Волинський національний університет імені Лесі Українки
Факультет інформаційних технологій і математики
Кафедра математичного аналізу та статистики

Федуник−Яремчук О.В., Соліч К.В.

КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ:

методичні вказівки

Луцьк 2024

УДК 517 (072)

Ф 34

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
Волинського національного університету імені Лесі Українки
(протокол № 3 від 22 листопада 2024 року)

Рецензенти:
Гембарська Світлана Борисівна − кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри теорії функцій та методики навчання математики Волинського національного університету імені Лесі Українки
Костючко Сергій Миколайович – кандидат технічних наук, доцент кафедри комп'ютерної інженерії та кібербезпеки Луцького національного технічного університету

Ф 34

Федуник−Яремчук О.В., Соліч К.В. Криволінійні інтеграли: методичні вказівки з дисципліни "Математичний аналіз" для студентів, які навчаються за спеціальностями 014 Середня освіта (Математика), 111 Математика/ Оксана Володимирівна Федуник-Яремчук, Катерина Василівна Соліч. Луцьк, 2024. 54 с.

Методичні вказівки призначені для методичного забезпечення лекційних та практичних занять, самостійної та дистанційної роботи студентів в рамках курсу ,,Математичний аналіз". Викладено основні теоретичні положення із розділу математичного аналізу "Криволінійні інтеграли"; наведені приклади розв'язання типових задач, завдання для самоконтролю та індивідуальні завдання.
Мета розробки – допомогти студентам засвоїти основні поняття і методи математичного аналізу, виробити вміння застосовувати теоретичний матеріал в практичних задачах, підготувати студентів до самостійної роботи з науковою літературою.

УДК 517 (072)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Дана розробка призначена для методичного забезпечення лекційних та практичних занять, самостійної та дистанційної роботи студентів в рамках курсу ,,Математичний аналіз”, що вивчається на факультеті інформаційних технологій і математики.

Методична розробка складається із розділу математичного аналізу “Криволінійні інтеграли”. В розробці систематизовано теоретичні відомості із вказаного розділу: викладено основні поняття, теореми, деякі висновки і зауваження, які потрібні для розв’язування задач. Весь матеріал супроводжується розв’язанням типових прикладів. В кінці методичної розробки наведені завдання для самоконтролю та індивідуальні завдання. Основну увагу приділено висвітленню алгоритмічного аспекту розглядуваних понять, методів і тверджень.

Методичну розробку можна рекомендувати студентам математичних спеціальностей всіх форм навчання, але вона може бути корисною і для студентів інших спеціальностей.

1. Поняття криволінійного інтеграла I роду (по довжині дуги). Основні властивості

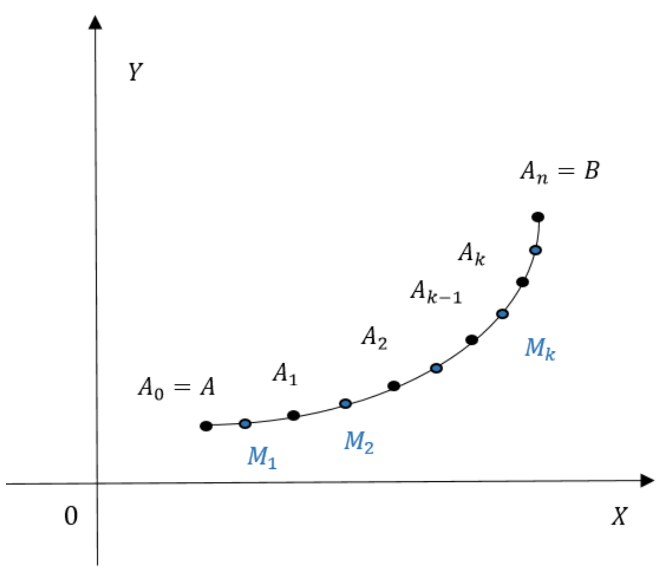
Поняття визначеного інтеграла можна узагальнити на випадок, коли областю інтегрування є не сегмент, а деяка крива. Такі інтеграли називаються криволінійними.

Означення 1. Крива, яка задана рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha; \beta]$, називається гладкою, якщо функції $x(t), y(t)$ є неперервними разом зі своїми похідними $x'(t)$ та $y'(t)$ на сегменті $[\alpha; \beta]$, причому $x'(t)$ та $y'(t)$ одночасно не дорівнюють нулю при $t \in [\alpha; \beta]$ (тобто $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$).

Якщо крива AB гладка, то в кожній точці цієї кривої можна провести дотичну.

Означення 2. Криву називають кусково-гладкою, якщо її можна розбити на скінченну кількість гладких кривих.

Нехай в площині XOY задано деяку кусково-гладку криву AB. Розіб'ємо криву AB довільним чином на частини точками $A_0 = A,\ A_1, A_2, \dots, A_n = B.$



Нехай на кривій AB визначена деяка неперервна функція $f(x, y)$. На кожній із частин кривої $A_{k-1}A_k$ довільним чином виберемо точки $M_k(\xi_k, \eta_k)$, $k = \overline{1, n}$. Складемо суму:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta l_k, \tag{1}$$

$\Delta l_k -$ довжина дуги $A_{k-1}A_k$, $k = \overline{1,n}$.

Сума (1) називається інтегральною сумою функції $f(x,y)$ по кривій AB. Позначимо через $\lambda = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \Delta l_k$.

Означення 3. Якщо інтегральна сума (1) має скінченну границю при $\lambda \to 0$, яка не залежить від розбиття кривої AB та вибору точок M_k, то цю границю називають криволінійним інтегралом I роду (інтегралом по довжині дуги) від функції $f(x,y)$ по кривій AB і позначають $\int_{AB} f(x,y)dl$.

Отже, згідно означення

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta l_k\,. \tag{2}$$

Якщо границя в (2) існує, то кажуть, що функція $f(x,y)$ інтегровна по кривій AB, при цьому AB називають контуром інтегрування, точку $A -$ початковою точкою інтегрування, B – кінцевою точкою інтегрування.

Зведемо криволінійний інтеграл першого роду до визначеного інтеграла. Для цього на кривій AB візьмемо за параметр довжину дуги, яку позначимо l, і яка відраховується від точки A до довільної точки кривої AB.

При цьому крива AB задається параметрично рівняннями

$\begin{cases} x = x(l) \\ y = y(l) \end{cases}$, $l \in [0; L]$, де L – довжина всієї кривої AB.

На кривій AB функція $f(x,y)$ стає складною функцією параметра l, тобто $f(x,y) = f(x(l),y(l))$. Позначимо через l_k значення параметра l, яке відповідає точці A_k, через $\tau_k -$ значення параметра l, яке відповідає точці M_k.

Тоді інтегральна сума (1) перепишеться у вигляді

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x(\tau_k), y(\tau_k))\Delta l_k, \tag{3}$$

де $\Delta l_k \ = l_k - l_{k-1}$. Очевидно, що $l_{k-1} \le \tau_k \le l_k$.

Інтегральна сума (3) є ніщо інше, як інтегральна сума для функції $f(x(l), y(l))$ на сегменті $[0; L]$. Оскільки $f(x, y)$ – неперервна, то вона інтегровна на $[0; L]$. Отже, існує

$$\int_0^L f(x(l), y(l))\, dl.$$

Оскільки інтегральні суми (1) та (3) співпадають, то співпадають і відповідні інтеграли, тобто

$$\int_0^L f(x(l), y(l))\, dl = \int_{AB} f(x, y) dl. \tag{4}$$

Формула (4) не лише зводить криволінійний інтеграл до визначеного, а й доводить існування криволінійного інтеграла від неперервної функції $f(x, y)$ по кривій AB.

Із (4) випливає, що криволінійні інтеграли першого роду мають властивості, аналогічні до властивостей визначених інтегралів, але згідно із означенням $\Delta l_k -$ це довжина деякої дуги, тому $\Delta l_k \ > 0$, в той час як для визначеного інтеграла Δx_k може бути як більше нуля, так і менше нуля. Тому для визначеного інтеграла

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x) dx,$$

а для криволінійного інтеграла

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{BA} f(x,y)dl.$$

Властивості криволінійних інтегралів І роду

1. $\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl.$

2. $\int_{AB} cf(x,y)dl = c\int_{AB} f(x,y)dl\,,\ c \in \mathbb{R}.$

3. $\int_{AB}\big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)dl = \int_{AB} f(x,y)dl\ \pm \int_{AB} g(x,y)dl.$

4. Якщо точка $C \in AB$, то виконується рівність

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{AC} f(x,y)dl + \int\limits_{CB} f(x,y)dl.$$

5. Якщо для точок кривої AB виконується нерівність

$f_1(x,y) \leq f_2(x,y)$, то

$$\int\limits_{AB} f_1(x,y)dl\ \leq \int\limits_{AB} f_2(x,y)dl.$$

6. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна на кривій AB, то на цій кривій знайдеться точка (x_c, y_c) така, що

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = f(x_c, y_c) \cdot L,$$

L – довжина кривої AB (теорема про середнє).

Щоб переконатись у справедливості цих властивостей, достатньо записати інтегральні суми і перейти в них до границь.

2. Обчислення криволінійного інтеграла I роду

Формула (4) з попереднього параграфа не є зручною для обчислення криволінійного інтеграла, бо не завжди криву AB легко задати рівностями $\begin{cases} x = x(l) \\ y = y(l) \end{cases}$, $l \in [0; L]$. Спростимо цю формулу.

Нехай крива AB задана параметрично $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha; \beta]$, причому значенню α параметра t відповідає точка A, а значенню β параметра t відповідає точка B, тобто $A\big(x(\alpha), y(\alpha)\big)$, $B\big(x(\beta), y(\beta)\big)$.

