10. а) $y=\dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$; б) $y=e^{-x^2}\cos^3(2x+3)$; в) $y\ln x-x\ln y=x+y$; г) $y=(\sin 3x)^{\sqrt{x}}$.

2. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$ та $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ (випадок а), б)), похідну від неявної функції (випадок в)):

1. а) $y=\dfrac{x-1}{x+1}e^{-x}$; б) $\begin{cases}x=t+\ln\cos t\\ y=t-\ln\sin t\end{cases}$; в) $\dfrac{2x-y}{3x+y}=\ln(x+y)$;

2. а) $y=arctgx^2$; б) $\begin{cases}x=2t-\sin 2t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$; в) $\dfrac{y}{x-3}+\cos y=\ln x$;

3. а) $y=x^2\ln x$; б) $\begin{cases}x=t+\dfrac{1}{2}\sin 2t\\ y=\cos^3 t\end{cases}$; в) $tgx+ctgy=\dfrac{y}{x}$;

4. а) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; б) $\begin{cases}x=t^5+2t\\ y=t^3+8t-1\end{cases}$; в) $7+arctgxy=x+\ln y$;

5. а) $y=\ln ctg4x$; б) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{1}{2}t^2+t\\ y=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{t}\end{cases}$; в) $\dfrac{x}{\sin y}+x^3=2y^5$;

6. а) $y=\sqrt[3]{(1-x)^2}$; б) $\begin{cases}x=\arcsin(t^2-1)\\ y=\arccos(2t)\end{cases}$; в) $2+3\arcsin xy=x^4+4y$;

7. а) $y=\cos^2 x$; б) $\begin{cases}x=t^2+t+1\\ y=t^3+t\end{cases}$; в) $3^x+2^y=\arcsin xy$;

8. а) $y=xe^{\frac{1}{x}}$; б) $\begin{cases}x=ctgt\\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t}\end{cases}$; в) $\dfrac{x}{y+1}-\sin\dfrac{x}{y}=2y$;

9. а) $y=xe^{-x}$; б) $\begin{cases}x=\dfrac{2-t}{2+t^2}\\ y=\dfrac{t^2}{2+t^2}\end{cases}$; в) $3x^2+2y^5=ctgxy$;

10. а) $y=\ln\ln x$. б) $\begin{cases}x=2\cos^3 2t\\ y=\sin^3 2t\end{cases}$. в) $xy=\ln x+\cos y$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 8

Тема: Застосування похідної до дослідження функцій.
Мета: узагальнити та систематизувати знання здобувачів освіти стосовно дослідження функцій однієї змінної, побудови графіків; опанувати технікою обчислення границь з допомогою похідної.

При підготовці до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції за темою та відповідну рекомендовану літературу.

Теоретична частина:

1. Дослідження функцій на монотонність. Достатня умова монотонності.
2. Екстремум функції, необхідна та достатні умови існування екстремуму функції.
3. Знаходження найбільшого і найменшого значення функції на проміжку.
4. Опуклість функції, точки перегину.
5. Асимптоти графіка функції, їх види.
6. Загальна схема дослідження функцій та побудова їх графіків.
7. Розкриття невизначеностей з допомогою правила Лопіталя.

Типові практичні завдання:

1. Знайти границі, використовуючи правила Лопіталя:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg}x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-в^x}{x\sqrt{1-x^2}}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot\operatorname{ctg}x$.
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-e^x}{\operatorname{tg}x-x}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\cdot\operatorname{ctg}x)$.

2. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=f(x)$ на відрізку $[a,b]$:

1. $y=\dfrac{x+6}{x^2+13},[-5;5]$;
2. $y=\dfrac{1}{2}x+\cos x,\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$;
3. $y=\dfrac{x-3}{x^2+16},[-5;5]$;
4. $y=\dfrac{1}{2}x-\sin x,\left[\dfrac{3}{2}\pi;2\pi\right]$;
5. $y=4-x-\dfrac{4}{x^2},[1;4]$;
6. $y=2\sqrt{x}-x,[0;4]$;

7. $y=\dfrac{8x+4}{x^2-15},\left[\dfrac{1}{2};2\right]$;

8. $y=\dfrac{10x}{1+x^2},[0;3]$;

9. $y=x-4\sqrt{x}+5,[1;9]$;

10. $y=\dfrac{1}{2}x+\cos x,\left[-2\pi;-\dfrac{3}{2}\pi\right]$.

3. Дослідити методами диференціального числення функцію та побудувати її графік:

1. $y=\dfrac{x^3-4}{4x^2}$;

2. $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$;

3. $y=\dfrac{x^2-11}{4x-3}$;

4. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$;

5. $y=\dfrac{x^2-6x+4}{3x-2}$;

6. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$;

7. $y=\dfrac{x^3+16}{x}$;

8. $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$;

9. $y=\dfrac{12x}{9+x^2}$;

10. $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 9

Тема: Функції багатьох змінних. Елементи диференціального числення функцій двох змінних.
Мета: засвоїти поняття функції багатьох змінних, опанувати технікою знаходження частинних похідних, дослідженням функції двох змінних на екстремум.

При підготовці до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції за темою та відповідну рекомендовану літературу.

Теоретична частина:

1. Означення, область визначення, границя функції декількох незалежних змінних.
2. Алгоритм дослідження функції двох змінних на екстремум.

