УДК 517.5 **Секція 1**

Оксана Федуник-Яремчук

к.ф.-м. н., доцент, завідувач кафедри

математичного аналізу та статистики

Волинський національний університет імені Лесі Українки

м. Луцьк, Україна

КОЛМОГОРОВСЬКІ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ У ПРОСТОРІ $B_{q,1}$

Анотація

Встановлено точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів типу Нікольського-Бєсова $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{q,1}$, норма в якому є більш сильною, ніж L_q- норма.

Ключові слова: клас типу Нікольського-Бєсова, колмогоровський поперечник, мішаний модуль неперервності, умови Барі-Стєчкіна.

Abstract

We obtain the exact order estimates of the Kolmogorov widths of the Nikol'skii-Besov-type classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables in the space $B_{q,1}$, which norm is stronger than the norm in L_q.

Key words: Nikol'skii-Besov-type class, Kolmogorov width, mixed modulus of continuity, Bari-Stechkin conditions.

Наведемо спочатку необхідні означення та відповідні позначення [1].

Нехай $\mathbb{R}^d -$ d- вимірний евклідів простір з елементами $x = (x_1, \dots, x_d)$, $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d -$ скалярний добуток елементів $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Через $L_p(\mathbb{T}^d)$, $\mathbb{T}^d = \prod_{j=1}^{d}[0,2\pi)$, позначимо простір 2π- періодичних по кожній змінній функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$, для яких

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} := \|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \qquad 1 \le p < \infty .$$

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} := \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{T}^d} |f(x)| < \infty.$$

Будемо вважати, що для функцій $f \in L_p(\mathbb{T}^d), 1 \le p \le \infty$, виконується додаткова умова:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, \ j = \overline{1,d}.$$

Означимо різницю порядку $l \in \mathbb{N}$ з кроком h_j за змінною x_j:

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C_l^n f\big(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \dots, x_d\big).$$

Для функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p \le \infty$, введемо мішану різницю l-го порядку з векторним кроком $h = (h_1, \dots, h_d)$:

$$\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_d}^l \left(\dots \left(\Delta_{h_1}^l f(x) \right) \right).$$

Розглянемо тепер для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p \le \infty$, $t = (t_1, \dots, t_d)$, $t_j \ge 0$, $j = \overline{1,d}$, мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j = \overline{1,d}}} \left\| \Delta_h^l f(\cdot) \right\|_p.$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d) -$ задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови:

1) $\Omega(t) > 0, t_j > 0, j = \overline{1,d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^d t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ не спадає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \le \left(\prod_{j=1}^d m_j \right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$;

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \ge 0$, $j = \overline{1,d}$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє також умови (S^α) і (S_l), які називають умовами Барі-Стєчкіна. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S^α), якщо $\frac{\varphi(\tau)}{\tau^\alpha}$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1{}^{\alpha}} \leq C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2{}^{\alpha}}, \qquad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\frac{\varphi(\tau)}{\tau^{\gamma}}$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1{}^{\gamma}} \geq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2{}^{\gamma}}, \qquad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S^{α}) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих $t_i,\ i \neq j$.

Нехай $1 \leq p \leq \infty,\ 1 \leq \theta \leq \infty$, а $\Omega(t) -$ задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l. Тоді класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ означаються таким чином:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \leq 1 \right\},$$

де

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left\{ \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \qquad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}.$$

Класи функцій були введені китайськими математиками S. Yongsheng та W. Heping. У випадку $\theta = \infty$ класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають з класами H^{Ω}_p, які вивчались М. М. Пустовойтовим. Зазначимо також, що при $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}, 0 < r_j < l$, класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ є аналогами відомих класів Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$, $1 \leq \theta < \infty$, та Нікольського $B^{r}_{p,\infty} = H^{r}_{p}$.

Будемо досліджувати класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією $\Omega(t)$ виду:

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right), \tag{1}$$

де $\omega(\tau)$ задана функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S^{α}) і (S_l). Це означає, що для функції $\Omega(t)$ виду (1) виконуються властивості $1\ -\ 4$ та умови Барі - Стєчкіна (S^{α}) і (S_l).

