

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Волинський національний університет імені Лесі Українки  
Географічний факультет  
Кафедра фізичної географії

**Василь Фесюк**

# **ГЕОГРАФІЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ПРОГНОЗУВАННЯ**

Курс лекцій

Луцьк  
2024



Рекомендовано до друку Вченою радою Волинського національного університету імені Лесі Українки (протокол № \_ від \_\_\_\_\_ 2024 року)

**Рецензенти:**

*Ільїн Леонід Володимирович* – доктор географічних наук, професор, завідувач кафедри туризму та готельного господарства географічного факультету Волинського національного університету імені Лесі Українки

**Фесюк В.О. Географічне моделювання і прогнозування. Курс лекцій. Луцьк: ПП Іванюк В.П., 2024. 132 с.**

Курс лекцій містить короткий виклад теоретичного матеріалу та список літератури.

Рекомендовано студентам спеціальностей 106 „Географія”, 103 Науки про Землю

© Фесюк В.О., 2024

© Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2024



## Зміст

|            |   |     |
|------------|---|-----|
| Лекція № 1 | Вступ.....  | 4   |
| Лекція № 2 | Системний підхід у моделюванні.....   | 10  |
| Лекція № 3 | Особливості екологічних систем та їх моделей.....   | 19  |
| Лекція №4  | Елементарні математичні функції та їх застосування для моделювання та прогнозування стану довкілля.....                                     | 28  |
| Лекція №5  | Аналіз структури екологічних систем. Методи математичної статистики і теорії ймовірності у моделюванні та прогнозуванні стану довкілля..... | 43  |
| Лекція №6  | Аналіз динаміки екологічних систем. Застосування диференціальних рівнянь та систем рівнянь для моделювання екологічних процесів.....        | 71  |
| Лекція №7  | Прогнозування стану навколишнього середовища.....   | 84  |
| Лекція №8  | Аналіз просторових закономірностей стану довкілля еколого-картографічне моделювання.....  | 89  |
| Лекція №9  | Застосування комп'ютерних (інформаційних) технологій у моделюванні і прогнозуванні стану довкілля.....                                      | 105 |

# Лекція №1

## Вступ

### План

1. Роль і значення моделювання і прогнозування стану довкілля в системі охорони природи.
2. Форми представлення та вимоги до математичної моделі
3. Класифікація моделей в екології
4. Методи одержання та використання математичних моделей

#### ***1. Роль і значення моделювання і прогнозування стану довкілля в системі охорони природи***

Вплив суспільства, а особливо суспільного виробництва, на природне середовище останнім часом набирає катастрофічних масштабів. Для визначення даного етапу розвитку взаємовідносин людини та природи використовують термін “системна екологічна криза”. Складність вирішення екологічних проблем полягає у тому, що людина не лише цілеспрямовано або хаотично змінює навколишнє середовище, але й сама продовжує існувати в зміненому (трансформованому) середовищі, яке, у свою чергу, впливає на людину. Комплекс даних взаємовпливів дуже складний і поліваріантний, оскільки надзвичайно складними і поліваріантними є самі природно-техногенні системи (ПТС). У процесі дослідження нової або оптимізації існуючої природно-техногенної системи (ПТС) вирішуються задачі розрахунку параметрів і аналізу процесів у цій системі. Причому відтворити в лабораторних умовах усю складність природно-техногенних систем, які в екології називаються екосистемами, в натуральному вигляді нереально. Тому, в екології при проведенні різноманітних розрахунків реальну систему заміняють моделлю, на відміну від деяких інших природничих наук (фізика, хімія), де основним методом дослідження є експеримент.

У широкому змісті **модель** визначають як відображення найбільш істотних властивостей об'єкта. Математична модель екологічної системи – сукупність математичних об'єктів і відносин між ними, що адекватно відображає властивості досліджуваної системи, найбільш суттєві та актуальні при дослідженні. Модель описує залежність між вихідними даними і шуканими величинами.

#### ***2. Форми представлення та вимоги до математичної моделі***

Модель може бути представлена різними способами:

**інваріантна** – запис співвідношень моделі за допомогою традиційної математичної мови безвідносно до методу вирішення рівнянь моделі;

**аналітична** – запис моделі у виді результату аналітичного рішення вихідних рівнянь моделі;

**алгоритмічна** – запис співвідношень моделі й обраного чисельного методу вирішення у формі алгоритму (послідовність дій, які треба виконати, щоб від вихідних даних перейти до шуканих величин, називають **алгоритмом**).

**графічна** – представлення моделі певним графічним способом (наприклад, способом графів, еквівалентних схем, графіків, діаграми, номограм карт чи картосхем і т.п.);

**фізична** – адекватне відображення об'єкта у зменшеному вигляді;

**аналогова** – спрощене та генералізоване відображення основних властивостей об'єкта.

Найбільш універсальним засобом є математичний опис процесів – **математичне моделювання**. У поняття математичного моделювання включають і процес вирішення прикладної задачі на ЕОМ (комп'ютерне моделювання).

Процес моделювання у зв'язку із складністю та багатоваріантністю поставленої задачі та різним рівнем підготовки спеціалістів-екологів є дуже суб'єктивним. Тому якісна модель має відповідати певним загальним вимогам. Основними вимогами до математичних моделей є вимоги адекватності, універсальності й економічності.

**Адекватність**. Модель вважається адекватною, якщо відбиває задані властивості з прийнятною точністю. Точність визначається як ступінь збігу значень вихідних параметрів моделі й об'єкта. Точність моделі різна в різних умовах функціонування об'єкта. Ці умови характеризуються зовнішніми параметрами. У просторі зовнішніх параметрів потрібно виділити область адекватності моделі, де похибка менше заданої гранично припустимої похибки. Визначення області адекватності моделей – складна процедура, що вимагає великих обчислювальних затрат, що швидко ростуть із збільшенням розмірності простору зовнішніх параметрів.

**Універсальність** – визначається в основному числом і складом зовнішніх і вихідних параметрів, що враховуються в моделі, передбачає можливість застосування даної моделі (після необхідної модифікації) для оцінки споріднених явищ та суміжних територій.

**Економічність** моделі визначається витратою обчислювальних ресурсів для її реалізації. При застосуванні ЕОМ найчастіше такими ресурсами є машинний час і оперативна пам'ять.

Суперечливість вимог до моделі (мати широку область адекватності, високий ступінь універсальності і високу економічність) зумовлює існування цілого ряду моделей для об'єктів того самого типу, а тому виникає задача вибору з них оптимальної моделі.

### **3. Класифікація моделей в екології**

Як видно з рисунка 1 класифікація моделей в екології доволі складна. Це зумовлено великою різноманітністю використовуваних методів, суб'єктивністю

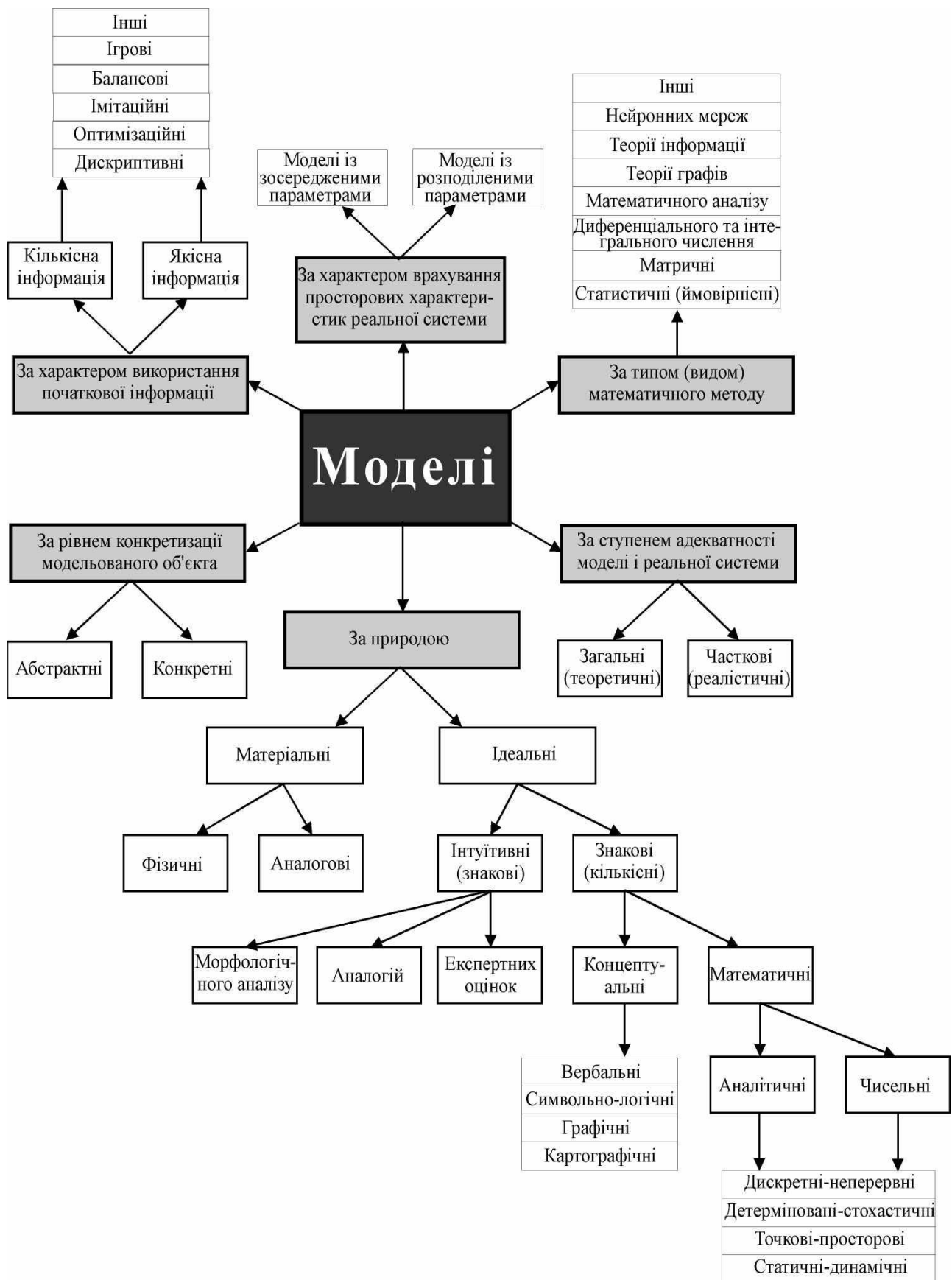


Рис. 1. Класифікація моделей в екології

підходу до їх побудови та використання. В найзагальнішому вигляді усі моделі можна поділити за:

1. За **природою: матеріальні та ідеальні**. Перші являють собою певний матеріальний об'єкт, що в достатній мірі адекватно відображає властивості модельованої системи, інші – певний вираз, рівняння, формулу чи зображення.

В свою чергу матеріальні поділяються на **фізичні** (є зменшеною (чи спрощеною) копією досліджуваного об'єкта, наприклад, глобус є моделлю Землі) та **аналогові** (відтворюють процес дії або розвитку модельованої системи, наприклад, трофічна піраміда є моделлю обміну енергії у біогеоценозі).

**Ідеальні** моделі поділяються на **інтуїтивні та знакові**. **Інтуїтивні** моделі поділяються на моделі побудовані методом **морфологічного аналізу, методом аналогій та експертних оцінок**. Усі вони по суті є якісними і виражають відносний розвиток даної системи стосовно інших систем (метод аналогій) або стосовно певної “ідеальної” системи. **Знакові** моделі вже за своєю природою є кількісними. Вони поділяються на **концептуальні й математичні**. **Концептуальні** моделі являють собою більш формалізований, систематизований і строго обґрунтований варіант традиційного словесного (вербального) опису реальної системи чи об'єкта. Складаються вони із науково обґрунтованого тексту, який обов'язково супроводжується схемами, графіками, таблицями та іншим ілюстративним матеріалом, в якому можуть використовуватись певні знаки, букви й символи. Основне призначення такої моделі – вираз чіткої концепції, підходу, обґрунтування й узагальнення всіх знань, уявлень і даних натурних спостережень про реальну систему, що вивчається, і для якої планується побудувати математичну модель. Типовим прикладом таких моделей є блок-схеми трофічних зв'язків, або технологічні схеми виробництва тої чи іншої продукції та утилізації відходів. Поділяються вони на **вербальні** (словесні), **графічні** (у вигляді графіків, номограм, діаграм, що відображають структуру та динаміку системи), **картографічні** (зміну досліджуваних явищ та процесів демонструють в територіальному аспекті) та **символьно-логічні** (у них певні позначення присвоюються для тим чи іншим явищам, що дозволяє їх зіставляти й порівнювати). І нарешті, власне **математичні** моделі поділяються на **аналітичні та чисельні**. При побудові перших використовуються в основному аналітичні методи, зокрема, апарат математичного аналізу та інших розділів математики, а в **чисельних** основним і принципово обов'язковим елементом дослідження є конкретні розрахунки із застосуванням засобів інформатики, сучасних ЕОМ та прикладних комп'ютерних програм. І ті і інші моделі за характером використаних натурних даних можуть бути **дискретними** чи **неперервними** (в залежності від того чи має досліджуваний процес перервний характер); **детермінованими** чи **стохастичними** (детерміновані, якщо досліджується зв'язок між двома явищами і перше з них визначає (детермінує) друге, а стохастичні – якщо ні); **точковими** чи **просторовими** (у залежності від того в скількох точках велись спостереження та збирались дані натурних досліджень: в одній чи кількох); **статичні** чи **динамічні** (в залежності від того чи досліджується зміна, рух,

динаміка об'єкта чи лише його структура).

2. За **рівнем конкретизації модельованого об'єкта** моделі поділяються на **абстрактні** та **конкретні**. Перші є дуже узагальненими, підходять для великої кількості однотипних об'єктів, але перед безпосереднім використанням вимагають суттєвого уточнення та конкретизації. **Конкретні** моделі будуються для конкретних об'єктів і максимально повно й глибоко відображають їх властивості.

3. За **характером використання початкової інформації** (кількісна чи якісна інформація) моделі бувають **дескриптивні** (описові); **оптимізаційні** (перед ними ставиться мета поліпшення структури чи динаміки модельованого об'єкта, наприклад, моделі зменшення викидів); **імітаційні** (являють собою формалізований опис досліджуваного явища у всій його повноті на грані нашого розуміння, причому причинно-наслідкові зв'язки у таких моделях не обов'язково повинні проявлятися у повній мірі, наприклад, моделі функціонування водосховищ); **балансові** (являють собою зведення прихідної та видаткової частини того чи іншого аспекту розвитку певної екосистеми, наприклад, у гідрології дуже добре розроблені методи складання водогосподарських балансів або водного балансу окремого річкового басейну чи держави чи адміністративної області); **ігрові** (являють собою ніби дискусію із системою: як вплине зміна явища "А" на явище "Б" та стан системи взагалі, будуються за типовою схемою "що буде, якщо...").

4. За **характером врахування просторових характеристик реальної системи** моделі бувають із зосередженими параметрами та з розподіленими параметрами. Моделі, у яких просторові характеристики природної системи не враховуються, тобто вони описують тільки такі характеристики (параметри), які залежать тільки від часу називаються **моделями із зосередженими параметрами**. Моделі, в яких враховується зміна характеристик не тільки в часі, але й у просторі, називаються **моделями з розподіленими параметрами**.

5. За **типом (видом) математичного методу** – найчастіше при моделюванні і прогнозуванні стану екосистем використовуються такі математичні методи: **статистичні (імовірнісні)** – для моделювання структури системи; **матричні** (найчастіше в балансових моделях); **диференціального (інтегрального) числення** (для моделювання динаміки екосистем, виходячи з фізичних закономірностей та природи екологічних явищ та процесів); **класичного математичного аналізу** (при дослідженні функцій, що описують стан екосистеми, її динаміку, шляхом вивчення області існування адекватних результатів моделі, точок екстремумів, особливості поведінки функцій і т.д.); **теорії графів** (особливо в моделях із розподіленими параметрами, балансово-оптимізаційному моделюванні); **теорії інформації** (для побудови складних концептуальних моделей); **нейронних мереж** (найчастіше використовуються для перспективних розрахунків та прогнозів, коли, знаючи тренд розвитку процесу та маючи адекватні вхідні параметри, потрібно прорахувати поліваріантні сценарії розвитку системи) та цілий ряд інших методів.

