Волинський національний університет імені Лесі Українки

Факультет інформаційних технологій і математики

Кафедра математичного аналізу та статистики

Соліч Катерина Василівна,

Федуник-Яремчук Оксана Володимирівна

Філозоф Леонтій Іванович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Індивідуальні завдання

Методичні вказівки для індивідуальної та аудиторної робіт для студентів

факультету інформаційних технологій і математики

Луцьк 2024

УДК 519.21

С 60

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Волинського національного університету імені Лесі Українки

(протокол №__ від ___________ 2024 року)

Рецензенти:

Харкевич Ю.І., кандидат фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри теорії функцій та методики навчання математики Волинського національного університету імені Лесі Українки.

Костючко С.М., кандидат тех. наук, доцент кафедри комп'ютерної інженерії та кібербезпеки Луцького національного технічного університету.

Соліч К.В., Федуник-Яремчук О.В., Філозоф Л.І.

С 60 Диференціальні рівняння. Індивідуальні завдання. Методичні вказівки для індивідуальної та аудиторної робіт/ Катерина Василівна Соліч, Оксана Володимирівна Федуник-Яремчук, Леонтій Іванович Філозоф. Луцьк. 2024. 80 с.

Методичні вказівки містять теоретичний матеріал, приклади розв'язування задач і дидактичний матеріал для індивідуальних робіт з диференціальних рівнянь з тем «Диференціальні рівняння першого порядку», «Рівняння в повних диференціалах. Інтегрувальний множник», «Метод параметризації», «Диференціальні рівняння вищих порядків».

Видання призначене для студентів галузі знань 12 Інформаційні технології, спеціальності 122 Комп'ютерні науки, освітньої кваліфікації Бакалавр з комп'ютерних наук, та спеціальності 125 Кібербезпека та захист інформації, освітньої кваліфікації__Бакалавр з кібербезпеки та захисту інформації.

УДК 519.21

ЗМІСТ

Передмова

У методичній розробці викладено в стислій формі теоретичний матеріал з тем «Диференціальні рівняння першого порядку», «Рівняння в повних диференціалах. Інтегрувальний множник», «Диференціальні рівняння вищих порядків», а також деякі висновки, зауваження, що є необхідними для розв'язування задач.

Кожна тема доповнена прикладами розв'язання типових задач. Досвід показує, що основною причиною труднощів для студентів при виконанні практичних завдань є слабкі навики застосування теоретичних знань з курсу диференціальні рівняння в практичних задачах. Саме тому велику увагу приділяємо алгоритмізації розв'язування задач.

Запропонована велика кількість завдань для індивідуальної та самостійної роботи, що може бути використана викладачами для проміжного і підсумкового контролю знань студентів.

Мета посібника – допомогти студентам засвоїти математичний апарат, необхідний для дослідження диференціальних рівнянь, підготувати їх до самостійної роботи з науковою літературою.

Для кожної теми підготовлено по 30 варіантів завдань із розв’язаним нульовим варіантом.

ТЕМА1. Диференціальні рівняння першого порядку.

1.1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

П1. ***Неповні диференціальні рівняння.***

Означення 1. Рівняння виду

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

називається *неповним*, якщо воно не містить однієї із змінних (або x, або y)

а) Нехай $y' = f(x)$. (2)

Задача інтегрування рівняння (2) - це відома задача з математичного аналізу про відновлення функції за її похідною. Розв'язок задається

$$y = \int f(x)dx + C, \text{ де } C = const. \qquad (3)$$

Якщо для рівняння (2) задача Коші $y(x_0) = y_0$ (4), то розв'язок задачі (2), (4) задається формулою

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt. \qquad (5)$$

Така форма представлення розв'язку задачі Коші, що дозволяє зразу ж за даними Коші знаходити цей розв'язок називається *загальним розв'язком у формі Коші*.

б) Нехай $y' = f(y)$. (6)

Запишемо рівняння (6) у вигляді $\frac{dy}{dx} = f(y)$.

Будемо вважати y – незалежною змінною, а x – функцією змінної x. Тоді, якщо в області задання функція $f(y)$ в жодній точці не перетворюється в 0, то останнє рівняння можна записати

$$x' = \frac{1}{f(y)}, \qquad (7)$$

а це точно таке, як рівняння (2). Проінтегруємо рівняння (7)

$$x(y) = \int \frac{dy}{f(y)} + C. \qquad (8)$$

Нехай $F(y)$ – первісна для $\frac{1}{f(y)}$, тоді $x(y) = F(y) + C$.

Звідси $F(y) = x(y) - C$ і

$$y = F^{-1}(x - c), \qquad (9)$$

де F^{-1} – обернена до F функція.

Наприклад: $y' = y^2 + 1$,

$x' = \frac{1}{y^2+1}$,

$x = \int \frac{dy}{y^2+1} + C = \mathrm{arctg}\, y + C$,

$y = \mathrm{tg}(x - C)$.

Зауважимо, що змінна x в самому рівнянні може приймати довільне значення, тобто $x \in (-\infty; +\infty)$, а в розв'язку $x - C \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Тобто область значень змінної x в диференціальному рівнянні може бути ширшою, ніж область задання розв'язку.

Крім розв'язку що заданий формулою (9), рівняння (6) може мати ще й особливі розв'язки, які знаходяться з умови

$$f(y) = 0. \qquad (10)$$

Рівняння (10) є *скінченним рівнянням* (не містить похідної).

Нехай $y = y_i$ (11) – розв'язок рівняння, тобто $f(y_i) \equiv 0$. Тоді пряма паралельна осі Ox, задана рівнянням (11), може бути розв'язком рівняння (6), тобто особливою інтегральною кривою.

Наприклад: $y' = 2\sqrt{y}$.

Якщо $y \neq 0$, то $x = \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} + C$,

$x = \sqrt{y} + C,$

$y = (x - C)^2.$

Оскільки $x - C \geq 0$, то $x \in [C; +\infty)$.

Якщо $y = 0$, то $2\sqrt{y} = 0$, то $y' = 0$ і $y(C) = 0$.

Отже, $\begin{matrix} 1)\ y = 0, \\ 2)\ y = (x - C)^2, x \geq C, \end{matrix}$ або ж $y = \begin{cases} y = 0, x \leq C, \\ y = (x - C)^2, x \geq C. \end{cases}$

П2. ***Рівняння з відокремленими змінними.***

В багатьох випадках функція $f(x, y)$ з рівняння (1) представляється у вигляді

$f(x, y) = \frac{M_1(x,y)}{N_1(x,y)},$

де M_1, N_1 – задані функції своїх аргументів. Тоді (1) запишеться $\frac{dy}{dx} = \frac{M_1(x,y)}{N_1(x,y)}$ або ж

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \qquad (12)$$

де $M \equiv M_1$, $N \equiv -N_1$.

Запис диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної у вигляді (12), називається *диференціальною формою представлення диференціального рівняння*.

Нехай рівняння задано у диференціальній формі

$$a(x)dx + b(y)dy = 0. \qquad (13)$$

Покажемо, що розв'язок рівняння(13) представляється у вигляді неявної функції, заданої за допомогою наступних квадратур

$$\int a(x)dx + \int b(y)dy = C, \qquad (14)$$

де $C = const$.

Дійсно, нехай $y = \varphi(x)$ – розв'язок (13), тобто

$$a(x)dx + b(\varphi(x))d\varphi(x) \equiv 0. \qquad (15)$$

Проінтегруємо (15)

$$\int (a(x)dx + b\big(\varphi(x)\big)d\varphi(x)) = C,$$

$$\int a(x)dx + \int b(\varphi(x))d\varphi(x) = C,$$

$$\int a(x)dx + \int b(y)dy = C.$$

Навпаки, нехай $y = \psi(x)$ є розв'язком (14)

$$\int a(x)dx + \int b(\psi(x))d\psi(x) = C,$$

тоді $\int (a(x)dx + b\big(\psi(x)\big)d\psi(x)) = C.$

Продиференціюємо по x

$$a(x)dx + b\big(\psi(x)\big)d\psi(x) \equiv 0,$$

тобто $\psi(x)$ – розв'язок (13).

Отже, диференціальне рівняння (13) та інтегральні розв'язки (14) еквівалентні. Проте на рівняння (14) можна дивитися, як на скінченне рівняння, яке задає розв'язок рівняння (13) в неявному вигляді.

Наприклад: $xdx + ydy = 0.$

$$\int xdx + \int ydy = C,$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{C}{2},$$

$$x^2 + y^2 = C.$$

П3. ***Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.***

Означення 2. Рівняння виду

$$a_1(x)b_1(y)dx + a_2(x)b_2(y)dy = 0, \qquad (16)$$

де $a_1(x)$, $a_2(x)$, $b_1(y)$, $b_2(y)$ – задані і неперервні на проміжках $\langle a,b\rangle$, $\langle c,d\rangle$ відповідно функції, називається *рівнянням з відокремлюваними змінними*.

Якщо $a_2(x)\cdot b_1(y) \neq 0$, то поділивши (16) на добуток $a_2(x)\cdot b_1(y)$, отримаємо

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx + \frac{b_1(y)}{b_2(y)}dy = 0, \qquad (17)$$

тобто рівняння з відокремленими змінними. Його розв'язок має вигляд

$$\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx + \int \frac{b_1(y)}{b_2(y)}dy = C. \qquad (18)$$

Крім повної сім'ї розв'язків, що задана (18), рівняння (16) може мати ще особливі інтегральні криві (які є прямими, що паралельні осі Ox або Oy), які визначаються з умови $a_2(x)\cdot b_1(y) = 0$. (19)

Якщо $y = y_i$ або $x = x_j$– розв'язки (19), тобто $b_1(y_i) \equiv 0$ або $a_2(x_j) \equiv 0$, то прямі (20) можуть бути *особливими інтегральними кривими* рівняння (16).

1.2. Однорідні диференціальні рівняння та їх інтегрування

Означення 1. Функція $z = f(x,y)$ називається *однорідною функцією степеня* k, якщо $\forall t \neq 0$

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y). \qquad (1)$$

Наприклад: 1) Функція $z = x^2 + xy + y^2$ є однорідною функцією, степеня однорідності 2.

2) Функція $z = \frac{\sqrt[3]{x^3+3x^2y}}{x+y}$ є однорідною функцією степеня однорідності 0.

Дійсно,

$$f(tx,ty) = \frac{\sqrt[3]{(tx)^3 + 3(tx)^2ty}}{tx+ty} = \frac{\sqrt[3]{t^3(x^3+3x^2y)}}{t(x+y)} = \frac{t\sqrt[3]{x^3+3x^2y}}{t(x+y)} =$$

$$= t^0\,\frac{\sqrt[3]{x^3+3x^2y}}{x+y} = t^0 f(x,y).$$

3) Функція $z = \ln(x+y)$ не є однорідною.

Означення 2. Диференціальне рівняння виду $y' = f(x, y)$ (2) називається *однорідним диференціальним рівнянням першого порядку*, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією степеня однорідності 0.

Покажемо, що деякою заміною змінних однорідне рівняння можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними. Враховуючи однорідність функції $f(x, y)$ представимо її у вигляді

$$f(x,y) = f\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^0 f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (3)$$

Таким чином довільне однорідне рівняння можна звести до виду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (4)$$

Позначимо $z = \frac{y}{x}$ (5), де z – нова шукана функція, тоді

$$y = zx, \quad (6)$$

$$y' = z'x + z. \quad (7)$$

Підставляючи (5) та (7) в (4) одержимо $z'x + z = \varphi(z)$, або

$$\frac{dz}{dx} \cdot x = \varphi(z) - z. \quad (8)$$

Рівняння (8) є рівнянням з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні та інтегруючи рівняння (8), у випадку $\varphi(z) - z \neq 0$ одержимо

$$\frac{dz}{\varphi(z)-z} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dz}{\varphi(z)-z} = \int \frac{dx}{x} - \ln C.$$

Звідки $\int \frac{dz}{\varphi(z)-z} = \ln x - \ln C$,

$$\int \frac{dz}{\varphi(z)-z} = \ln \frac{x}{C},$$

$$x = C \cdot e^{\int \frac{dz}{\varphi(z)-z}}. \quad (9)$$

Підставивши у формулу (9) замість $z = \frac{y}{x}$, остаточно одержимо повну сім'ю розв'язків рівняння (2) у вигляді неявної функції. Крім цього рівняння (2) може мати особливий розв'язок $y = z_0 x$ (10) (тобто інтегральною кривою може бути пряма, що проходить через $(0,0)$), де z_0 – розв'язок рівняння

$$\varphi(z) - z = 0. \quad (10)$$

Наприклад: Проінтегрувати рівняння $x^2 y' + y^2 = xyy'$.

$y'(xy - x^2) = y^2,$

$y' = \frac{y^2}{xy - x^2}.$

Функція $f(x,y) = \frac{y^2}{xy - x^2}$ є однорідною функцією степеня однорідності 0, тому задане рівняння є однорідним.

Нехай $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$, тоді

$z'x + z = \frac{z^2x^2}{x \cdot zx - x^2},$

$z'x + z = \frac{z^2}{z-1},$

$z'x = \frac{z^2}{z-1} - z = \frac{z^2 - z^2 + z}{z-1} = \frac{z}{z-1},$

$\frac{dz}{dx}x = \frac{z}{z-1},$

$\frac{z-1}{z}dz = \frac{dx}{x},$

$\int \left(1 - \frac{1}{z}\right) dz = \int \frac{dx}{x} - \ln C,$

$z - \ln z = \ln \frac{x}{C},$

$z = \ln \frac{zx}{C},$

$\frac{zx}{C} = e^z,$

$\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{C} = e^{\frac{x}{y}},$

$y = Ce^{\frac{x}{y}}.$

Крім цього задане рівняння може мати особливі розв’язки, які шукаємо

$\frac{z}{z-1} = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow y = 0.$

Проте цей розв’язок можна отримати з повної сім’ї при $C = 0$.

1.3. Лінійні диференціальні рівняння.