Типові практичні завдання:

Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

1. $z = -2x^2 + xy - 2y^2 + 5x - 5y - 8$;
2. $z = 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 10x + 8y + 7$;
3. $z = x^2 + 6xy + 2y^2 - 4x + 2y + 5$;
4. $z = 3x^2 - 2xy + 4y^2 - 8x + 10y - 3$;
5. $z = -3x^2 + 4xy - 2y^2 + 10x - 8y + 2$;
6. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 2$;
7. $z = x^2 - 3xy + y^2 - 5x + 5y + 3$;
8. $z = -x^2 + xy - y^2 - 9x + 6y + 5$;
9. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 5$;
10. $z = 2x^2 + 3xy + y^2 + 7x + 5y - 7$
11. $z = x^2 + xy + y^2 + 6x - 9y + 9$
12. $z = x - y(3 - x - y) + 5$
13. $z = x(x + y - 3) + y(-6 + y)$
14. $z = 2x^2 - y^2 - 8x - 12y - 7$
15. $z = (x + y)^2 - xy + x - y + 1$
16. $z = -(x + y)^2 + xy + 3x$
17. $z = -x^2 - xy - y^2 + 3x + 6y + 5$
18. $z = x^3 + y^3 - 3xy$
19. $z = x^2 y(4 - x - y)$
20. $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 10

Тема: Умовний екстремум функції двох незалежних змінних. Метод найменших квадратів.
Мета: опанувати технікою дослідження функції двох незалежних змінних на умовний екстремум; використанням методу найменших квадратів до розв'язування прикладних задач.

При підготовці до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції за темою та відповідну рекомендовану літературу.

Теоретична частина:

1. Умовний екстремум функції двох незалежних змінних. Метод множників Лагранжа.
2. Метод найменших квадратів, його основна ідея. Лінія регресії. Аналітичний запис умови мінімізації суми квадратів відхилень вихідного параметра об'єкта від моделі.

Типові практичні завдання:

1. Знайти екстремум функції двох незалежних змінних, використовуючи метод множників Лагранжа:

1. $z = x^2 - xy + y^2 + x + y - 8,\ \ x + y + 3 = 0$
2. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},\ \ x + y = 2$
3. $z = xy,\ \ x + y = 1$
4. $z = 2x + y,\ \ x^2 + y^2 = 1$
5. $z = y - x^2,\ \ x^2 + y^2 = 1$
6. $z = 5 - 3x - 4y,\ \ x^2 + y^2 = 25$

2. Знайти емпіричну формулу, використовуючи метод найменших квадратів для функції, що задана таблицею:

1.

x	2,8	2,2	3	3,5	3,7	4
y	6,7	6,9	7,2	7,3	8	8,8

2.

x	1	2	3	4	5	6
y	5,7	6,7	5,2	3,2	3,7	3,5

3.

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y	0,29	0,81	1,26	1,85	2,5	3,01

4.

x	1	2	3	4	5	6
y	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2

5.

x	15	20	25	30	35	40
y	18	19	20	31	22	23

6.

x	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,6
y	0,79	0,84	0,88	0,91	0,95	0,98

7.*x*	2,6	2,2	3	3,4	3,6	3,8
y	6,6	6,8	7	7,3	7,5	8

8.

x	49	50	52	54	55	56
y	70	81	94	102	120	145

9.

x	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
y	5,7	5,9	6,2	6,3	8	7,8

10.

x	60	58	57	55	56	58
y	56	53	54	51	54	59

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 11

Тема: Первісна функції та невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування невизначених інтегралів.
Мета: узагальнити та систематизувати знання здобувачів освіти стосовно понять первісної та невизначеного інтегралу; опанувати технікою обчислення інтегралів методами: безпосереднього інтегрування, заміни змінних, інтегрування частинами.

При підготовці до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції за темою та відповідну рекомендовану літературу.

Теоретична частина:

1. Поняття первісної функції та невизначеного інтегралу.
2. Властивості невизначеного інтегралу.
3. Основні методи обчислення невизначеного інтегралу (метод безпосереднього інтегрування, метод заміни змінних, метод інтегрування частинами).

Типові практичні завдання:

1. Методом безпосереднього інтегрування знайти інтеграли:

1. $\int (4x^3 - 6x^5 + 3x - 5)dx.$

2. $\int (1 + e^{3x})^2 \cdot e^{3x}\, dx$

3. $\int (x - 3)(x^2 + 1)dx.$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{7 - x^2}}$

5. $\int (\sqrt{x} - x + 1)(1 + \sqrt{x})dx.$

6. $\int \frac{dx}{3x^2 - 25}$

7. $\int \frac{\sqrt{x} - x^2 e^x + x^5}{x^2}dx.$

8. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}dx;$

9. $\int \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}}dx$

10. $\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}dx$

2. Методом інтегрування частинами знайти інтеграли:

1. $\int (2x - 1)\, sin\, x\, dx.$

2. $\int x\, cos\frac{x}{2} dx.$

4. $\int (x + 1)e^{-x}dx.$

5. $\int x5^x dx.$

6. $\int arcsin\, x\, dx.$

7. $\int (x-3)\cdot \arcsin x dx$.

8. $\int arcctg\, x\, dx$.

9. $\int \frac{xdx}{sin^2 x}$.

10. $\int x^2 e^{3x} dx$.

11. $\int e^{2x}\cdot \cos x dx$.

12. $\int (x^2-2x)\cdot \cos 2x\, dx$.

13. $\int (x+2)^2 \cdot e^{-3x} dx$.

3. Методом підстановки знайти інтеграли:

1. $\int \frac{\sqrt{arctg2x}}{1+4x^2} dx$.