Нехай функції $x = x(t), y = y(t)$ неперервні разом зі своїми похідними на сегменті $[\alpha, \beta]$ і нехай функція $f(x, y)$ неперервна на кривій AB. Тоді для будь-якої точки $M\big(x(t), y(t)\big) \in AB$ довжину дуги AM можна розглядати як функцію від t, тобто $l = l(t)$. Довжина кривої

$$l = \int_0^t \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2}\, d\tau.$$

Тоді

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Виконавши заміну, отримаємо

$$\int\limits_{AB} f(x, y) dl = \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t)\big) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt. \qquad (1)$$

В результаті одержуємо формулу, яка дає можливість обчислення криволінійного інтеграла I роду звести до обчислення звичайного визначеного інтеграла.

Якщо крива AB задана рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a; b]$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int_a^b f\big(x, y(x)\big)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx. \qquad (2)$$

Вище ми розглянули плоскі криві, але отриману формулу (1) можна записати і для випадку просторової кривої. Нехай функція $f(x,y,z)$ задана на просторовій кривій AB, яка визначена рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha;\beta]$, причому $x(t), y(t), z(t)$ неперервні разом зі своїми похідними на $[\alpha;\beta]$. Тоді

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

Приклад 1. Обчислити

$$\int\limits_{AB}(x-y)dl,$$

якщо AB − відрізок прямої $y=\frac{3}{4}x$ між точками $A(0{,}0),\ B(4{,}3)$.

Розв’язання.

$$\int\limits_{AB}(x-y)dl = \int\limits_0^4\left(x-\frac{3}{4}x\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\,dx = \int\limits_0^4\frac{x}{4}\cdot\frac{5}{4}dx = \frac{5}{16}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^4 = 2{,}5.$$

Приклад 2. Обчислити

$$\int\limits_{AB}\left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl,$$

якщо AB − частина гвинтової лінії $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \\ z = t, \end{cases}$ $\quad t \in [0;2\pi]$.

Розв’язання.

$$\int\limits_{AB}\left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}(2t-t)\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}t\cdot\sqrt{2+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(2+t^2)^{\frac{1}{2}}d(2+t^2)=\frac{1}{2}(2+t^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\bigg|_0^{2\pi}=$$

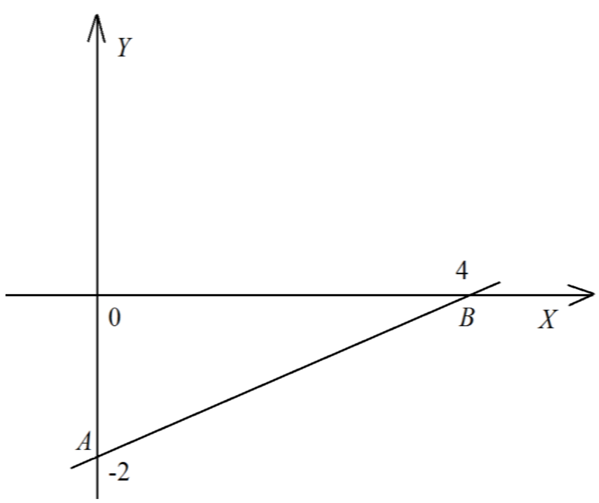
$$=\frac{1}{3}\left((2+4\pi^2)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}\right).$$

Приклад 3. Обчислити

$$\int\limits_{AB}\frac{dl}{x-y},$$

якщо AB − відрізок прямої

$y=\frac{1}{2}x-2$ між точками $A(0,-2),\ B(4,0)$.



Розв'язання.

$$\int\limits_{AB}\frac{dl}{x-y}=\int\limits_0^4\frac{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,dx}{x-\left(\frac{1}{2}x-2\right)}=$$

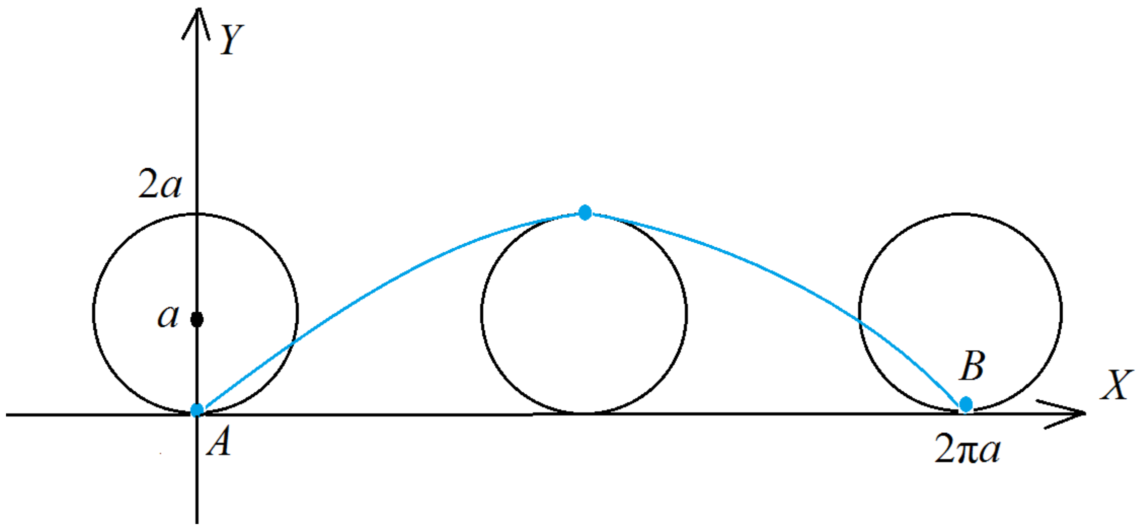
$$=\sqrt{\frac{5}{4}}\cdot\int\limits_0^4\frac{dx}{2+\frac{1}{2}x}=\sqrt{5}\int\limits_0^4\frac{dx}{4+x}=$$

$$=\sqrt{5}\ln(4+x)\Big|_0^4=$$

$$=\sqrt{5}(\ln 8-\ln 4)=\sqrt{5}\ln 2.$$

Приклад 4. Обчислити $\int_{AB}y^2dl$, якщо AB – арка циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $t \in [0; 2\pi]$, $a > 0$.

Розв'язання.



$$\int_{AB} y^2 dl = \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^2 \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2}\, dt =$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt =$$

$$= \sqrt{2} a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{\frac{5}{2}} dt = \sqrt{2} a^3 \int_0^{2\pi} \left(2 \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{\frac{5}{2}} dt = 8a^3 \int_0^{2\pi} \sin^5 \frac{t}{2} dt =$$

$$= -16a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right)^2 d\left(\cos \frac{t}{2}\right) =$$

$$= -16a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos^2 \frac{t}{2} + \cos^4 \frac{t}{2}\right) d\left(\cos \frac{t}{2}\right) =$$

$$= -16a^3 \left(\cos \frac{t}{2} - \frac{2\cos^3 \frac{t}{2}}{3} + \frac{\cos^5 \frac{t}{2}}{5} \right) \Bigg|_0^{2\pi} =$$

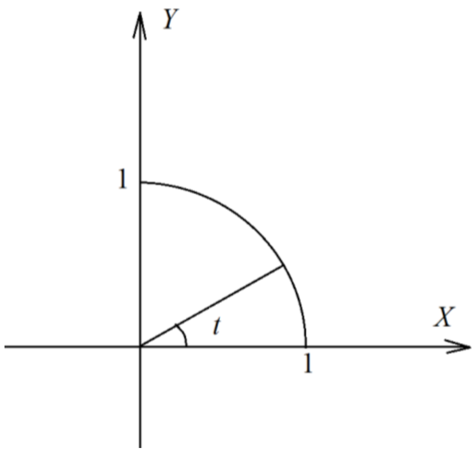
$$= -16a^3\left(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{32\cdot a^3(15-10+3)}{15} = \frac{256\,a^3}{15}.$$

Приклад 5. Обчислити

$$\int\limits_{AB} x^2 y dl,$$

якщо $AB -$ дуга кола $x^2 + y^2 = 1$, розміщена в I чверті.

Розв'язання.



I спосіб.

Маємо $y = \sqrt{1-x^2}$,

$$dl = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx =$$

$$= \sqrt{1+\left(-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Тоді

$$\int\limits_{AB} x^2 y dl = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

II спосіб.

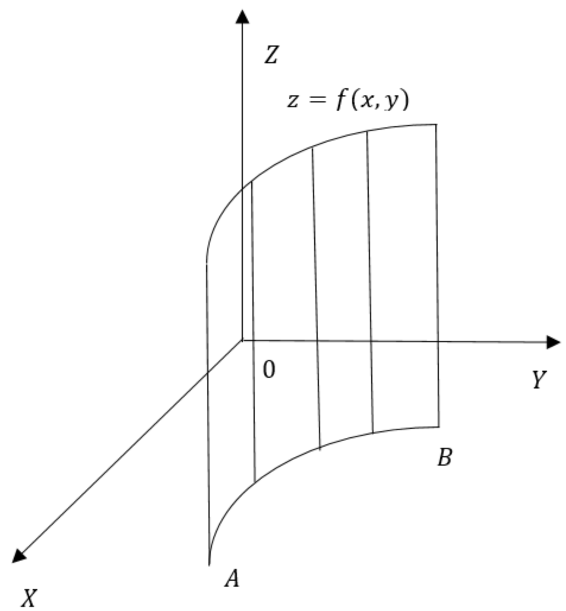
Параметризуємо рівняння кола $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\int\limits_{AB} x^2 y dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\cdot\sin t\cdot\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\cdot\sin t\cdot dt = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\cdot d(\cos t) = -\left.\frac{\cos^3 t}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