I. *Означення та основні властивості.*

Означення 1. *Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку* (**ЛДР-1**) називається рівняння лінійне відносно сукупності змінних y та y', тобто рівняння виду

$$a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0, \qquad (1)$$

де $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ – задані неперервні на $\langle a, b\rangle$ функції.

Якщо в жодній точці проміжку $\langle a, b\rangle$ $a(x) \neq 0$, то рівняння (1) можна записати

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad (2)$$

де $p(x)$, $q(x)$ – неперервні на $\langle a, b\rangle$ функції. Якщо $q(x) \equiv 0$, $x \in \langle a, b\rangle$, то рівняння (2) називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням* (**ЛОДР**), в противному випадку *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням* (**ЛНДР**).

Рівняння виду $x' + p(x)y = 0$ (3)

називається *ЛОДР*, яке відповідає рівнянню (2).

Теорема 1

Лінійне рівняння (2) переходить знову в лінійне рівняння при довільній заміні незалежної змінної виду $x = \varphi(t)$ *(4), де* $\varphi(t)$ *– задана неперервна диференційовна на* $\langle \alpha, \beta\rangle$ *функція , причому* $\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in \langle \alpha, \beta\rangle$.

Доведення

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = \dot{y}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Підставляючи це в (2) одержимо

$$\dot{y}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} + p\big(\varphi(t)\big)y = q(\varphi(t)),$$

$$\dot{y} + P(t)y = Q(t), \qquad (5)$$

де $P(t) = p\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)$, $Q(t) = q\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)$, $P(t)$, $Q(t)$ – задані неперервні на $\langle \alpha, \beta\rangle$ функції. Рівняння (5) є *лінійним рівнянням*.

Зауважимо, що коли (2) є однорідним тобто $q(x) \equiv 0$, то і $Q(t) \equiv 0$. Тобто зведене рівняння (5) також буде однорідним.

Теорема 2

Лінійне рівняння (2) залишається лінійним при довільній лінійній заміні залежної змінної, тобто заміні

$$y = \alpha(x)z + \beta(x), \qquad (6)$$

де $\alpha(x)$, $\beta(x)$ *– задані неперервні диференційовні на* $\langle a, b\rangle$ *функції, причому* $\alpha(x) = 0, \forall x \in \langle a, b\rangle$.

Доведення

Продиференціювавши (6) одержимо

$$y' = \alpha' z + \alpha z' + \beta'. \qquad (7)$$

Підставивши (6) та (7) в (2) будемо мати $\alpha' z + \alpha z' + \beta' + p(\alpha z + \beta) = q$,

$$z' + \left(\frac{\alpha\prime}{\alpha} + p\right) z = \frac{q - \beta' - p\beta}{\alpha}. \qquad (8)$$

Рівняння (8) є *лінійним рівнянням відносно нової шуканої функції* z з неперервними на коефіцієнтами.

Зауваження. Використовуючи заміну (6) рівняння (2) можна звести до такого рівняння, в якому коефіцієнт при новій шуканій функції, тобто при z, буде дорівнювати 0.

Дійсно з (8) маємо $\frac{\alpha\prime}{\alpha} + p = 0$. (9)

Рівняння (9) є диференціальним рівнянням відносно функції α з відокремлюваними змінними. Проінтегрувавши отримаємо

$$\int \frac{d\alpha}{\alpha} = -\int p dx + C,$$

$$\ln \alpha = -\int p dx + \ln C,$$

$\alpha(x) = Ce^{-\int p dx}$.

Покладемо для означеності $C = 1$

$$\alpha(x) = e^{-\int p dx}. \tag{10}$$

Таким чином застосування заміни (6) із функцією $\alpha(x)$ вибраною за (10) зводить (2) до рівняння, в якому відсутня змінна z, тобто до неповного рівняння. Це дає можливість проінтегрувати вихідне рівняння (2). Дійсно, поклавши у (6) замість $\alpha(x)$ вираз (10) взявши $\beta(x) \equiv 0$, одержимо з (8) рівняння $z' = \frac{q'(x)}{\alpha}$. Звідки $z' = q(x)e^{\int p(x)dx}$,

$$z' = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C. \tag{11}$$

Підставивши (11) і (10) в (6) при $\beta(x) \equiv 0$ остаточно отримаємо загальний розв’язок рівняння (2) у вигляді

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right). \tag{12}$$

Теорема 3 ***(Про структуру загального розв’язку ЛОДР-1)***

Якщо $y_1(x)$ довільний нетривіальний розв’язок рівняння (3), то загальний розв’язок цього рівняння має вигляд

$$y = Cy_1(x), \tag{13}$$

де $C = const$.

Доведення

Оскільки з (13) $y' = Cy_1'$, то

$$(Cy_1)' + p(x)Cy_1 = C(y_1' + p(x)y_1) \equiv C \cdot 0 = 0.$$

Оскільки формула (13) містить довільну сталу, то вона і задає довільний розв’язок рівняння першого порядку (3).

Теорема 4 ***(Про структуру загального розв’язку ЛНДР-1)***

Якщо $\bar{y}(t)$ *– загальний розв'язок однорідного рівняння (3),* $Y(x)$*- деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння (2), то загальний розв'язок цього рівняння представляється у вигляді*

$$y(x) = \bar{y}(t) + Y(x). \qquad (14)$$

ІІ. ***Інтегрування ЛДР-1 методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа)***

Розглянемо однорідне рівняння (3) і проінтегруємо його, враховуючи, що воно є рівнянням з відокремлюваними змінними

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Звідси $\ln y = -\int p(x)dx + \ln C$,

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, C = const. \qquad (15)$$

Формула (15) дає загальний розв'язок рівняння (3). Зрозуміло, що формула (15) не може задовольнити рівняння (2) при жодному конкретному значенні сталої C. Будемо вважати C функцією змінної x і шукати лише розв'язок (2) у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \qquad (16)$$

Тоді з (16) маємо

$$y' = C'e^{-\int p(x)dx} - Ce^{-\int p(x)dx}p(x). \qquad (17)$$

Підставивши (17) та (16) в (2) матимемо

$$C'e^{-\int p(x)dx} - Ce^{-\int p(x)dx}p(x) + p(x)Ce^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$, де $C = const.$

Тоді з (16) отримаємо (12)

III. ***Інтегрування лінійного рівняння методом Бернуллі.***

Будемо шукати розв'язок рівняння (2) у вигляді добутку двох функцій

$$y(x) = u(x) \cdot v(x), \tag{18}$$

де $u(x)$, $v(x)$ – поки що невідомі функції. Продиференціюємо (18), то

$$y' = u'v + uv'. \tag{19}$$

Підставимо (18) і (19) в (2), маємо

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x),$$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x). \tag{20}$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + p(x)v = 0$. (21)

Розв'язком (21) є функція $v(x) = e^{-\int p(x)dx}$ (з формули (10)) (22)

Підставляючи (22) в (20) одержимо $u'e^{-\int p(x)dx} = q(x)$.

Звідки $u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$. (23)

Підставивши (23) і (22) в (18) одержимо розв'язок рівняння (2), який знову ж заданий формулою (12).

Зауваження 1. Формула (12) дає всі розв'язки рівняння (2), тобто ЛДР. Рівняння (2) не має особливих розв'язків.

Зауваження 2. З формули (12) видно, що загальний розв'язок лінійного рівняння є лінійною функцією довільної сталої C, тобто його можна представити у вигляді

$$y(x) = \varphi(x) \cdot C + \psi(x). \tag{24}$$

Можна довести і обернене твердження. Диференціальне рівняння однопараметричної сім'ї кривих заданої формулою (24), де φ та ψ – неперервно диференційовні на $\langle a, b\rangle$ функції, причому $\varphi(x) \neq 0$, $\forall x \in \langle a, b\rangle$, є ЛДР.

Дійсно, $y' = \varphi' C + \psi'$. (25)

З (24) маємо $C = \frac{y-\psi}{\varphi}$, тоді $y' = \varphi' \frac{y-\psi}{\varphi} + \psi'$,

$y' = \frac{\varphi'}{\varphi} y - \frac{\varphi'}{\varphi} \psi + \psi'$.

Звідки $y' - \frac{\varphi'}{\varphi} y = \psi' - \frac{\varphi'}{\varphi} \psi$. (26)

Тоді справедлива теорема.

Теорема 5

Для того, щоб диференціальне рівняння першого порядку, розв'язане відносно похідної, було лінійним необхідно і достатньо, щоб загальний розв'язок цього рівняння був лінійною функцією довільної сталої C.

Зауваження 3. З формули (12) видно, що для інтегрування лінійного рівняння треба обчислити два невизначені інтеграли, тобто ЛДР інтегрується за допомогою двох квадратур (ЛОДР інтегрується за допомогою однієї квадратури).

Індивідуальні завдання №1

«Диференціальні рівняння першого порядку»

Варіант № 0

1. Знайти загальний або частинний розв'язок диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{y}{y\prime} = \ln y,\ y(2) = 1;$$

2. Записати загальний або частинний розв'язок однорідного диференціального рівняння.

$$x \cdot y' = y - xe^{\frac{y}{x}};$$

3. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння методом Бернуллі або Лагранжа.

$$y' + y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x};\ y(0) = 0.$$

Розв'язання

1. $y = \ln y \cdot y'$.

Запишемо $y' = \frac{dy}{dx}$, тоді

$y = \ln y \cdot \frac{dy}{dx}$, або, що теж саме $dx = \frac{\ln y}{y} dy$.

Проінтегруємо останнє рівняння. Спочатку знайдемо інтеграл правої частини:

$$\mathcal{I} = \int \frac{\ln y}{y} dy = \left| \begin{aligned} \ln y &= t \\ \frac{dy}{y} &= dt \end{aligned} \right. = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\ln^2 y}{2}.$$

Тому $\frac{\ln^2 y}{2} = x + C$, тобто $\ln y = \pm\sqrt{x + C}$.

Тепер знайдемо частинний розв'язок цього рівняння, використовуючи початкові умови.

$\ln 1 = \pm\sqrt{2 + C}$,

$C = -2$,

$\ln y = \pm\sqrt{x-2}$.

Отже частинним розв'язком буде $\ln y = \pm\sqrt{x-2}$.

2. $x \cdot y' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

$y' = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}$.

Перевіримо, чи функція $f(x,y) = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}$ в правій частині рівняння буде однорідною, степеня однорідності 0.

$f(tx,ty) = \frac{ty}{tx} - e^{\frac{ty}{tx}} = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}} = f(x,y)$.

Отже, задане рівняння є однорідним, тому використаємо заміну:

$z = \frac{y}{x} \Longrightarrow y = zx \Longrightarrow y' = z'x + z$.

$z'x + z = z - e^{z}$,

$z'x = -e^{z}$,

$\frac{dz}{dx}x = -e^{z}$.

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними:

$\frac{dz}{e^{z}} = -\frac{dx}{x}$,

Проінтегрувавши ліву та праву частину останнього рівняння, будемо мати

$-e^{-z} = -\ln x - \ln C$,

$e^{-z} = \ln Cx$,

$-z = \ln\ln Cx$.

Повернемось до заміни, тоді $-\frac{y}{x} = \ln\ln Cx$ або, що те ж саме,

$y = -x\ln\ln Cx$.

3. $y' + y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$; $y(0) = 0$.

Метод Бернуллі. Нехай $y = u \cdot v$, тоді $y' = u'v + uv'$. Підставимо у вихідне рівняння

$u'v + uv' + uv\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$,

$u'v + u(v' + v\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}$.

Підберемо функцію v таким чином, щоб множник біля u дорівнював 0.

$v' + v \operatorname{tg} x = 0,$

$v' = -v \operatorname{tg} x,$

$\frac{dv}{dx} = -v \operatorname{tg} x.$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними.

$\frac{dv}{v} = -\operatorname{tg} x \, dx.$

Знайдемо спочатку інтеграл від правої частини.

$\mathcal{I} = -\int \operatorname{tg} x \, dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \end{matrix} \right. = \int \frac{dt}{t} = \ln \cos x.$

Тоді $\ln v = \ln \cos x$, тобто $v = \cos x$. Підставимо тепер знайдене значення функції v.

$u' \cos x = \frac{1}{\cos x},$

$u' = \frac{1}{\cos^2 x},$

Знову ж маємо рівняння з відокремлюваними змінними

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x},$

$du = \frac{dx}{\cos^2 x},$

$\int du = \int \frac{dx}{\cos^2 x},$

$u = \operatorname{tg} x + C.$

Таким чином, маючи значення для u та u, запишемо загальний розв'язок вихідного рівняння

$y = (\operatorname{tg} x + C) \cdot \cos x$, або після спрощення $y = \sin x + C \cos x$.

Знайдемо тепер частинний розв'язок: $0 = \sin 0 + C\cos 0$, тобто $C = 0$.

Отже, $y = \sin x$- розв'язок задачі Коші.

Метод Лагранжа. Розв'яжемо спочатку відповідне однорідне рівняння:

$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = 0.$

Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$\frac{dy}{dx} = -y\,\mathrm{tg}\,x,$

$\frac{dy}{y} = -\,\mathrm{tg}\,x\,dx.$

Проінтегруємо останнє рівняння:

$\mathcal{I} = -\int \mathrm{tg}\,x\,dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \end{matrix} \right. = \int \frac{dt}{t} = \ln\cos x.$

$\ln y = \ln\cos x + \ln C,$

$y = C\cos x.$

Оскільки ми отримали розв'язок однорідного рівняння, то для того, щоб знайти розв'язок неоднорідного, будемо дивитись на константу, як на функцію змінної x, тобто $C = C(x)$.

$y = C(x)\cos x,$

$y' = C'(x)\cos x - C(x)\sin x.$

Після підстановки у вихідне рівняння отримаємо

$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + C(x)\cos x\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x},$

$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + C(x)\sin x = \frac{1}{\cos x},$

$C'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x},$

$C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Отримали неповне рівняння, звідки після інтегрування матимемо:

$C(x) = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$.

Остаточно запишемо $y = (\operatorname{tg} x + C) \cos x$. Аналогічно до методу Бернуллі отримали, що $y = \sin x + C \cos x$, а розв'язок задачі Коші відповідно $y = \sin x$.