6. За **ступенем адекватності моделі і реальної системи** – **загальні (теоретичні)** і **часткові (реалістичні)**. **Загальні** моделі описують структуру



та динаміку екосистеми, як правило, концептуально, не вдаючись у деталі. Часткові моделі служать для дослідження або частини складної системи (певних найважливіших факторів, що впливають на систему), або поведінки системи в конкретному випадку, або максимальної точної оцінки конкретної екологічної системи, що як правило є територіально прив'язаною.

#### **4. Методи одержання та використання математичних моделей**

Одержання моделей у загальному випадку – процедура неформалізована. Основні рішення, що стосуються вибору виду математичних співвідношень, характеру використовуваних перемінних і параметрів, приймає проектувальник. У той же ж час такі операції, як розрахунок чисельних значень параметрів моделі, визначення областей адекватності й інші, алгоритмізовані та вирішуються на ЕОМ. Алгоритм рішення задачі на ЕОМ зв'язаний з вибором того чи іншого чисельного методу.

Методи одержання функціональних моделей елементів поділяють на теоретичні й експериментальні. **Теоретичні** методи засновані на вивченні фізичних закономірностей процесів, що протікають в об'єкті, відповідному їх математичному опису, обґрунтуванні і прийнятті припущень, що спрощують виконання необхідних викладок, і приведенні результату до прийнятої форми представлення моделі.

**Експериментальні** методи засновані на використанні зовнішніх проявів властивостей об'єкта, що фіксуються під час дослідження однотипних об'єктів або при проведенні цілеспрямованих експериментів.

В загальному випадку при складанні математичної моделі від дослідника потрібно:

- вивчити властивості досліджуваного об'єкта;
- уміти відокремити головні властивості об'єкта від другорядних;
- оцінити прийняті допущення.

Область використання математичних моделей на сьогодні є надзвичайно широкою. Для того, аби оцінити чи спрогнозувати будь-яке явище, об'єкт, процес, необхідно мати чітке уявлення про його причини, область прояву, потенційні масштаби (граничні значення), тенденції прояву, комплекс факторів, що здійснюють на нього вплив. А результати навіть досить тонких експериментів далеко не завжди дозволяють відповісти на питання, які основні рушійні сили й механізми впливають на стан і розвиток тієї чи іншої природної системи. Такі механізми можуть бути визначені при розгляді функціонування екосистеми як результату взаємодії її складових елементів та зовнішніх факторів, що позначаються на стані середовища в якому взаємодіють ці системи. Усе це дозволяє зробити математичне моделювання.

Еволюція сучасної науки характеризується широким проникненням математичних методів у всі галузі знань, в т.ч. і в екологію. Така тенденція називається математизацією науки. Тому майбутнім фахівцям-екологам необхідно оволодіти хоча б основами методу математичного моделювання та навчитись застосовувати його на практиці.

## Лекція №2

### Системний підхід у моделюванні

#### План

1. Системний підхід у моделюванні
2. Основні принципи моделювання і прогнозування стану довкілля
3. Загальний алгоритм побудови моделі

#### 1. Системний підхід у моделюванні

Побудова та аналіз моделей здійснюється на основі системного підходу. За визначенням А.Д. Холла та Р.Е. Фейджина (1969), під **системою** розуміють множину об'єктів разом з відношеннями (зв'язками) між цими об'єктами та їх, атрибутами. **Об'єкти** – це окремі частини або компоненти системи, причому їх кількість може бути необмеженою і залежить від глибини диференціації системи. **Атрибути** – це властивості об'єктів. **Відношення (зв'язки)** – це ті властивості системи, що об'єднують її у єдине ціле.

Під **складом системи S** розуміють множину її елементів  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ , де  $n$  – число елементів

$$X = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\} \quad (1)$$

Ці елементи об'єднуються в єдине ціле (систему) певними відношеннями й зв'язками, які називаються **системоутворюючими**. Згідно з одним з основних законів екології, сформульованих М.Ф. Реймерсом (1989), *будь-яка природна система може розвиватися лише за умови використання матеріально-енергетичних та інформаційних можливостей навколишнього середовища; абсолютно ізольований саморозвиток неможливий*. Тому на досліджувану нами систему S теж впливають фактори зовнішніх систем, які можна умовно позначити множиною  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ .

В. І. Лаврик (2002) пропонує розглядати ці системи з позиції визначення міри інтенсивності взаємодії між ними та досліджуваною системою S, розуміючи множину V, що складається із кількості  $m$  зовнішніх систем, які перебувають в істотних (у певному розумінні) зв'язках із даною системою S, як **навколишнє середовище (довкілля)** і позначати символом (вектором) – V:

$$V = \{V_1, V_2, V_3, \dots, V_m\} \quad (2)$$

Множину відношень (зв'язків) між елементами системи та елементами системи і навколишнім середовищем тоді називають **структурою даної системи S** і позначають її:

$$\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_l \quad (3)$$

де  $l$  - кількість усіх зв'язків, що утворюють структуру системи S.

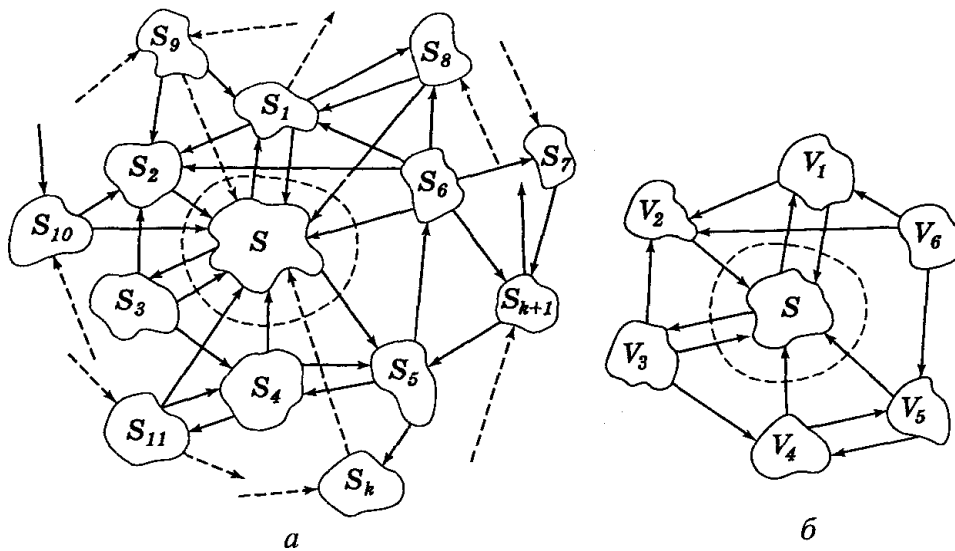


Рис. 1.1. Зв'язок системи досліджуваної системи  $S$  із навколишнім середовищем

Склад  $X$ , навколишнє середовище  $V$  і структура  $\Sigma$  можуть змінюватися в часі, що записується таким чином:

$$X = X(t) = \{X_1(t), X_2(t), X_3(t), \dots, X_n(t)\}$$

$$V = V(t) = \{V_1(t), V_2(t), V_3(t), \dots, V_m(t)\} \quad (4)$$

$$\Sigma = \Sigma(t) = \{\Sigma_1(t), \Sigma_2(t), \Sigma_3(t), \dots, \Sigma_l(t)\}.$$

**Функцією системи  $S$**  називається закон (сукупність правил)  $F(t)$  за яким залежно від зовнішніх факторів  $V(t)$  відбувається зміна в часі внутрішніх елементів  $X(t)$  і структури  $\Sigma(t)$ .

Це дало можливість В.Д. Федорову та Т.Г. Гільманову (1980) сформулювати поняття системи []: **системою  $S(t)$** , що функціонує в навколишньому середовищі  $V(t)$ , називається множина об'єктів, утворена із сукупності внутрішніх елементів  $X(t)$ , які зв'язані між собою і з навколишнім середовищем  $V(t)$  сукупністю зв'язків  $\Sigma(t)$ , що змінюються в часі відповідно до множини функцій  $F(t)$ :

$$S(t) = S(X, V, \Sigma, F), \quad (5)$$

Таким чином, виходячи з основних положень теорії систем, бачимо, що системний підхід до вивчення будь-яких реальних систем полягає [Лаврик]:

- у визначенні складових частин  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  і взаємозв'язаних із ними елементів (факторів) навколишнього середовища  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_m$ ;
- у вивченні структури внутрішніх зв'язків, а також зв'язків між елементами екосистеми і зовнішніми чинниками  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_l$ ;
- у знаходженні законів функціонування екосистеми  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_p$ , що визначають характер зміни (динаміку) основних компонентів



**Сутність методу моделювання** полягає в тому, що поряд із системою (оригіналом), позначимо її  $G^0 = G^0(V^0, X^0, \Sigma^0, F^0)$ , розглядається її модель, у якості якої виступає деяка інша система  $G = G(V, X, \Sigma, F)$ , що представляє собою образ (подобу) оригіналу при моделюючому відображенні  $f$ :

$$f : (G^0) \rightarrow G, \quad (10)$$

де дужки визначають, що  $f$  – частково визначене відображення, тобто не всі риси складу та структури оригіналу відображаються моделлю.

Моделююче відображення  $f$  доцільно представляти у виді композиції двох відображень – огрубляючого  $g$  та гомоморфного  $h$ :

$$g : (G^0) \rightarrow G^1, \quad (11)$$

$$h : G^1 \rightarrow G, \quad (12)$$

$$f = g \cdot h : (G^0) \rightarrow G, \quad (13)$$

де  $G^1$  – деяка підсистема системи  $G^0$ , тобто  $V^1 \subset V^0$ ,  $X^1 \subset X^0$  та  $\Sigma^1 \subset \Sigma^0$ .

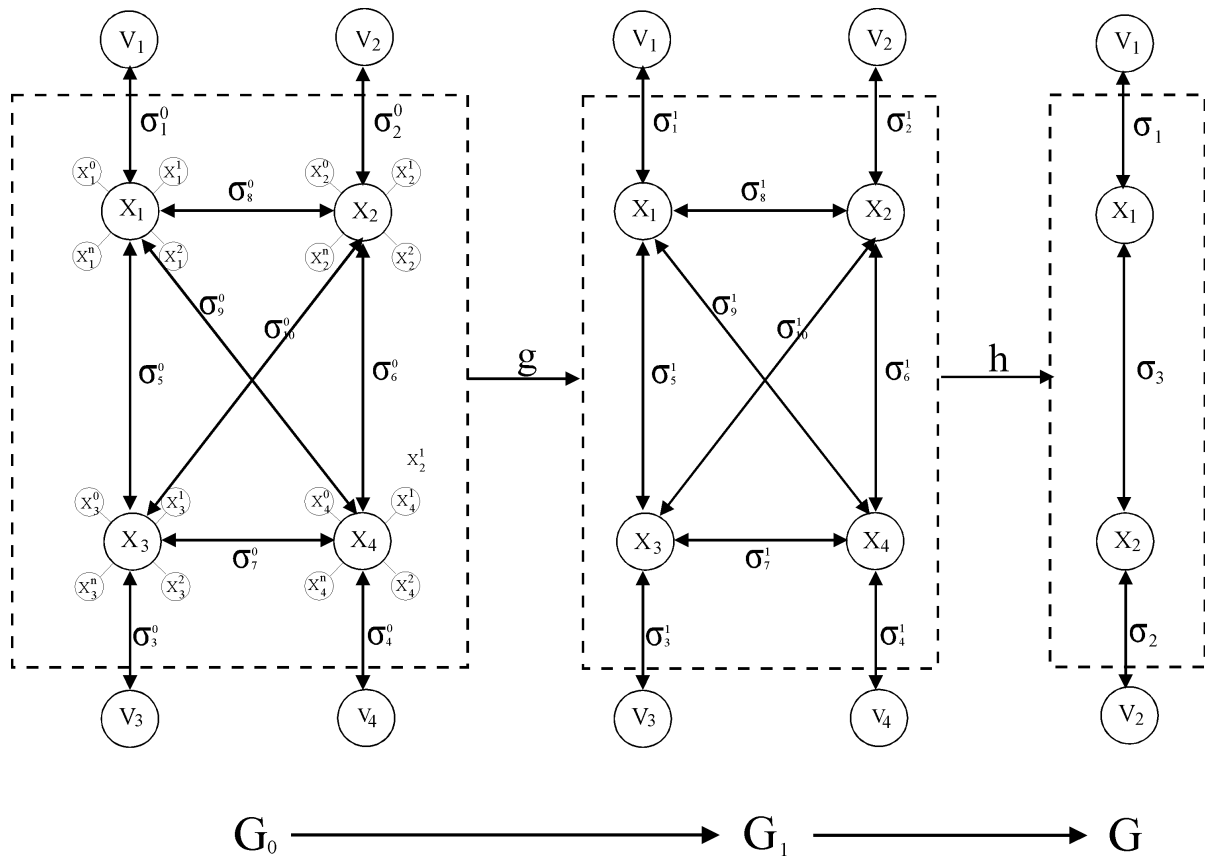


Рис. 2. Перехід від системи-оригіналу  $G^0$  до моделі  $G$ .

Коментар до рис. 2: спочатку огрубляюче відображення  $g$  виділяє в системі  $G_0$  її підсистему  $G_1$  з меншим числом елементів і зв'язків між ними, а потім відображення  $h$  гомоморфно переводить підсистему  $G_1$  в модель  $G$ .

Отже, процес моделювання, по суті, являє собою створення копії модельованого об'єкта із врахуванням потрібного ступеня абстрагування та генералізації, коли систему  $G_0$  представляють у вигляді системи  $G_1$  шляхом відображення (огрубіння), а потім дану систему зводять до системи  $G$ , яка більш-менш адекватно, хоч і доволі агреговано (огрублено) репрезентує початкову систему  $G_0$ . В залежності від характеру огрубіння й ступеня агрегування для того самого оригіналу можна одержати кілька різних моделей.

В основі моделювання лежить створення образів, які б максимально спрощено, хоч у той же ж час і максимально адекватно, відображали б стан модельованої системи. Ця властивість модельованого об'єкта перевіряється шляхом зворотного переходу від моделі до системи-оригіналу і називається **інтерпретацією**.

Таким чином, за допомогою моделювання в деякому наближенні, обумовленому ступенем близькості моделі до оригіналу, може бути вирішена задача встановлення функції досліджуваної складної системи.

В той же ж час процес моделювання є доволі суб'єктивним і параметри точності інтерпретації та адекватності в значній мірі залежать від кваліфікації спеціаліста, що здійснює побудову моделі та вибирає метод її побудови.

### 3. Загальний алгоритм побудови моделі

Для оцінки й моделювання складного і взаємопереплетеного комплексу всіх зв'язків компонентів системи використовують інтегральні показники стану системи. В загальному вигляді їх сукупність для досліджуваної нами системи можна позначити через  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Моделі, що побудовані на базі використання цих показників, називаються *інтегральними моделями*.

Інтегральну модель будь-якого компонента екосистеми можна представити у вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x, \bar{u}) \quad (14)$$

де  $x$  – інтегральний агрегований показник,  $\bar{u}$  – вектор характеристик зовнішніх впливів.

В загальному вигляді основні етапи побудови інтегральних моделей представлені на рис. 3 (за [Хомяков]):

#### **1. Визначення загальної структури моделі.**

*1.1. Виявлення компонентів.* На цьому етапі роботи аналізується склад системи, встановлюються основні компоненти, що мають значення для побудови перспективної моделі.