3. Застосування криволінійних інтегралів І роду

1. Площа циліндричної поверхні



Нехай в площині XOY задано кусково-гладку криву AB і на ній визначено неперервну функцію $f(x, y) > 0$. Тоді площа циліндричної поверхні, твірні якої в кожній точці $(x, y) \in AB$ мають довжину $f(x, y)$ і паралельні осі OZ, а напрямна цієї поверхні співпадає з кривою AB, обчислюється за формулою

$$S = \int_{AB} f(x, y) dl. \tag{1}$$

2. Довжина дуги кривої

Якщо у формулі (1) покласти $f(x, y) = 1$, то одержимо формулу для обчислення довжини дуги кривої AB

$$L = \int_{AB} dl. \tag{2}$$

3. Маса кривої

Якщо вздовж неоднорідної матеріальної кривої AB розподілено деяку масу з густиною $\rho = \rho(x, y)$, то маса кривої AB обчислюється за формулою

$$m = \int_{AB} \rho(x, y) dl. \tag{3}$$

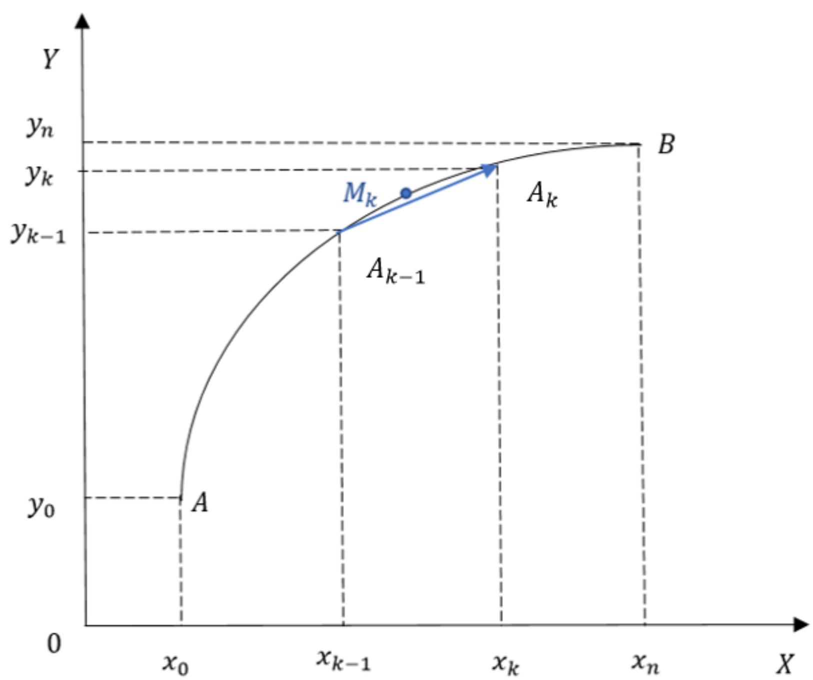
Приклад 1. Знайти масу гвинтової лінії

$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t\,, \\ z = 4t, \end{cases} \qquad t \in [0; 2\pi], \qquad \rho(x, y, z) = 2z.$$

$$m = \int\limits_{\mathrm{A}B} \rho(x, y, z) dl = \int\limits_0^{2\pi} 8t\sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + 4^2}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} 8t \cdot 5dt = 40 \cdot \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 80\,\pi^2. \qquad \text{(од. маси)}$$

4. Поняття криволінійного інтеграла II роду (по координатах). Фізичний зміст. Основні властивості



Нехай в площині XOY задано кусково-гладку криву AB, на якій визначено неперервну функцію $P(x, y)$. Розіб'ємо криву AB довільним чином на n частин точками $A_0 = A, A_1,\ A_2, \dots, A_n = B$. На кожній із отриманих дуг $A_{k-1}A_k$ довільним чином виберемо точку $M_k(\xi_k, \eta_k)$ і складемо інтегральну суму

$$\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k$$

де $\Delta x_k\ = x_k\ - x_{k-1}\,, k = \overline{1, n}$.

Δx_k є проекцією вектора $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$ на вісь OX. Позначимо $\lambda = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \Delta x_k$

Означення 1. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум $\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k$ при $\lambda \to 0$, яка не залежить від розбиття кривої AB і вибору точок M_k, то її називають криволінійним інтегралом функції $P(x, y)$ по координаті x вздовж кривої AB і позначають $\int_{AB} P(x, y)dx$.

Отже, згідно означення

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k. \tag{1}$$

Нехай на кривій AB задано неперервну функцію $Q(x, y)$. Аналогічно можна означити криволінійний інтеграл від цієї функції по координаті y вздовж кривої AB.

Нехай $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$. Розглянемо границю

$$\lim_{\tau \to 0} \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k = \int\limits_{AB} Q(x, y)dy \tag{2}$$

де $\tau = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \Delta y_k,\ \Delta y_k = y_k - y_{k-1},\ k = \overline{1, n}.$

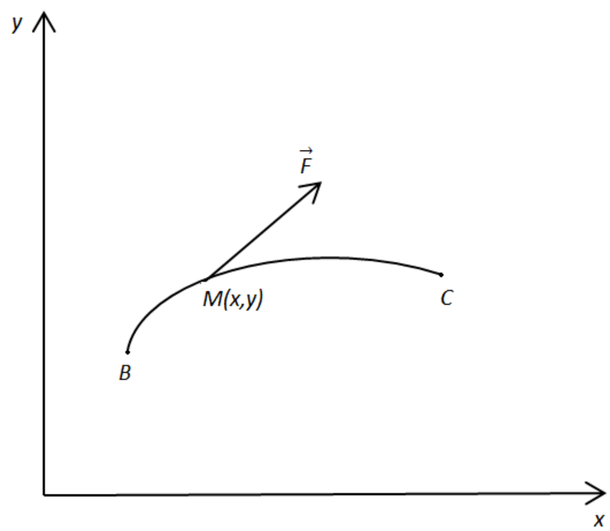
Якщо існують обидва інтеграли (1) і (2), то суму

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + \int\limits_{AB} Q(x, y)dy = \int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

називають криволінійним інтегралом по координатах, або криволінійним інтегралом II роду.

Фізичний зміст криволінійного інтеграла ІІ роду

Нехай матеріальна точка $M(x,y)$ рухається вздовж кривої BC в площині XOY, під дією сили $\overrightarrow{F} = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$.



$P(x,y)$ та $Q(x,y)$ – проекції сили F на координатні осі OX та OY. Тоді криволінійний інтеграл по кривій BC дорівнює роботі змінної сили по переміщенню матеріальної точки вздовж кривої BC:

$$A = \int_{BC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

З'ясуємо деякі властивості криволінійних інтегралів ІІ роду.

Властивості.

1. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла.

2. Криволінійний інтеграл від суми функцій дорівнює сумі криволінійних інтегралів.

3. Якщо точка $C \in AB$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{AC} P(x,y)dx + \int_{CB} P(x,y)dx$$

4. Виконується рівність

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Знак "–" пояснюється тим, що для першого інтеграла $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, а для другого: $\Delta x_k = x_{k-1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k-1} - y_k$.

5. Обчислення криволінійного інтеграла II роду

Криволінійний інтеграл II роду можна звести до визначеного інтеграла.

Нехай в площині XOY крива AB задана параметрично системою рівнянь $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha; \beta]$, причому функції $x(t), y(t), x'(t), y'(t)$ неперервні на $[\alpha; \beta]$, точці A відповідає значення параметра $t = \alpha$, а точці $B -$ значення $t = \beta$.

Нехай на кривій AB задано неперервну функцію $P(x, y)$. Згідно з означенням

$$\int\limits_{AB} P(x, y) dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k) \, \Delta x_k,$$

де $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = x(t_k) - x(t_{k-1})$.

Застосуємо до функції $x(t)$ теорему Лагранжа про скінченні прирости на кожному сегменті $[t_{k-1}; t_k]$, одержаному внаслідок розбиття кривої AB.

Матимемо

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\tau_k) \Delta t_k.$$

При складанні інтегральної суми точку $M_k(\xi_k, \eta_k)$ на кожній із дуг $A_{k-1} \, A_k$ виберемо так, щоб $\xi_k = x(\tau_k)$, $\eta_k = y(\tau_k)$, тоді інтегральна сума набере вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k) \, \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} P\big(x(\tau_k), y(\tau_k)\big) \cdot x'(\tau_k) \Delta t_k.$$

Ця сума є не що інше, як інтегральна сума для функції $P\big(x(t), y(t)\big) \cdot x'(t)$ на проміжку $[\alpha; \beta]$. Тому

$$\int\limits_{AB} P(x, y) dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} P\big(x(\tau_k), y(\tau_k)\big) \cdot x'(\tau_k) \Delta t_k =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} P\big(x(t), y(t)\big) \cdot x'(t)dt. \qquad (1)$$

Аналогічно можна обґрунтувати формули

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q\big(x(t), y(t)\big) \cdot y'(t)\, dt, \qquad (2)$$

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (P\big(x(t), y(t)\big) \cdot x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big) \cdot y'(t))dt. \qquad (3)$$

Якщо крива AB задана явно рівнянням $y = y(x), x \in [a; b]$, причому $y(x)$, $y'(x) -$ неперервні на AB, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \Big(P\big(x, y(x)\big) + Q\big(x, y(x)\big) \cdot y'(x)\Big)\, dx. \qquad (4)$$

Поняття криволінійного інтеграла II роду можна поширити і на просторові криві.

Нехай функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ та $R(x,y,z)$ визначені і неперервні на просторовій кривій AB, яка задана параметрично системою рівнянь $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [\alpha; \beta], \\ z = z(t), \end{cases}$ де функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ неперервні разом із своїми похідними на $[\alpha; \beta]$, тоді:

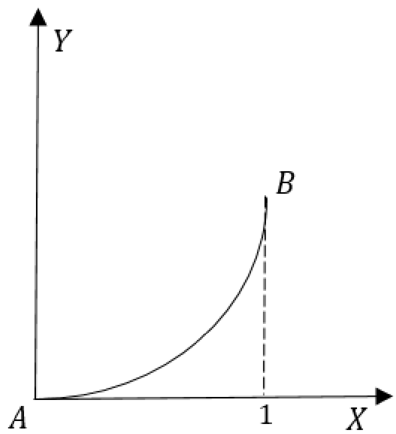
$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) +$$

$$+R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\big)dt. \qquad (5)$$

Формули $(1)-(5)$ дають можливість обчислити криволінійний інтеграл II роду шляхом зведення його до визначеного інтеграла.

Приклад 1. Обчислити $\int_{AB} y^2dx + 2xydy$ від точки $A(0;0)$ до $B(1;1)$ вздовж кривої $y = x^2$.



Розв'язання.