2. $\int \frac{e^x+3x^2}{\sqrt{x^3+e^x}} dx$

3. $\int \frac{\sqrt[3]{ctg2x}}{sin^2 2x} dx$

4. $\int \frac{1+\cos x}{\sqrt{x+\sin x}} dx$

5. $\int x^2 \cdot \sqrt{2x^3+8} dx$

6. $\int e^{\cos 5x}\cdot \sin 5x dx$

7. $\int \frac{cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

8. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

9. $\int \frac{tg^3 5x}{cos^2 5x} dx$.

10. $\int \frac{lnx\, dx}{x(1-ln^2 x)}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 12

Тема: Інтегрування раціональних, ірраціональних та тригонометричних функцій.
Мета: Опанувати технікою обчислення інтегралів від раціональних, ірраціональних та тригонометричних функцій.

При підготовці до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції за темою та відповідну рекомендовану літературу.

Теоретична частина:

1. Поняття дробово-раціональної функції та правильного алгебраїчного дробу.
2. Розклад правильного раціонального дробу на суму елементарних раціональних дробів.
3. Загальне правило інтегрування раціональних функцій.
4. Інтегрування ірраціональних функцій.
5. Інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції.
6. Універсальна підстановка. Використання тригонометричних перетворень.

Типові практичні завдання:

1. Знайти інтеграли від раціональних функцій:

2. $\int \frac{dx}{(x^2-4)(x+3)}$

3. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}.$

4. $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}.$

5. $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$

6. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx.$

7. $\int \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}.$

8. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx.$

9. $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx.$

11. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}.$

12. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$

13. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$

14. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$

15. $\int \frac{3-4x}{(x-1)\cdot(x^2-3x+2)}dx$

16. $\int \frac{3x^3-2x^2+x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx$

17. $\int \frac{x^3+7x-15}{(x-2)^2(x^2+x+1)}dx$

18. $\int \frac{3x^3+10x^2+14x+5}{(x+1)^2(x^2+3x+4)}dx$

10. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx.$

11. $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+1)}.$

19. $\int \frac{4x^3-12x^2+12x-36}{(x-1)^2(x^2+7)}dx$

20. $\int \frac{3x^3-2x^2+6x-7}{(x^2-x+4)(2x^2-x+1)}dx$

2. Знайти інтеграли від ірраціональних функцій:

1. $\int \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[8]{x}}{x(\sqrt[4]{x}+1)}dx.$
2. $\int \frac{xdx}{1+\sqrt{2x+1}}$
3. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{3x+1}}.$
4. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}-1}$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-10)^3}}$
7. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx.$
8. $\int x^5\cdot\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx.$
9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$
10. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$
11. $\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}.$
12. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}.$
13. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+x}dx$
14. $\int \frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-1}dx$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+1)^2}-\sqrt{5x+1}}$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}.$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+3x}-\sqrt{2+3x}},$
18. $\int \frac{1+\sqrt[4]{5-2x}}{\sqrt{5-2x}}dx,$
19. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$
20. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx,$

3. Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

1. $\int \sin^3 x\cos^5 xdx.$
2. $\int \cos^4 x\sin^3 xdx.$
3. $\int \sin^5 xdx.$
4. $\int \cos^5 xdx.$
5. $\int \mathrm{tg}^5 xdx.$
6. $\int (1-\sin 2x)^2dx.$
11. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$
12. $\int \frac{\sin xdx}{(1-3\cdot\cos x)^2}$
13. $\int \frac{dx}{4+\cos x}$
14. $\int \sin^2 x\cdot\cos^2 xdx$
15. $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$
16. $\int \frac{1+\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 13

Тема: Визначений інтеграл та його застосування. Невласні інтеграли.
Мета: Опанувати технікою обчислення визначених та невласних інтегралів.

При підготовці до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції за темою та відповідну рекомендовану літературу.

Теоретична частина:

1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла.
2. Означення визначеного інтегралу, геометричний зміст.
3. Властивості визначеного інтегралу. Інтеграл зі змінною верхнею межею. Формула Ньютона – Лейбніца.
4. Методи обчислення визначеного інтегралу (заміна змінної, інтегрування частинами).
5. Застосування визначеного інтегралу до обчислення площі плоскої фігури в системі декартових координат.
6. Невласні інтеграли по нескінчених проміжках та від необмежених функцій: означення, властивості.
7. Ознаки збіжності невласних інтегралів.

Типові практичні завдання:

1. Обчислити означений інтеграл:

1. $\int_{-1}^{2}\left(x^3-6x^2+x\right)dx$

2. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin 3x dx$

3. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos 4x dx$

4. $\int_{2}^{9}\frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}},$

5. $\int_{0}^{1}\frac{xdx}{1+x^4},$

6. $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx,$

11. $\int_{0}^{1}xe^{-x}dx$

12. $\int_{0}^{1}xe^{-x}dx$

13. $\int_{0}^{\pi/4}x\cos x dx$

14. $\int_{0}^{\pi/4}\sin x\sin 7x dx$

15. $\int_{1}^{3}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$

16. $\int_{1}^{2}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx,$

7. $\int_{-1}^{1} x\,arctgx\,dx,$

17. $\int_{0}^{2\pi}(3-7x^2)\cos 2x\,dx,$

8. $\int_{4}^{9}\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx,$

18. $\int_{1}^{e}\frac{\ln^2 x}{x}dx,$

9. $\int_{0}^{1}\frac{x^3}{x^2+1}dx,$

19. $\int_{0}^{1}x^3\sqrt{x^4+1}dx$

10. $\int_{0}^{\pi/2}\sqrt{\cos x}\sin x\,dx$

20. $\int_{0}^{\pi/2}\sqrt{\cos^3 x}\sin x\,dx$

2. Обчислити невласний інтеграл, або довести його розбіжність:

1. $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+5},$

2. $\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}},$

3. $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x},$

4. $\int_{0}^{3}\frac{dx}{(x-2)^2},$

5. $\int_{-3}^{2}\frac{dx}{(x+3)^2},$

6. $\int_{1}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2},$

7. $\int_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}},$

8. $\int_{-\infty}^{-3}\frac{xdx}{(x^2+1)^2},$

9. $\int_{0}^{+\infty}x\cdot e^{-x^2}dx,$

10. $\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}.$

3. За допомогою визначеного інтегралу обчислити площу фігури, яка обмежена лініями (зробити рисунок):

1. $y=-(x+1)^2+1, \quad x=-y,$
2. $y=-x^2+2x+3, \quad y=0, \quad y=\frac{2}{3}x, \quad x\geq 0,$
3. $y=-x^2+4, \quad y=2x+4, \quad y=0,$
4. $y=x^2, \quad y=(x-6)^2-4, \quad y=0,$
5. $y=\sqrt{x}, \quad y=-x+2, \quad y=0,$
6. $y=-x^2+4, \quad y=-(x+3)^2+9, \quad y=0,$
7. $x^2-6x-4y+9=0, \quad x-2y+9=0,$
8. $x^2-6x-2y+9=0, \quad 3x-y-9=0,$
9. $x^2-2x-4y+5=0, \quad x-2y+13=0,$
10. $x^2-2x+y+1=0, \quad x-y-3=0.$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 14

Тема: Основні поняття теорії диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння першого порядку: із відокремленими та з відокремлюваними змінними, однорідні, лінійні.

Мета: вироблення умінь та удосконалення навичок розв'язування диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними, диференціальних рівнянь, що зводяться до них, однорідних та лінійних диференціальних рівнянь; розвиток продуктивного мислення здобувачів освіти та виховання математичної культури.

При підготовці до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції за темою та відповідну рекомендовану літературу.

Теоретична частина:

1. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь.
2. Що називають порядком диференціального рівняння?
3. Який вигляд має диференціальне рівняння першого порядку, яке розв`язане відносно похідної?
4. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням першого порядку?
5. Яка функція називається розв'язком диференціального рівняння першого порядку?
6. Поняття загального та частинного розв'язку диференціального рівняння.
7. Як із загального розв'язку диференціального рівняння знайти частинний розв`язок?
8. Теорема Коші про існування та єдність розв'язку.
9. Геометричний зміст диференціального рівняння.
10. Який загальний вигляд диференціального рівняння з відокремленими змінними?
11. Який загальний вигляд диференціального рівняння зі змінними, що можна відокремити?
12. Поняття однорідного диференціального рівняння.
13. Якою заміною можна звести однорідне диференціальне рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними?
14. Назвіть відомі вам типи диференціальних рівнянь 1-го порядку.
15. Який загальний вигляд лінійного диференціального рівняння першого порядку?
16. Поняття лінійного неоднорідного та відповідно однорідного диференціального рівняння.
17. За допомогою якої підстановки вирішується лінійне диференціальне рівняння першого порядку і до якого рівняння зводиться його рішення?

Типові практичні завдання:

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

1. $y' = e^{-2x}$

2. $y' = sin5x$

3. $y' = \dfrac{1}{x^2+4}$

4. $y' = \dfrac{1}{sin^2 2x}$

5. $\dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dy}{y^2}$

6. $y' = e^{x+y}$

7. $y' = \sqrt[3]{x^5y^2}$

8. $y' = y \cdot \sqrt[4]{xy}$

9. $y' \cdot \sqrt{x^3} = y^2x$

10. $y' \cdot \sqrt[3]{x} = y^2$

11. $y'\sqrt{xy} = y^2$

12. $y' = y \cdot \sqrt[5]{x^3y^2}$

13. $y' = y \cdot \sqrt[3]{xy^2}$

14. $y' \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[4]{xy}$

15. $y' = y \cdot \sqrt[4]{x^3y}$

16. $y' = \sqrt[3]{x^8y}$

17. $x \cdot \sqrt{1+y^2}dx + y \cdot \sqrt{1+x^2}dy = 0$

18. $xyy' = 1 - x^2$

19. $y' = 10^{2x+y}$

20. $y' = (2x+1) \cdot ctgx$

4. Знайти розв'язок задачі Коші:

1. $(1+e^{2x})y^2dy = e^x dx;\ y(0) = 1$

2. $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y);\ \ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