Варіант № 1

1. $\ln \cos y \, dx + x \cdot \operatorname{tg} y \, dy = 0$;
2. $x \cdot y' = 2 \cdot \left(y - \sqrt{xy}\right)$;
3. $(1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x$, $y(0) = 1$.

Варіант № 2

1. $y' \cdot \cos x = \frac{y}{\ln y}$, $y(0) = 1$;
2. $y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}$;
3. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 2$.

Варіант № 3

1. $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$;
2. $x \cdot y' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$;
3. $y' \operatorname{ctg} x + y = 1 - \sin x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Варіант № 4

1. $y' = 2^{x-y}$, $y(-3) = -5$;
2. $y' - \frac{y}{x} = \sin \frac{y}{x}$;
3. $xy' - y = x^2 \cdot \cos x$; $y(\pi) = -1$.

Варіант №5

1. $1+(1+y')e^{y}=0;$
2. $x^2\cdot y'=4x^2+xy+y^2;$
3. $y'\cdot\cos^2 x+y=\operatorname{tg}x;\ y(0)=0.$

Варіант №6

1. $\frac{y}{y\prime}=\ln y,\ y(2)=1;$
2. $x\cdot y'=y-xe^{\frac{y}{x}};$
3. $y'+y\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x};\ y(0)=0.$

Варіант №7

1. $\frac{yy\prime}{x}=-e^{y};\ y(1)=0;$
2. $xy'\cdot\cos\frac{y}{x}=y\cos\frac{y}{x}-x;$
3. $(2x+y)dy=ydx+4\ln y\,dy.$

Варіант №8

1. $x^2(2yy'-1)=1;$
2. $y'=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x};$
3. $y'+2y=e^{3x},\ y(0)=0.$

Варіант №9

1. $y'=4^{x+y};$
2. $2x^3\cdot y'=y(2x^2-y^2);$
3. $xy'\operatorname{ctg}x-2y=2x^4,\ y(0)=1.$

Варіант №10

1. $xy'+y=y^2,\ y(1)=\frac{1}{2};$
2. $x\cdot y+y^2=(2x^2+xy)\cdot y';$
3. $2x(x^2+y)dx=dy.$

Варіант №11

1. $(x^2 - 1)y' = -2x \cdot y^2,\ y(0) = 1;$
2. $x \cdot y' - y = x \cdot \operatorname{tg}\frac{y}{x};$
3. $(xy' - 1)\ln x = 2y.$

Варіант №12

1. $y' \cdot \operatorname{ctg} x + y = 2,\ y(0) = -1;$
2. $y' = \frac{x-y}{x+y};$
3. $xy' - 2y = 2x^4,\ y(0) = 1.$

Варіант №13

1. $(x^2 + x)y' = 2y + 1;$
2. $x \cdot y'(\ln y - \ln x) = y;$
3. $y' - 2y = e^x - x,\ y(0) = 0.$

Варіант №14

1. $2y'^{\sqrt{x}} = y,\ y(4) = 1;$
2. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8;$
3. $xy' + 2y = x^5.$

Варіант №15

1. $x^3y' + y = 7,\ y(1) = 5;$
2. $x \cdot y' = y \cdot \cos\ln\frac{y}{x};$
3. $y' - 3y = e^{-2x},\ y(0) = 0.$

Варіант №16

1. $y' = (2y - 3)\operatorname{tg} x,\ y(2\pi) = 6;$
2. $\left(\sqrt{xy} - x\right)dy = -ydx;$

3. $y' - \frac{1}{x} \cdot y = x^2,\ y(1) = \frac{1}{2}$.

Варіант №17

1. $y' \cdot \cos x = y \cdot \sin x,\ y(\pi) = 3$;
2. $x \cdot y' = y \cdot \sin \ln \frac{y}{x}$;
3. $y' - y \operatorname{tg} x = \sin 2x,\ y(0) = 0$.

Варіант №18

1. $(2x + 1)yy' = 3 - y^2,\ y(0) = 2$;
2. $x \cdot y' - y = (x + y) \ln \frac{x+y}{x}$;
3. $(x + y^2)dy = ydx$.

Варіант №19

1. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2,\ y(\pi) = 0$;
2. $x \cdot \cos \frac{y}{x}(ydx + xdy) = y \sin \frac{y}{x}(xdy - ydx)$;
3. $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$.

Варіант №20

1. $y' \cos x = y \ln y,\ y(0) = e$;
2. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$;
3. $y' - y \operatorname{tg} x = \cos x$.

Варіант №21

1. $(x^2)y' + 2xy^2 = 0,\ y(0) = 1$;
2. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$;
3. $(2x + y)dy = ydx + 4 \ln y\, dy$.

Варіант №22

1. $2x^2yy' + y^2 = 2;$
2. $x \cdot y'(\ln y - \ln x) = y;$
3. $(1 - 2xy)y' = y(y - 1).$

Варіант №23

1. $y' = \cos(y - x);$
2. $xy' = y \cos \ln \frac{y}{x};$
3. $(2x + 1)y' = 4x + 2y.$

Варіант №24

1. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1};$
2. $x \cdot y' = y \cdot \sin \ln \frac{y}{x};$
3. $y = x(y' - x \cos x)$

Варіант №25

1. $y' - y = 2x - 3;$
2. $x \cdot y' = y \cdot \cos \ln \frac{y}{x};$
3. $y' = \frac{y}{3x - y^2}.$

Варіант №26

1. $x^2y^2y' + 1 = y;$
2. $\left(\sqrt{xy} - x\right)dy = -ydx;$
3. $(xy + e^x)dx - xdy = 0.$

Варіант №27

1. $xydx + \sqrt{1 - x^2}dy = 0;$
2. $x \cdot \cos \frac{y}{x}(ydx + xdy) = y \sin \frac{y}{x}(xdy - ydx);$
3. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$

Варіант №28

1. $y' \cdot \cos x = y \cdot \sin x,\ y(\pi) = 3;$
2. $x \cdot y' = y \cdot \sin \ln \frac{y}{x};$
3. $y' - y \operatorname{tg} x = \sin 2x,\ y(0) = 0.$

Варіант №29

1. $x^2y^2y' + 1 = y;$
2. $x \cdot y + y^2 = (2x^2 + xy) \cdot y';$
3. $(xy + e^x)dx - xdy = 0.$

Варіант №30

1. $(x^2 + x)y' = 2y + 1;$
2. $x \cdot y'(\ln y - \ln x) = y;$
3. $y' - 2y = e^x - x,\ y(0) = 0.$

ТЕМА2. Рівняння в повних диференціалах. Інтегрувальний множник. Метод параметризації

2.1. Рівняння в повних диференціалах (РПД)

Нехай задане диференціальне рівняння першого порядку розв'язане відносно похідної в симетричній формі, тобто

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \qquad (1)$$

Означення. Рівняння (1) називається *рівнянням в повних диференціалах* (**РПД**), якщо ліву частину цього рівняння можна представити, як повний диференціал деякої функції $u(x,y)$, тобто якщо рівняння (1) можна записати

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0. \qquad (2)$$

Наприклад. 1) Рівняння $xdx + ydy = 0$ є рівнянням в повних диференціалах, оскільки його можна записати у вигляді (2), де

$$u(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

2) Рівняння $ydx + xdy = 0$ можна записати у вигляді (2), якщо $u(x,y) = xy$.

Очевидно, що коли рівняння (1) є РПД, тобто, якщо його можна записати у вигляді (2), то його можна записати у вигляді

$$d\big(u(x,y)\big) = 0. \qquad (3)$$

Тоді $u(x,y) = C$. (4)

Формула (4) і є розв'язком рівняння (1), тобто розв'язком РПД в неявній формі. Таким чином, якщо рівняння (1) є РПД, то його інтегрування зводиться до знаходженні функції $u(x,y)$, тобто знайшовши $u(x,y)$ (яка *називається інтегралом рівняння* (1)), ми зразу ж маємо загальний розв'язок у вигляді (4).

Теорема

Якщо функції $P(x,y)$ *та* $Q(x,y)$ *задані в* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$*, мають неперервні частинні похідні по обох змінних в цій області, то рівняння (1) буде РПД тоді і лише тоді, коли*

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0. \qquad (5)$$

Доведення

Необхідність. Нехай рівняння (1) є РПД, тобто існує $u(x,y)$, що рівнянні (1) можна записати у вигляді (2), тобто що

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y).$$

Продиференціюємо перше співвідношення по y, а друге по x.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Враховуючи, що $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні, то, за відомою теоремою математичного аналізу про рівність мішаних частинних похідних, одержуємо виконання умови (5).

Достатність. Нехай для (1) виконується (5). Покажемо, що рівняння (1) є РПД, тобто що існує така $u(x,y)$, що (1) запишеться у вигляді (2).

Доведення проведемо конструктивним шляхом, тобто в ході доведення покажемо, як саме відновити $u(x,y)$ за рівнянням (1).

Нехай така функція існує, тоді з умови $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$ знаходимо, що
$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + C(y). \qquad (6)$$

Продиференціюємо (6) по y, тоді

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx + C(y)\right)$$

або $\frac{\partial u}{\partial y} = \int \frac{\partial P}{\partial y} dx + C'(y)$.

Тобто $C'(y) = -\int \frac{\partial P}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial y}$.

Враховуючи, що $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$, отримаємо

$$C'(y) = -\int \frac{\partial P}{\partial y} dx + Q(x, y). \qquad (7)$$

Покажемо, що прав частина (7) не залежить від x. Дійсно,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial P}{\partial y} dx + \frac{\partial}{\partial x}\big(Q(x, y)\big) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0,$$

що й означає, що права частина не залежить від x.

Тоді інтегруючи (7) по y, одержимо

$$C(y) = -\int \left(\int \frac{\partial P}{\partial y} dx - Q\right) dy. \qquad (8)$$

Підставляючи (8) в (6) остаточно одержимо функцію $u(x, y)$ у вигляді

$$u(x, y) = \int P(x, y) dx - \int \left(\int \frac{\partial P}{\partial y} dx - Q\right) dy. \qquad (9)$$

Оскільки функції P та Q за умовою мають частинні похідні, то всі вирази в правій частині (9) дійсно існують, а отже, функція $u(x, y)$ цілком визначається через квадратури. Причому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial u}{\partial y} = \int \frac{\partial P}{\partial y} dx - \int \frac{\partial P}{\partial y} dx + Q(x, y) = Q(x, y).$$

Теорема доведена.

Наприклад. Проінтегрувати рівняння

$$(2x + 3y)dx + (3x + 3y^2)dy = 0.$$

$$P(x, y) = 2x + 3y,$$

$$Q(x, y) = 3x + 3y^2.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 3 - 3 \equiv 0.$$

Отже, задане рівняння є РПД.

Тоді

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + C(y) = \int (2x + 3y)dx + C(y) =$$

$$= x^2 + 3xy + C(y).$$

Продиференціюємо по y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x + C'(y).$$

Звідки $C'(y) = \frac{\partial u}{\partial y} - 3x = Q(x,y) - 3x = 3x + 3y^2 - 3x = 3y^2$, тоді $C(y) = y^3$.

Отже, $u(x,y) = x^2 + 3xy + y^3$.

Загальний розв'язок має вигляд $x^2 + 3xy + y^3 = C$, де C- довільна стала.

Таким чином, якщо (1) є РПД, то воно завжди інтегрується в квадратурах.

Зауваження 1. Другий метод відновлення функції $u(x,y)$, а отже, інтегрування РПД, ґрунтується на понятті криволінійного інтеграла (див. курс Математичного аналізу).

Зауваження 2. При практичній реалізації побудови функції $u(x,y)$ для РПД використовують дещо спрощений варіант доведення теореми, суть якого пояснимо на прикладі.

Наприклад. Проінтегрувати рівняння

$$(3x^2 + y\cos(xy))dx + x\cos(xy)\,dy = 0,$$

$$P(x,y) = 3x^2 + y\cos(xy),$$

$$Q(x,y) = x\cos(xy),$$

$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos(xy) - xy\sin(xy) - \cos(xy) + xy\sin(xy) \equiv 0.$

Отже, дане рівняння є РПД, тоді

$u(x, y) = \int P(x, y)dx + \int Q(x, y)dy - \gamma(x, y) =$

$= \int(3x^2 + y\cos(xy))dx + \int x\cos(xy)\,dy - \gamma(x, y) =$

$= x^3 + \sin(xy) + \sin(xy) - \sin(xy) = x^3 + \sin(xy),$

$x^3 + \sin(xy) = C$ - загальний розв'язок.

Це в неявному вигляді, але тоді

$\sin(xy) = C - x^3,$

$xy = arc\sin(C - x^3),$

$y = \frac{1}{x} arc\sin(C - x^3).$

2.2. Інтегрувальний множник. Означення та найпростіші випадки його знаходження

Нехай дано звичайне диференціальне рівняння першого порядку (ЗДР-1), розв'язане відносно похідної в симетричній формі

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \qquad (1)$$

де $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ –задані гладкі функції своїх аргументів в $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$.

Якщо для (1) виконується умова $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0$, то (1) є РПД, а отже, інтегрується і квадратурах. Якщо ж виконується

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \neq 0, \qquad (2)$$

то (1) не є РПД.

Наприклад. Рівняння $a(x)dx + b(y)dy = 0, \qquad (3)$

очевидно, є РПД, оскільки $\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} \equiv 0 - 0 = 0$, а рівняння з відокремлюваними змінними

$$a_1(x)b_1(y)dx + a_2(x)b_2(y)dy = 0 \qquad (4)$$

(яке взагалі кажучи не є РПД, але стає ним після відокремлення змінних шляхом домноження на вираз $\frac{1}{a_2(x)b_1(y)}$) показує, що рівняння, яке не є РПД, модна зробити таким шляхом домноження на деяку функцію.

Означення. Функція $\mu(x, y)$, після множення на яку рівняння (1) стає рівнянням в повних диференціалах, називається *інтегрувальним множником* рівняння (1).