Далі означимо порядкові співвідношення, які будуть використовуватись.

Для додатних функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1(N) \ll \mu_2(N)$ означає, що існує стала $C_3 > 0$ така, що $\forall N \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\mu_1(N) \leq C_3\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1(N) \asymp \mu_2(N)$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1(N) \ll \mu_2(N)$ та $\mu_1(N) \gg \mu_2(N)$.

Зауважимо, що всі сталі $C_i,\ i = 1,2,...$, які є в роботі, можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору $\mathbb{R}^d$.

Нехай $X -$ деякий нормований функціональний простір з нормою $\|\cdot\|_X$, $W -$ центрально-симетрична множина в просторі X. Величина

$$d_M(W,X) = \inf_{L_M} \sup_{w\in W} \inf_{u\in L_M} \|w-u\|_X,$$

де $L_M \subset X$ є підпростором розмірності M, називається колмогоровським $M -$ поперечником множини W у просторі X.

Одержано точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів періодичних функцій багатьох змінних типу Нікольського-Бєсова $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі $B_{q,1}$ у випадках $1 < p = q < \infty$ і $1 \leq q < p \leq \infty$. Зазначимо, що норма у просторі $B_{q,1}$ є більш сильною, ніж L_q-норма [2]. Зокрема, при $1 \leq q \leq \infty$ виконуються співвідношення:

$$\|\cdot\|_q \ll \|\cdot\|_{B_{q,1}};\ \ \|\cdot\|_{B_{1,1}} \ll \|\cdot\|_{B_{q,1}} \ll \|\cdot\|_{B_{\infty,1}}.$$

Сформулюємо одержані результати.

Теорема 1. *Нехай* $d \geq 2, 1 < p < \infty,\ 1 \leq \theta \leq \infty,$ *і* $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^d t_j\right),$ *де* $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^α) із деяким $\alpha > 0$ і умову (S_l). Тоді для будь-яких $M, n \in \mathbb{N}$, таких, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, виконується порядкове співвідношення

$$d_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, B_{p,1}\right) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Теорема 2. *Нехай* $d \geq 2, 1 \leq q < p \leq \infty,\ 1 \leq \theta \leq \infty,$ *і* $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^d t_j\right),$ *де* $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^α) із деяким $\alpha > 0$ і умову (S_l). Тоді для будь-яких $M, n \in \mathbb{N}$, таких, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, виконується порядкове співвідношення

$$d_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, B_{q,1}\right) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Зауваження. Співставляючи результати теорем 1 та 2 із відповідними оцінками величин $d_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_p\right)$ та $d_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\right)$, які одержані S. Yongsheng та W. Heping, приходимо до висновку: в багатовимірному випадку (за винятком випадків $\theta = 1,\ 2 < q < p < \infty$) оцінки колмогоровських поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторах $B_{q,1}$ та L_q є різними за порядком.

В одновимірному випадку спостерігається інша ситуація: оцінки розглянутих апроксимаційних характеристик у просторах $B_{q,1}$ та L_q мають однакові порядки.

Окрім того, зазначимо, що в теоремі 2 охоплено низку значень параметрів p, q, θ, для яких колмогоровські поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі L_q й досі залишаються не дослідженими. Сказане стосується випадків:

$1 \le q < p \le 2, 1 \le \theta \le \infty,$ та $1 \le q \le 2 < p \le \infty, 1 \le \theta < 2.$

Список використаних джерел

1. Стасюк С.А., Федуник О.В. Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних. Укр. мат. журнал. 2006. Т. 58, № 5. С. 692–704.

2. Гембарська С.Б., Романюк І.А., Федуник-Яремчук О.В. Характеристики лінійної та нелінійної апроксимаційні характеристик класів періодичних функцій багатьох змінних типу Нікольського-Бєсова. Укр. мат. вісник. 2023. Т. 20, № 2. С. 161–185.