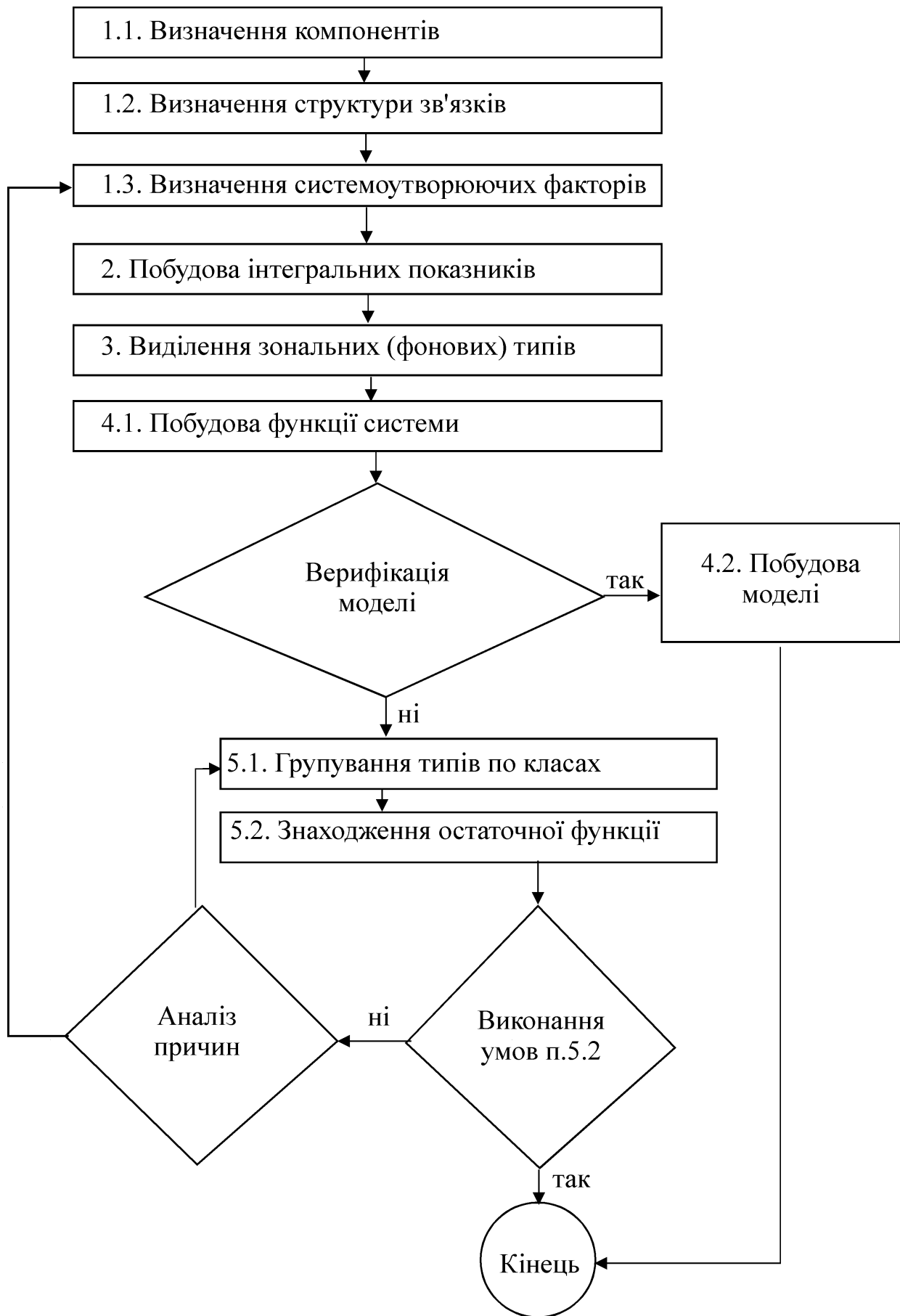


Рис.3. Загальний алгоритм побудови інтегральної моделі



**1.2. Встановлення факту наявності зв'язку між окремими компонентами й структури функціонування екосистеми.** На даному етапі аналізуються зв'язки між компонентами екосистем, вивчається ступінь та напрям їх впливу один на одного. Відбувається побудова первісної основи структури моделі.

**1.3. Виявлення системоутворюючих факторів і характеристик зовнішніх впливів.** Виділяються внутрішні фактори, які визначають функціонування системи як єдиного цілого, та зовнішні фактори, вплив яких суттєвий для даної системи. На попередніх етапах роботи поки не потрібні кількісні характеристики, виконання сформульованих задач можливо при використанні лише якісної інформації.

**2. Побудова інтегральних показників.** Це найважливіший етап роботи. При побудові інтегральних показників використовуються кількісні характеристики. Інтегральний показник – це кількісна оцінка системоутворюючого фактора. Найчастіше цей етап проводять у вигляді наукового аналізу статистичної інформації з використанням комп'ютерної техніки.

**3. Виділення зональних типів екосистем.** Згідно із законом географічної зональності для різних ландшафтів характерні закономірно змінювані комплекси природних умов. В екології має величезне значення їх виділення, оскільки комплекс природних умов певної території в значній мірі впливає на геохімічні та гідрохімічні характеристики ландшафтів, умови міграції забруднюючих речовин тощо. Також на основі аналізу зональних характеристик середовища, вводиться поняття “фонові ландшафти”, “фонові концентрації речовин” у ґрунті, поверхневих та підземних водах. А лише у порівнянні з фоновими (зональними) значеннями можна говорити про забруднення того чи іншого регіону певними поллютантами.

#### **4. Вибір типу моделі.**

**4.1. Побудова функцій  $F_{ij}$  та їх аналіз.** Дані функції являють собою залежності інтегрального показника від дії вхідних факторів досліджуваної системи чи зовнішніх систем. Аналіз їх вигляду дозволяє проводити вибір типу моделі.

**4.2. Побудова моделі типу (14).** Саме такий вигляд функції дозволяє говорити про її неперервність на всьому інтервалі. У випадку, якщо вигляд функції  $F_{ij}$  однаковий для всіх зон, існує можливість її інтерполяції на інтервали, де вона спочатку не визначена.

**5. Пошук іншого типу моделі.** Якщо неможливо побудувати модель типу (14), варто провести формалізацію динаміки даного компонента екосистеми. Для цього потрібно виконати наступні операції:

**5.1. Групування станів по класах.** Аналіз функції  $F_{ij}$ , у випадку, якщо неможливо її єдине представлення на всій області визначення, може свідчити на користь такої можливості в більш вузькому діапазоні, що охоплює якусь групу зональних типів, що доцільно згрупувати в один клас. Є підстави припустити, що на границях класів функція  $F_i$  може зазнавати розриву першого роду. Виходячи з фізичної суті задачі, швидше за все  $F$  існує й у проміжках між

класами, але на цих ділянках вона не є лінійною й абсолютна величина її похідних по  $u_i$ , може бути досить велика. Тому в умовах переходу з одного класу в інший, на тлі постійних коливань зовнішніх впливів, функцію  $F_{ij}$  важко визначити для цих ділянок, тобто  $F(u)$  не існує для прикордонних зон між класами. В той же ж час між станами, що входять в один клас,  $F$  завжди існує. Аналіз виду  $F$  у сусідніх зональних станах свідчить про існування досить пологої  $F$  між ними, що дає підстави об'єднати їх в один клас. У протилежному випадку, робиться висновок про віднесення розглянутих сусідніх станів до різних класів. Виділена на підставі аналізу виду  $F$  група зональних типів, що складає клас, повинна мати загальні риси функціонування для даного компонента середовища. Як критерій виділення групи типів можна взяти певну спільність режимів функціонування.

**5.2. Знаходження остаточної функції  $f_{ij}$ .** Спочатку визначається структура  $f_{ij}$ , встановлюється наявність динамічних зв'язків між системоутворюючими факторами. Потім оцінюється загальний вигляд відповідних залежностей. Це зображується у виді графіків, на яких подається асимптотика функцій, орієнтовне положення точок перегинів, тенденції (монотонність, зменшення, зростання), що допомагає визначити вигляд відповідних залежностей і виразити їх аналітично. Потім знаходять параметри функції  $f_{ij}$ .

Модель із знайденими  $f_{ij}$ , повинна відповідати наступним вимогам:

- адекватно імітувати перехід від одного класу станів до іншого, від одного зонального типу до іншого при відповідній зміні зовнішніх умов за часовий інтервал, що має один порядок величин з відомими даними про характерний час перебігу процесів-аналогів;
- володіти властивостями, що формалізовані виразом (14) у відповідних діапазонах зовнішніх впливів у межах кожного з зональних типів;
- правильно передавати тенденції зміни станів екосистем у деяких специфічних режимах, зв'язаних із свідомо аномальними зовнішніми впливами (зокрема, з антропогенними впливами).

Якщо після знаходження  $f_{ij}$  у результаті імітаційних експериментів з'ясовується, що ці вимоги не виконуються, є всі підстави припустити, що невірно вибрано структуру  $f_{ij}$ , або не враховані якісь важливі фактори або невірно виділені класи станів. Тому необхідно повернутися до більш раннього етапу побудови моделі.

Оцінка достовірності моделювання може бути здійснена шляхом аналізу результатів імітаційних експериментів на предмет виконання вимог, що викладені вище у даному пункті. Другий шлях демонстрації адекватності результатів моделювання полягає в традиційному порівнянні експериментальних даних і теоретично розрахованих результатів імітації якої-небудь ситуації, якщо останні представлені інтегральними показниками та допускають відповідну інтерпретацію.

## Лекція № 3

### Особливості екологічних систем та їх моделей

#### План

1. Складні еколого-техногенні системи та їх властивості
2. Особливості динаміки складних систем та їх формалізації
3. Моделі глобального розвитку

#### 1. Складні еколого-техногенні системи та їх властивості

Досі ми вели мову про перспективи застосування методів математичного моделювання для екосистем. В дійсності поняття об'єкта моделювання та прогнозування стану довкілля на сьогодні є суттєво складнішим. Воно враховує не лише структуру елементарної екосистеми (еком та екотоп), але й участь людини та людського суспільства у формуванні сучасних екосистем. Тобто об'єктом моделювання та прогнозування стану довкілля є природно-техногенні системи. В сучасній науці вживається багато синонімів цього поняття: природно-антропогенні системи, природно-антропогенні територіальні системи, нообіогеоценози, біотехноценози, територіально-виробничі комплекси, природно-промислові комплекси. Уживання того чи іншого терміну визначається специфікою конкретної галузі науки. Надалі для позначення даних систем ми вживатимемо термін техноекосистеми (ТЕС).

В розумінні сутності техноекосистем ми поділяємо погляди Б.А. Іванова та І.І. Медведєва (1989), які у свій час стали одними із засновників нової галузі екологічної науки – *інженерної екології*. Саме цей напрям екології, на нашу думку, найбільш адекватно підходить для розробки теоретичних та методичних підвалин моделювання та прогнозування стану довкілля. *Інженерна екологія* – це нова наукова дисципліна, яка займається вивченням взаємодії людського суспільства з природним середовищем у процесі суспільного виробництва. **Об'єктом дослідження** в інженерній екології є системи, що утворились і тривалий функціонують в результаті взаємодії конкретного виду суспільного виробництва з оточуючим його природним середовищем, тобто *техноекосистеми*. **Предметом дослідження** в інженерній екології є структура й функціонування даних природно-промислових систем (техноекосистем) [Іванов].

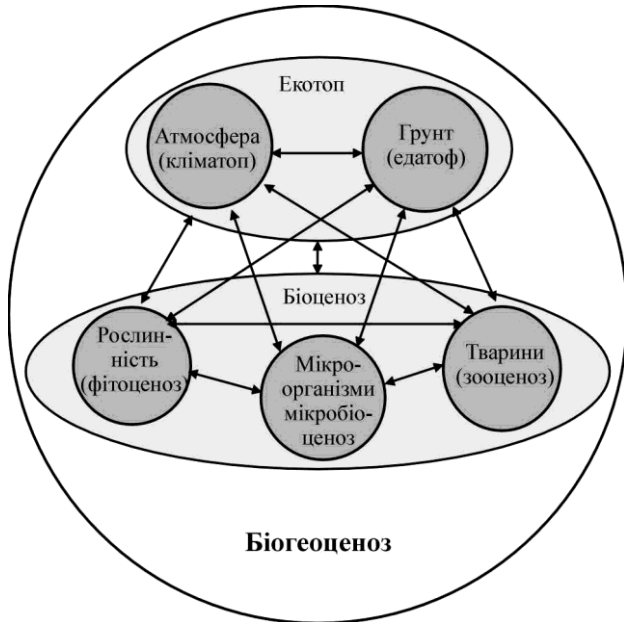
Будучи об'єктивною реальністю, техноекосистеми виділяються з метою використання цілісного (холістичного) комплексного системного підходу при вивченні взаємодії виробництва з природним середовищем. Основні принципи такої взаємодії були сформульовані С.С. Шварцем (1974):

- свій вплив на біосферу, на природу людина виявляє у формі взаємодії між людськими спільнотами та оточуючою живою та неживою (косною, за визначенням В.І. Вернадського) природою;
- характер взаємодії визначається рівнем розвитку продуктивних сил і

виробничих відносин, а також особливостями самого природного середовища;

- розвиток системи “суспільство-природа” полягає в неминучості прогресуючих антропогенних змін природного середовища.

А.



Б.

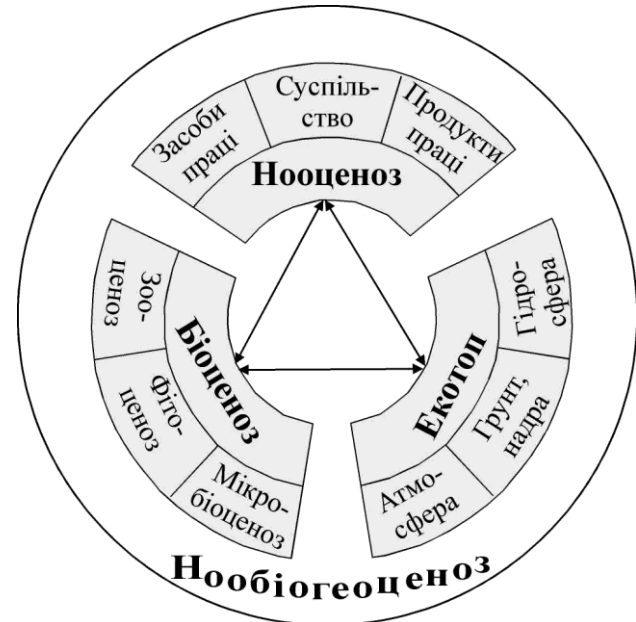


Рис. 1. Порівняльні структурні схеми матеріально-енергетичної одиниці біосфери – біогеоценозу (А) та ноосфери – нообіогеоценозу (Б)

На рис. 1 наведено структурні схеми біогеоценозу (екосистеми) та нообіогеоценозу (техноекосистеми). Як видно з цих схем, нообіогеоценоз відрізняється наявністю блоку нооценозу, який представлений людським суспільством, засобами та продуктами праці, тобто продуктивними силами та середовищем споживання. В основі функціонування техноекосистеми лежить 3 види зв'язків між її компонентами:

- обмін речовиною;
- обмін енергією;
- обмін інформацією.

**Обмін речовин** між компонентами ТЕС відбувається шляхом залучення певних технологічних і природних ресурсів у матеріальне виробництво, у процесі якого створюється продукт праці (продукція ТЕС). Ресурси, які не ввійшли до продукту праці повертаються в природне середовище. Сумарна кількість речовин, що втягуються у виробництво й продуктів праці в межах окремої ТЕС, залишається приблизно постійним. Це дає можливість скласти матеріальний баланс усього виробничого процесу, на його основі оцінити кількісні і якісні перетворення речовин і визначити місця їхнього виходу з технологічного процесу. Це дає стає можливість визначити шляхи подальшого поширення (розсіювання) викидів і відходів виробництва в екологічній системі, виявити їх роль у загальному кругообігу речовин і оцінити якісні й кількісні

зміни, що відбуваються в основних природних об'єктах у межах зони дії підприємства.