Очевидно, що коли для (1) відомий його інтегрувальний множник, то це рівняння можна проінтегрувати в квадратурах. Маємо наступні питання:

1. Для яких рівнянь виду (1) існує інтегрувальний множник?

2. Скільки їх існує для даного диференціального рівняння?

3. Як для даного рівняння знайти хоча б один інтегрувальний множник?

Нехай $\mu(x, y)$– неперервно диференційована функція своїх аргументів, яка є інтегрувальним множником рівняння (1). Це означає, що рівняння

$$\mu P dx + \mu Q dy = 0 \qquad (5)$$

є рівнянням в повних диференціалах. За необхідною і достатньою умовою отримаємо

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \equiv 0,$$

тобто $\frac{\partial \mu}{\partial y} P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial x} Q - \mu \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0.$

Тоді $\frac{\partial \mu}{\partial y} P - \frac{\partial \mu}{\partial x} Q \equiv \mu \frac{\partial Q}{\partial x} - \mu \frac{\partial P}{\partial y},$

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}P-\frac{\partial\mu}{\partial x}Q\right)\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (6)$$

Таким чином, якщо для (1) існує інтегрувальний множник, то він повинен задовольняти рівняння (6), яке є рівнянням в частинних похідних першого порядку (ДРЧП-1).

Задача інтегрування ДРЧП-1 зводиться до задачі інтегрування деякої системи звичайних диференціальних рівнянь. Причому задача інтегрування такої системи, взагалі кажучи, рівносильна задачі інтегрування рівняння (1). Проте в деяких випадках рівняння (6) можна розв’язати досить ефективно засобами теорії ЗДР (очевидно, що це будуть випадки, коли рівняння в частинних похідних (6) зводиться до деякого ЗДР, яке інтегрується в квадратурах).

I. Нехай інтегрувальний множник не залежить від змінної y, тобто є функцією лише змінної x: $\mu=\mu(x)$, тоді

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{dx},\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$$

і рівняння (6) запишеться $-\frac{1}{\mu}Q\frac{d\mu}{dx}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ або

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}\equiv\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}. \qquad (7)$$

Позначимо $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=\gamma(x,y)$, тоді (8)

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}\equiv\frac{\gamma(x,y)}{Q(x,y)}. \qquad (9)$$

Ліва частина рівняння (9) є функцією змінної x, тому і права частина не повинна залежати від y, тобто

$$\frac{\gamma(x,y)}{Q(x,y)}=\varphi(x). \qquad (10)$$

І (9) запишеться $\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}\equiv\varphi(x).$ (11)

Рівняння (11) є ЗДР з відокремлюваними змінними

$\int \frac{\partial\mu}{\mu} \equiv \int \varphi(x)dx,$

$\ln\mu = \int \varphi(x)dx,$

$$\mu = e^{\int \varphi(x)dx}. \qquad (12)$$

Таким чином, якщо для (1) виконується (10), то для цього рівняння інтегрувальний множник існує і є функцією змінної x і може бути знайдений за (12).

Наприклад. Проінтегрувати рівняння $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0.$

$P(x,y) = x^2 + y^2 + x,$

$Q(x,y) = y.$

$\gamma(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y - 0 = 2y \neq 0,$

$\frac{\gamma(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{2y}{y} = 2.$

Тому $\varphi(x) = 2$, тоді за (12) $\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$.

Помножимо початкове рівняння на $\mu(x)$

$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)dx + e^{2x}ydy = 0$

$P(x,y) = e^{2x}(x^2 + y^2 + x),$

$Q(x,y) = e^{2x}y.$

$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2ye^{2x} - 2e^{2x}y \equiv 0.$

$u(x,y) = \int e^{2x}(x^2 + y^2 + x)dx + \int e^{2x}ydy - \varphi(x).$

II. Нехай тепер інтегрувальний множник не залежить від змінної x, тобто є функцією змінної y: $\mu = \mu(y)$, $\frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dy}$, $\frac{\partial\mu}{\partial x} = 0$, тоді рівняння(6) запишеться

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy}P = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P}.$$

Відповідно $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \gamma(x, y)$, тоді $\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{\gamma(x,y)}{-P(x,y)}$. Далі міркування аналогічні до попереднього пункту.

Наприклад. Проінтегрувати рівняння

$$y(x + y)dx + (xy + 1)dy = 0.$$

$$P(x, y) = y(x + y),$$

$$Q(x, y) = xy + 1.$$

$$\gamma(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = x + 2y - y = x + y.$$

$$\varphi(y) = \frac{\gamma(x,y)}{P(x,y)} = \frac{x+y}{-y(x+y)} = -\frac{1}{y}.$$

Тоді $\mu(y) = e^{\int \varphi(y)dy} = e^{\int\left(-\frac{1}{y}\right)dy} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}$.

Помножимо початкове рівняння на $\mu(y)$

$$(x + y)dx + \frac{1}{y}(xy + 1)dy = 0.$$

$$P(x, y) = x + y,$$

$$Q(x, y) = \frac{1}{y}(xy + 1).$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 - 1 \equiv 0.$$

$$u(x, y) = \int (x + y)dx + \int \frac{1}{y}(xy + 1)dy - \varphi(y).$$

2.3. Загальний метод введення параметра

Нехай задано ДР-1 не розв’язане відносно похідної:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Якщо (1) можна розв'язати відносно y', тобто знайти розв'язки у вигляді

$$y' = f_k(x, y), \tag{2}$$

то (2) є ДР-1 розв'язаним відносно похідної. Розв'язавши (якщо це можливо) кожне з рівнянь (2), одержимо розв'язок вихідного рівняння (1).

Наприклад: 1) $(y')^2 - (x + y)y' + xy = 0.$

$$\begin{cases} y' = x, \\ y' = y; \end{cases} \begin{cases} y' = f_1(x, y), \\ y' = f_2(x, y); \end{cases} \begin{cases} y = \frac{x^2}{2} + C, \\ y = Ce^x. \end{cases}$$

$$\left(y - \frac{x^2}{2} - C\right)(y - Ce^x) = 0.$$

$$2)(y')^2 - (x + x^2 + y^2)y' + x(x^2 + y^2) = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} y' = x, \\ y' = x^2 + y^2, \end{array}\right.$$

$y = \frac{x^2}{2} + C$- спеціальне рівняння Ріккаті.

Припустимо, що існують такі функції:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ y' = \theta(u, v), \text{де } (u, v) \in D \subset R^2 \end{cases} \tag{3}$$

Такі, що $F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \theta(u, v)) \equiv \varrho(u, v) \in D.$

Тоді формули (3) називають *параметричним представленням* рівняння (1).

Покажемо, що в цьому випадку рівняння (3) можна звести до одного рівняння відносно u то в розвязанні відносно похідної.

Дійсно, використавши основне співвідношення одержимо:

$$dy = y'dx,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = \theta(\mathrm{u}, \mathrm{v})(\frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{u}} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv)$$

або $\left(\frac{\partial\psi}{\partial u} - \theta(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v} - \theta(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)dv = 0.$ (4)

Позначивши $M(u,v) = \frac{\partial\psi}{\partial u} - \theta\frac{\partial\varphi}{\partial u}$,

$$N(u,v) = \frac{\partial\psi}{\partial v} - \theta\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

Одержимо

$$M(u,v)du + N(u,v)dv = 0. \tag{5}$$

Рівняння (5) є ЗДР-1 записане в симетричній формі.

Припустимо, що (5) інтегровне в квадратурах, тобто що можна знайти розв'язок цього рівняння в явній, неявній або параметричній формі.

Зокрема, якщо розв'язок (5) можна знайти в параметричній формі, тобто виразити у вигляді

$$\begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \end{cases} \tag{6}$$

то використовуючи (3) загальний розв'язок (1) запишеться

$$\begin{cases} x = \varphi\big(u(t), v(t)\big) = \tilde{\varphi}(t), \\ y = \psi\big(u(t), v(t)\big) = \tilde{\psi}(t). \end{cases} \tag{7}$$

Якщо розв'язок (5) знайдемо у явній формі, наприклад, $u = p(v)$ (або $v = q(u)$), то розвязок рівняння (1) за допомогою функції (3) знову запишеться

$$\begin{cases} x = \varphi(p(v), v) = \tilde{\varphi}(v), \\ y = \psi(p(v), v) = \tilde{\psi}(v). \end{cases} \tag{8}$$

Якщо ж розв'язок (5) знайдено в неявному вигляді, а саме $\Phi(u,v) = 0$, то розвязок (1) запишеться в неявно параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = \psi(u,v), \\ \Phi(u,v) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

2.4. Рівняння Лагранжа та Клеро

В попередньому параграфі показано, що коли диференціальне рівняння першого порядку, не розв'язане відносно похідної, можна параметризувати, то це рівняння можна звести до рівняння розв'язаного відносно похідної. Проте на цьому шляху інтегрування диференціального рівняння виникає дві принципові перешкоди:

1) як провести параметризацію заданого рівняння;

2) чи інтегрується отримане рівняння відносно похідної в квадратурах.

Розглянемо зараз два типи рівнянь, для яких вказана вище параметризація можлива і які інтегровні в квадратурах.

Перш за все зауважимо, що коли рівняння

$F(x, y, y') = 0$ можна (1)

1) розв'язати відносно похідної y', тобто представити

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

то немає потреби проводити параметризацію, оскільки (2) є рівнянням розв'язаним відносно похідної.

2) розв'язати відносно x, тобто

$$x = \varphi(y, y'), \tag{3}$$

То (3) параметризується так

$$\begin{cases} y = y, \\ y' = p, \\ x = \varphi(x, p). \end{cases} \tag{4}$$

3) розв'язати відносно y

$$y = \psi(x, y'), \tag{5}$$

тоді $\begin{cases} x = x, \\ y' = p, \\ y = \psi(x, p). \end{cases}$ (6)

$dy = y'dx$, тоді (6) запишеться

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp = pdx,$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - p\right)dx + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp = 0. \qquad (7)$$

Тоді і отримаємо розв'язок.

Нехай права частина (5) є лінійною функцією змінної x, тоді (5) називається *рівнянням Лагранжа*. В деякій літературі рівнянням Лагранжа називається диференціальне рівняння першого порядку, лінійне відносно сукупності змінних x та y, тобто рівняння виду

$$a(y')y + b(y')x + c(y') = 0, \qquad (8)$$

де a, b, c– задані і неперервні функції на $\langle\alpha, \beta\rangle$.

Якщо $a(y') \neq 0, y' \in \langle\alpha, \beta\rangle$, то (8) запишеться

$$y = \varphi(y')x + \psi(y')y, \qquad (9)$$

де φ та ψ – задані і неперервні на $\langle\alpha, \beta\rangle$ функції.

Рівняння (9) є рівнянням Лагранжа.

Використаємо загальний метод введення параметра, параметризуємо (9).

$$\begin{cases} x = x, \\ y' = p, \\ y = \varphi(p)x + \psi(p). \end{cases} \qquad (10)$$

$$dy = y'dx,$$

$$\varphi(p)dx + (\varphi'(p)x + \psi'(p))dp = pdx,$$

$$(\varphi(p) - p)dx + (\varphi'(p)x + \psi'(p))dp = 0. \qquad (11)$$

(будемо надалі вважати φ, ψ– неперервно диференційованими на $\langle\alpha, \beta\rangle$)

1) Нехай $\varphi(p) - p \not\equiv 0, p \in \langle\alpha, \beta\rangle$.

Якщо в деякій точці p_0

$\varphi(p_0) - p_0 = 0$, то $y' = p_0$, тобто $y = p_0 x + C$.

При деякому значенні сталої C зможе бути розв'язком рівняння (8). Очевидно це буде тоді, коли має місце

$$p_0 x + C = \varphi(p_0)x + \psi(p_0),$$

$$C = \psi(p_0).$$

Отже, пряма $y = p_0 x + \psi(p_0)$ може бути особливою інтегральною кривою рівняння (9).

Будемо зараз вважати, що на деякому проміжку $\langle \gamma, \delta \rangle \subset \langle \alpha, \beta \rangle$, $\varphi(p_0) - p_0 = 0$, тоді (11) можна записати

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} x = -\frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p}. \tag{12}$$

Рівняння (12) є лінійним рівнянням відносно шуканої функції x аргументу p

$$x(p) = e^{-\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} dp} \left(C - \int \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p} e^{\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} dp} dp \right). \tag{13}$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (9) задається в параметричному вигляді шляхом приєднання до рівняння (13) третього рівняння системи (10).

2) Нехай $\varphi(p) - p \equiv 0$, тобто $\varphi(p) \equiv p$.

Рівняння (9) в цьому випадку записується

$$y = xy' + \psi(y') \tag{14}$$

і називається *рівнянням Клеро*.

З формули (11) для рівняння Клеро маємо

$$(x + \psi'(p))dp = 0.$$

а) $dp = 0$, тобто $p = C$, тоді з третього рівняння системи (10) при отримаємо загальний розв'язок рівняння Клеро

$$y = Cx + \psi(C). \tag{15}$$

Таким чином загальний розв'язок рівняння Клеро знаходиться без всяких квадратур шляхом заміни y' довільною константою C в рівнянні Клеро. Очевидно, що рівняння (15) задає сім'ю кривих, тобто однопараметричною сім'єю інтегральних кривих рівняння Клеро є однопараметрична сім'я прямих.

б) $x + \psi'(p) = 0$, тоді

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p). \end{cases} \tag{16}$$

(16) може бути особливим розв'язком рівняння Клеро, записаним в параметричній формі.