Скористаємось формулою (4).

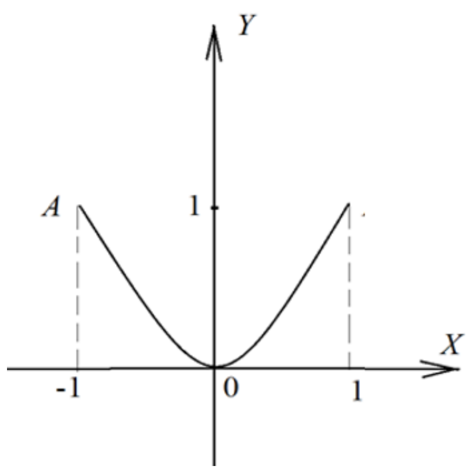
Будемо мати

$$\int\limits_{AB} y^2dx + 2xydy = \int\limits_0^1 (x^4 + 2x \cdot x^2 \cdot 2x)dx =$$

$$= 5\int_0^1 x^4dx = \frac{5x^5}{5}\Big|_0^1 = 1.$$

Приклад 2. Обчислити $\int_{AB}(x^2-2xy)dx + (y^2-2xy)dy$ від точки $A(-1;1)$ до $B(1;1)$ вздовж кривої $y = x^2$.

Розв'язання.



Будемо мати

$$\int\limits_{AB} (x^2-2xy)dx + (y^2-2xy)dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^2 - 2x \cdot x^2 + (x^4 - 2x \cdot x^2)2x)dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{4x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{5} - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right) = \frac{2}{3} - \frac{8}{5} = -\frac{14}{15}.$$

Часто доводиться розглядати криволінійний інтеграл II роду по замкненому контуру, тобто по контуру, для якого початкова та кінцева точки співпадають (будемо розглядати криві без точок само перетину, тобто прості криві).

Серед замкнених кривих розглянемо криві з двома напрямами обходу:

1. проти годинникової стрілки (додатний напрямок обходу або додатня орієнтація кривої);

2. за годинниковою стрілкою (від'ємний напрямок обходу або від'ємна орієнтація кривої).

Контур називається додатньо-орієнтованим, якщо при його обході область, що обмежена цим контуром, залишається зліва.

В тому випадку, коли криволінійний інтеграл береться по додатньо-орієнтованому замкненому контуру L, то його символічно записують так:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Очевидно, що для замкненого контура початкову точку можна обирати довільним чином і значення інтеграла від цього вибору не зміниться.

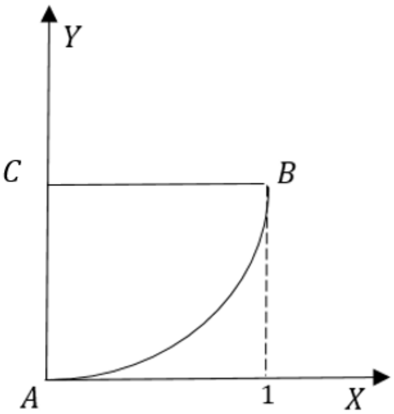
Приклад 3. Обчислити

$$\oint_L xydx + dy,$$

якщо $L -$ замкнений контур, що обмежений кривими $y = x^2$, $y = 1$, $x = 0$.

Розв'язання.

Маємо:



$$\oint_L xydx + dy = \int_{AB} xydx + dy + \int_{BC} xydx + dy$$

$$+ \int_{CA} xydx + dy.$$

Розглянемо криву AB:

$y = x^2$, $x \in [0; 1]$, тому

$$\int_{AB} xydx + dy = \int_0^1 (x \cdot x^2 + 2x)dx = \left(\frac{x^4}{4} + x^2\right)\Bigg|_0^1 = 1\frac{1}{4}.$$

Розглянемо відрізок BC: $y = 1$, $x \in [1; 0]$, тому

$$\int_{BC} xydx + dy = \int_1^0 xdx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_1^0 = -\frac{1}{2}.$$

Розглянемо відрізок CA: $y = 1$, $x \in [1; 0]$, тому

$$\int_{CA} xydx + dy = \int_1^0 dy = y|_1^0 = -1.$$

Таким чином

$$\oint_L xydx + dy = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4}.$$

Приклад 4. Обчислити

$$\oint_L \frac{(x + y)dx - (y - x)dy}{x^2 + y^2},$$

якщо $L -$ коло $x^2 + y^2 = a^2$.

Розв'язання.

Параметризуємо рівняння кола $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases}$ $t \ \in [0; 2\pi]$.

Маємо

$$\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}=$$

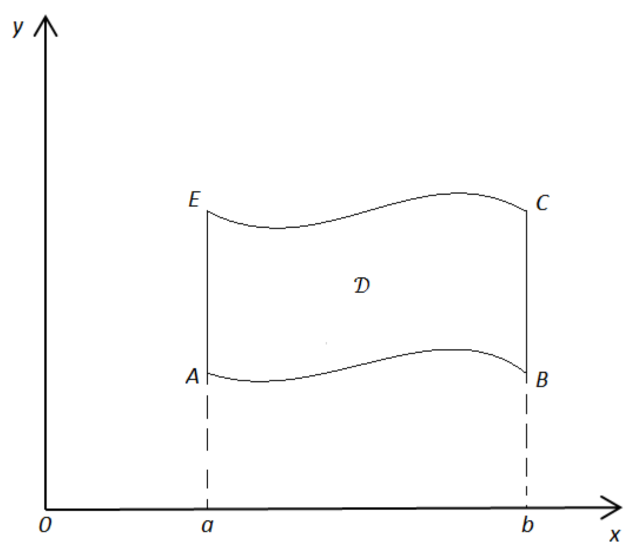
$$=\int_0^{2\pi} \frac{(a\cos t+a\sin t)\cdot(-a\sin t)-(a\cos t-a\sin t)\cdot a\cos t}{a^2}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi} \frac{-a^2\sin^2 t-a^2\cos^2 t}{a^2}dt=-\int_0^{2\pi} dt=-t|_0^{2\pi}=-2\pi.$$

6. Обчислення площі за допомогою криволінійного інтеграла II роду

Нехай в площині XOY задано просту замкнену неперервну криву. Вона розбиває площину на дві частини, одна із яких обмежена цією кривою. Розглянемо окремий випадок, коли область є простою і обмеженою лініями

$$y=y_1(x),\ y=y_2(x),\ x=a,\ x=b,\ y_1(x)\le y_2(x),\ x\in[a,b].$$



Як відомо. площа області D дорівнює

$$S_D=\int_a^b \big(y_2(x)-y_1(x)\big)dx.$$

Знайдемо криволінійний інтеграл по контуру $L=ABCEA$.

$$\int_L ydx=\int_{AB} ydx+\int_{BC} ydx+$$

$$+\int_{CE} ydx+\int_{EA} ydx.$$

Розглянемо криву AB: $x\in[a;b], y=y_1(x)$. Тоді

$$\int\limits_{AB} ydx = \int\limits_a^b y_1(x)dx.$$

BC: $x = b,\ y \in [y_1(b); y_2(b)],\ dx = 0$. Отже, $\int_{BC} ydx = 0$.

CE: $x \in [b; a],\ y = y_2(x)$. Тоді

$$\int\limits_{CE} ydx = \int\limits_b^a y_2(x)dx = -\int\limits_a^b y_2(x)dx.$$

EA: $x = a,\ y \in [y_2(a), y_1(a)],\ dx = 0$. Отже, $\int_{EA} ydx = 0$.

Таким чином

$$\oint_L ydx = \int\limits_{ABCEA} ydx = \int\limits_a^b y_1(x)dx + 0 - \int\limits_a^b y_2(x)dx + 0 =$$

$$= -\left(\int\limits_a^b y_2(x)dx - \int\limits_a^b y_1(x)dx\right) = -S_D,$$

де S_D — площа області D.

Отже,

$$S_D = -\oint_L ydx. \quad (1)$$

Аналогічно можна показати, що

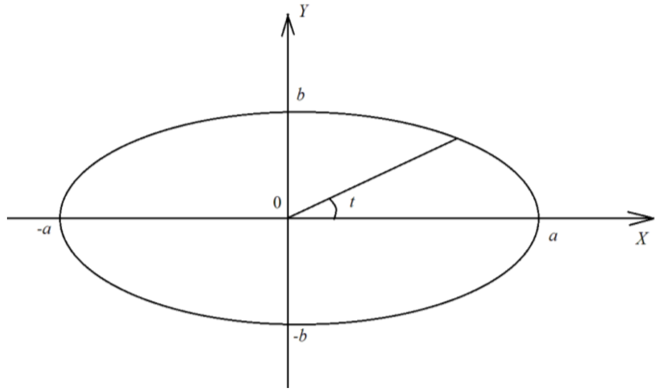
$$S_D = \oint_L xdy. \quad (2)$$

Додавши формули (1) і (2), одержимо $2S_D = \oint_L xdy - ydx$, звідки

$$S_D = \oint_L \frac{xdy - ydx}{2}. \quad (3)$$

Формули $(1) - (3)$ мають місце і в більш загальному випадку, зокрема їх можна використовувати і для таких областей, які певним чином можна розбити на елементарні області.

Приклад 1. Знайти площу, обмежену еліпсом.



Розв'язання.

Використаємо параметричне задання еліпса

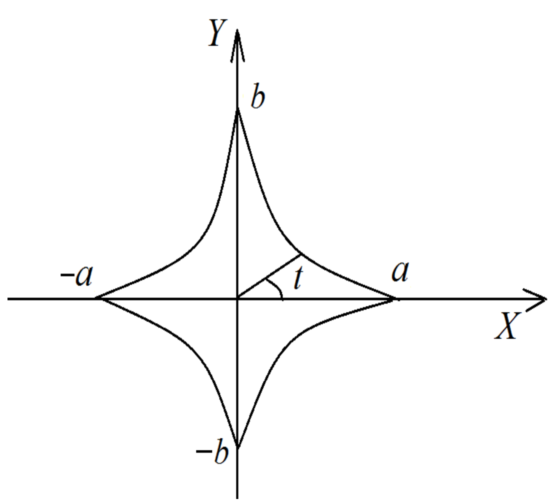
$$\begin{cases} x = a\cos t\,, \\ y = b\sin t\,, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

Тоді площа еліпса

$$S = \oint_L \frac{xdy - ydx}{2} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(a\cos t \cdot b\cos t + b\sin t \cdot a\sin t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} abdt = \frac{1}{2}abt\Big|_0^{2\pi} = \pi ab.$$

Приклад 2. Знайти площу, обмежену астроїдою $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$



Розв'язання.