**Обмін енергією** між компонентами ТЕС відбувається шляхом перетворення природних джерел енергії в енергетичні ресурси виробництва, а також шляхом виділення в навколишнє середовище невикористаної у виробництві частки енергії.

**Обмін інформацією** дозволяє судити про стан окремих компонентів, коректувати процеси обміну речовиною й енергією. Інформація природного характеру виражається через властивості природних компонентів, а виробнича інформація отримується за допомогою використання автоматизованих систем контролю, прогнозу і керування процесами виробництва й станом природних об'єктів. Таким чином процеси обміну речовиною й енергією в ТЕС можуть контролюватися і цілеспрямовано керуватися за допомогою визначених інженерних заходів. Цим ТЕС відрізняються від природних систем. Можливість контролю й керування процесами обміну речовини й енергії між навколишнім природним середовищем і промисловим виробництвом є основою для підвищення ефективності використання й охорони природних ресурсів при будівництві й експлуатації промислових підприємств, а також для забезпечення заданого рівня якості природного середовища в зоні дії промислових, сільськогосподарських, комунальних, транспортних та інших підприємств.

З цих позицій ТЕС – це відносно стійка і самостійна структурна одиниця ноосфери, що включає в себе природні, промислові, сільськогосподарські й комунально-побутові об'єкти, що функціонують як єдине ціле на основі певного типу обміну речовиною, енергією та інформацією.

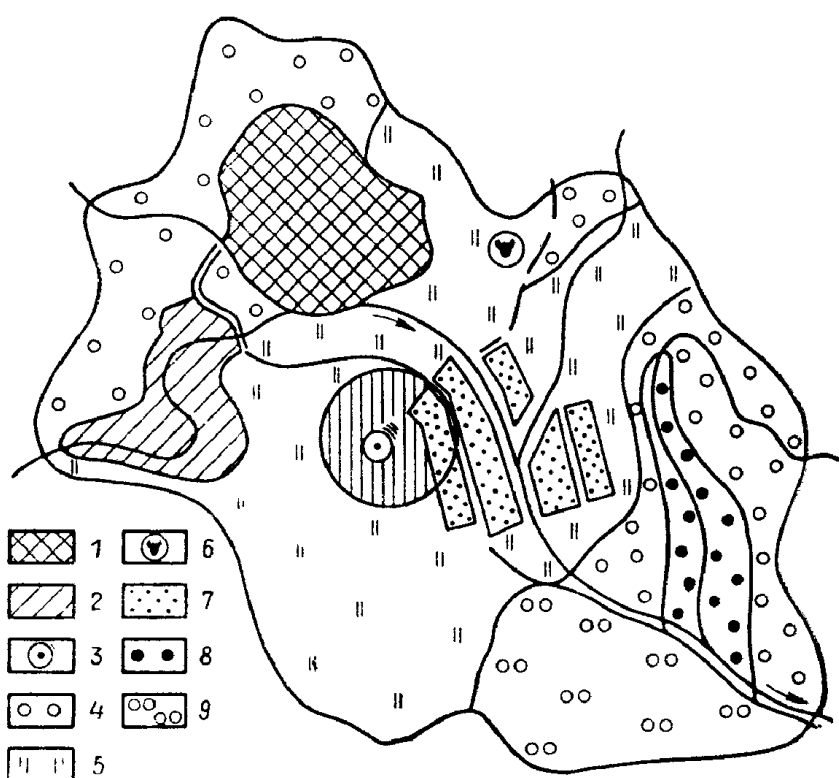
У загальному випадку під **структурою ТЕС** розуміють склад та взаємне розташування її компонентів і елементів, що визначають характер і напрямок функціонування системи. У залежності від призначення й цілей використання можна виділити наступні типи структури ТЕС: компонентна, ієрархічна, функціональна, морфологічна.

Під **компонентною структурою** ТЕС розуміють її однорідні за складом частини (рис. 2), що наділені певними функціональними властивостями. Вона розкриває склад і властивості ТЕС як ноосфери. структурної частини

**Ієрархічна структура** ТЕС з методологічної точки зору розкриває чотири ієрархії: ієрархію простору, часу, організації та наукових досліджень (табл. 1). Найвище положення у ієрархії систем займає надсистема, до якої входять системи, що складаються з елементів різних порядків. З цих ієрархій з позиції геоєкології найбільш важлива – **просторова структура**, або як її ще називають **територіальна структура**. Територіальна структура демонструє просторовий розподіл компонентів ТЕС, а також просторові межі їх впливу. Саме цим питанням присвячено один з найновіших розділ моделювання й прогнозування стану довкілля – геоінформаційне моделювання (так звані “ГІС-технології”). На рис. 3 зображено типовий приклад територіальної структури ТЕС, взятий з роботи [Іванов].

Таблиця 1. Ієрархічна структура ТЕС (за [Іванов]).

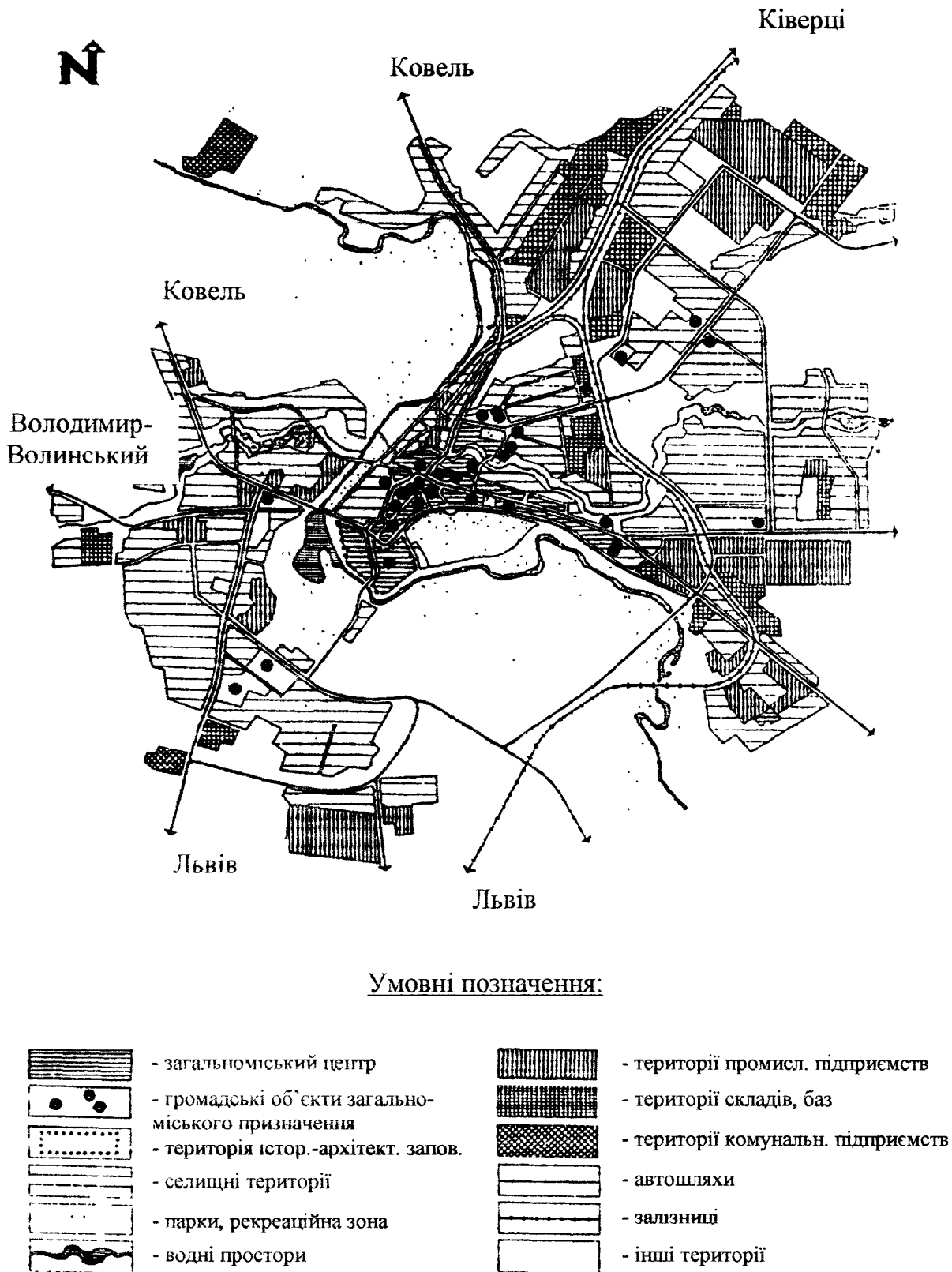
| Середовище            | Елементи  |                     |               |           |                       | Підсистеми                       |             | Системи               | Надсистеми     |                      |                                |
|-----------------------|-----------|---------------------|---------------|-----------|-----------------------|----------------------------------|-------------|-----------------------|----------------|----------------------|--------------------------------|
|                       | I         | II                  | III           | IV        | V                     | Компоненти                       | Угруповання |                       |                |                      |                                |
| Біотичне              | Гени      | Клітини             | Органи        | Організми | Популяції             | Фіто-<br>Зооце-<br>Мікробіоценоз | Біоценоз    | Біогеоценоз           | Нообіогеоценоз | Природно-промисловий | Територіально-виробничий (ТВК) |
| Абіотичне             | Ізотопи   | Елементи            | Речовини      | Сполуки   | Утворення (субстрати) | Літо-<br>Гідро-<br>Атмосфера     | Екотоп      |                       |                |                      |                                |
| Виробниче (соціальне) | Матеріали | Машини та механізми | Техмайданчики | Ділянки   | Виробництва           | Засоби праці                     | Нооценоз    | Антропоген (техноген) | Нообіогеоценоз | Природно-промисловий | Територіально-виробничий (ТВК) |
|                       | Особи     | Шари                | Категорії     | Групи     | Класи                 | Суспільство                      |             |                       |                |                      |                                |
|                       | Сировина  | Напівфабрикати      | Продукція     | Вироби    | Предмети споживання   | Продукти праці                   |             |                       |                |                      |                                |



1-3 – промислова ланка: 1 – добування корисних копалин, 2 – збагачення корисних копалин; 3 – теплова електроенергетика; 4-6 – аграрна ланка: 4 – лісівництво, 5 – рослинництво, 6 – тваринництво; 7-9 – комунально-побутова ланка: 7 – селітебні зони, 8 – рекреаційні угіддя, 9 – об'єкти ПЗФ

Рис. 3. Приклад територіальної структури ТЕС (за іванов)

**Функціональна структура** – розкриває специфіку утворення ТЕС та сукупність взаємодіючих структурних одиниць. Компоненти у функціональній структурі виділяються за призначенням та взаємовпливом. Прикладом може бути картосхема функціонального використання території м. Луцька (рис. 4)



*Рис. 4. Функціональна організація території м. Луцька (за В.І. Павловим, 1998)*

**Морфологічна структура** ТЕС – це просторове розміщення всіх компонентів нооценозу, біоценозу, екотопу у тісному взаємозв'язку та з врахуванням наслідків взаємодії. Вона являє собою, по-суті, структурне оформлення просторових і функціональних зв'язків та відношень між джерелами впливу й об'єктами, що зазнають впливу і змінюються внаслідок цього. Морфологічна структура відображає зафіксований на конкретний момент часу стан, який визначається шляхом виявлення й опису екологічних змін, що відбулись внаслідок впливу виробництва на природне середовище.

Підсумовуючи, слід відмітити, що надалі ми розглядатимемо в якості об'єкта моделювання й прогнозування стану довкілля саме ТЕС. Адекватність ТЕС в даній якості не викликає на сьогодні жодних сумнівів, особливо чітко це видно, наприклад, при аналізі екологічного стану урбоєкосистем.

## 2. Особливості динаміки складних систем та їх формалізації

Окрім поняття структури, доволі важливим елементом та напрямком моделювання є динаміка ТЕС. З практичної точки зору найбільший інтерес викликають наступні параметри функціонування техногенно-екологічних систем:

- здатність до відтворення біомаси;
- формування запасів прісних вод;
- самоочищення від різноманітних поллютантів;
- здатність зберігати й відтворювати попередні властивості в широкому діапазоні зовнішніх впливів.

Вони зумовлюються сукупністю системних властивостей ТЕС, серед найважливішими є []:

- **Гомеостатичність** – здатність систем підтримувати рівень життєвих процесів. Механізм реалізації даної властивості досить складний. Адаптація до мінливих умов середовища відбувається як на рівні окремих організмів і популяцій, так і біоценозів у цілому. Вирішальне значення мають зміни видового складу, структури й режиму функціонування ценозів. Цей процес можна представити у вигляді послідовної зміни станів.
- **Цілісність** – тобто здатність системи, не дивлячись на висоту її ієрархічного рівня та ступінь складності, функціонувати як єдине ціле на основі взаємодії екотопу та біоценозу. Погоджена зміна біотичних та абіотичних елементів ТЕС досягається за рахунок дії системи зворотних зв'язків. З їхньою допомогою регулюються самі різні процеси, що забезпечує функціональну єдність і цілісність системи.
- **Структурність** – просторова неоднорідність і складність внутрішньої будови екосистем, що є наслідком комплексної взаємодії між елементами оточуючого середовища.
- **Складність функціонального середовища** суттєво впливає на



закономірності динаміки природних систем, що має складний і неоднозначний характер. Це зумовлюється різноманіттям факторів, що діють на екосистеми і тісним взаємозв'язком між їх елементами. Відповідні залежності є нелінійними, їхні параметри сильно змінюються при зміні функціональних станів системи.

В розумінні концепції динаміки складних еколого-техногенних систем ми вважаємо найцікавішою та найперспективнішою “геоситуаційну концепцію”, що була висунута А.М. Трофімовим та М.В. Панасюком (1984). Суть її полягає в тому, що екосистема поступово еволюціонує від однієї ситуації (стану) до іншої. У рамках концепції станів, динаміка системи представляється у виді дискретної послідовності режимів її функціонування. Кожний з них однозначно характеризується значеннями інтегральних показників стану елементів системи. Вигляд функції є строго індивідуальним, тому, що елементи системи розглядаються теж індивідуально. Такий підхід є цілком обґрунтованим, якщо врахувати розбіжності в характерних швидкостях процесів в один-три порядків і більш.

Концепція станів характеризує зміну режимів функціонування природних систем (у т.ч. і враховує наслідки антропогенного впливу на них). Тому вона є універсальним засобом для формального опису складних об'єктів, яким властива дискретність зміни функціональних режимів. Також вона дозволяє об'єктивно інтерпретувати найважливіші системоутворюючі фактори з допомогою інтегральних показників. В найбільш загальному випадку формалізацією поведінки складної системи може бути дискретна схема типу []:

**критерій → стан → вплив → відклик.**

### **3. Моделі глобального розвитку**

В умовах науково-технічної революції вплив людини на оточуюче її середовище набрав масштабів, які можна порівняти з природними процесами. Виникла реальна загроза незворотних негативних наслідків. Сучасні соціально-екологічні процеси взаємодії людини і навколишнього середовища настільки складні і масштабні, що не можна пасивно сподіватися на їхню стихійну адаптацію в бажаному напрямку. Виникає задача – вивчити дію усіх у сукупності факторів, що обумовлюють розвиток людства, знайти шлях свідомого керування цим розвитком.

У цих умовах важливим інструментом аналізу керування розвитком складних систем стають методи математичного моделювання. Методологічною базою комплексного дослідження найбільш важливих сторін розвитку людського суспільства є системний аналіз.

*Глобальні моделі Форрестера й Мідоуза.* Перша спроба формалізувати опис екологічних процесів була здійснена в 1971 р. американським дослідником Дж. Форрестером. У своїй книзі “Світова динаміка” Дж.Форрестер запропонував варіант моделі економічного розвитку світу, що містить лише два екологічних параметри: чисельність населення й забруднення середовища.