Наприклад: Проінтегрувати рівняння $y = xy' + (y')^2$.

$$\begin{cases} x = x, \\ y' = p, \\ y = xp + p^2, \end{cases}$$

Тоді $dy = pdx,$

$$pdx + (x + 2p)dp = pdx.$$

1) $dp = 0 \Rightarrow p = C \Rightarrow y = Cx + C^2.$

2) $x + 2p = 0 \Rightarrow p = -\frac{x}{2} \Rightarrow y = x\left(-\frac{x}{2}\right) + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}.$

Індивідуальні завдання №2

«Рівняння в повних диференціалах. Інтегрувальний множник. Методи параметризації»

Варіант 0

1. Перевірити, чи є рівняння РПД. Якщо так, то знайти його загальний інтеграл.

$$(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$$

2. Знайти загальний інтеграл заданого диференціального рівняння, знаючи, що $\mu = \mu(x)$ або $\mu = \mu(y)$.

$$\left(1 + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}\right)dy = 0$$

3. Проінтегрувати диференціальне рівняння Клеро. Дослідити його на особливі розв'язки.

$$2(y')^2(y - xy') = 1$$

Розв'язання

1. $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$

Маємо

$P(x, y) = 2xy + 3y^2,$

$Q(x, y) = x^2 + 6xy - 3y^2.$

Обчислимо далі $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 6y - (2x + 6y) = 0.$

Отже, задане рівняння є РПД.

Тоді

$u(x, y) = \int P(x, y)dx + C(y) = \int(2xy + 3y^2)dx + C(y) =$

$= 2\frac{x^2}{2}y + 3y^2x + C(y) = x^2 + 3xy^2 + C(y).$

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, то продиференціюємо по y знайдену функцію $u(x, y)$:

$\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + C'(y).$

Тоді

$6xy + C'(y) = x^2 + 6xy - 3y^2,$

$C'(y) = x^2 - 3y^2.$

Звідки $C(y) = \int (x^2 - 3y^2)dy = x^2y - 3\frac{y^3}{3} = x^2y - y^3.$

Отже, $u(x,y) = x^2 + 3xy^2 + x^2y - y^3.$

Загальний розв'язок має вигляд $x^2 + 3xy^2 + x^2y - y^3 = C$, де C- довільна стала.

2. $\left(1 + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}\right)dy = 0$

З даного диференціального рівняння маємо

$P(x,y) = \left(1 + \frac{y}{x^2}\right),$

$Q(x,y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}\right).$

$\gamma(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{4y}{x^3} = \frac{2}{x^2} + \frac{4y}{x^3} = \frac{2}{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}\right) \neq 0.$

Складемо відношення

$\frac{\gamma(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{\frac{2}{x}\left(\frac{1}{x}+\frac{2y}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}+\frac{2y}{x^2}} = \frac{2}{x} = \varphi(x).$

Тоді

$\mu(x) = e^{\int \varphi(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2.$

Помножимо початкове рівняння на $\mu(x)$.

$(x^2 + y)dx + (x + 2y)dy = 0.$

$P(x,y) = x^2 + y,$

$Q(x,y) = x + 2y.$

Перевіримо виконання умови РПД

$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 - 1 \equiv 0.$

Тоді

$u(x, y) = \int P(x, y)dx + C(y) = \int (x^2 + y)dx + C(y) =$

$= \frac{x^3}{3} + xy + C(y).$

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, то продиференціюємо по y знайдену функцію $u(x, y)$:

$\frac{\partial u}{\partial y} = x + C'(y).$

Тоді

$x + C'(y) = x + 2y,$

$C'(y) = 2y.$

Звідки $C(y) = \int 2y dy = 2\frac{y^2}{2} = y^2.$

Отже, $u(x, y) = x + y^2.$

Загальний розв’язок має вигляд $x + y^2 = C$, де C- довільна стала.

3. Введемо параметр $p = y'$. Тоді дане рівняння можна записати у вигляді

$y = xp + \frac{1}{2p^2}.$

Продиференціюємо останню рівність, врахувавши, що $dy = pdx$, тому

$xdp + pdx - \frac{1}{p^3}dp = pdx,$

$\left(x - \frac{1}{p^3}\right)dp = 0.$

Звідси випливає, що

$dp = 0 \Rightarrow p = C = const \neq 0$ або $x - \frac{1}{p^3} = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$

Підставимо знайдені значення p і отримаємо з першого випадку загальний розв’язок рівняння Клеро $y = Cx + \frac{1}{2C^2}$, а з другого - його особливий розв’язок

$y = x \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2} = \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}.$

Варіант 1

1. $(3x^2 + 2xy^6)dx + (3y^2 + 6x^2y^5)dy = 0;$

2. $\left(\frac{x}{y}+1\right)dx+\left(\frac{x}{y}-1\right)dy=0;$

3. $y=xy'-e^{y'}+y'.$

Варіант 2

1. $(3x^2+y^2+3x^2y^5)dx+(2xy+5x^3y^4)dy=0;$
2. $(x^2+y)dx-xdy=0;$
3. $3y=3xy'-(y')^3+3y'.$

Варіант 3

1. $(2xy+y^2+4x^3y^4)dx+(x^2+2xy+4x^4y^3)dy=0;$
2. $(2xy^2-y)dx+(y^2+y+x)dy=0;$
3. $y=xy'-\ln y'+2y'.$

Варіант 4

1. $(y^2+5x^4y^3)dx+(2xy+3y^2+3x^5y^2)dy=0;$
2. $(xy^2+y)dx-xdy=0;$
3. $2y=2xy'-(y')^2+6y'.$

Варіант 5

1. $(2xy+6x^5y^2)dx+(x^2+3y^2+2x^6y)dy=0;$
2. $(x\cos y-y\sin y)dy+(x\sin y+y\cos y)d=0;$
3. $y=xy'-e^{3y'}+2y'.$

Варіант 6

1. $(3x^2+y^2+2xy^6)dx+(2xy+6x^2y^5)dy=0;$
2. $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0;$
3. $y=xy'-e^{2y'}+y'.$

Варіант 7

1. $(3x^2+2xy+3x^2y^5)dx+(x^2+5x^3y^4)dy=0;$

2. $(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0;$

3. $3y = 3xy' - 4(y')^3 + 3y'.$

Варіант 8

1. $(2xy + 4x^3y^4)dx + (x^2 + 3y^2 + 4x^4y^3)dy = 0;$

2. $ydy = (xdy + ydx)\sqrt{1 + y^2};$

3. $y = xy' - 2\ln y' + 2y'.$

Варіант 9

1. $(3x^2 + 5x^4y^3)dx + (3y^2 + 3x^5y^2)dy = 0;$

2. $xy^2(xy' + y) = 1;$

3. $y = xy' - (y')^2 + 3y'.$

Варіант 10

1. $(y^2 + 6x^5y^2)dx + (2xy + 3y^2 + 2x^6y)dy = 0;$

2. $y^2dx - (xy + x^3)dy = 0;$

3. $y = xy' - e^{4y'} + 2y'.$

Варіант 11

1. $(3x^2 + 2xy + 2xy^6)dx + (x^2 + 6x^2y^5)dy = 0;$

2. $\left(y - \frac{1}{x}\right)dx + \frac{dy}{y} = 0;$

3. $y = xy' - e^{y'} + 2y'.$

Варіант 12

1. $(2xy + y^2 + 3x^2y^6)dx + (x^2 + 2xy + 5x^3y^4)dy = 0;$

2. $(x^2 + 3\ln y)ydx + 3xdy = 0;$

3. $3y = 3xy' - (y')^3 + 6y'.$

Варіант 13

1. $(y^2 + 4x^3y^4)dx + (2xy + 3y^2 + 4x^4y^3)dy = 0;$

2. $y(x + y)dx + (xy + 1)dy = 0;$

3. $y = xy' - \ln y' + y'.$

Варіант 14

1. $(3x^2 + 2y^2 + 5x^4y^3)dx + (2xy + 3x^5y^2)dy = 0;$

2. $y(y^2+1)dx + x(y^2 - x + 1)dy = 0;$

3. $2y = 2xy' - (y')^2 + 4y'.$

Варіант 15

1. $(3x^2 + 2xy + 6x^5y^2)dx + (x^2 + 2x^6y)dy = 0;$

2. $(x^2 + 2x + y)dx = (x - 3x^2y)dy;$

3. $y = xy' - e^{3y'} + y'.$

Варіант 16

1. $(2xy + y^2 + 2xy^6)dx + (x^2 + 2xy + 6x^2y^5)dy = 0;$

2. $(2x^2y^3 - 1)ydx + (4x^2y^3 - 1)xdy = 0;$

3. $y = xy' - e^{2y'} + 2y'.$

Варіант 17

1. $(2xy + 5x^4y^3)dx + (x^2 + 3y^2 + 5x^3y^4)dy = 0;$

2. $x(\ln y + 2\ln x - 1)dy = 2ydx;$

3. $3y = 3xy' - 4(y')^3 + 6y'.$

Варіант 18

1. $(3x^2 + 4x^3y^4)dx + (3y^2 + 4x^4y^3)dy = 0;$

2. $\left(1 + \frac{5y^2}{x^2}\right)dx = \frac{2y}{x}dy;$

3. $y = xy' - 2\ln y' + y'.$

Варіант 19

1. $(3x^2 + 2xy + 5x^4y^3)dx + (x^2 + 3x^5y^2)dy = 0;$

2. $y(1 + xy)dx - xdy = 0;$

3. $y = xy' - (y')^2 + 2y'.$

Варіант 20

1. $(2xy + y^2 + 6x^5y^2)dx + (x^2 + 2xy + 2x^6y)dy = 0;$

2. $(2y - xe^y)y' = e^y;$

3. $y = xy' - e^{4y'} + y'.$

Варіант 21

1. $2(xy + xy^6)dx + (x^2 + 3y^2 + 6x^2y^5)dy = 0;$

2. $2y^2dx + \left(x - e^{1/y}\right)dy = 0;$

3. $y = xy' - e^{y'} + 3y'.$

Варіант 22

1. $(y^2 + 3x^2y^5)dx + (2xy + 3y^2 + 5x^3y^4)dy = 0;$
2. $(3y\cos 2y - 2y^2\sin 2y - 2x)y' = y;$
3. $3y = 3xy' - (y')^3 + 9y'.$

Варіант 23

1. $(3x^2 + y^2 + 4x^3y^4)dx + (2xy + 4x^4y^3)dy = 0;$
2. $2(\cos^2 y \cdot \cos 2y - x)y' = \sin 2y;$
3. $y = xy' - \ln y' + 3y'.$

Варіант 24

1. $(2xy + y^2 + 5x^4y^3)dx + (x^2 + 2xy + 3x^5y^2)dy = 0;$
2. $(1 + x^2y)dx + x^2(x + y)dy = 0;$
3. $2y = 2xy' - (y')^2 + 2y'.$

Варіант 25

1. $(3x^2 + 6x^5y^2)dx + (3y^2 + 2x^6y)dy = 0;$
2. $(x^2\cos x - y)dx + xdy = 0;$
3. $y = xy' - e^{3y'} + 3y'.$

Варіант 26

1. $(y^2 + 2xy^6)dx + (2xy + 3y^2 + 6x^2y^5)dy = 0;$
2. $(y + \ln x)dx - xdy = 0;$
3. $y = xy' - e^{2y'} + 3y'.$

Варіант 27

1. $3x^2(1 + y^5)dx + y^2(3 + 5x^3y^2)dy = 0;$
2. $y^2dx + (xy - 1)dy = 0;$
3. $3y = 3xy' - 4(y')^3 + 9y'.$

Варіант 28

1. $(3x^2 + 2xy + 4x^3y^4)dx + (x^2 + 4x^4y^3)dy = 0;$
2. $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0;$
3. $y = xy' - 2\ln y' + 3y'.$

Варіант 29

1. $(2xy + 5x^4y^3)dx + (x^2 + 3y^2 + 3x^5y^2)dy = 0;$
2. $\left(\frac{y^3}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)dy = \frac{y}{x^3}dx;$
3. $y = xy' - (y')^2 + y'.$

Варіант 30

1. $(3x^2 + y^2 + 6x^5y^2)dx + (2xy + 2x^6y)dy = 0;$
2. $\left(\frac{y}{x} - 3x\right)dx = \left(\frac{4y}{x} - 1\right)dy;$
3. $y = xy' - e^{4y'} + 3y'.$

ТЕМА 3. Диференціальні рівняння вищих порядків

3.1. Деякі класи рівнянь, які допускають пониження порядку

I. Рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$, (1)

де $f(x)$- задана і неперервна на $\langle a, b\rangle$ функція.

З рівняння (1) послідовним інтегруванням знаходимо

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int(\int f(x)dx)dx + C_1 x + C_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int\int(\int f(x)dx)dx\, dx + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

…

$$y(x) = \int(\dots(\int f(x)dx)\dots)dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_1\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1}x + C_n. \quad (2)$$

Формула (2) і дає загальний розв'язок рівняння (1), причому цей розв'язок містить і всі частинні розв'язки, оскільки особливих розв'язків рівняння (1) немає (що випливає з теореми існування і єдиності).

У випадку, коли для (1) задана задача Коші, а саме

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0', \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \quad (3)$$

то розв'язок цієї задачі зручніше шукати у вигляді

$$y^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + y_0^{(n-1)},$$

$$y^{(n-2)}(x) = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x)dx\right)dx + \frac{y_0^{(n-1)}}{1!}(x - x_0) + y_0^{(n-2)},$$

…

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \left(\dots \left(\int_{x_0}^{x} f(x)dx \right) \dots \right) dx + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} + \dots + \frac{y_0'}{1!}(x - x_0) + y_0. \qquad (4)$$

Якщо числа $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ фіксовані, то ми отримаємо частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови (3). У випадку довільних початкових даних $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ отримаємо загальний розв'язок рівняння (1), який називається загальним розв'язком у формі Коші.

Наприклад. $y''' = 6x$.

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 0, \\ y''(0) = 0. \end{cases}$$

Перший спосіб

Знайдемо загальний розв'язок

$$y'' = \int 6x dx + C_1 = 3x^2 + C_1,$$

$$y' = \int (3x^2 + C_1)dx + C_2 = x^3 + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int (x^3 + C_1 x + C_2)dx + C_3 = \frac{x^4}{4} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

$$y''(0) = 3 \cdot 0 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0,$$

$$y'(0) = 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0,$$

$$y(0) = \frac{0}{4} + \frac{0}{2} + 0 + C_3 = 1 \Rightarrow C_3 = 1.$$

Отже, розв'язок запишеться $y(x) = \frac{x^4}{4} + 1$.