3. $(1+y^2)xdx + (1+x^2)dy = 0;\ y(0) = 1$

4. $3(1+y^2)dx - 2xydy = 0;\ y(1) = 0$

5. $y' = e^{x+y} + e^{x-y};\ \ y(0) = 0$

6. $(xy^2+x)dx + (x^2y-y)dy = 0;\ y(0) = 1$

7. $(1+e^x)yy' = e^x;\ \ y(0) = 1$

8. $y'tgx = \mathrm{y};\ \ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

9. $y = y' \ln y;\ \ y(2) = 1$

10. $yy' + xe^{y} = 0;\ \ y(1) = 0$

11. $xyy' = 1 - x^2;\ \ y(1) = 1$

12. $xy' - y = y^3;\ \ y(1) = 1$

13. $(1 + x^2)dy - (1 + y^2)dx = 0;\ y(0) = 1$

14. $x \cdot \sqrt{1 + y^2}dx + y \cdot \sqrt{1 + x^2}dy = 0;\ y(1) = 1$

15. $y - xy' = 1 + x^2y';\ \ y(1) = 2$

16. $y' = e^{2x+3y};\ \ y(0) = 0$

17. $(x + xy^2)dy + (yx^2 - y)dx = 0;\ y(1) = 1$

18. $yy' \cos y + x \sin x = 0;\ \ y(0) = \frac{\pi}{4}$

19. $y' tg x = y + 2;\ \ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$

20. $xydx + \sqrt{1 - x^2}dy = 0;\ y(0) = 2e$

5. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$

2. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 5\frac{y}{x} + 4$

3. $y' = 2\frac{y^2}{x^2} + 5\frac{y}{x} + 1$

4. $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$

5. $y' = \frac{x + y}{x - y}$

6. $y' = \frac{x + 2y}{2x - y}$

7. $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$

8. $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$

11. $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$

12. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

13. $xy' = 3\sqrt{x^2 - y^2} + y$

14. $xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y$

15. $xy' \cos\frac{y}{x} = y \cos\frac{y}{x} - x$

16. $xy' - y = x\, tg\frac{y}{x}$

17. $xy' = y + 2x \sin^2\frac{3y}{x}$

18. $xy' \cos\frac{y}{x} = y \cos\frac{y}{x} - x$

9. $y' = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$

10. $xy' + 2\sqrt{xy} = y$

19. $xy' = y(1 + ln\frac{y}{x})$

20. $xy' - y = yln\frac{y}{x}$

6. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

1. $y' = \frac{y}{3x - y^2}$

2. $x^2y' + xy + 1 = 0$

3. $2x(x^2 + y)dx = dy$

4. $(2e^y - x)y' = 1$

5. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$

6. $(2x + 1)y' = 4x + 2y$

7. $y = x(y' - xcosx)$

8. $(x + y^2)dy = ydx$

9. $(sin^2y + xctgy)y' = 1$

10. $(xy' - 1)lnx = 2y$

11. $(y + 3)dx + (2x - ln3y)dy = 0$

12. $y'cosx - ysinx = 2x$

13. $y' - ytgx = cosx$

14. $y' - tgy = \frac{sin2x}{cosy}$

15. $y' + siny + xcosy + x = 0$

16. $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}$

17. $xy' + 2y = x^3cosx$

18. $(1 - 2xy)y' = y(y - 1)$

19. $y'cosx + siny = cos2x$

20. $y' = y(cos3x + ln3y)$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 15

Тема: Диференціальні рівняння другого порядку, основні поняття. Лінійні однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
Мета: вироблення умінь та удосконалення навичок розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку, розвиток продуктивного мислення здобувачів освіти та виховання математичної культури.

При підготовці до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції за темою та відповідну рекомендовану літературу.

Теоретична частина:

1. Диференціальні рівняння другого порядку, основні поняття.
2. Диференціальні рівняння 2-го порядку, що допускають зниження порядку.
3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
5. Що таке характеристичне рівняння?
6. Який вид має загальне рішення лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння :

а) дійсні і різні ($k_2 \neq k_1$);

б) дійсні і рівні ($k_2 = k_1 = k$);

в) комплексні спряжені ($k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$)?

Типові практичні завдання:

Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку:

1. $6y'' - y' - y = f(x)$, якщо
   $a) f(x) = 0$
   б)$f(x) = (5x + 3)e^{2x}$
   в)$f(x) = 2sin3x$

2. $y'' + 4y' - 5y = f(x)$, якщо
   $a) f(x) = 0$
   б)$f(x) = (3x + 7)e^{2x}$
   в)$f(x) = \frac{3}{5}cos3x$

3. $y'' + 2y' + 37y = f(x)$, якщо $a) f(x) = 0$

б)$f(x) = (5x-8)e^{-2x}$
в)$f(x) = \frac{3}{2}cosx$

4. $y'' + 2y' + y = f(x)$, якщо
$a)f(x) = 0$
б)$f(x) = (5x+6)e^{x}$
в)$f(x) = sin4x$

5. $2y'' + 7y' + 3y = f(x)$, якщо
$a)f(x) = 0$
б)$f(x) = (3x-4)e^{-2x}$
в)$f(x) = \frac{3}{4}cos2x$

6. $y'' - 2y' + 3y = f(x)$, якщо
$a)f(x) = 0$
б)$f(x) = (2x-1)e^{2x}$
в)$f(x) = 3sinx$

7. $y'' + 5y' - 6y = f(x)$, якщо
$a)f(x) = 0$
б)$f(x) = (3x-5)e^{-2x}$
в)$f(x) = 3sin4x$

8. $y'' + 6y' + 10y = f(x)$, якщо
$a)f(x) = 0$
б)$f(x) = (2x+5)e^{3x}$
в)$f(x) = cos5x$

9. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, якщо
$a)f(x) = 0$
б)$f(x) = (5x+3)e^{2x}$
в)$f(x) = 5sin2x$

10. $y'' + 6y' + 9y = f(x)$, якщо
$a)f(x) = 0$
б)$f(x) = (48x+8)e^{x}$
в)$f(x) = 3cos4x$

11. $y'' + 4y' + 8y = f(x)$, якщо
$a)f(x) = 0$
б)$f(x) = (4x-3)e^{2x}$
в)$f(x) = 3sinx$

12. $y'' - 5y' - 6y = f(x)$, якщо
$a)f(x) = 0$
б)$f(x) = (3x-2)e^{x}$
в)$f(x) = 3cos2x$

13. $y'' - 8y' + 12y = f(x)$, якщо
а) $f(x) = 0$
б) $f(x) = (16x - 2)e^{3x}$
в) $f(x) = 7sin3x$

14. $y'' + 9y' + 8y = f(x)$, якщо
а) $f(x) = 0$
б) $f(x) = (9x - 7)e^{2x}$
в) $f(x) = \frac{1}{3}cos2x$