Модель дозволила оцінювати взаємний вплив цих параметрів, з одного боку, і темпів економічного розвитку – з іншого. Хоча, як писав сам Форрестер, основна задача його книги була чисто методична, а модель носила навчальний характер. Та роль його роботи в розвитку досліджень глобального характеру складно переоцінити. Уперше була продемонстрована принципова можливість об'єднати виробничі, соціальні й екологічні процеси однією формальною оцінкою. Через рік після “Світової динаміки” вийшла у світ книга “Межі росту”, написана групою вчених під керівництвом Д. Мідоуза. Модель Д. Мідоуза – “Світ-3” – являє собою систему нелінійних диференціальних рівнянь, що описують динаміку взаємодії таких секторів, як народонаселення, промисловість, сільське господарство, невідновлювані природні ресурси, забруднення середовища й ін. Метою цієї роботи було виявлення загальних якісних тенденцій процесу взаємозалежної зміни основних складових системи, аналіз чутливості результатів стосовно різних закладених у модель припущень.

Роботи Форрестера й Мідоуза викликали широкий відгук у світовій літературі. Принциповим недоліком математичних моделей “Світ-2” і “Світ-3” було те, що моделі не відбивали можливості свідомого впливу людини на процес розвитку. Але слід зазначити позитивне значення даних робіт. Уперше були системно проаналізовані деякі глобальні економічні, демографічні й екологічні процеси.

**Проект “Стратегія виживання” Месаровича-Пестеля.** Наступним етапом глобального моделювання стала реалізація проекту “Стратегія виживання”, який очолили М. Месарович (США) і Е. Пестель (ФРН). Критикуючи модель “Світ-3” як “механічну”, Месарович і Пестель висували задачу побудови “кібернетичної” моделі світу. Основні принципи її побудови можуть бути сформульовані в трьох тезах:

- модель, що відбиває складні процеси взаємодії людини з навколишнім середовищем, повинна ґрунтуватися на теорії багаторівневих ієрархічних систем;
- модель повинна бути керованою, тобто містити в собі процес прийняття рішень, що дозволяє врахувати можливість свідомого впливу людини на розвиток світової системи, для чого необхідно забезпечити роботу в діалоговому режимі між дослідником й ЕОМ;
- світ варто розглядати не як єдине однорідне ціле, а як систему взаємодіючих регіонів, що розрізняються рівнем розвитку, населеністю і т.д.

У моделі Месаровича-Пестеля (М-П-модель) усі країни світу, відповідно до їхніх соціально-економічних структур і рівнів розвитку, об'єднані в 10 регіонів; кожен регіон описується системою регіональних підмоделей, їхня структура – та сама для всіх регіонів, відмінність – у початкових даних і значеннях параметрів. Зв'язок регіонів здійснюється через міграцію населення, імпорт і експорт продукції.

**Латиноамериканська модель глобального розвитку.** У 1974 р. група аргентинських учених на чолі з професором А. Еррерою отримали попередні результати роботи над латиноамериканською моделлю глобального розвитку.

Передумовою виконання роботи (на відміну від моделі “Світ-3”) стала теза про те, що основною перешкодою на шляху гармонійного розвитку людства є нерівномірний розподіл багатств між різними країнами.

У моделі Еррери основною метою розвитку людського суспільства є досягнення задовільних умов життя всіма країнами світу, а не просто ріст матеріального споживання. Під задовільними умовами розуміються деякі досить високі рівні медичного обслуговування, освіти, забезпеченості харчуванням, житлом і т.д.

Існують й інші моделі глобального розвитку. Подібною проблематикою вже тривалий час займається Римський Клуб. В СРСР чи не найвідомішою моделлю була “Гея”, розроблена в АН СРСР науковим колективом під керівництвом акад. Н.Н. Моїсеєва. Також доволі відомими у своїх галузях є проекти та дослідження “Проблеми подвоєння населення світу”, проведені групою Х. Ліннемана в Амстердамському університеті; проект японської групи, під керівництвом Я. Кайа; модель “Відновлення міжнародного порядку”, представлена Дж. Тінбергеном і присвячена виробленню рекомендацій зі співробітництва розвинутих країн із країнами, що розвиваються; модель «Майбутнє світової економіки», представлена в ООН групою В. Леонтєва (США).

## Лекція № 4

### Елементарні математичні функції та їх застосування для моделювання та прогнозування стану довкілля

#### План

1. Загальне поняття про елементарні математичні функції
2. Властивості стандартних функцій та їх застосування

#### 1. Загальне поняття про елементарні математичні функції

Елементарні математичні функції (лінійні, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні тощо) дуже широко застосовуються при моделюванні та прогнозуванні стану довкілля. За допомогою властивостей цих функцій можна проаналізувати взаємозалежність та взаємообумовленість різних екологічних процесів, визначити ступінь впливу одного явища на інше, виділити певні явища та процеси, вплив яких суттєвий для техноекосистеми, а саме головне – задати в аналітичній формі саму модель, яка б відображала залежність зміни одного екологічного параметра середовища від зміни іншого. Тому то знання найважливіших математичних функцій є необхідною запорукою для розуміння сутності екологічних явищ та їх взаємозв'язків, а також для їх адекватного моделювання.

Поняття **функції** (функціональної залежності) є одним з основних математичних понять. Розглянемо дві множини чисел  $X$  і  $Y$ , які пов'язані між собою. Числа  $X$  та  $Y$  є змінними, тобто можуть набувати різних значень. Змінну, що викликає зміни у властивостях іншої або інших змінних називають **незалежною змінною**, а ту, яка зазнає цих змін, – **залежною змінною**. Якщо кожному елементу  $x$ , що належить множині  $X$  ( $x \in X$ ) за деяким законом поставлено у відповідність єдиний елемент  $y \in Y$ , то кажуть, що на множині  $X$  задано **функцію**  $f(x)$ . Тобто термін “функція” передбачає закон або правило, застосувавши який до аргументу  $x$ , отримає значення  $y$ . Записують це так:

$$y = f(x), x \in X.$$

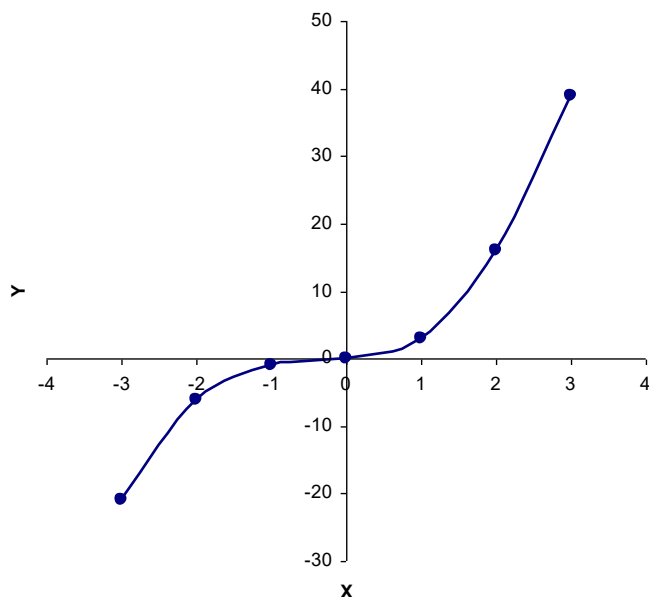
У такому разі  $x$  називають **аргументом функції**  $f$ , а  $y$  (або  $f(x)$ ) – **функцією змінної**  $x$ . Множину всіх  $X$  називають **областю визначення функції**  $f$ , а множину всіх  $y$ , для яких  $y = f(x)$ , – **областю значень**.

Функціональну залежність між змінними величинами  $x$  та  $y$  найчастіше задають одним із трьох способів:

- аналітичним;
- графічним;
- табличним.

**Аналітичний спосіб** передбачає завдання функції за допомогою формули.

Візьмемо, для прикладу, поліноміальну кубічну функцію:  $y = x^3 + x^2 + x$ .



**Графічний спосіб** передбачає використання графіка функції. Множину всіх точок  $M(x, y)$  координатної площини, для яких  $x$  – значення аргумента функції  $f$ , а  $y = f(x)$  – значення функції  $f$ , називають **графіком функції**. Задати функцію графічно означає зобразити її графік. Графік функції:  $y = x^3 + x^2 + x$  зображено на рис. 1.

**Рис. 1.** Графік функції  $y = x^3 + x^2 + x$

**Табличний спосіб** передбачає подання даних у таблиці, де значенням аргументу поставлені у відповідність значення функції. Таблиці застосовують у випадку скінченної множини визначення. Нижче задана таж сама функція  $y = x^3 + x^2 + x$  у табличному вигляді.

**Таблиця 1.** Залежність значень функції від значень аргументу для функції  $y = x^3 + x^2 + x$

| X  | Y   |
|----|-----|
| -3 | -21 |
| -2 | -6  |
| -1 | -1  |
| 0  | 0   |
| 1  | 3   |
| 2  | 16  |
| 3  | 39  |

## 2. Властивості стандартних функцій та їх застосування

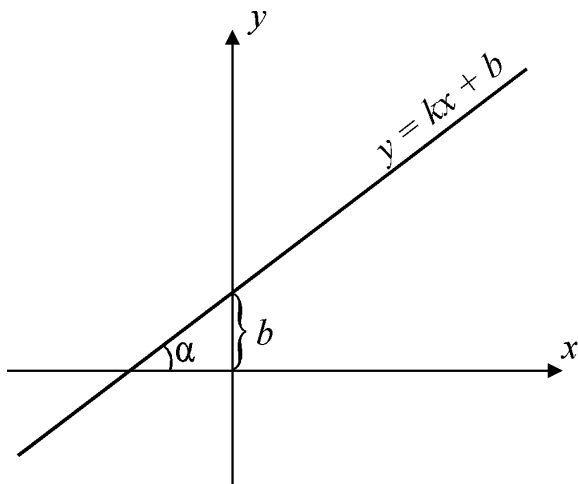
Серед елементарних математичних функцій, які застосовуються для моделювання та прогнозування стану довкілля найважливішими є: лінійні, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні. Коротко розглянемо їх.

**Лінійна функція** – найпростіша з функцій. Задається формулою:

$$y = kx + b \quad (1)$$

або рівнянням:

$$ax + by + c = 0 \quad (2)$$



Графіком цієї функції є пряма лінія (рис. 2). Числа  $k$ ,  $b$  (або  $a$ ,  $b$ ,  $c$  у рівнянні (2)) називаються **параметрами функції** або **коефіцієнтами рівняння функції**. Коефіцієнт  $k$  називається ще **кутовим коефіцієнтом** і характеризує нахил прямої лінії до осі абсцис. Математичний зміст цього коефіцієнта полягає у тому, що він характеризує нахил лінії графіка функції до осі абсцис і дорівнює:  $k = \operatorname{tg} \alpha$ .

**Рис. 2.** Графік лінійної функції  $y = kx + b$

Коефіцієнт  $b$  іноді ще називають **вільним членом рівняння**. Він показує довжину відрізка, який відсікає лінія графіку від початку координат. Отже, якщо рівняння функції не містить коефіцієнта  $b$ , то її графік пройде через початок координат.

**Застосування в екології.** Лінійна функція в екології застосовується не дуже часто. Справа в тому, що сутність дуже складних екологічних процесів та явищ, як правило, не можна звести до простої лінійної залежності. Найчастіше дана функція використовується для приблизного моделювання, визначення лінії тренду розвитку різноманітних процесів, оцінки пропорційної залежності. В.І. Лаврик (2002), наприклад, демонструє застосування даної функції для розрахунку залежності маси риби від їх віку []:

$$w = at$$

де  $w$  – маса риби,  $a$  – емпірично визначений коефіцієнт пропорційності, що залежить від виду риби,  $t$  – вік риби.

Аналогічно можна записати залежність між довжиною риби і її віком:

$$L = bt$$

де  $b$  – теж емпірично визначений коефіцієнт пропорційності, що залежить від виду риби.

З обох цих рівнянь можна виразити спільний член  $t$ . Отримаємо пропорцію, підставивши в яку емпіричні коефіцієнти  $a$  і  $b$ , і, наприклад, довжину риби, отримаємо її масу.

Розглянемо ще один приклад. Температура повітря зменшується з висотою. Причому таке зменшення становить  $0,98^\circ \text{C}$  на кожні 100 м підйому. Тому функція, що пов'язує температуру з висотою матиме кутовий коефіцієнт  $0,98$  і запишеться у вигляді:

$$t = 0.98x + t_0,$$

де  $x$  – висота підйому,  $t$  – температура повітря на висоті  $x$ ,  $t_0$  – початкова температура біля поверхні Землі.

Зауважимо, що така залежність справедлива лише тоді, коли підйом повітря відбувається за сухоадіабатичним законом. Тобто доти, доки повітря не стане насиченим вологою і не досягне точки роси. Далі атмосферна волога почне конденсуватись і зміна температури відбуватиметься вже за іншим законом (вологоадіабатичним).

Окремим випадком лінійної функції є **прямо пропорційна** залежність. При **прямо пропорційній** залежності зміна значення аргументу в кілька разів викличе зміну значення функції у стільки ж разів. Прямо пропорційну залежність можна записати у вигляді:

$$y = kx \quad (3)$$

Звідси:

$$y/x = k = const \quad (4)$$

Число  $k$  називають **коефіцієнтом пропорційності**. Даний коефіцієнт можна вивести із самого визначення функції (3-4). Нехай графік функції проходить через дві точки з координатами А ( $x_1; y_1$ ) і У ( $x_2; y_2$ ). Тоді:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (5)$$

Графік такої функції зображається прямою лінією, що проходить через початок координат (оскільки рівняння не містить вільного члена).

Якщо ж збільшення однієї величини у кілька разів призводить до відповідного зменшення іншої величини у стільки ж разів, то кажуть, що між цими величинами існує **обернено пропорційна** залежність. Оборнено пропорційну залежність можна записати у вигляді:

$$y = \frac{k}{x} \quad (6)$$

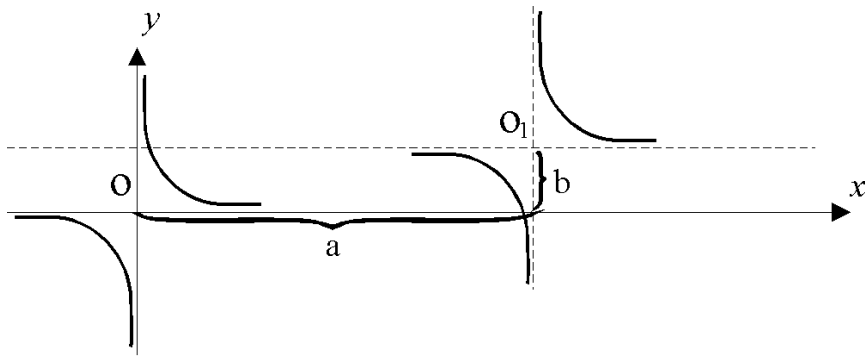
Тоді:

$$xy = k = const \quad (7)$$

В рівняннях (6-7)  $k$  – **коефіцієнт оберненої пропорційності**. В загальному випадку обернено пропорційна залежність виражається функцією:

$$y = \frac{k}{x-a} + b, \quad (8)$$

де  $k$ ,  $a$ ,  $b$  – постійні величини (параметри або коефіцієнти).



*Рис. 3. Графік функції обернено пропорційної залежності*

Як видно з рис. 3, якщо рівняння обернено пропорційної залежності не містить вище згадуваних коефіцієнтів, то її графік пройде через початок координат. Математично зміст цих коефіцієнтів полягає у тому, що їх модулі дорівнюють довжині відрізків, які відсікає графік функції відповідно на осі абсцис (a) та ординат (b).