Другий спосіб

За формулою (4) маємо

$y(x) = \int_0^x \left(\int_0^x \left(\int_0^x 6x\, dx\right) dx\right) dx + 1 = \int_0^x \left(\int_0^x 3x^2 |_0^x dx\right) dx + 1 =$

$\int_0^x \left(\int_0^x 3x^2 dx\right) dx + 1 = \int_0^x x^3 |_0^x dx + 1 = \frac{x^4}{4} + 1.$

Зауваження. Формули (2) та (4), які дають загальний розв'язок рівняння (1), містять n послідовних інтегралів, тобто для знаходження загального розв'язку рівняння (1) потрібно виконати n-кратне інтегрування. Це n-кратне інтегрування можна дослідити однократним інтегруванням.

II. Рівняння виду $F\left(x, y^{(n)}\right) = 0.$ (5)

Якщо рівняння (5) легко розв'язати відносно $y^{(n)}$ і вираз від цієї похідної нескладний, то отримаємо пункт 1. Якщо ж $y^{(n)}$ не можна виразити або ж його можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, але права частина досить складна функція, то інколи рівняння (5) можна проінтегрувати за допомогою методу параметризації. Припустимо, що існують функції

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y^{(n)} = \psi(t), t \in \langle \alpha, \beta \rangle, \end{cases} \quad (6)$$

такі, що $F\left(\varphi(t), \psi(t)\right) \equiv 0,\ t \in \langle \alpha, \beta \rangle.$

Система (6) називається параметричним представленням рівняння (5). Враховуючи що

$d^n y = y^{(n)} dx^n,$

$d^n y = \psi(t) d(\varphi^n(t))$

або $dy^{(n-1)} = \psi(t) d\varphi(t).$

Звідки $y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1 = \psi_1(t, C_1).$

Аналогічно $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx$, тоді

$y^{(n-2)} = \int \psi_1(t, C_1)\varphi'(t)dt + C_2 = \psi_2(t, C_1, C_2).$

Продовжуючи так далі нарешті отримаємо

$dy = y'dx \Rightarrow dy = \psi_{n-1}(t, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})\varphi'(t)dt \Rightarrow y =$
$\int \psi_{n-1}(t, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})\varphi'(t)dt + C_n = \psi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n).$

Таким чином розв’язок рівняння (5) запишеться в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{cases} \qquad (7)$$

Розглянемо два випадки, при яких (5) легко параметризується.

а) Нехай (5) можна представити $x = \varphi(y^{(n)})$. (8)

Тоді позначивши $y^{(n)} = t$, одержимо параметричне представлення рівняння (8)

$$\begin{cases} y^{(n)} = t, \\ x = \varphi(t). \end{cases} \qquad (9)$$

Наприклад. $y'' + e^{y''} - x = 0$.

$x = y'' + e^{y''}$.

Введемо параметр:

$$\begin{cases} y'' = t, \\ x = t + e^t. \end{cases}$$

$dy' = y''dx,$

$dy' = t(1 + e^t)dt,$

$y' = \int (t + te^t)dt + C_1 = \frac{t^2}{2} + te^t - e^t + C_1.$

$dy = y'dx,$

$dy = \left(\frac{t^2}{2} + te^t - e^t + C_1\right)(1 + e^t)dt,$

$y = \int \left(\frac{t^2}{2} + te^t - e^t + C_1 + \frac{t^2}{2}e^t + te^{2t} - e^{2t} + C_1e^t\right)dt + C_2 = \frac{t^3}{6} + te^t -$
$2e^t + C_1t + C_1t - \frac{1}{2}e^{2t} + \int \left(\frac{t^2}{2}e^t + te^{2t}\right)dt + C_2.$

б) Нехай (5) має вигляд

$$P\left(x, y^{(n)}\right) + Q\left(x, y^{(n)}\right) = 0, \tag{10}$$

де P та Q – однорідні функції степеня однорідності k та l відповідно, то

$$P(tx, ty^{(n)}) \equiv t^k P\left(x, y^{(n)}\right),$$

$$Q(tx, ty^{(n)}) \equiv t^l Q\left(x, y^{(n)}\right).$$

В цьому випадку параметризація рівняння (10) виконується наступним чином

$$P\left(x, y^{(n)}\right) + Q\left(x, y^{(n)}\right) = P\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y^{(n)}}{x}\right) + Q\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y^{(n)}}{x}\right) =$$
$$x^k P\left(1, \frac{y^{(n)}}{x}\right) + x^l Q\left(1, \frac{y^{(n)}}{x}\right) = 0.$$

Позначимо $\frac{y^{(n)}}{x} = t$, тобто $y^{(n)} = tx$.

$$x^k P(1, t) + x^l Q(1, t) = 0,$$

$x^{k-l} P(1, t) = -Q(1, t)$ (якщо $k > l$).

Звідки $\begin{cases} x = \sqrt[k-l]{-\frac{Q(1,t)}{P(1,t)}}, \\ y^{(n)} = tx. \end{cases}$ (11)

(11) і є параметричним представленням (8).

ІІІ. Рівняння, яке не містить залежної змінної y та всіх її похідних до l-го порядку включно

$$F\left(x, y^{(l+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{12}$$

Виконаємо заміну $y^{(l+1)} = z$. (13)

Тоді $F\left(x, z, z', \dots, z^{(n-l)}\right) = 0$. (14)

Рівняння (14) має порядок $n-l$, тобто заміна (13) понижує порядок (12) на l одиниць. Припустимо, що $z=f(x,C_1,C_2,\dots,C_{n-l})$ – розв'язок рівняння (14). Тоді з (13) $y^{(l+1)}=f(x,C_1,C_2,\dots,C_{n-l})$. (15)

Рівняння (15) має вигляд рівняння (1). Розглянемо два спеціальних випадки рівняння (12).

а) $F\left(y^{(n-1)},y^{(n)}\right)=0.$ (16)

Ввівши заміну $y^{(n-1)}=z$.

$F(z,z')=0.$ (17)

(17) – неповне рівняння першого порядку. Якщо його можна розв'язати відносно z', тобто записати у вигляді $z'=f(z)$, то (17) запишеться

$\int \frac{dz}{f(z)}=x+C_1.$

Звідки $\Phi(z)=x+C_1$, де $\Phi(z)$ – первісна до $\frac{1}{f(z)}$, тоді

$z=\Phi^{-1}(x+C_1)$, де Φ^{-1} обернена до Φ.

$y^{(n-1)}=\Phi^{-1}(x+C_1).$

Якщо рівняння (17) не розв'язується відносно z', але параметризується, то розв'язок також інколи можна знайти в параметричній формі.

$$\begin{cases} z=\varphi(t), \\ z'=\psi(t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\theta(t,C_1), \\ z=\varphi(t), \end{cases} \Rightarrow z=\Phi(x,C_1) \text{ або } \begin{cases} x=\theta(t,C_1), \\ y^{(n-1)}=\varphi(t). \end{cases}$$

б) $F\left(y^{(n-2)},y^{(n)}\right)=0.$ (18)

Нехай $y^{(n-2)}=z$, тоді $F(z,z'')=0.$ (19)

Нехай (19) можна розв'язати відносно z''

$$z'' = f(z). \qquad (20)$$

Домножимо на $2z'$

$$2z' \cdot z'' = 2z'f(z),$$

$((z')^2)' = 2z'f(z)$ або $d((z')^2) = 2f(z)dz$,

$$(z')^2 = \int 2f(z)dz + C_1,$$

$$z' = \pm\sqrt{\int 2f(z)dz + C_1},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\int 2f(z)dz + C_1}} = \pm x + C_2.$$

Нехай $\Phi(z)$ – ліва частина останнього рівняння

$$z = \Phi^{-1}(= \pm x + C_2) = \psi(x, C_1, C_2).$$

Отже, рівняння (18) звелося до вигляду

$$y^{(n-2)} = \psi(x, C_1, C_2).$$

Якщо (19) не розв’язане відносно похідної, але його можна параметризувати.

3.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо частинний випадок рівняння $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, коли $a_1(x)$ і $a_2(x)$- сталі:

$$y'' + py' + qy = 0, p, q \in R. \qquad (1)$$

Будемо шукати частинні розв’язки цього рівняння у вигляді $y = e^{kx}$, де k – стала (дійсна чи комплексна), яку треба знайти. Тоді $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$. Підставимо в (1):

$$e^{kx}(k^2 + kp + q) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то з останнього рівняння маємо

$k^2 + kp + q = 0.$ (2)

Рівняння (2) називається ***характеристичним рівнянням*** диференціального рівняння (1). Знаходимо тепер його корені. В залежності від дискримінанта квадратного рівняння можливі три варіанти.

I. Рівняння (2.28) має ***два дійсних різних розв'язки***, причому $k_1 \neq k_2$ $(D > 0)$.

У цьому випадку функції $y_1(x) = e^{k_1 x}$, $y_2(x) = e^{k_2 x}$ – розв'язки рівняння (1), що утворюють фундамен6тальну систему розв'язків, бо визначник Вронського

$$\begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{k_1 x} \cdot e^{k_2 x}(k_2 - k_1) \neq 0.$$

Отже, в цьому випадку

$$y_{зо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \quad (3)$$

II. Рівняння (2) має ***один кратний корінь*** $k_1 = k_2$ $(D = 0)$.

Покажемо, що в цьому випадку $y_1(x)$ та $y_2(x)$ можуть бути знайдені у вигляді

$y_1(x) = e^{k_1 x}$,

$y_2(x) = x e^{k_1 x}$.

Перш за все перевіримо, чи буде $y_2(x)$ коренем рівняння.

$y_2{}'(x) = e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x}$,

$y_2''(x) = k_1 e^{k_1 x} + k_1 e^{k_1 x} + {k_1}^2 x e^{k_1 x} = 2k_1 e^{k_1 x} + {k_1}^2 x e^{k_1 x}$.

Підставимо в (1) і згрупуємо:

$2k_1 e^{k_1 x} + {k_1}^2 x e^{k_1 x} + p(e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x}) + q x e^{k_1 x} = 0$,

$$e^{k_1 x}\left(x\left({k_1}^2 + p k_1 + q\right) + (p + 2k_1)\right) = 0. \quad (4)$$

Оскільки k_1- корінь рівняння (2), то ${k_1}^2 + k_1 p + q = 0$. За теоремою Вієта $k_1 + k_1 = -p$, тобто $p = -2k_1$, тому $p + 2k_1 = 0$. Отже, вираз у других дужках (4) дорівнює 0, а це означає, що $y_2(x) = x e^{k_1 x}$ є розв'язком (1).

Покажемо тепер, що $y_1(x)$ і $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків. Запишемо визначник Вронського:

$$\begin{vmatrix} e^{k_1x} & xe^{k_1x} \\ k_1e^{k_1x} & e^{k_1x}(k_1x+1) \end{vmatrix} = e^{k_1x} \cdot e^{k_1x}(k_1x+1) - xe^{k_1x} \cdot k_1e^{k_1x} = e^{2k_1x} \neq 0$$

Для будь-яких $x \in R$. Тому в цьому випадку

$$y_{зо} = e^{k_1x}(C_1 + C_2x). \quad (5)$$

III. Рівняння (2) має ***комплексно-спряжені корені*** $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $(D < 0)$

Тоді $y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$, $y_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}$.

Якщо використати формулу Ейлера, то $y_1(x)$ і $y_2(x)$ можна записати у вигляді

$$y_1(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$y_2(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

або $y_1(x) = \widehat{y_1} + i\widehat{y_2}$, $y_2(x) = \widehat{y_1} - i\widehat{y_2}$, де $\widehat{y_1} = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $\widehat{y_2} = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Лема

Якщо функція $y(x) = u(x) + iv(x)$ *є розв'язком рівняння (1), то і функції* $u(x)$ *та* $v(x)$ *також є розв'язками рівняння (1).*

Доведення. Оскільки $y(x) = u(x) + iv(x)$ є розв'язком, то воно задовольняє (1), тобто

$$(u + iv)'' + p(u + iv)' + q(u + iv) = 0.$$

Перегрупувавши, отримаємо:

$$(u'' + pu' + q) + i(v'' + pv' + q) = 0.$$

Але комплексна функція дорівнює **0** тоді і тільки тоді, коли її дійсна і уявна частини одночасно рівні нулю. Тобто, остання рівність еквівалентна системі

$$\begin{cases} u'' + pu' + q = 0, \\ v'' + pv' + q = 0. \end{cases}$$

А це і означає, що $u(x)$ та $v(x)$- розв'язки рівняння (1).

Лема доведена.

Користуючись лемою, можна сказати, що оскільки $y_1(x)$- розв'язок рівняння, то і $\widehat{y_1}$ і $\widehat{y_2}$ теж будуть його розв'язками. Покажемо, що вони утворюють фундаментальну систему розв'язків. Запишемо відповідний визначник Вронського:

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\alpha x}\cos\beta x \cdot e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) - e^{\alpha x}\sin\beta x \cdot e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) =$$

$$= e^{2\alpha x}(\alpha\cos\beta x\sin\beta x + \beta\cos^2\beta x - \sin\beta x\,\alpha\cos\beta x + \beta\sin^2\beta x) = e^{2\alpha x} \neq 0,$$

бо $k_{1,2}$- комплексні, а тому $\beta \neq 0$. Таким чином, отримаємо

$$y_{зо}(x) = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Наприклад. Знайти загальний розв'язок рівнянь:

1) $y'' - 3y' + 2y = 0$;

2) $y'' + 5y' = 0$;

3) $y'' - 5y' + 9y = 0$;

4) $y'' + 4y = 0$;

5) $y'' + 6y' + 10y = 0$.

Розв'язання.

1) Складемо характеристичне рівняння :

$k^2 - 3k + 2 = 0$.

За теоремою Вієта його корені $k_1 = 1$ та $k_2 = 2$, тоді за формулою (3)

$y_{зо} = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

2) Характеристичне рівняння в цьому випадку:

$k^2 + 5k = 0$ і $k_1 = 0$ та $k_2 = -5$, тоді

$y_{зо} = C_1 + C_2e^{-5x}$.

3) Характеристичне рівняння

$k^2 - 6k + 9 = 0$.