15. $y'' - 12y' + 40y = f(x)$, якщо
а) $f(x) = 0$
б) $f(x) = (2x + 5)e^{3x}$
в) $f(x) = \frac{1}{5}sin3x$

16. $y'' + 4y' - 5y = f(x)$, якщо
а) $f(x) = 0$
б) $f(x) = (3x + 7)e^{2x}$
в) $f(x) = \frac{2}{5}cos3x$

17. $y'' + 2y' + 2y = f(x)$, якщо
а) $f(x) = 0$
б) $f(x) = (-4x + 3)e^{3x}$
в) $f(x) = 2cosx$

18. $y'' + 2y' - 24y = f(x)$, якщо
а) $f(x) = 0$
б) $f(x) = (3x + 7)e^{2x}$
в) $f(x) = sin2x$

19. $y'' + 6y' + 13y = f(x)$, якщо
а) $f(x) = 0$
б) $f(x) = (5x + 3)e^{-x}$
в) $f(x) = 4cos5x$

20. $y'' + 5y' + 4y = f(x)$, якщо
а) $f(x) = 0$
б) $f(x) = (3x - 4)e^{4x}$
в) $f(x) = 5sin2x$

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

Лінійна алгебра

Дії над матрицями:

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{21} + b_{21} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix};$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix};$$

Добутком $A \cdot B$ матриці $A = (a_{ij})$ порядку $m \times n$ на матрицю $B = (b_{ij})$ порядку $n \times k$ називається матриця $C = (c_{ij})$ порядку $m \times k$ елемент якої c_{ij} дорівнює сумі відповідних добутків i-го рядка матриці A та j-го стовпця матриці B:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{1n} \cdot b_{nj},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,k}$$

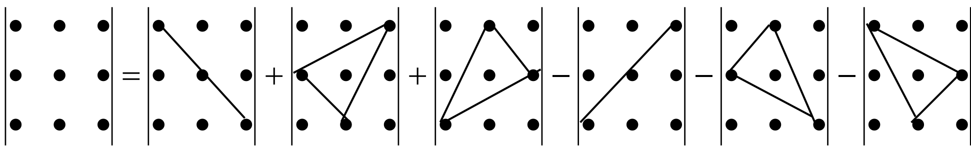
Обчислення визначника 2-го порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Обчислення визначника 3-го порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$



Алгебраїчне доповнення:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Обернена матриця:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Формули Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta},\ i = \overline{1,n}$$

де Δ – визначник основної матриці; Δx_i– визначник, утворений із детермінанта Δ заміною *i-го* стовпця стовпцем вільних членів b_i системи.

Матричний спосіб розв'язування систем лінійних рівнянь:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Векторна алгебра

Координати вектора:
$A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), \overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.
Довжина вектора: $|\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$.
Кут між векторами: $\overline{A_1A_2} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{A_1A_3} = (x_2; y_2; z_2)$,

$$\cos\left(\overline{A_1A_2} \,^\wedge\, \overline{A_1A_3}\right) = \cos\alpha = \frac{\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3}}{|\overline{A_1A_2}| \cdot |\overline{A_1A_3}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Множення вектора на число: $\overline{a} = (x, y, z)$, $c \cdot \overline{a} = (cx, cy, cz)$**.**
Додавання двох векторів:
$\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2), \overline{a} + \overline{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.
Віднімання двох векторів:
$\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2), \overline{a} - \overline{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$.
Вираження скалярного добутку через координати співмножників:
$\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2), \overline{a} \cdot \overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$.
Вираження векторного добутку через координати співмножників:

$$\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}, \overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}, [\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Застосування векторного добутку: $|[\boldsymbol{\overline{AB}}, \boldsymbol{\overline{AC}}]|$ – це площа паралелограма $ABCD$, побудованого на векторах $\overline{AB}$і $\overline{AC}$, тобто

$$S = |[\overline{AB}, \overline{AC}]|.$$

Тоді

$$S_\Delta = \frac{1}{2}|[\overline{AB}, \overline{AC}]|.$$

Аналітична геометрія на площині

Канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$$

Параметричне рівняння прямої:

$$\begin{cases} x=x_0+tm \\ y=y_0+tn \end{cases}$$

Рівняння пучка прямих:

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$y=kx+b$$

Рівняння прямої у відрізках на осях:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

Аналітична геометрія в просторі

Загальне рівняння прямої: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

Канонічні рівняння прямої: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, $\overline{s}(m,n,p)$– напрямний вектор, $M_0(x_0,y_0,z_0)$– точка в просторі.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Кут між двома прямими, що задані канонічними рівняннями:

$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$, $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$,

$$cos\,\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{{m_1}^2+{n_1}^2+{p_1}^2}\sqrt{{m_2}^2+{n_2}^2+{p_2}^2}}.$$

Умова перпендикулярності прямих: $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$

Умова паралельності прямих: $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$

Рівняння площини, яка проходить через три точки $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2),C(x_3,y_3,z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Диференціальне числення

Таблиця похідних

1. $(const)' = 0.$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}.$
3. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(e^x)' = e^x.$
6. $(a^x)' = a^x \ln a.$
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$
8. $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$
9. $(\sin x)' = \cos x.$
10. $(\cos x)' = -\sin x.$
11. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$
12. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$
13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
15. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}.$
16. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила диференціювання

Якщо $u(x)$ та $v(x)$ – диференційовані функції, то

1. $\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x)$
2. $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
3. $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$
4. $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$