**Застосування в екології.** Як правило, дана функція використовується для встановлення взаємозалежності між екологічними процесами, які або взаємодоповнюють один одного, або протиставляються один одному. Наприклад, формула для визначення коефіцієнта зволоження має вигляд:

$$k = A / B, \quad (9)$$

де A – кількість опадів на даній території (мм), B – випаровування (мм), k – коефіцієнт зволоження. Вважається, що якщо k близьке або більше за 1, то клімат – гумідний, а чим ближче його значення до 0, тим клімат аридніший.

Розглянемо дещо складніший випадок. Доволі часто дану залежність у моделюванні та прогнозуванні стану довкілля використовують для розрахунку взаємодії двох або кількох об'єктів методом потенціалів. Наприклад, взаємний вплив населених пунктів найбільш помітним чином виражається у вигляді матеріально-речовинних і людських потоків, інформаційних зв'язків. Обмежимося розглядом моделі, що враховує вплив лише людських потоків, а саме моделі потенціалу поля розселення (демографічного потенціалу), запропонованої Стюартом. Людські потоки, головним чином, залежать від розмірів населених пунктів (чисельності їхнього населення) і від відстаней між ними. В загальному вигляді дану модель можна представити рівнянням:

$$I_{i,j} = k \frac{H_i H_j}{R_{i,j}^a}, \quad (10)$$

де  $I_{i,j}$  – людський потік від  $i$ -го населеного пункту до  $j$ -го населеного пункту,  $k$  – емпірично визначений коефіцієнт пропорційності,  $H_i$  – чисельність населення  $i$ -го населеного пункту,  $H_j$  – чисельність населення  $j$ -го населеного пункту,  $R_{i,j}$  – відстань між населеними пунктами,  $a$  – показник степені, для більшості населених пунктів  $a = 2$ .

Обернено пропорційна залежність є окремим випадком дробово-лінійної



функції, яка розглядається нижче.

**Дробово-лінійна функція.** В загальному випадку дробово-лінійна функція записується у вигляді:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad (11)$$

де  $a, b, c$  і  $d$  – сталі параметри (коефіцієнти).

Оскільки знаменник не може дорівнювати 0, то функція  $y$  визначається для всіх значень  $x$ , крім точки  $x = -\frac{d}{c}$ . При  $c = 0$  дана функція перетворюється на лінійну. Графіком даної функції буде гіпербола, яка зміщена відносно осі абсцис на величину  $\frac{a}{c}$ , а осі ординат  $-\frac{d}{c}$ .

**Застосування в екології.** Основним критерієм самоочищення атмосфери є числове значення метеорологічного потенціалу самоочищення атмосфери (МПСОА). Воно розраховується за формулою:

$$K = \frac{T + B_1}{O + B_2}, \quad (12),$$

де  $K$  – числове значення МПСОА

$T$  – кількість днів із туманами

$O$  – кількість днів з опадами

$B_1$  - кількість днів з швидкістю вітру 0-1 м/с

$B_2$  - кількість днів з швидкістю вітру  $> 6$  м/с.

В свою чергу кількість днів із туманами та опадами можна розписати як функцію зволоження, стратифікації та циркуляції атмосфери, характеру підстилаючої поверхні. В такому вигляді дана функція більш наочно відповідатиме рівнянню (11). В таблиці відображені результати розрахунку величини  $K$  для метеостанцій м. Луцька і трьох найближчих метеостанцій (Ковель, Володимир-Волинський, Маневичі).

**Таблиця 1.** Потенціал самоочищення атмосфери для півдня Волинської області

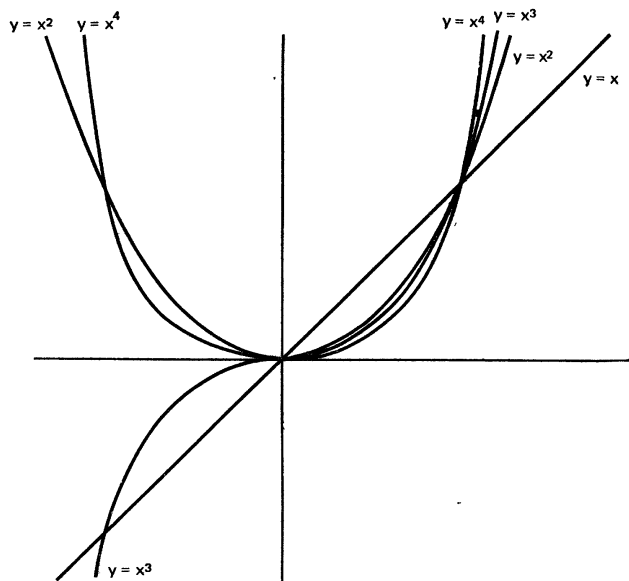
| № з/п | Показники                                  | Метеорологічні станції |        |           |          |
|-------|--|------------------------|--------|-----------|----------|
|       |  | Луцьк                  | Ковель | Вол.-Вол. | Маневичі |
| 1     | Кількість днів з туманами                  | 154                    | 18     | 27        | 27       |
| 2     | Кількість днів з швидкістю вітру 0-1 м/с   | 88                     | 65     | 44        | 36       |
| 3     | Кількість днів з швидкістю вітру $> 6$ м/с | 97                     | 5      | 61        | 6        |
| 4     | Кількість днів з опадами                   | 309                    | 142    | 158       | 148      |
| 5     | МПСОА                                      | 0,60                   | 0,57   | 0,34      | 0,41     |

**Степенева функція** в загальному випадку записується рівнянням:

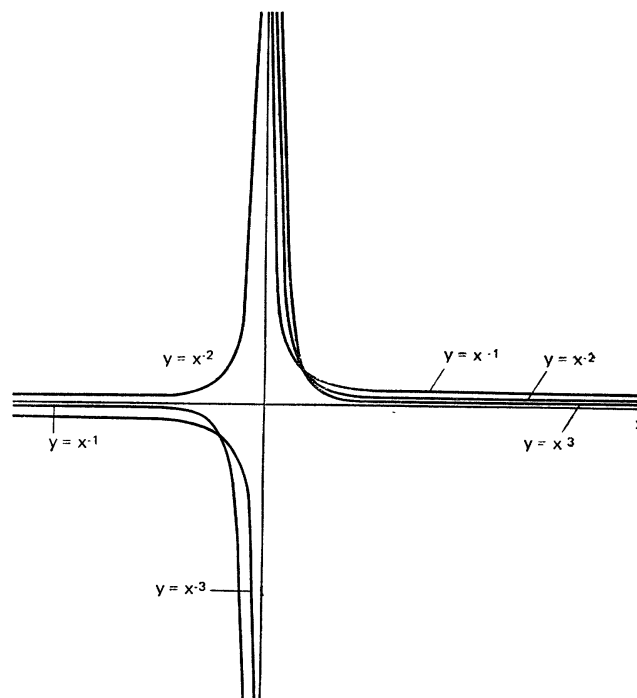
$$y = kx^n, \quad (13)$$

де  $k$  – сталий коефіцієнт, а  $n$  – показник степеня.

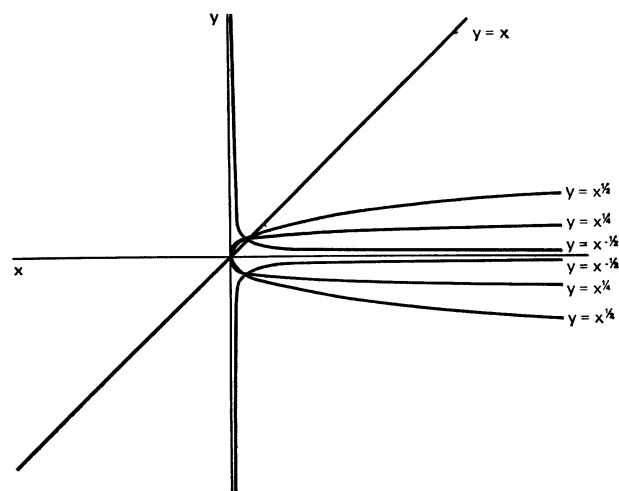
а.



б.



в.

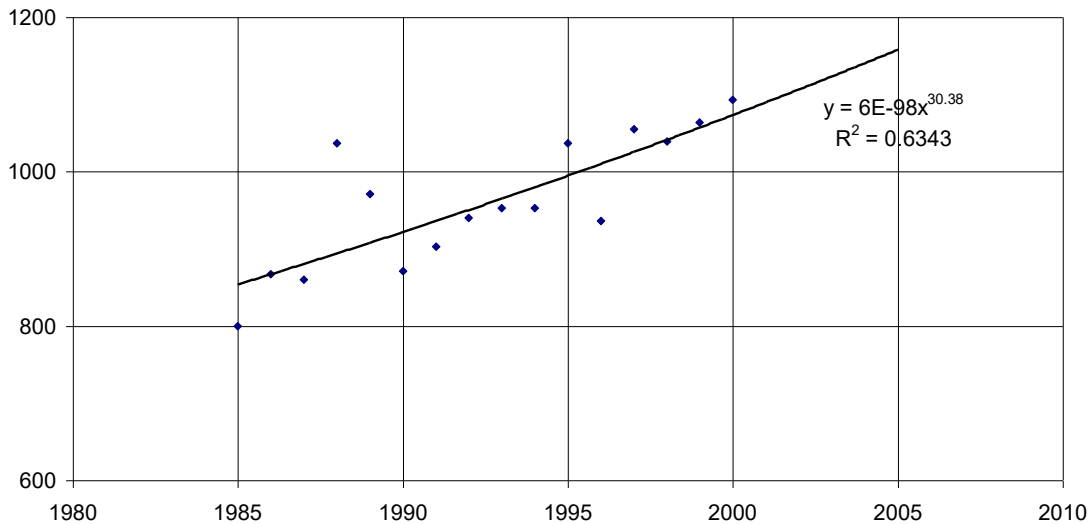


*Рис. 4. Загальний вигляд графіків степеневих функцій при різних значеннях  $n$*

Рис. 4.а.  $n \geq 1$   
 Рис. 4.б.  $n \leq -1$   
 Рис. 4.в.  $-1 \leq n \leq 1$

Отже, як видно з рис. 4, вигляд кривих степеневих функцій дуже різноманітний, він залежить від модуля та знаку показника степеня  $n$ , а також коефіцієнта  $k$ . Характерним для усіх цих графіків є те, що чим більше значення  $n$ , тим ближче лежать їх вітки до осі ординат.

**Застосування для моделювання та прогнозування стану довкілля.**  
 Степеневі функції застосовуються дуже широко, особливо якщо між досліджуваними явищами існує тісний однозначний зв'язок. Доволі часто вони адекватно описують суть екологічних явищ та процесів. Наприклад, на рис. 5 проілюстровано динаміку захворюваності населення м. Луцька (за []). На діаграмі також поміщено лінію тренду з прогнозом до 2005 р., апроксимовану степеневою функцією  $y = 6E - 98x^{30,38}$ .



**Рис. 5.** Динаміка захворюваності населення м. Луцька

Наприклад, для пшениці залежність між вмістом у ґрунті азоту та врожайністю записується у вигляді степеневі функції [Федоров]:

$$\varphi_i^* = 90 \cdot (1 - 10^{-0.122x_i}) \cdot 10^{-0.032x_i^2}, \quad (14)$$

де  $x_i$  – вміст азоту в ґрунті.

В гідрології та гідроекології подібні зв'язки мають місце при аналізі стоку річки з одиниці площі водозбору, віднесеної до всієї площі басейну. Так, наприклад, при аналізі кривих середньобогаторічного паводкового стоку для р. Лінмузт *Dobbie* та *Wolf* (1953) встановили дану залежність у вигляді:

$$R = 3350 A^{-0.5}, \quad (15)$$

де  $R$  – стік в  $\text{м}^3$  з одиниці площі за одиницю часу,  $A$  – площа водозбору.

**Логарифмічна і показникова функції.** Логарифмічна функція у загальному випадку записується у вигляді:

$$y = \log_a x, \quad (16)$$

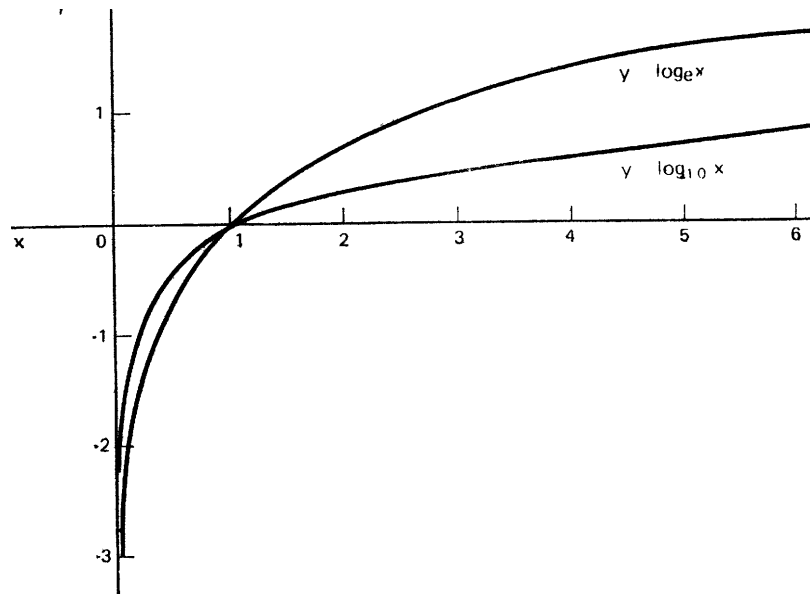
де  $a$  – основа логарифму. Якщо в логарифмічній функції за основу логарифму взяти число  $e = 2,71828$  (ірраціональне число), то така функція називається **натуральним логарифмом** і записується так:

$$y = \ln x \quad (17)$$

а якщо за основу взяти число 10, то відповідно – **десятковим логарифмом**:

$$y = \lg x \quad (18)$$

Як видно з рис. 6, логарифм одиниці за будь-якою основою дорівнює 0, тому всі криві виду  $y = \log_a x$  пересікаються в точці (1;0).

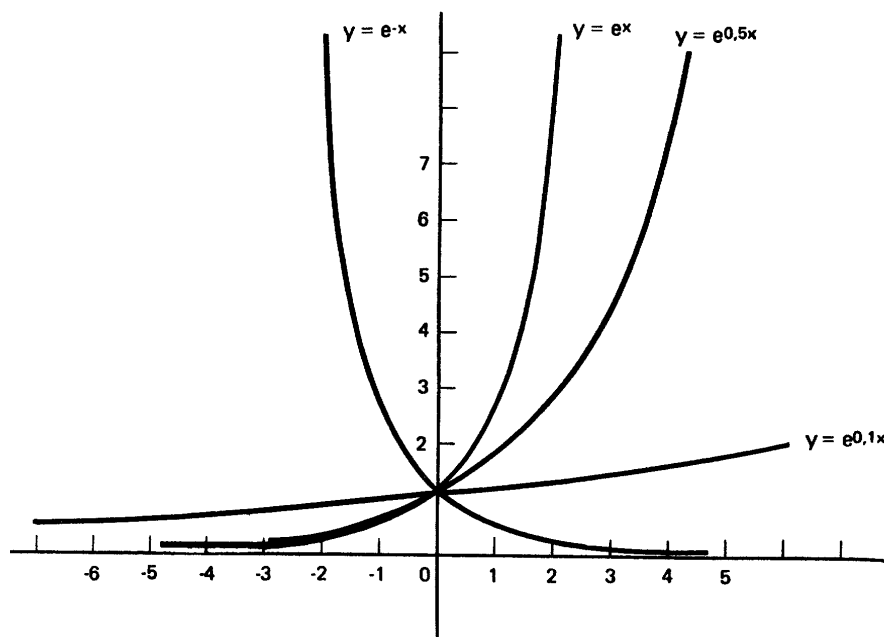


*Рис. 6. Загальний вигляд графіків логарифмічних функцій*

Звертаючись до функції  $y = \log_e x$  (або  $y = \ln x$ ) ми тим самим розглядаємо функцію  $x = e^y$ . Тому **показникова** функція (рис. 7):

$$y = e^x \quad (19)$$

є теж саме, що й функція  $x = \ln y$ .