Тут має місце випадок кратного кореня $k = 3$. Тому загальний розв'язок матиме вигляд $y_{зо} = (C_1 + C_2x)y_{зо} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.

4) Складемо характеристичне рівняння:

$k^2 + 4 = 0,$

яке матиме уявні корені $k = \pm 2i$. Загальний розв'язок запишемо враховуючи умови $\alpha = 0$ та $\beta = 2$:

$y_{зо} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$

5) У цьому випадку характеристичне рівняння

$k^2 + 6k + 10 = 0$

має комплексні корені $k_{1,2} = -3 \pm i$. Отже, $\alpha = -3$ та $\beta = 1$, а тому

$y_{зо} = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$

3.3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядкузі сталими коефіцієнтами

Розглянемо частинний випадок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

$y'' + py' + q = f(x),$ (1)

$p, q \in R$ – деякі дійсні числа, а $f(x)$ – задана функція, неперервна на $(a; b)$.

З теореми про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння маємо, що $y_{зн}(x) = y_{зо}(x) + y_{чн}(x)$. Метод знаходження $y_{зо}(x)$ розглянуто в попередньому параграфі. Для знаходження $y_{чн}(x)$ у випадку, коли $f(x)$ довільна диференційовна функція, може бути використаний метод Лагранжа. Але, якщо $f(x)$ має спеціальний вигляд, то знайти $y_{чн}(x)$ можна простіше, не використовуючи операцію інтегрування.

І. Права частина спеціального виду першого типу.

Нехай $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, де $P_n(x)$ – многочлен n-го порядку, тобто

$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,\ a_i \in R,\ i = \overline{0, n}.$

1) Розглянемо варіант, коли α ***не співпадає з коренями характеристичного рівняння:*** $\alpha \neq k_1, \alpha \neq k_2$.

Тоді шукаємо $y_{чн}(x)$ у вигляді

$$y_{\text{чн}}(x) = Q_n(x)e^{\alpha x}, \qquad (2)$$

де $Q_n(x)$ – також многочлен n-го степеня

$$Q_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_{n-1}x + A_n$$

з поки що невідомими коефіцієнтами A_i. Знайдемо $y_{\text{чн}}{}', y_{\text{чн}}{}''$ та підставимо їх у рівняння (1), скоротимо на $e^{\alpha x}$. Отримаємо рівність, де і в лівій, і в правій частинах знаходяться многочлени n-го степеня, але многочлен у правій частині містить невідомі коефіцієнти A_i. Два многочлени рівні, якщо у них однакові коефіцієнти при відповідних степенях змінної x. Отже, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, ми отримаємо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих A_i, після розв'язання якої, знайдемо $y_{\text{чн}}$.

Наприклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$y'' + 2y' = xe^x$.

Розв'язання. Оскільки $y_{\text{зн}}(x) = y_{\text{зо}}(x) + y_{\text{чн}}(x)$, то знайдемо спочатку $y_{\text{зо}}(x)$. Складемо відповідне однорідне рівняння:

$y'' + 2y' = 0$.

Його характеристичне рівняння $k^2 + 2k = 0$ має корені $k_1 = 0$, $k_2 = -2$, тому $y_{\text{зо}}(x) = C_1 + C_2e^{-2x}$.

Оскільки $f(x) = xe^x$ є правою частиною спеціального виду (добуток многочлена першого степеня на e^x), ш $\alpha = 1$ не співпадає з k_1, k_2, то шукаємо $y_{\text{чн}}(x)$ у вигляді:

$y_{\text{чн}}(x) = (A_1x + A_2)e^x$,

де A_1, A_2 – невідомі числа. Знайдемо далі похідні:

$y'_{\text{чн}} = (A_1x + A_2)e^x + A_1e^x = (A_1x + A_1 + A_2)e^x$;

$y''_{\text{чн}} = A_1e^x + (A_1x + A_1 + A_2)e^x = (A_1x + 2A_1 + A_2)e^x$.

Підставимо в рівняння з умови:

$(A_1x + 2A_1 + A_2)e^x + 2(A_1x + A_1 + A_2)e^x = xe^x$,

$(3A_1x + 4A_1 + 3A_2)e^x = xe^x$,

$3A_1x + 4A_1 + 3A_2 = x$,

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3A_1 = 1, \\ 4A_1 + 3A_2 = 0. \end{cases}$$

Звідси $A_1 = \frac{1}{3}$, $A_2 = -\frac{4}{9}$. Отже, $y_{чн}(x) = (\frac{1}{3}x - \frac{4}{9})e^x$, а тому

$y_{зн}(x) = C_1 + C_2e^{-2x} + (\frac{1}{3}x - \frac{4}{9})e^x$.

2) Нехай тепер α *співпадає з одним коренем характеристичного рівняння і не співпадає з іншим.*

У цьому випадку, якби ми шукали $y_{чн}$ у вигляді (2), то після підстановки в рівняння в лівій частині отримали б многочлен $(n-1)$-го степеня, а в правій – многочлен n-го степеня, що ні при яких A_i не може бути тотожністю. Тому в цьому випадку будемо шукати $y_{чн}$ у вигляді

$$y_{чн}(x) = xQ_n(x)e^{\alpha x}. \qquad (3)$$

Наприклад. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$y'' + 2y' = xe^{-2x}$,

що задовольняє початкові умови $y(0) = 0, y'(0) = -2$.

Розв'язання. З попереднього прикладу $k_1 = 0$, $k_2 = -2$, а загальний розв'язок однорідного рівняння $y_{зо}(x) = C_1 + C_2e^{-2x}$.

Оскільки тепер $\alpha = -2$ співпадає з k_2, то шукаємо $y_{чн}$ у вигляді:

$\boldsymbol{y}_{чн} = (A_1x + A_2)e^{-2x}x = (A_1x^2 + A_2x)e^{-2x}$.

Знайдемо першу та другу похідні :

$\boldsymbol{y}'_{чн} = (2A_1x + A_2)e^{-2x} - 2(A_1x^2 + A_2x)e^{-2x} = (2A_1x + A_2 - 2A_1x^2 - 2A_2x)e^{-2x}$,

$y''_{чн} = (2A_1 - 4A_1x - 2A_2)e^{-2x} - 2(2A_1x + A_2 - 2A_1x^2 - 2A_2x)e^{-2x} =$

$= (2A_1 - 4A_1x - 2A_2 - 4A_1x - 2A_2 + 4A_1x^2 + 4A_2x)e^{-2x} =$

$= (4A_1x^2 - 4(2A_1 - A_2)x + 2A_1 - 4A_2)e^{-2x}.$

Підставимо в рівняння з умови, тоді

$(4A_1x^2 - 4(2A_1 - A_2)x + 2A_1 - 4A_2)e^{-2x} +$

$+2(2A_1x + A_2 - 2A_1x^2 - 2A_2x)e^{-2x} = xe^{-2x},$

$(4A_1x^2 - 4(2A_1 - A_2)x + 2A_1 - 4A_2 + 4A_1x + 2A_2 - 4A_1x^2 - 4A_2x)e^{-2x} = xe^{-2x},$

$(2A_1 - 2A_2 - 4A_1x)e^{-2x} = xe^{-2x},$

$2A_1 - 2A_2 - 4A_1x = x.$

Прирівнюючи коефіцієнти при першому і нульовому степенях x, отримаємо счистему:

$$\begin{cases} -4A_1 = 1, \\ 2A_1 - 2A_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язком системи є пара чисел $A_1 = -\frac{1}{4}$, $A_2 = -\frac{1}{4}$.

Таким чином $y_{зн}(x) = C_1 + C_2e^{-2x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)e^{-2x}$. Тоді

$y_{зн}'^{(x)} = -2C_2e^{-2x} - \frac{1}{4}(2x + 1)e^{-2x} + \frac{1}{2}(x^2 + x)e^{-2x}.$

З початкових умов маємо систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -2C_2 - \frac{1}{4} = -2. \end{cases}$$

Отримаємо $C_1 = -\frac{7}{8}$, $C_2 = \frac{7}{8}$. Остаточно

$y_{зн}(x) = -\frac{7}{8} + \frac{7}{8_2} e^{-2x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)e^{-2x}.$

3) Розглянемо тепер випадок, коли α ***збігається з кратним дійсним коренем характеристичного рівняння*** $: \alpha = k_1 = k_2$.

Тепер, щоб після підстановки $y_{чн}$ в рівняння отримати в лівій і правій частині рівняння многочлени n -го степеня, шукаємо $y_{чн}$ у вигляді:

$$y_{чн}(x) = x^2 Q_n(x) e^{\alpha x}, \qquad (4)$$

де невідомі коефіцієнти $Q_n(x)$ знаходяться аналогічно попереднім випадкам.

Наприклад. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$y'' - 2y' + y = (12x + 2)e^x$.

Р**озв'язання.** Для однорідного рівняння $y'' - 2y' + y = 0$ складаємо характеристичне рівняння

$$k^2 - 2k + 1 = 0,$$

тоді $k_1 = k_2 = 1$. Отже, $y_{зо}(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Оскільки $\alpha = k_1 = k_2$, то шукаємо $y_{чн}$ у вигляді:

$$y_{чн} = (A_1 x + A_2) x^2 e^x.$$

Далі знаходимо похідні $y'_{чн}$, $y''_{чн}$:

$y'_{чн} = (A_1 x + A_2)x^2 e^x + (3A_1 x^2 + 2A_2 x)e^x = (A_1 x^3 + A_2 x^2 + 3A_1 x^2 + 2A_2 x)e^x$.

$$y''_{чн} = (A_1 x^3 + A_2 x^2 + 3A_1 x^2 + 2A_2 x)e^x + (3A_1 x^2 + 2A_2 x + 6A_1 x + 2A_2)e^x =$$

$$= (A_1 x^3 + A_2 x^2 + 3A_1 x^2 + 2A_2 x + 3A_1 x^2 + 2A_2 x + 6A_1 x + 2A_2)e^x =$$

$$= (A_1 x^3 + (A_2 + 6A_1)x^2 + (4A_2 + 6A_1)x + 2A_2)e^x.$$

Тепер підставимо в рівняння умови і зведемо подібні доданки.

$$(A_1 x^3 + (A_2 + 6A_1)x^2 + (4A_2 + 6A_1)x + 2A_2)e^x -$$

$$-2(A_1 x^3 + A_2 x^2 + 3A_1 x^2 + 2A_2 x)e^x + (A_1 x + A_2)x^2 e^x = (12x + 2)e^x,$$

$(A_1 x^3 + (A_2 + 6A_1)x^2 + (4A_2 + 6A_1)x + 2A_2 - 2A_1 x^3 - 2A_2 x^2 - 6A_1 x^2 - 4A_2 x + A_1 x^3 + A_2 x^2)e^x = (12x + 2)e^x,$

$(6A_1x + 2A_2)e^x = (12x + 2)e^x,$

$6A_1x + 2A_2 = 12x + 2.$

Звідки $A_1 = 2$, $A_2 = 1$.

Отже, $y_{зн}(x) = C_1e^x + C_2xe^x + (2x^3 + x^2)e^x$.

II. Права частина спеціального виду другого типу.

Нехай

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x), \tag{5}$$

де $P_n(x)$, $T_m(x)$ – многочлени n-го та m-го степенів відповідно, $\alpha, \beta \in R$.

1) Припустимо спочатку, що $\alpha \pm i\beta$ ***не співпадають з коренями характеристичного рівняння***

Тоді частинний розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$y_{чн} = e^{\alpha x}(Q_k\cos\beta x + R_k\sin\beta x), \tag{6}$$

де Q_k, R_k – многочлени з невідомими коефіцієнтами степеня k, який дорівнює більшому із степенів $P_n(x)$, $T_m(x)$.

Двічі знайдемо похідну та підставимо в рівняння. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових виразах $x^l\cos\beta x$ та $x^l\sin\beta x$, отримаємо систему для знаходження невідомих коефіцієнтів многочленів $Q_k(x)$ та $R_k(x)$.

Наприклад. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$y'' - 7y' + 12y = \sin x + 2\cos x.$

Р**озв'язання.** Знайдемо $y_{зо}$ для однорідного рівняння

$y'' - 7y' + 12y = 0.$

Складемо характеристичне рівняння:

$k^2 - 7k + 12 = 0,$

звідки $k_1 = 3$ і $k_2 = 4$. Отже, $y_{зо}(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}$.

Права частина $f(x) = \sin x + 2\cos x$ є правою частиною виду (5), де $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $m = n = 0$. Оскільки косплексні числа $\pm i$ не співпадають з коренями k_1 та k_2, $k = \max(0{,}0) = 0$, то згідно (6):

$y_{чн} = A\cos x + B\sin x.$

Продиференціюємо двічі:

$y'_{чн} = -A\sin x + B\cos x,$

$y''_{чн} = -A\cos x - B\sin x.$

Підставимо в рівняння. Маємо

$-A\cos x - B\sin x - 7(-A\sin x + B\cos x) + 12(A\cos x + B\sin x) = \sin x +$
$2\cos x,$

$(11A - 7B)\cos x + (11B + 7)\sin x = \sin x + 2\cos x.$

Прирівняємо коефіцієнти при функціях $\sin x$ та $\cos x$:

$$\begin{cases} 11A - 7B = 2, \\ 11B + 7A = 1. \end{cases}$$

Після розв'язання системи отримаємо пару чисел:

$$\begin{cases} A = \frac{29}{170}, \\ B = -\frac{3}{170}. \end{cases}$$

$y_{чн} = \frac{29}{170}\cos x - \frac{3}{170}\sin x.$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$y_{зн}(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{29}{170}\cos x - \frac{3}{170}\sin x.$

2) Якщо $\alpha \pm i\beta$ ***співпадають з коренями характеристичного рівняння***, то $y_{чн}$ будемо шукати у вигляді:

$$y_{чн} = xe^{\alpha x}(Q_k \cos\beta x + R_k \sin\beta x), \tag{7}$$

де $k = \max(m, n)$.