Використаємо параметричне задання астроїди

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t\,, \\ y = b\sin^3 t\,, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

Тоді площа, яку обмежує астроїда

$$S = \oint_L \frac{xdy - ydx}{2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\big(a\cos^3 t \cdot 3b\sin^2 t \cdot \cos t - b\sin^3 t\,(-3a\cos^2 t \cdot \sin t)\big)dt =$$

$$= \frac{3ab}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot \cos^2 t \, dt = \frac{3ab}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\, t \, dt = \frac{3ab}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt =$$

$$= \frac{3ab}{16} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3\pi ab}{8}. \quad (\text{кв. од.})$$

7. Формула Гріна

З'ясуємо зв'язок між подвійним інтегралом по області і криволінійним інтегралом по межі цієї області. Спочатку зробимо деякі зауваження.

Як відомо, множина називається відкритою, якщо всі її точки внутрішні.

Множина D називається зв'язною, якщо не існує двох відкритих множин D_1 і D_2 таких, що $D_1 \cap D_2 = \emptyset,\ D_1 \cup D_2 = D$.

На площині означення зв'язної множини сформулюємо наступним чином.

Означення 1. Множина D називається зв'язною, якщо для довільних двох точок цієї множини існує неперервна крива, яка з'єднує ці точки і лежить в даній множині.

Означення 2. Відкриту зв'язну множину називають областю.

Зазначимо, що для довільних двох точок плоскої області існує ламана, яка з'єднує ці точки і лежить в даній області.

Якщо межа області складається із однієї неперервної кривої, то область називається однозв'язною. У випадку двох кривих – двозв'язною.

Наприклад, на рисунку 1 область D є однозв'язною, бо межа області складається із однієї неперервної кривої; на рисунку 2 область D є двозв'язною, бо межа області складається із двох неперервних кривих L_1 та L_2.

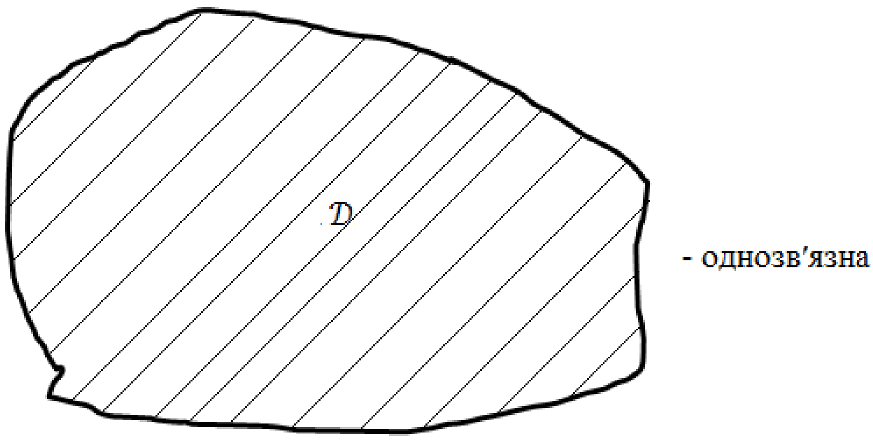


Рис. 1

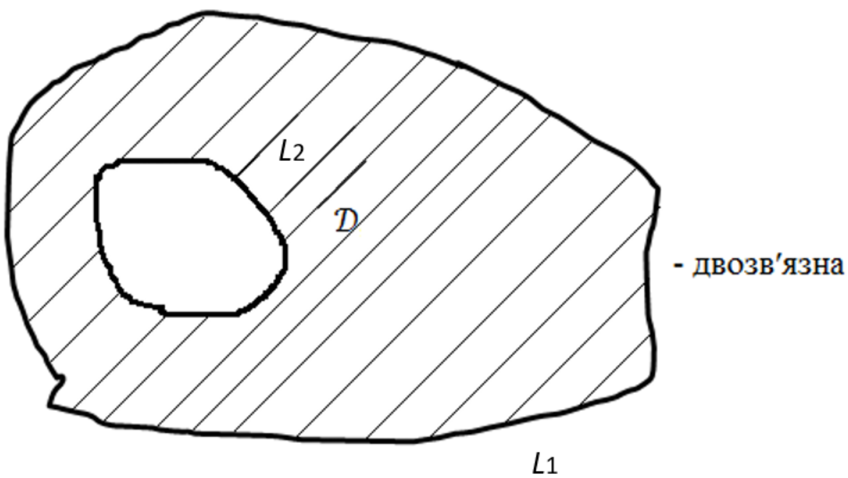


Рис. 2

Надалі вважаємо, що область D є замкненою.

Теорема (формула Гріна).

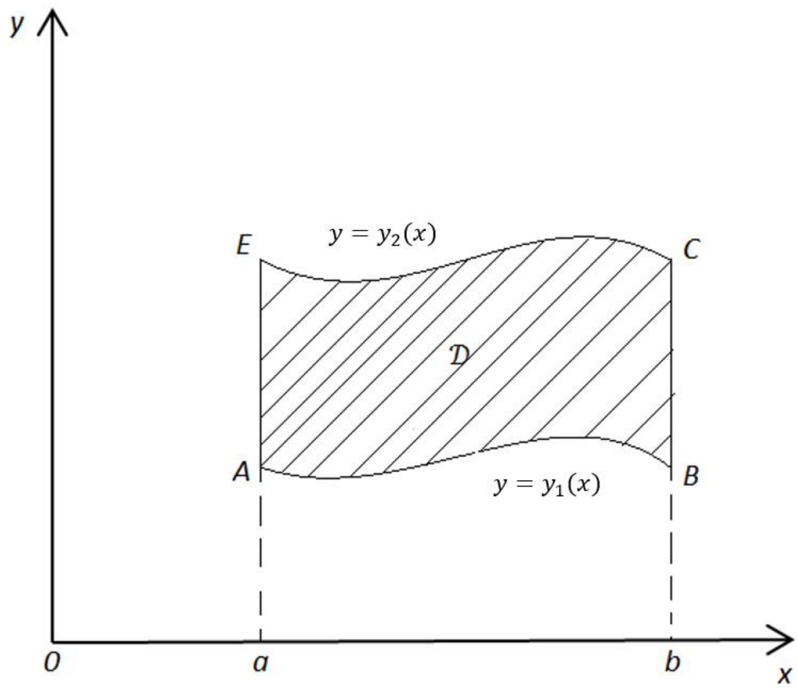
Якщо функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкненій області D, то має місце рівність

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \qquad (1)$$

де $L -$ межа області D.

Доведення.

Спочатку розглянемо випадок, коли область D є простою вздовж осі OY, тобто коли D обмежена кривими $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, та прямими $x = a$, $x = b$, де $a < b$, $y_1(x) \leq y_2(x)$, $x \in [a; b]$.



Розглянемо

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b dx \, \left(P(x,y)|_{y_1(x)}^{y_2(x)} \right) =$$

$$= \int_a^b \big(P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\big) dx = \int_a^b P\big(x, y_2(x)\big) dx - \int_a^b P\big(x, y_1(x)\big) dx.$$

Знайдемо далі

$$\oint\limits_L P(x,y)dx = \int_{AB} P(x,y)dx + \int_{BC} P(x,y)dx +$$

$$+ \int_{CE} P(x,y)dx + \int_{EA} P(x,y)dx =$$

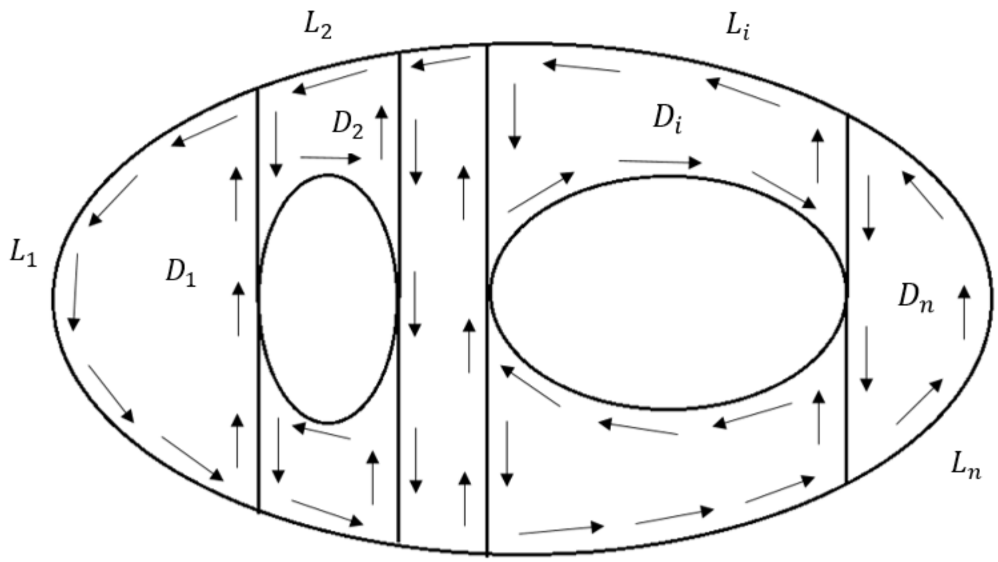
$$= \int_a^b P\big(x, y_1(x)\big)dx + 0 + \int_b^a P\big(x, y_2(x)\big)dx + 0 =$$

$$= \int_a^b P\big(x, y_1(x)\big)dx - \int_a^b P\big(x, y_2(x)\big)dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

Ми довели, що

$$\oint\limits_L P(x, y)dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy. \qquad (2)$$

Формулу (2) можна розповсюдити на більшу кількість областей.