*Рис. 7. Загальний вигляд графіків показникових функцій*

Графік функції  $y = e^x$  аналогічний графіку логарифмічної функції (рис. 6) за виключенням двох моментів: він наближається до осі  $Ox$  при  $x \rightarrow -\infty$

і у ніколи не буває менше нуля. Його ще називають іноді *експонентою*. Графік функції  $y = e^{-x}$  є дзеркальним відображенням графіка функції  $y = e^x$  відносно осі  $y$ . Очевидно, що форма графіка буде тим пологішою, чим менший коефіцієнт буде стояти перед  $x$  у показнику степеня. Це добре видно на рис. 7 (графік функції  $y = e^{0,1x}$ ).

**Застосування для моделювання та прогнозування стану довкілля.** Логарифмічні та показникові функції застосовуються дуже широко. Наприклад, варіацію щільності населення усередині площі міста досліджував фахівець із математичної статистики К. Кларк. Він застосував просту теоретичну показникову функцію (20) для опису залежності між  $\Pi$  і  $l$ :

$$F(\Pi) = e^{-\gamma l}, \quad (20)$$

де  $F(\Pi)$  – теоретична щільність (частота) населення в даній точці міста;  $l$  – відстань у кілометрах від центра міста (за центр міста приймається уявне коло з максимальною щільністю населення);  $\Pi$  і  $\gamma$  – емпіричним шляхом розраховані коефіцієнти для кожного окремого міста. Наприклад, для Неаполя  $\Pi = 78,8$ , а  $\gamma = 0,598$ . Тоді теоретичну щільність можна обчислити за формулою (21):

$$F(\Pi) = 78,8e^{-0,598l} \quad (21)$$

Інший приклад. Для розрахунку умов та наслідків забруднення річок у результаті скиду забруднених стічних вод крім власне розрахунку забруднення важливе значення має моделювання умов руху води в річці (швидкості, гідродинамічного потенціалу, модуля стоку, витрати води і т.д.), умов перемішування (турбулентності чи ламінарності потоку) тощо. Тому виникає важливе завдання моделювання поздовжнього профілю річки. Вперше це було виконано англійським вченим Дж. Гріном (1935) для р. Мол [самнер]. Він зв'язав криву загального виду з висотними відмітками базису ерозії в минулому, що представлені залишками терас у нижній частині долини, і отримав таку залежність:

$$y = a - k \log a (p - x), \quad (22)$$

де  $y$  – абсолютні відмітки висоти над рівнем моря;  $x$  – відстань від гирла річки,  $p$  – загальна протяжність річки;  $a$  і  $k$  – емпірично розраховані коефіцієнти, які для р. Мол становлять відповідно 241,5 і 65. Підставивши їх у формулу (22) отримаємо:

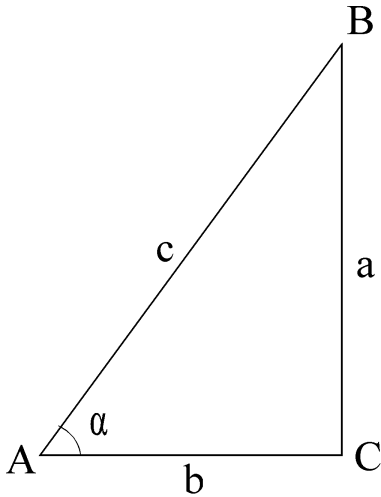
$$y = 241,5 - 65 \log a (p - x), \quad (23)$$

Для швидкості розмноження бактерій справедлива така залежність [лаврик]:

$$N = N_0 e^{rt} \quad (24)$$

де  $N$  – кількість бактерій у будь-який час  $t$ ;  $N_0$  – початкова кількість бактерій у момент часу  $t = 0$ ;  $r$  – константа швидкості розмноження бактерій, що визначається експериментально.

**Тригонометричні функції.** Тригонометричні функції дозволяють виразити прямокутні координати  $(x; y)$  через полярні координати  $(r; \alpha)$ . Вони виражають взаємозалежності між довжиною сторін та градусною мірою кутів прямокутного трикутника (рис. 8).



**Рис. 8.** Типовий прямокутний трикутник:

- $a$  – протилежний катет;
- $b$  – прилеглий катет;
- $c$  – гіпотенуза.

З рис. 8 можна дати визначення тригонометричних функцій кута  $\alpha$ :

**синусом кута  $\alpha$**  називається відношення протилежного катета до гіпотенузи:

$$\sin \alpha = a / c; \quad (25)$$

**косинусом кута  $\alpha$**  називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи:

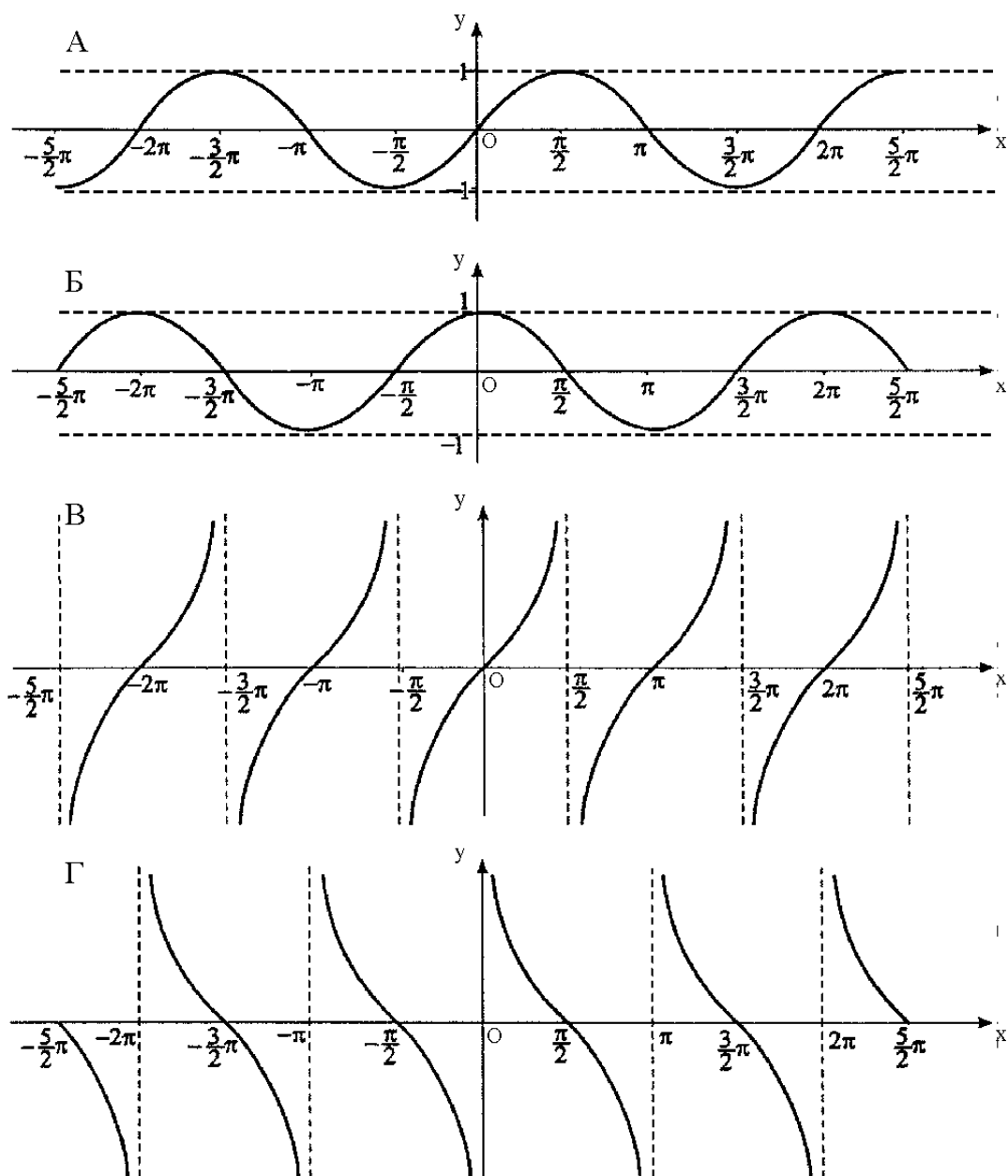
$$\cos \alpha = b / c; \quad (26)$$

**тангенсом кута  $\alpha$**  називається відношення протилежного катета до прилеглого катета:

$$\operatorname{tg} \alpha = a / b; \quad (27)$$

**котангенсом кута  $\alpha$**  називається відношення прилеглого катета до протилежного:

$$\operatorname{ctg} \alpha = b / a. \quad (28)$$



**Рис. 9.** Графіки тригонометричних функцій:

$A - y = \sin x; B - y = \cos x; B - y = \tan x; Г - y = \cot x$

**Таблиця 2.** Значення тригонометричних функцій для певних значень кутів

| y     | $\alpha, ^\circ$ |                      |                      |                      |              |     |              |     |
|-------|------------------|----------------------|----------------------|----------------------|--------------|-----|--------------|-----|
|       | 0                | 30                   | 45                   | 60                   | 90           | 180 | 270          | 360 |
| sin x | 0                | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1            | 0   | -1           | 0   |
| cos x | 1                | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0            | -1  | 0            | 1   |
| tg x  | 0                | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | $\pm \infty$ | 0   | $\pm \infty$ | 0   |

|       |          |            |   |                      |   |              |   |              |
|-------|----------|------------|---|----------------------|---|--------------|---|--------------|
| ctg x | $\infty$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $\pm \infty$ | 0 | $\pm \infty$ |
|-------|----------|------------|---|----------------------|---|--------------|---|--------------|

На рис. 9 зображені графіки тригонометричних функцій. Для графіків  $\sin x$  та  $\cos x$  значення функцій знаходяться в інтервалі  $(-1;1)$ . Тому на графіках через точки з ординатами  $y = -1$  та  $y = 1$  проведені **асимптоти**, тобто лінії, що обмежують область значень функції. Асимптотами для графіків функцій  $tg x$  і  $ctg x$  будуть вертикальні лінії, для яких координата  $x$  кратна  $\pi$  (наприклад:  $-2\pi$ ;  $-\pi$ ;  $\pi$ ;  $2\pi$  і т.д.). Значення тригонометричних функцій основних кутів наведено в таблиці 2, знаки функцій у різних чвертях (квадрантах) – в таблиці 3.

**Таблиця 2.** Значення тригонометричних функцій у різних чвертях (квадрантах)

| Значення функцій | Чверті    |              |                |               |
|------------------|-----------|--------------|----------------|---------------|
|                  | I (0-90°) | II (90-180°) | III (180-270°) | IV (270-360°) |
| $\sin x$         | +         | -            | -              | +             |
| $\cos x$         | +         | +            | -              | -             |
| $tg x$           | +         | -            | +              | -             |
| $ctg x$          | +         | -            | +              | -             |

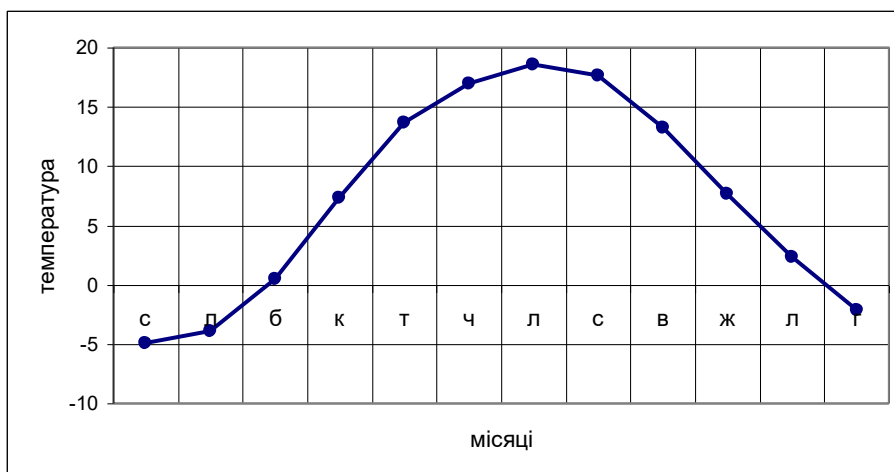
Між тригонометричними функціями існують певні залежності, що дозволяють виразити одну функцію через іншу. Виводяться вони з теореми Піфагора.

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}, \quad \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}, \quad 1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \quad (29)$$

**Застосування для моделювання та прогнозування стану довкілля.** Тригонометричні функції широко застосовуються у моделюванні. Це зумовлено їх спільною властивістю – **періодичністю**. Функцію  $y = f(x)$ ,  $x \in D$  називають **періодичною**, якщо існує таке число  $T > 0$ , що для всіх  $x \in D$  виконується рівність  $f(x + T) = f(x)$ . Найменше з таких чисел  $T$  називається основним періодом функції  $f(x)$ . Ясно що дане твердження справедливе для всіх  $(x + T) \in D$ , якщо  $x \in D$ . Тобто для побудови графіка періодичної функції достатньо його побудувати на відрізку довжиною, що дорівнює основному періоду, а далі здійснити паралельне перенесення побудованої частини графіка функції вздовж осі  $Ox$ . Наприклад, для функцій  $\sin x$  та  $\cos x$ , як видно з рис. 9, основний період дорівнює  $2\pi$ , а для функцій  $tg x$  і  $ctg x - \pi$ .

Строгі періодичні закономірності в природі спостерігаються дуже рідко. Зате багато явищ та процесів, які більш-менш близькі до періодичних. Їх називають квазіперіодичними. Прикладом періодичності в природі може бути зміна дня й ночі, пір року. Вони виникають внаслідок обертання Землі навколо своєї осі та навколо Сонця. Саме квазіперіодичний розподіл мають зміна припливів та відпливів, температури (рис. 10), вологості, хмарності, іноді напрямку вітру (наприклад, для мусонів, бризів), інтенсивність фотосинтезу, приросту біомаси, здатність природних систем до самоочищення та їх стійкість до антропогенного впливу. Як видно з рис. 10, графік річного ходу температури в помірних широтах дуже нагадує синусоїду, зміщену в додатну сторону по осі  $Ox$ .





*Рис. 10. Графік річного ходу температури повітря для м. Луцька*

Для прикладу інших застосувань періодичних функцій приведемо дослідження характеру, інтенсивності та зумовленості процесу меандрування (звивистості) річки. Уперше подібна модель була розроблена американським вченим Спейджтом (Speight, 1965) у вигляді:

$$x_{(k)} = \frac{1}{n} \left[ r_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \left\{ r_L \left( 1 + \cos \frac{\pi L}{m} \right) \cos \frac{\pi i L}{m} \right\} \right], \quad (30)$$

де  $x$  – інтенсивність меандрування,  $k$  – число коливань на одиницю відстані (частота),  $n$  – число змінених азимутів (взятих між точками, що рівномірно розподілені вздовж тальвегу річки),  $m$  – відстань меандри від витoku річки,  $L$  – довжина річки,  $r_L$  – коефіцієнт автокореляції.