Похідна складної функції

Похідна складної функції $y = f(u(x))$ дорівнює добутку похідної цієї функції за проміжною змінною *u* на похідну проміжної змінної *u* за змінною *x*. Тобто,

$$y' = f'(u) \cdot u'(x)$$

Інтегральне числення

Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int 1 \cdot dx = x + C$	10. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$
2. $\int 0 \cdot dx = C$	11. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C$
3. $\int x^\alpha \cdot dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C$ $(\alpha \neq -1)$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = arcsin\, x + C$
4. $\int \frac{dx}{x} = ln\|x\| + c$	13 $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
5. $\int \alpha^x \cdot dx = \frac{\alpha^x}{ln\, a} + C$	14. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} ln \left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$
6. $\int e^x \cdot dx = e^x + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + C$
7. $\int sin\, x \cdot dx = -\,cos\, x + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln \left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
8. $\int cos\, x \cdot dx = sin\, x + C$	17. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 \pm a^2} + a^2\, ln \left\|x + \right.\right.$ $\left.\left. +\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\|\right) + C$
9. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$	18. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + \right.$ $\left. +a^2\, arcsin \frac{x}{a}\right) + C$

Властивості: $F(x)$ - первісна для функції $f(x)$.

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) $d \int f(x)dx = f(x)dx$;

3) $\int dF(x) = F(x) + c$;

4) $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$;

5) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Формула інтегрування частинами: $\int udv = uv - \int vdu$.

Формула Ньютона-Лейбниця для обчислення визначених інтегралів:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

	Вид рівняння	Назва диференціального рівняння
1.	$y' = f(x)$	Найпростіше рівняння
2.	$y' = f(x) \cdot \mathrm{g}(y)$	Рівняння з відокремлюваними змінними
3.	$y' = f(x, y)$, де $f(x, y)$– однорідна функція нульового виміру	Однорідне рівняння
4.	$y' = -P(x) \cdot y + \mathrm{Q}(x)$	Лінійне рівняння
5.	$y' = -P(x) \cdot y + \mathrm{Q}(x) \cdot y^{\alpha}$	Рівняння Бернуллі

Диференціальні рівняння

Означення → Рівняння, в яких невідома функція входить під знаком похідної або диференціала, називаються диференціальними рівняннями

Види → **Звичайне** - якщо в рівнянні невідома функція є функцією однієї незалежної змінної.

→ **У частинних похідних** - якщо невідома функція, яка входить у рівняння, є функцією двох і більшого числа незалежних змінних.

Порядок → Максимальний порядок похідної (або диференціала), що входить у рівняння

Розв'язок → n разів диференційована функція $y = \varphi(x)$ в інтервалі $(a;b)$, яка, будучи підставленою в це рівняння, перетворює його в тотожність $F\,(x, \varphi(x), ..., \varphi^{(k)}(x)) \equiv 0$.

Розв'язати ДР → Означає знайти всі його розв'язки

Задачі, що приводять до ДР →

1. Знайти криві, що мають ту властивість, що відрізок дотичної (проведеної в будь-якій точці), який міститься між осями координат, ділиться точкою дотику навпіл.
2. Відомо, що швидкість розпаду радію пропорційна наявній кількості його. Знайти закон, який виражає зміну кількості радію протягом часу, якщо відомо, що через 1600 років залишиться половина кількості радію.
3. З хмари впала капля. Через 10 с за першою краплею впала друга. Як змінюватиметься з часом відстань між краплями.

Диференціальні рівняння першого порядку

Означення → Це диференціальне рівняння першого порядку, яке має вигляд $F(x, y, y') = 0$.

Т. Існування і єдинність розвязку → Якщо в рівнянні $y' = f(x,y)$ функція $f(x,y)$ і її частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ по y неперервні в деякій області D на площині $0xy$, яка містить деяку точку $(x_0; y_0)$, то існує єдиний розв'язок цього рівняння $y = \varphi(x)$, який задовольняє умові $y = y_0$ при $x = x_0$.

Розв'язок →

- *Загальний розв'язок* – функція $y = \varphi(x, C)$, яка задовольняє диференціальне рівняння в області визначення всіх незалежних змінних
- *Частинний розв'язок* – розв'язок, який отриманий із загального при певному значенні постійних
- *Особливий розв'язок* - розв'язок, у всіх точках якого умова одиничності не виконується, тобто в будь-якому околі кожної точки $(x; y)$ особливого розв'язку існують принаймні дві інтегральні криві, які проходять через цю точку.

Види →

- *Рівняння із відокремлюючими змінними* - це рівняння типу
$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$$
Називають так, тому що в цьому рівнянні змінні відокремлені, тобто при dx знаходиться тільки функція від x, а при dy - тільки функція від y.
- *Диференціальні рівняння із змінними, які відокремлюються* - це рівняння, у яких змінні можна розділити за допомогою множення або ділення обох частин рівняння на той самий вираз, тобто це рівняння виду:
$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0.$$

ОДНОРІДНІ

ФУНКЦІЇ

Функція $f(x,y)$ називається *однорідною функцією n-го порядку* щодо змінних x і y, якщо при будь-якому t справедлива тотожність $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$

$$f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3};$$
$$f(x,y)=xy-y^2;$$
$$f(x,y)=\frac{x}{y}.$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Рівняння виду $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ називається *однорідним*, якщо функції при dx і dy є однорідними однакового порядку

$$(x+2y)-xy'=0;$$
$$(x-2y)dy+(y-x)dx=0;$$
$$(2x+y+1)dx=(4x+2y-3)dy$$

ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Це рівняння, що має вигляд $y' + P(x)\,y = Q(x)$, де $P(x)$ і $Q(x)$ - задані неперервні функції від x (або сталі).