Нехай область D розбита на частини D_i, $i = \overline{1, n}$, які обмежені додатньо-орієнтованими замкненими кривими L_i, $i = \overline{1, n}$, з для кожної з яких має місце рівність (2), тобто

$$\oint\limits_{L_i} P(x, y)dx = -\iint\limits_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy\,, \quad i = \overline{1, n}.$$

.

Додамо ці рівності по всіх $i = \overline{1, n}$.

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\sum_{i=1}^{n} \oint_{L_i} P(x,y)dx.$$

В правій частині маємо суму криволінійних інтегралів по контурам L_i. Кожен із цих контурів складається із кривих, які входять в L та із допоміжних ліній, якими розбита область D.

Кожна з допоміжних ліній входить до складу двох контурів L_i, тому по кожній із цих ліній інтеграл береться двічі, причому в протилежних напрямках.

При додаванні інтегралів $\oint_{L_i} P(x,y)dx, i = \overline{1,n},$ криволінійні інтеграли по допоміжних лініях взаємно знищуються і залишаться лише інтеграли по кривих, які входять до складу межі області D.

Отже,

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint_L P(x,y)dx.$$

Тепер розглянемо випадок, коли область D є простою вздовж осі OX, тобто коли D обмежена прямими $y = c$, $y = d$, $c < d$, та кривими $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $x_1(y) \leq x_2(y)$, $y \in [c; d]$.

При цьому можна одержати рівність

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_L Q(x,y)dy.$$

Якщо ж область D не є простою вздовж осі OX, то розбиваючи область D прямими, паралельними до осі OX, на прості вздовж осі OX частини, аналогічно до того, як це робили вище, знову одержимо рівність

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_L Q(x,y)dy. \tag{3}$$

Додаючи (3) і (2), одержимо формулу Гріна (1).

Теорему доведено.

Приклад 1. За формулою Гріна обчислити

$$\oint_L (x-2y)dx + (x+y)dy,$$

якщо $L -$ коло $x^2 + y^2 = R^2$.

Розв'язання.

Маємо

$$P(x,y) = x-2y, \qquad Q(x,y) = x+y, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -2, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Тоді

$$\oint_L (x-2y)dx + (x+y)dy = \iint_{x^2+y^2 \le R^2} 3dxdy = 3 \iint_{x^2+y^2 \le R^2} dxdy = 3\pi R^2.$$

Приклад 2. За формулою Гріна обчислити

$$\oint_L (x+y)dx - (x-y)dy,$$

якщо $L -$ еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Розв'язання.

Маємо

$$P(x,y) = x+y, \qquad Q(x,y) = y-x, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1.$$

Тоді

$$\oint_L (x+y)dx - (x-y)dy = \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1} (-2)dxdy = -2 \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1} dxdy = -2\pi ab.$$

Приклад 3. За формулою Гріна обчислити

$$\oint\limits_L xy^2dy - x^2ydx,$$

якщо $L -$ коло $x^2 + y^2 = a^2$.

Розв'язання.

Маємо

$$P(x,y) = -x^2y, \qquad Q(x,y) = xy^2,$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2.$$

Тоді

$$\oint\limits_L xy^2dy - x^2ydx = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} (y^2 + x^2)dxdy = \begin{vmatrix} x = \rho\, cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho^2 \cdot \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^a \rho^3 = 2\pi \cdot \frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^a = \frac{\pi a^4}{2}.$$

8. Незалежність криволінійного інтеграла II роду від шляху інтегрування

З'ясуємо, при яких умовах значення криволінійного інтеграла не залежить від того, якою кривою сполучені крайні точки шляху інтегрування.

Теорема. Нехай функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в деякій замкненій однозв'язній області D. Тоді наступні чотири твердження рівносильні:

1). Для будь-якої замкненої кусково-гладкої кривої $L \subset D$ виконується

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

2). Для довільних точок M та N з області D значення інтеграла

$$\int\limits_{MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

не залежить від шляху інтегрування.

3). Вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, яка визначена в області D, тобто

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y).$$

4). В усіх точках області D виконується рівність

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

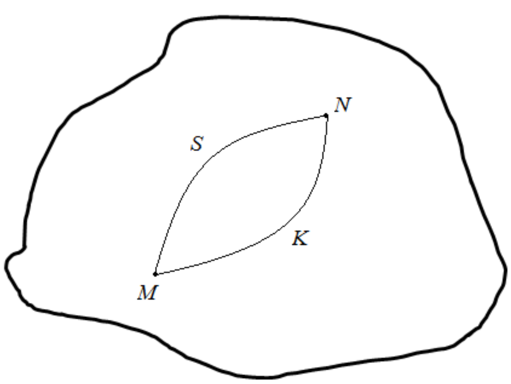
Доведення.

Проведемо доведення за схемою $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

$\mathbf{1 \Rightarrow 2}$

Нехай M і N – довільні точки з області D. Нехай криві MKN та MSN сполучають точки M та N і утворюють деяку замкнену кусково-гладку криву

$L = MKNSM \subset D$.



Згідно з 1)

$$\oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{MKN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{NSM} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Звідси

$$\int\limits_{MKN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = - \int\limits_{NSM} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{MSN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Внаслідок довільності кривих MKN та MSN маємо, що

$$\int\limits_{MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

не залежить від шляху інтегрування, який сполучає точки M та N.

$\mathbf{2 \Rightarrow 3}$

Нехай для довільних точок M і N з області D, криволінійний інтеграл

$$\int\limits_{MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

не залежить від шляху інтегрування, тобто він не залежить від кривої, яка сполучає точки M та N.

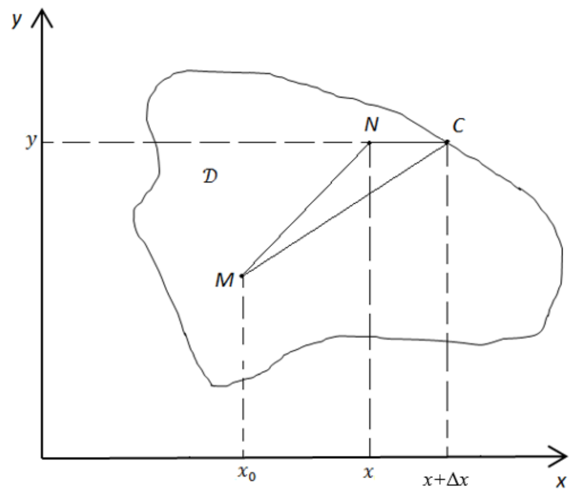
Покладемо $M(x_0; y_0)$, $N(x; y)$, тоді

$$\int\limits_{MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

буде залежити від координат x та y точки N. Це означає, що цей інтеграл є деякою функцією від x, y. Тобто

$$u(x,y) = \int\limits_{MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Покажемо, що диференціал цієї функції співпадає з підінтегральним виразом. Для цього слід довести, що в кожній точці області D існують частинні похідні функції u, причому $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$.



Розглянемо частинний приріст $\Delta_x u = u(x + \Delta x; y) - u(x,y)$. Згідно із заданням функції u, маємо:

$$u(x + \Delta x; y) = \int\limits_{MC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

тоді

$$\Delta_x u = u(x + \Delta x; y) - u(x; y) =$$

$$= \int\limits_{MC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int\limits_{MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{NC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx.$$

Оскільки функція $P(x,y)$ неперервна в області D, то можна застосувати теорему про середнє:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx = P(x+\theta\Delta x; y)\cdot\Delta x, \qquad \text{де } \theta \in (0;1).$$

Звідси $\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = P(x+\Delta x; y)$. Перейшовши до границі при $\Delta x \to 0$, маємо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} P(x+\theta\Delta x; y) = P(x,y).$$

Аналогічно $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$.

$3 \Rightarrow 4$

Нехай $P(x,y)dx + Q(x,y)dy -$ повний диференціал функції $u(x,y)$ в області D. Тобто $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y)$. Тоді $P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}$, а $Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$. Знайдемо $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в області D, то це означає, що і $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ − неперервні в D, отже, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. Тобто $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

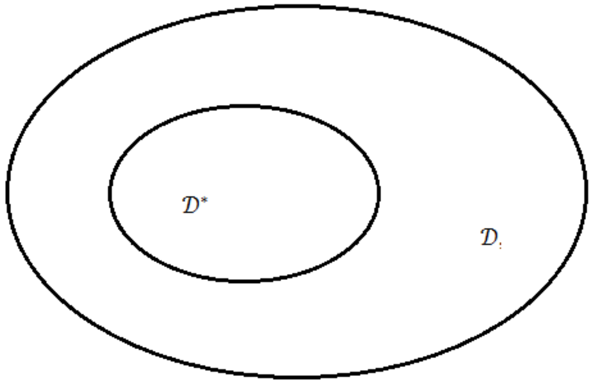
$4 \Rightarrow 1$

Нехай в області D виконується рівність

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Розглянемо в області D деяку замкнену кусково-гладку криву L, яка обмежує деяку однозв'язну область D^*.

До неї можна застосувати формулу Гріна



$$\iint_{D^*}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy =$$

$$= \oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Оскільки $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Теорему доведено.

Приклад 1. Обчислити

$$\oint\limits_{AB}(x^2 - y^2)dx - 2xydy$$

по довільній кривій, яка сполучає точки $A(0;0)$ і $B(1;1)$.