Зауважимо, що $f(x)$ може містити лише або функцію $\cos\beta x$, або функцію $\sin\beta x$, тобто одна із функцій $P_n(x)$ або $T_m(x)$ тотожно дорівнює 0, але і в цьому випадку $y_{чн}$ шукаємо за формулою (5).

Наприклад. Знайти частинний розв'язок рівняння: $y'' + 4y = \sin 2x$, що задовольняє початкові умови $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{1}{4}$.

Р**озв'язання.** Знаходимо $y_{зо}$. Складемо відповідне однорідне рівняння

$$y'' + 4y = 0$$

та його характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$, яке має корені $k_{1,2} = \pm 2i$. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння визначається формулою

$$y_{зо}(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Права частина $f(x) = \sin 2x$ є функцією виду (5), де $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $P_n(x) = 1$, $T_m(x) = 0$. Оскільки $\alpha \pm i\beta = \pm 2i$ співпадає з $k_{1,2}$, то шукаємо $y_{чн}$ у вигляді

$$y_{чн} = x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Знайдемо першу та другу похідні та підставимо у вихідне рівняння:

$$y'_{чн} = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x),$$

$$y''_{чн} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x),$$

$$-2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) +$$

$$+x(A\cos 2x + B\sin 2x) = \sin 2x,$$

$$\sin 2x\,(-4A - 3Bx) + \cos 2x\,(4B - 3Ax) = \sin 2x,$$

Отже, $\begin{cases} -4A = 1, \\ 4B = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4}, \\ B = 0. \end{cases}$

$y_{\text{чн}} = -\frac{1}{4}x\cos 2x.$

Тоді

$y_{\text{зн}}(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x.$

задовольняє початкові умови, тому

$y'_{\text{зн}}(x) = -2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}x2\sin 2x =$

$= -2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x.$

$\begin{cases} C_1\cos 0 + C_2\sin 0 - \frac{1}{4}0\cos 0 = 1, \\ -2C_1\sin 0 + 2C_2\cos 0 - \frac{1}{4}\cos 0 + \frac{1}{2}0\sin 0 = \frac{1}{4}, \end{cases}$,

$\begin{cases} C_1 = 1, \\ 2C_2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \end{cases}$

$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$

Розв’язок задачі Коші тоді матиме вигляд

$y_{\text{зн}}(x) = \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x.$

Індивідуальні завдання №3

«Диференціальні рівняння вищих порядків»

Варіант 0

1. Розв’язати диференційне рівняння вищого порядку, що допускає зниження порядку.

$$yy'' = y'(1 + y').$$

2. Знайти загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

$$y''' + y' - 2y = 0.$$

3. Знайти загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}\cos x.$$

Розв’язання

1. Зробимо заміну $y' = p$, тоді $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$.

Підставимо в початкове рівняння, тоді

$y \cdot p\frac{dp}{dy} = p(1 + p),$

$y\frac{dp}{dy} = (1 + p),$

$\frac{dp}{1+p} = \frac{dy}{y}.$

Проінтегруємо

$\ln|1 + p| = \ln|y| + \ln C_1,$

$1 + p = C_1 y,$

$p = C_1 y - 1.$

Повернувшись до заміни

$y' = C_1 y - 1,$

$\frac{dy}{dx} = C_1 y - 1.$

Ми знову отримали рівняння з відокремлюваними змінними.

$\frac{dy}{C_1 y - 1} = dx,$

$\frac{1}{C_1} \ln|C_1 y - 1| = x + C_2,$

$\ln|C_1 y - 1| = C_1 x + C_1 C_2,$

$C_1 y - 1 = e^{C_1 x + C_1 C_2}.$

2. Запишемо відповідне характеристичне рівняння:

$k^3 + k - 2 = 0.$

$k^3 - k^2 + k^2 + k - 2 = 0,$

$k^2(k-1) + (k-1)(k+2) = 0,$

$(k-1)(k^2 + k + 2) = 0,$

$k_1 = 1$ або $k^2 + k + 2 = 0,$

$D = 1 - 8 = -7,$

$k_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$

Тоді остаточно маємо

$y(x) = C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}} \left(C_2 \sin \frac{x\sqrt{7}}{2} + C_3 \cos \frac{x\sqrt{7}}{2} \right).$

3. Розв'яжемо спочатку відповідне однорідне рівняння

$y'' + 4y' + 5y = 0.$

Складемо для нього характеристичне рівняння:

$k^2 + 4k + 5 = 0,$

$D = 16 - 4 \cdot 5 = -4,$

$k_1 = \frac{-4-2i}{2} = -2 - i,$

$k_2 = \frac{-4+2i}{2} = -2 + i.$

Тоді загальний розв’язок однорідного диференціального рівняння матиме вигляд:

$y_{зо} = e^{-2x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$.

Знайдемо тепер частинний розв’язок заданого неоднорідного диференціального рівняння. Права частина $f(x) = e^{-2x} \cos x$ є функцією виду

$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) \cos \beta x + T_m(x) \sin \beta x)$,

де $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $P_n(x) = 1$, $T_m(x) = 0$. Оскільки $\alpha \pm i\beta = -2 \pm i$ співпадає з $k_{1,2}$, то шукаємо $y_{чн}$ у вигляді

$y_{чн} = xe^{-2x}(A \cos x + B \sin x)$.

Знайдемо першу та другу похідні та підставимо у вихідне рівняння:

$y'_{чн} = \left(e^{-2x}(Ax \cos x + Bx \sin x)\right)' = -2e^{-2x}(Ax \cos x + Bx \sin x) +$

$+e^{-2x}(A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x) = e^{-2x}(-2Ax \cos x -$

$-2Bx \sin x + A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x) =$

$= e^{-2x}\left((-2Ax + A + Bx) \cos x + (-2Bx - Ax + B) \sin x\right)$,

$y''_{чн} = -2e^{-2x}\left((-2Ax + A + Bx) \cos x + (-2Bx - Ax + B) \sin x\right) +$

$+e^{-2x}((-2A + B) \cos x - (-2Ax + A + Bx) \sin x + (-2B - A) \sin x +$

$+(-2Bx - Ax + B) \cos x) = e^{-2x}((-4Ax - 2A - 2Bx) \cos x +$

$+(4Bx + 2Ax - 2B) \sin x + (-2A + B) \cos x - (-2Ax + A + Bx) \sin x +$

$+(-2B - A) \sin x + (-2Bx - Ax + B) \cos x) = e^{-2x}((-4Ax - 2A - 2Bx -$

$-2A + B - 2Bx - Ax + B) \cos x + (4Bx + 2Ax - 2B + 2Ax - A - Bx -$

$-2B - A) \sin x) = e^{-2x}((-5Ax - 4Bx - 4A + 2B) \cos x + (3Bx + 4Ax -$

$-4B - 2A) \sin x)$,

$e^{-2x}((-5Ax-4Bx-4A+2B)\cos x+(3Bx+4Ax-4B-2A)\sin x)+$

$4e^{-2x}\big((-2Ax+A+Bx)\cos x+(-2Bx-Ax+B)\sin x\big)+$

$+5xe^{-2x}(A\cos x+B\sin x)=e^{-2x}\cos x,$

$(-5Ax-4Bx-4A+2B-8Ax+4A+4Bx+5Ax)\cos x+(3Bx+4Ax-$

$-4B-2A-8Bx-4Ax+4B+5Bx)\sin x=\cos x.$

$(2B-8Ax)\cos x+(-2A)\sin x=\cos x,$

$\begin{cases}2B=1,\\-2A=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}B=\frac{1}{2},\\A=0.\end{cases}$

Тоді $y_{\text{чн}}=\frac{1}{2}xe^{-2x}\sin x.$

Отже, $y_{\text{зн}}=e^{-2x}(C_1\sin x+C_2\cos x)+\frac{1}{2}xe^{-2x}\sin x.$

Варіант 1

1. $xy'''=y''+2;$
2. $y''-7y'+10y=0;$
3. $y''-3y'+2y=(15-12x)e^{-x}.$

Варіант 2

1. $x^3y'''+3x^2y''=2\cos\ln x;$
2. $y''+3y'=0;$
3. $y''-y'=2xe^{2x}.$

Варіант 3

1. $(x^2-x)y'''=(2-x)y'';$
2. $y'''+2y''-5y'-6y=0;$
3. $y''-2y'+y=(3x+7)e^{2x}.$

Варіант 4

1. $xy'''-2y''=4;$

2. $y''' - 2y'' = 0;$

3. $y'' - 10y' + 25y = x^2 e^{5x}.$

Варіант 5

1. $y'''(2\ln x + 3)x = 2y'';$

2. $y'' - 4y = 0;$

3. $y'' - y' = (2x + 5)e^{2x}.$

Варіант 6

1. $\operatorname{tg} x \cdot y''' + 2y'' = 0;$

2. $y''' + 27y = 0;$

3. $y'' - 4y' + 4y = (18x - 21x)e^{-x}.$

Варіант 7

1. $y''' = \frac{3}{x} y'' + 12x;$

2. $y'' + 4y' + 13y = 0;$

3. $y'' + 3y' + 2y = (2x - 5)e^{x}.$

Варіант 8

1. $y''' + 3y''^2\sqrt{1 - 2x} = 0;$

2. $y'' + y = 0;$

3. $y'' - 10y' + 25y = (1 - x^2)e^{5x}.$

Варіант 9

1. $\operatorname{tg} 3x \cdot y''' = 6y'';$

2. $y'' + 2y' + y = 0;$

3. $y'' - 4y' + 4y = x - 1.$

Варіант 10

1. $x^3 y''' + 3x^2 y'' = 8 \sin \ln x;$

2. $y'' - 5y' + 6y = 0;$

3. $y'' + y' - 2y = (8x + 4)e^{x}$.

Варіант 11

1. $xy''' - y'' = 2\cos\ln x$;
2. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$;
3. $y'' - 3y' - 2y = -4x$.

Варіант 12

1. $y''' = 6y''^{2}\sqrt{x+1}$;
2. $y^{IV} - 3y''' = 0$;
3. $y'' - 3y' + 2y = (4x + 9)e^{2x}$.

Варіант 13

1. $(2x^2 - x)y''' = 2(1 - x)y''$;
2. $y'' + y' - 2y = 0$;
3. $y'' + 4y' + 4y = -e^{x}\sin 6x$.

Варіант 14

1. $y''' - \frac{2}{x}y'' = 6$;
2. $y'' + 4y' + 3y = 0$;
3. $y'' + 2y' = -2e^{x}(\sin x + \cos x)$.

Варіант 15

1. $\operatorname{tg} x \cdot y''' = y''$;
2. $2y'' - 5y' + 2y = 0$;
3. $y'' + 2y' + 5y = -2\sin 2x$.

Варіант 16

1. $y''' = y''^{2}\sqrt{6x+5}$;
2. $y'' - 4y' + 5y = 0$;

3. $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$.

Варіант 17

1. $xy''' - y'' = 12x$;
2. $y'' + 2y' - 10y = 0$;
3. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 3x$.

Варіант 18

1. $\operatorname{tg} 3x \cdot y''' = 3y''$;
2. $y'' + 4y = 0$;
3. $y'' + 6y' + 13y = e^{3x}\cos 4x$.

Варіант 19

1. $x^3y''' + 3x^2y'' = 4\cos\ln x$;
2. $y''' - 8y = 0$;
3. $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$.

Варіант 20

1. $\operatorname{tg} 2x \cdot y''' + 4y'' = 0$;
2. $y^{IV} - y = 0$;
3. $y'' + 2y' = 10(\sin x + \cos x)$.

Варіант 21

1. $y''' = \frac{y''}{x} + 40x^2$;
2. $y'' - 2y' + y = 0$;
3. $y'' - 3y' + 2y = (1 - 4x)e^x$.

Варіант 22

1. $y''' = 3y''^2\sqrt{2x + 7}$;
2. $4y'' + 4y' + y = 0$;

3. $y'' - 3y' + 4y = (2x - 3)e^{-2x}$.

Варіант 23

1. $(2x^2 - x)y''' = (4 - x)y''$;
2. $y''' - y'' - y' + y = 0$;
3. $y'' - y' - 6y = (x - 3)e^{-x}$.

Варіант 24

1. $xy''' = 2y'' + 20x^3$;
2. $y'' - 4y' + 8 = 0$;
3. $y'' - y' - 2y = 2x - 1$.

Варіант 25

1. $\operatorname{tg} 3x \cdot y''' + 6y'' = 0$;
2. $y'' - 2y' + 2y = 0$;
3. $y'' - 6y' + 8y = 5xe^{2x}$.

Варіант 26

1. $y''' = 2y''^2\sqrt{3x + 4}$;
2. $y'' - 4y' + 2y = 0$;
3. $y'' + y = 3\cos x$.

Варіант 27

1. $xy''' - 6 = 3y''$;
2. $y'' - 8y' + 7y = 0$;
3. $y'' - 8y' + 20y = \sin 2x$.

Варіант 28

1. $x^3y''' + 3x^2y'' = 6\sin\ln x$;
2. $y'' - y' + y = 0$;
3. $y'' - y = 2xe^x$.

Варіант 29

1. $\operatorname{tg} 2x \cdot y''' = 4y''$;
2. $y''' + 3y'' + 2y' = 0$;
3. $y'' + 4y = 4x^2$.

Варіант 30

1. $y''' + {y''}^2\sqrt{1 - x} = 0$;
2. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0$;
3. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: - Збірник задач -К.: А.С.К.: 2001.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: - Навчальний посібник-К.: А.С.К., 2005.

3. Ленюк М.П., Ленюк О.М. Рівняння математичної фізики. Навч. посібник. Чернівці: Прут. 2012. 152 с.

4. Ляшко І.І. Диференціальні рівняння. К.: Вища школа. 1981. 504 с.

5. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. К..: Либідь, 1994. 360с.

6. Самойленко А.М. Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. К.: Вищи школа. 1994. 454 с.

Навчально-методичне видання

Соліч Катерина Василівна,
Федуник-Яремчук Оксана Володимирівна
Філозоф Леонтій Іванович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Індивідуальні завдання

Методичні вказівки для студентів

факультету інформаційних технологій і математики

Друкується в авторській редакції