ОДНОРІДНІ

Це лінійне рівняння, у якого $Q(x) \equiv 0$

НЕОДНОРІДНІ

Це лінійне рівняння, у якого $Q(x) \neq 0$

<u>МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ</u>

$$x = u(y) \cdot v(y),$$
$$x' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

1. Підстановка Бернуллі:

$$y = u(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

2. Метод Лагранжа:

$$y = Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

Рівняння виду $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

є

<u>Рівнянням в повних диференціалах</u>, якщо його ліва частина – повний диференціал деякої функції $u(x,y)$, тобто $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y)$

Рівнянням, яке можна звести до рівняння в повних диференціалах за допомогою інтегруючого множника μ

Загальний розв'язок
$u(x,y)=c$

Алгоритм розв'язування

1. Привести дане рівняння до виду $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y)$.
2. Перевіряємо чи є дане рівняння рівнянням в повних диференціалах за допомогою рівняння
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$
3. Прирівнюємо частинні похідні до функції P і Q.
4. Інтегруємо одержане рівняння.
5. Диференціюємо u по y і прирівнюємо до Q.
6. Інтегруємо отримане рівняння.
7. Записуємо загальний розв'язок.

Алгоритм розв'язування

1. Припустимо, що рівняння має інтегруючий множник, залежний тільки від $x : \mu=\mu(x)$.
2. Перевіряємо чи виконується для отриманої функції умова
$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q(x,y)}.$$
3. Якщо виконується, то застосовуємо алгоритм зліва пункти 3 – 7.
4. Якщо не виконується, то припускаємо, що рівняння має інтегруючий множник, залежний тільки від $y : \mu=\mu(y)$.
5. Застосовуємо алгоритм зліва пункти 2 – 7.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА:

1. Дьоміна Н., Назарова О. Вища математика. Ч.1. Елементи лінійної алгебри, векторної алгебри та аналітичної геометрії: навчально-методичний посібник для самостійної роботи. Мелітополь : ФОП Силаєва О. В., 2021. 124 с.

2. Кирилащук С. А., Бондаренко З. В., Клочко В. І. Вища математика. Ч. 1. Індивідуальні завдання : навчальний посібник. Вінниця: ВНТУ, 2020. 98 с.

3. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах. В-во: Центр навчальної літератури, 2020. 596 с.

4. Лиман Ф., Власенко В., Петренко С. Вища математика : навч. посіб у 2-х частинах. Київ : «Університетська книга», 2018. 614 с.

5. Литвин І. І., Конопчук О. М., Желізняк Г. О. Вища математика. Київ: Вид-во Центр навчальної літератури, 2019. 368 с.

6. Пасічник Я. А. Вища математика : підручник. Острог : Видавництво Національного університету «Острозька академія», 2021. 432 с.

7. Ройко Л. Л., Мамчич Т. І., Мамчич І. Я. Навчання методам прикладної математики за підтримки програми R. *Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво.* 2019. №35. С. 37-41

8. Ройко Л. Л., Мамчич Т. І., Мамчич І. Я. Розвиток технологій проведення опитування з математичних дисциплін в контексті дистанційного навчання. *Інформаційні технології в освіті, науці і техніці* : тези доп. V міжнар. наук.-практ. конф. (м.Черкаси, 21-23 травня 2020 р. (ІТОНТ-2020)). Черкаси, 2020. С. 163–164 ISBN 978-966-9730-55-8 7.

9. Ройко Л. Л., Мамчич Т. І., Миронюк Л. П., Микитюк І. О. Особливості викладання математичних дисциплін засобами дистанційного навчання. *Математика. Інформаційні технології. Освіта* : тези доп. IX міжн. наук.-практ. конф. (м. Луцьк, 1-3 червн. 2020 р.). Луцьк, 2020. С. 78–82.

10. Ройко Л. Л., Миронюк Л. П. Wolfram|alpha як засіб оптимізації процесу навчання курсу «Вища математика». *Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво*. 2020. №40. С.58-64.

11. Ройко Л. Л., Миронюк Л. П. Вища математика: Елементи теорії рядів: методичні рекомендації до самостійної та індивідуальної робіт. Луцьк: ПП Іванюк, 2021. 52 с.

12. Ройко Л. Л., Миронюк Л. П. Досвід використання інформаційно-комунікаційних технологій при викладанні математичних дисциплін в умовах дистанційного навчання. *Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво*. 2020. №39. С. 70-77

13. Ройко Л. Л. Вища математика: методичні рекомендації до модульних контрольних робіт. Луцьк: ПП Іванюк, 2021. 76 с.

14. Турчанінова Л. І., Доля О. В. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. Київ : Вид-во «Ліра-К», 2018. 348 с.

15. Хом'юк І. В., Хом'юк В. В. Вища математика. Ч. 3. Функції багатьох змінних : практикум Вінниця : ВНТУ, 2020. 70 с.

16. Рибалко А. П., Стєпанова К. В. Вища математика [Електронний ресурс]: методичні рекомендації до самостійної роботи за темою «Ряди» для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня. Харків : ХНЕУ імені С. Кузнеця, 2019. 64 с. URL: http://repository.hneu.edu.ua/bitstream/123456789/22151/1/2019-Рибалко%20А%20П%2c%20Стєпанова%20К%20В.pdf

17. Солдатенко С. С. Навчально-методичний посібник для самостійної роботи студентів з дисципліни «Вища математика» з теми «Комплексні числа» для студентів технічних спеціальностей. Харків.: ХМК, 2017. 35с. URL: https://learn.zhatk.zt.ua/pluginfile.php/8499/mod_resource/content/1/Вища%20математика.%20Комплексні%20числа%20.pdf