Розв’язання. Маємо $P(x,y) = (x^2 - y^2)$, $Q(x,y) = -2xy$. Тоді

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -2y.$$

Згідно з доведеною теоремою, значення інтеграла не залежить від шляху інтегрування, який з’єднує точки A та B. Тому можна обчислювати інтеграл по прямій $y = x$. Маємо

$$\oint\limits_{AB}(x^2 - y^2)dx - 2xydy = \int\limits_0^1 (x^2 - x^2 - 2x\cdot x)dx =$$

$$= -2\int\limits_0^1 x^2dx = -\frac{2x^3}{3}\Bigg|_0^1 = -\frac{2}{3}.$$

9. Знаходження функції за її повним диференціалом

Нехай в деякій однозв'язній області D функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними і нехай виконується рівність $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Зафіксуємо точку $M(x_0; y_0)$, і розглянемо інтеграл

$$\int_{MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \text{ де } N(x;y).$$

Отримаємо функцію

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Згідно із доведеною теоремою з попереднього параграфа, повний диференціал

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Як і для функції однієї змінної, для функцій двох змінних існує безліч таких функцій, для яких вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом. Всі вони відрізняються сталим доданком. Кожну із таких функцій називають первісною для даного повного диференціала. Отже,

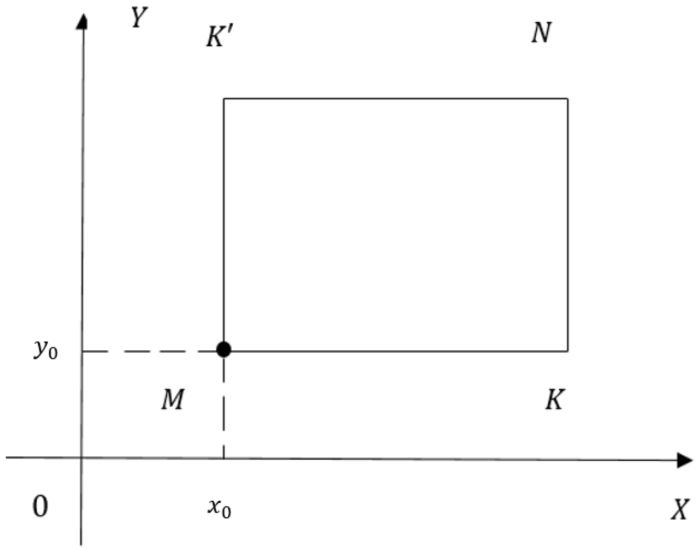
$$\int_{(x_0;y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(x,y) + C. \qquad (1)$$

Для знаходження первісної використовують той факт, що інтеграл в (1) не залежить від шляху інтегрування.

Виберемо найпростіший із шляхів інтегрування. Проінтегруємо по ламаній, яка сполучає точки $M(x_0, y_0)$ та $N(x,y)$ по відрізкам, які паралельні осям координат.

$$\int_{MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{MK} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{KN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$



На відрізку MK $y = y_0$, тому $dy = 0$.

На відрізку KN x залишається сталим, тому $dx = 0$, отже,

$$\int_{MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy.$$

Тоді

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C. \quad (2)$$

Якщо інтеграл обчислювати вздовж ламаної $MK'N$, то

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C. \quad (3)$$

При розв’язуванні конкретної задачі по відшуканню первісної доцільно точку (x_0, y_0) вибирати так, щоб остаточний вираз якомога більше спрощувався.

Зауваження. Якщо первісна знайдена, то її можна використати для обчислення інтеграла від повного диференціала.

Для цього у формулі

$$I = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(x,y) + C$$

покладемо $x = x_0$, $y = y_0$. Одержимо

$$0 = u(x_0, y_0) + C \implies C = -u(x_0, y_0),$$

тоді

$$I = u(x,y) - u(x_0, y_0).$$

Якщо в останній формулі покласти $x = x_1$, $y = y_1$, то матимемо

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(x_1,y_1) - u(x_0,y_0) = u(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}.$$

Це є формула Ньютона-Лейбніца для криволінійного інтеграла від повного диференціала.

Зауваження. У випадку функції трьох змінних, якщо відомо повний диференціал цієї функції, аналогічно можна обґрунтувати таку формулу:

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz + C,$$

якщо $du = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$.

Приклад 1. Знайти функцію за її повним диференціалом

$$du = 4(x^2 - y^2)(xdx - ydy).$$

Розв’язання.

Нехай

$$du = 4(x^3 - xy^2)dx - 4(yx^2 - y^3)dy.$$

Тоді

$$P(x,y) = 4(x^3 - xy^2), \qquad Q(x,y) = -4(yx^2 - y^3),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -8xy, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -8xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Отже,

$$u(x,y) = 4\int_{x_0}^{x} (x^3 - x{y_0}^2)dx - 4\int_{y_0}^{y} (yx^2 - y^3)dy + C =$$

$$= 4\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}{y_0}^2\right)\Bigg|_{x_0}^{x} - 4\left(\frac{y^2}{2}x^2 - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{y_0}^{y} + C =$$

$$= x^4 - 2x^2{y_0}^2 - {x_0}^4 + 2{x_0}^2{y_0}^2 - (2y^2x^2 - y^4 - 2{y_0}^2x^2 + {y_0}^4) + C =$$

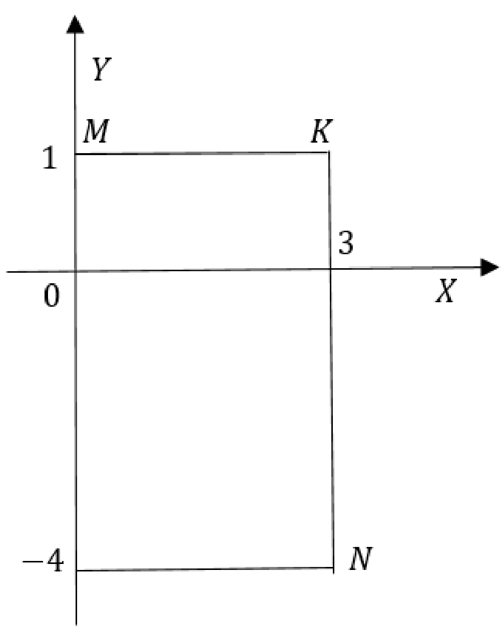
$$= x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - ({x_0}^4 - 2{x_0}^2{y_0}^2 + {y_0}^4) + C =$$

$$= (x^2 - y^2)^2 - ({x_0}^2 - {y_0}^2)^2 + C = (x^2 - y^2)^2 + C_1.$$

Приклад 2. Обчислити

$$\int_{(0;1)}^{(3;-4)} xdx + ydy.$$

Розв'язання.



$$P(x,y) = x, \qquad Q(x,y) = y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Тоді

$$\int_{(0;1)}^{(3;-4)} xdx + ydy = \int_0^3 xdx + \int_1^{-4} ydy =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3 + \frac{y^2}{2}\Bigg|_1^{-4} = \frac{9}{2} + 8 - \frac{1}{2} = 12.$$

Запитання для самоконтролю

1. Сформулювати означення гладкої та кусково-гладкої кривої.
2. Навести означення криволінійного інтеграла I роду (по довжині дуги).
3. Навести основні властивості криволінійних інтегралів I роду.
4. Формули для обчислення криволінійних інтегралів I роду.
5. Застосування криволінійного інтеграла I роду: площа циліндричної поверхні.
6. Застосування криволінійного інтеграла I роду: довжина дуги кривої.
7. Застосування криволінійного інтеграла I роду: маса кривої.
8. Сформулювати означення криволінійного інтеграла II роду (по координатах).
9. Фізичний зміст криволінійного інтеграла II роду.
10. Навести основні властивості криволінійних інтегралів II роду.
11. Обчислення криволінійних інтегралів II роду.
12. Криволінійний інтеграл II роду по замкненому контуру.
13. Обчислення площі за допомогою криволінійного інтеграла II роду.
14. Сформулювати означення зв'язної, однозв'язної множини.
15. Навести формулу Гріна.
16. Сформулювати умови незалежності криволінійного інтеграла II роду від шляху інтегрування.
17. Знаходження функції за її повним диференціалом.

Індивідуальні завдання до теми “Криволінійні інтеграли”

Варіант 1

1. Обчислити $\int_L \frac{dl}{x+2y+1}$, якщо L є відрізком прямої, що з’єднує точки $(1;1)$ і $(2;3)$.

2. Обчислити $\int_L \frac{x}{y}dx + ydy$, якщо L є кривою $x = t,\ \ y = e^{-t}$, $t \in [1;2]$.

3. Переконавшись, що підінтегральний вираз є повним диференціалом, обчислити

$$\int_{(1;1)}^{(2;2)} e^{xy}\big((xy + y^2 + 1)dx + (xy + x^2 + 1)dy\big).$$

4. Використовуючи формулу Гріна, обчислити

$$\oint_L (xy^2 + 2x - 1)dx - (x^2 + y)dy,$$

якщо L -замкнений контур, утворений лініями $y = x^2$, $y = x$ із додатним напрямом обходу.

5. Застосовуючи криволінійний інтеграл, обчислити довжину дуги кривої $x = \sqrt{3}t^2, y = t - t^3, 0 \le t \le 2$.

6. Використовуючи криволінійний інтеграл, знайти площу фігури, обмежену кривими $y = x^2$, $y = \frac{1}{3}x^3$.

7. Знайти масу кривої $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ 0 \le t \le 1$, якщо її лінійна густина $\rho(x, y) = x^2 + y^2$.

Варіант 2

1. Обчислити $\int_L (x^2 + y^2)dl$, якщо L є верхньою дугою кола $x^2 + y^2 = 4$.

2. Обчислити $\int_L (2xy + 1)dx + y^2 dy$, якщо L є прямою $x - 2y = 3$, $x \in [-1; 1]$.

3. Переконавшись, що підінтегральний вираз є повним диференціалом, обчислити

$$\int_{(0;0)}^{(1;1)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$$

4. Використовуючи формулу Гріна, обчислити

$$\oint_L (e^x + xy)dx + (xy^2 + e^y)dy,$$

якщо L -замкнений контур, утворений лініями $y = 2x - 1$, $y = -2x - 1$, $y = 0$ із додатним напрямом обходу.

5. Застосовуючи криволінійний інтеграл, обчислити довжину дуги кривої $x = \frac{t^6}{6}, y = 4 - \frac{t^4}{4}$ між точками перетину кривої з осями координат.

6. Використовуючи криволінійний інтеграл, знайти площу фігури, обмежену кривими $y^2 + 8x = 16$, $y^2 - 24x = 18$.

7. Знайти масу кривої $x = t^2,\ y = 2t,\ 0 \le t \le 1$, якщо її лінійна густина $\rho(x, y) = xy$.

Варіант 3

1. Обчислити $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2-y^2}}$, якщо L є відрізком прямої, що з'єднує точки $(2;-1)$ і $(3;0)$.

2. Обчислити $\int_L xydx + x^2dy$, якщо L є кривою $x = t,\ \ y = \ln t$, $t \in [1;2]$.

3. Переконавшись, що підінтегральний вираз є повним диференціалом, обчислити

$$\int_{(0;0)}^{(1;1)} e^{-(x^2+y^2)}(xdx + ydy).$$

4. Використовуючи формулу Гріна, обчислити

$$\oint_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy,$$

якщо L -замкнений контур, утворений лініями $y = x^2$, $x = y^2$ із додатним напрямом обходу.

5. Застосовуючи криволінійний інтеграл, обчислити довжину дуги кривої $x = t^2, y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$ між точками перетину кривої з віссю Ox.

6. Використовуючи криволінійний інтеграл, знайти площу фігури, обмежену кривими $y^2 = 2x + 1$, $x - y - 1 = 0$.

7. Знайти масу кривої $y = \ln\cos x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$, якщо її лінійна густина $\rho(x, y) = y\sin x$.

Варіант 4

1. Обчислити $\int_L (x^2 + y^2)dl$, якщо L є кривою $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $0 \leq t \leq 1$.

2. Обчислити $\int_L xydx - (x^2 + y^2)dy$ якщо L є прямою $x + y = 1$, $x \in [0; 1]$.

3. Переконавшись, що підінтегральний вираз є повним диференціалом, обчислити

$$\int_{(1;1)}^{(1;2)} e^{xy}(y(x+1)dx + x(y+1)dy).$$

4. Використовуючи формулу Гріна, обчислити

$$\oint_L (xy + 3x + 1)dx - (x^2 + y - 3)dy,$$

якщо L -замкнений контур, утворений лініями $y = 2x$, $y = 3x$, $y = 2$ із додатним напрямом обходу.

5. Застосовуючи криволінійний інтеграл, обчислити довжину дуги кривої $x = 4\sqrt{2}\, a \sin t$, $y = a \sin 2t$ (замкнена крива).

6. Використовуючи криволінійний інтеграл, знайти площу фігури, обмежену кривими $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $x = 0$.

7. Знайти масу кривої $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, якщо її лінійна густина $\rho(x, y) = xy$.

Варіант 5

1. Обчислити $\int_L \frac{dl}{3x-y}$, якщо L є відрізком прямої, що з'єднує точки $(2;1)$ і $(1;2)$.

2. Обчислити $\int_L y^2dx + xydy$ якщо L є прямою $y = 2x + 3$, $x \in [0;2]$.

3. Переконавшись, що підінтегральний вираз є повним диференціалом, обчислити

$$\int_{(1;-1)}^{(3;2)} 2y(3x + y)dx + (3x^2 + 3y^2 + 4xy)dy.$$

4. Використовуючи формулу Гріна, обчислити

$$\oint_L y(1 - x^2)dx + x(1 + y^2)dy,$$

якщо L −коло $x^2 + y^2 = 4$.

5. Застосовуючи криволінійний інтеграл, обчислити довжину дуги кривої $x = e^t, y = e^{-t}, 0 \leq t \leq 1$.

6. Використовуючи криволінійний інтеграл, знайти площу фігури, обмежену кривими $x = 3t^2, y = 3t - t^3$.

7. Знайти масу кривої $y = e^{-x}, -\frac{1}{2} \leq x \leq 0$, якщо її лінійна густина $\rho(x,y) = x\sqrt{1 + y^2}$.

Варіант 6

1. Обчислити $\int_L \frac{xy^3}{\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}}dl$, якщо L є кривою $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Обчислити $\int_L \frac{ydx+xdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, якщо L є кривою $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in [0; 2\pi]$.

3. Переконавшись, що підінтегральний вираз є повним диференціалом, обчислити

$$\int_{(0;0)}^{(2;3)} (6xy + 4y^2 + 5y)dx + (3x^2 + 8xy + 5x)dy.$$

4. Використовуючи формулу Гріна, обчислити

$$\oint_L (2xy + x^2)dx + \left(x\sqrt[3]{x} + 2xy\right)dy,$$

якщо L −коло $x^2 + y^2 = ax$.

5. Застосовуючи криволінійний інтеграл, обчислити довжину дуги кривої $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $0 \le t \le 1$.

6. Використовуючи криволінійний інтеграл, знайти площу фігури, обмежену кривими $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$.

7. Знайти масу кривої $y^2 = x$, $0 \le x \le 1$, якщо її лінійна густина $\rho(x, y) = |y|$.

Варіант 7

1. Обчислити $\int_L \frac{xy}{\sqrt{a^2+8x^2}} dl$, якщо L є кривою $x = a\cos t$, $y = 3a\sin t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

2. Обчислити $\int_L \frac{xy^2 dx + y dy}{x^2+y^2}$, якщо L є кривою $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Переконавшись, що підінтегральний вираз є повним диференціалом, обчислити

$$\int_{(1;1)}^{(3;2)} \frac{x}{(x+y)^2} dx + \frac{2x+y}{(x+y)^2} dy.$$

4. Використовуючи формулу Гріна, обчислити

$$\oint_L (2xy - \cos y)dx + (x\sin y - 3y)dy,$$

якщо L -замкнений контур, утворений лініями $y = e^x$, $x + y = 1$, $x = 1$ із додатним напрямом обходу.

5. Застосовуючи криволінійний інтеграл, обчислити довжину дуги кривої $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $0 \le t \le 1$.

6. Використовуючи криволінійний інтеграл, знайти площу фігури, обмежену кривими $x = a + r\cos t$, $y = b + r\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$.

7. Знайти масу кривої $= \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \le x \le a$, якщо її лінійна густина $\rho(x, y) = x^2 + y^2$.

Варіант 8

1. Обчислити $\int_L \frac{(2x+1)}{\sqrt{x^2+y^2+1}} dl$, якщо L є відрізком прямої, що з'єднує точки $(0;1)$ і $(2;3)$.

2. Обчислити $\int_L 2xydx + y^2dy$, якщо L є кривою $x = t,\ \ y = \sin t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Переконавшись, що підінтегральний вираз є повним диференціалом, обчислити

$$\int_{(2;1)}^{(5;3)} \frac{-y^2dx + x^2dy}{(x-y)^2}.$$

4. Використовуючи формулу Гріна, обчислити

$$\oint_L (2y - xe^y)dx + (xe^{y+2x-y})dy,$$

якщо L -замкнений контур, утворений лініями $y = \ln x,\ \ y = 0,\ \ x = 2$ із додатним напрямом обходу.

5. Застосовуючи криволінійний інтеграл, обчислити довжину дуги кривої $x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t)\ , 0 \le t \le 2\pi$.

6. Використовуючи криволінійний інтеграл, знайти площу фігури, обмежену кривими $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)\ , x = 0$.

7. Знайти масу кривої $x = 2a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$, якщо її лінійна густина $\rho(x,y) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$.

Варіант 9

1. Обчислити $\int_L \frac{x^2 y}{\sqrt{3y^2+a^2}} dl$, якщо L є кривою $x = 2a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

2. Обчислити $\int_L y(x+1)dx + x^3 dy$, якщо L є кривою $y = \ln x$, $x \in [1; e]$.

3. Переконавшись, що підінтегральний вираз є повним диференціалом, обчислити

$$\int_{(0;0)}^{(2;2)} \frac{xdx + ydy}{1 + x^2 + y^2}.$$

4. Використовуючи формулу Гріна, обчислити

$$\oint_L (x^2 y + 3x + y)dx + (xy - 1)dy,$$

якщо L -замкнений контур, утворений лініями $x = |y|$, $x = 1$ із додатним напрямом обходу.

5. Застосовуючи криволінійний інтеграл, обчислити довжину дуги кривої $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)\,, 0 \le t \le 2\pi$.

6. Використовуючи криволінійний інтеграл, знайти площу фігури, обмежену кривими $x = a\cos t\,, y = a\sin t\,, 0 \le t \le \pi$.

7. Знайти масу кривої $x = a\cos^2 t$, $y = b\sin^2 t$, $\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{3}$ якщо її лінійна густина $\rho(x,y) = \frac{1}{xy}$.

Варіант 10

1. Обчислити $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, якщо L є відрізком прямої, що з’єднує точки $(0;0)$ і $(1;2)$.

2. Обчислити $\int_L x^2ydx + ydy$, якщо L є відрізком прямої, що з’єднує точки $(-1;1)$ і $(0;3)$.

3. Переконавшись, що підінтегральний вираз є повним диференціалом, обчислити

$$\int_{(1;2)}^{(2;1)} \frac{ydx - xdy}{x^2}.$$

4. Використовуючи формулу Гріна, обчислити

$$\oint_L (x+y)^2dx + (x^2+y^2)dy,$$

якщо L -замкнений контур, утворений лініями $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = \ln 4$ із додатним напрямом обходу.

5. Застосовуючи криволінійний інтеграл, обчислити довжину дуги кривої $x = a\cos t\,, y = a\sin t\,, 0 \le t \le \pi$.

6. Використовуючи криволінійний інтеграл, знайти площу фігури, обмежену кривими $x = t^2 - 1, y = t^3 - t$.

7. Знайти масу кривої $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$, якщо її лінійна густина $\rho(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x+y}}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Шкіль М.І. Математичний аналіз. Ч.2. Київ: Вища школа, 2005. 510 с.
2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч. 2. Київ: Либідь, 1994. 320 с.
3. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Ч. 2. Київ: Вища школа, 1991. 366 с.
4. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Лященко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у прикладах та задачах. Ч.1. Київ: Вища школа, 2002. 462 с.
5. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Лященко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у прикладах та задачах. Ч.2. Київ: Вища школа, 2003. 470 с.

Навчально-методичне видання

Федуник-Яремчук Оксана Володимирівна
Соліч Катерина Василівна

КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ:

методичні вказівки

Друкується в авторській редакції