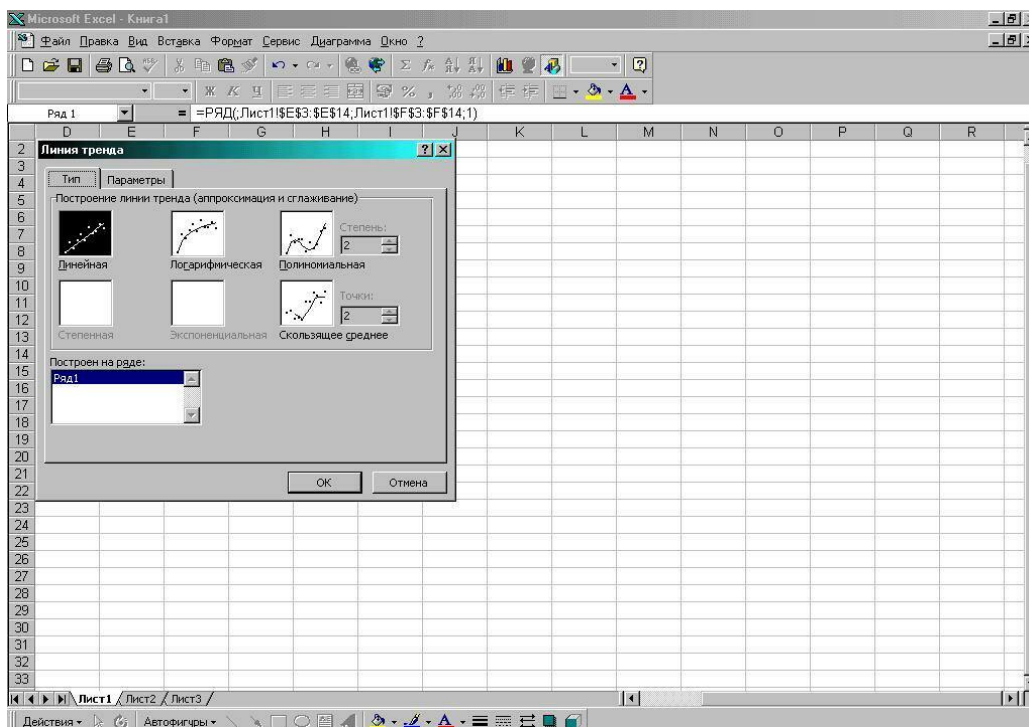
**Комбінації функцій.** Вищерозглянуті елементарні функції є одними із основних інструментів, із допомогою яких будуються математичні моделі зв'язку між екологічними процесами та явищами. Але, на жаль, із допомогою цих стандартних функцій не завжди вдається отримати задовольняючу нас відповідність. Значення же ж елементарних функцій полягає в тому, що вони дозволяють хоча б апроксимувати вигляд криволінійного зв'язку.

Якщо зв'язки мають коливальну форму, то можна спробувати співвіднести їх із тригонометричними чи оберненими тригонометричними функціями. Там, де ясно прослідковується тенденція росту градієнта з ростом  $x$ , можна спробувати застосувати або степеневі функції з  $n > 1$ , або експоненціальні функції. Аналогічно там, де спостерігається зменшення нахилу із збільшенням  $x$ , потрібно виходити з властивостей логарифмічних або степеневих функцій при  $0 < n < 1$ . В багатьох випадках степеневі функції утворюють послідовність степенів змінної  $x$ . Наприклад, функція  $y = x^3 + x^2 + x$ , графік якої зображений на рис. 1. Такі функції відносяться до **поліномів**. Поліноми, що містять  $x^2$  називаються квадратичними,  $x^3$  – кубічними,  $x^4$  – поліномами четвертого степеня і т.д. Як видно поліноми є дуже різноманітними, мають різні за формою графіки (це залежить від величини коефіцієнтів та

порядку степеня). Для поліномів у загальному випадку можна сформулювати два правила:

- графік будь-якого полінома проходить через початок координат тоді і лише тоді, коли в рівнянні відсутній постійний член (як, наприклад, для полінома, графік якого зображений на рис. 1);
- максимальна кількість стаціонарних точок функції *на одиницю* менша від показника степеня найвищого порядку: для квадратичного полінома така точка буде єдиною, для кубічного їх існуватиме дві і т.д. (стаціонарними точками називають точки графіка, в яких змінюється напрям кривої, вони важливі для підбору найбільш підходящої кривої).

На сьогодні задача апроксимувати залежність певною функцією дещо полегшується. Це стало можливим завдяки широкому використанню комп'ютерної техніки та пакетів прикладних програм.



*Рис. 11. Вікно стандартної функції “Побудова лінії тренду” табличного процесора Excel пакету Microsoft Office.*

На даному рисунку показано як із допомогою стандартної комп'ютерної програми *MS Excel*, яка є практично на кожному комп'ютері можна візуально підібрати вигляд апроксимуючої функції криволінійної залежності. Якщо жодна з підібраних стандартних функцій *MS Excel* ідеально не апроксимує досліджувану залежність, то для приблизної оцінки слід скористатись тією функцією, для якої характерне найвище значення коефіцієнта детермінації. Значення даного коефіцієнта можна помістити на графік функції скориставшись наступною вкладкою – “Параметри” вікна “Побудова лінії тренду” програми *MS Excel* (рис. 11).

## Лекція № 5

### Аналіз структури екологічних систем. Методи математичної статистики і теорії ймовірності у моделюванні та прогнозуванні стану довкілля

#### План

1. Основні поняття математичної статистики і теорії ймовірності
2. Аналіз структури та дослідження взаємозв'язків у екологічних системах

#### 1. Основні поняття математичної статистики і теорії ймовірності

При дослідженні екосистем чи техноекосистем з метою подальшого моделювання та прогнозування певних їх параметрів наважливішими аспектами є аналіз структури системи та аналіз її динаміки. Останній буде більш детально висвітлений в наступному параграфі. Щодо структури, то для її вивчення найчастіше застосовуються методи еколого-стохастичного моделювання, що ґрунтуються на математичному апараті математичної статистики і теорії ймовірності. В даному посібнику не має можливості повно та ґрунтовно викласти основи цих розділів математики, тому надалі ми зупинемось лише на висвітленні основних понять та найпоширеніших методів.

Величезний потік інформації про стан навколишнього природного середовища, який сьогодні приходить до обробляти екологічній науці, широке та інтенсивне запровадження кількісних методів, що диктується нагальною необхідністю вирішувати важливі прикладні задачі охорони природи, вимагають від сучасного спеціаліста-еколога оволодіння і застосування математико-статистичних методів. Статистичний аналіз суттєво розширює в наш час область застосування. Багата база емпірично отриманих даних про стан навколишнього природного середовища, результати фонових екологічних моніторингу дає можливість для більш точного кількісного та більш глибокого якісного вивчення явищ і об'єктів. Разом з тим подальші потреби розвитку екологічної науки та практики ставлять задачі дослідження складних явищ, сукупностей взаємопов'язаних об'єктів, систем. Все це призводить до необхідності виявлення і вивчення кількісних і якісних закономірностей, багато із яких мають статистичний характер.

Статистика – це галузь знань чи практичної діяльності, спрямована на збирання, групування, обробку та інтерпретацію даних. В перекладі із латині “*statistica*” – сума знань про державу. Вперше в сучасному розумінні термін був запроваджений Г. Ахенвалем (1719-1772). Предметом математичної статистики є статистична сукупність.

**Статистична сукупність** – це множина індивідуально відмінних об'єктів, що володіють спільними властивостями. Статистична сукупність може бути утворена за одним чи декількома ознаками. Кожний елемент цієї сукупності характеризується певним значенням цієї ознаки (властивості), що і є об'єктом вивчення. Окреме значення груповальної ознаки називається

**варіантою.** Число, що показує скільки разів дана варіанта спостерігалась в досліджуваній сукупності називається **частотою**. Якщо розділити частоти на загальну величину статистичної сукупності (кількість варіант у ряді), то отримуємо – **частоті**. Вони виражаються в долях одиниці, а їх сума дорівнює 1.

Ряд статистичних даних, який отримано в результаті їх зведення і групування за певною змінною кількісною чи якісною ознакою, називається **рядом розподілу**. Розрізняють ряди розподілу **атрибутивні** – утворені за змінними якісними ознаками та **варіаційні** – утворені за кількісними ознаками. Останні застосовуються більш широко. Для того, щоб отримати варіаційний ряд, слід розмістити варіанти у зростаючому чи спадному порядку і вказати відносно кожної її частоту. Тому варіаційний ряд найчастіше представляють у вигляді таблиці з двома колонками, в одній із яких – значення варіант упорядкованої сукупності, а в іншій – частоти (табл. 1). Варіаційні ряди, в свою чергу, поділяються на **дискретні** – побудовані за перервними значеннями варіант та **інтервальні** – побудовані, відповідно, за неперервними значеннями варіант. Останні можуть мати **однакові** або **неоднакові** інтервали.

**Таблиця 1.** Приклад представлення дискретного варіаційного ряду

|                                    |     |     |     |     |     |     |     |     |
|------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| рН, x                              | 6,8 | 6,9 | 7,0 | 7,1 | 7,2 | 7,3 | 7,4 | 7,5 |
| Частота, f                         | 2   | 1   | 1   | 7   | 11  | 5   | 9   | 4   |
| Накопичена частота, S <sub>f</sub> | 2   | 3   | 4   | 11  | 22  | 27  | 36  | 40  |

В таблиці 1 представлені результати визначення кислотності 40 проб ґрунту, відібраних в межах індустриальних зон м. Луцька (за [ ]). Перший і другий рядок таблиці являють собою стандартний варіаційний ряд, в якому навпроти кожного окремого значення рН наведено його частоту (f) і накопичену частоту (S<sub>f</sub>), яку ми дещо пізніше використаємо при побудові графіків розподілу.

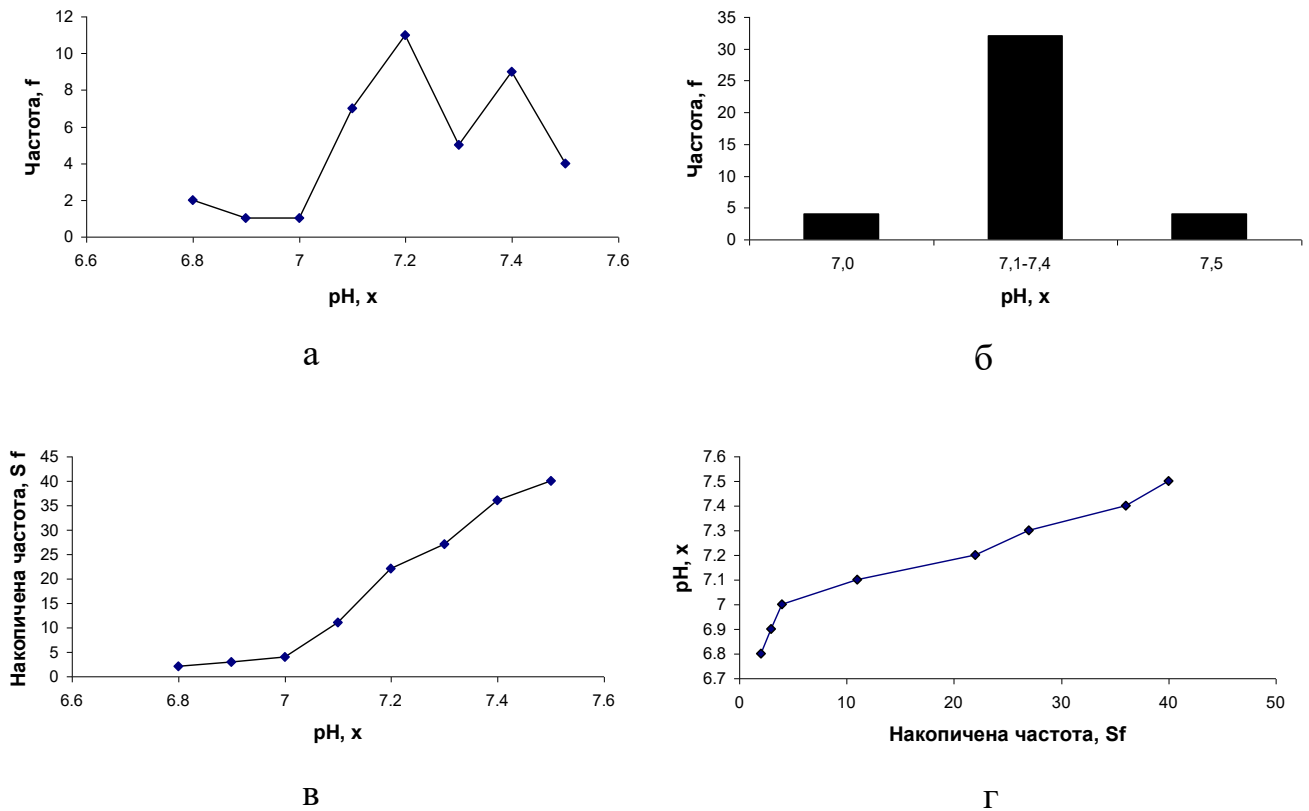
**Таблиця 2.** Приклад представлення інтервального варіаційного ряду

|                     |            |         |            |
|---------------------|------------|---------|------------|
| Межі інтервалів, рН | $\leq 7,0$ | 7,1-7,4 | $\geq 7,5$ |
| Частота, f          | 4          | 32      | 4          |

В таблиці 2 варіаційний ряд з попередньої таблиці розбитий на 3 інтервали: з кислотністю рН до 7,0; 7,1-7,4 і більше або рівно 7,5.

В інтервальному варіаційному ряду розрізняють верхню і нижню межу інтервалу (класу). В кожний інтервал включають варіанти, числові значення яких рівні або відповідно більші (менші) нижньої (верхньої) межі класу, згідно умов включення, які можуть бути строгими – з використанням знака =, або нестрогими – з використанням знаків  $\leq$  або  $\geq$ . Інтервальний варіаційний ряд можна представити не лише у вигляді таблиці, але й у вигляді графіка. Графік будується в прямокутній системі координат. На одній з осей (найчастіше – осі

абсцис) відкладають інтервали або серединні значення класів, а по іншій осі – частоти або частоти. В залежності від особливостей побудови (рис. 1) даний графік може бути представлений у вигляді: гістограми (для інтервального ряду), полігону (для дискретного ряду), кумуляти або огіви (для обох рядів).



**Рис. 1.** Приклади графічного відображення варіаційного ряду, наведеного в таблицях 1,2:

А – полігон, Б – гістограма, В – кумулята, Г – огіва.

Для того, щоб побудувати **полігон розподілу**, слід на осі абсцис відмічати точки, що відповідають серединам класів, на осі ординат – частоти (частоті), а потім сполучити отримані точки прямими відрізками. Отримана ліміна лінія і є **полігоном розподілу** (рис. 1.а).

**Гістограму** або **стовпчасту діаграму** можна отримати, якщо зобразити інтервальний ряд сукупністю прямокутників із спільною основою. Ширина кожного прямокутника пропорційна величині класу, а його висота – частоті або частоті класу. Гістограма для таблиці 2 зображена на рис. 1.б.

**Кумулята (кумулятивна крива)** – зображення в прямокутній системі координат варіаційного ряду з накопиченими частотами. Для її побудови по осі абсцис відкладається значення ознаки, а по осі ординат – накопичені частоти або частоті. Потім отримані точки сполучають ламаною лінією, яка і є **кумулятою** (рис. 1.в).

Якщо, навпаки, по осі ординат відкладати значення ознаки, а по осі абсцис – накопичені частоти або частоті, а потім отримані точки з'єднати

ламанною лінією, отримаємо *огіву* (рис. 1.г).

**Формування вибірки.** Для того, щоб отримати виключну інформацію про статистичну сукупність, потрібно повністю врахувати її склад. На практиці це виявляється надзвичайно складно, витратно, а іноді й просто неможливо. Наприклад, провести детальні геохімічні чи гідрохімічні дослідження великих територій та побудувати поле концентрації забруднюючих речовин, яке складається із нескінченної кількості точок. Тому аналізу піддається, як правило, не вся сукупність, а лише деяка її частина, висновки ж пізніше поширюються на всю сукупність. Сукупність, із якої відбираються варіанти для подальшого статистичного вивчення називається *генеральною сукупністю*. Відібрані із генеральної сукупності варіанти утворюють *вибірку* або *вибіркову сукупність*. Сутність вибіркового методу полягає в тому, що за властивостями вибірки (частини) можна судити про характеристики генеральної сукупності (цілого). Для того, щоб дане судження було правильним, необхідно, щоб вибірка була достатньо *репрезентативною*. З поняттям репрезентативності тісно пов'язане поняття *похибки вибірки* – розбіжності між показниками генеральної та вибіркової сукупності. Розрізняють *систематичну* і *випадкову* похибку вибірки. Перша виникає внаслідок порушення правил випадкового відбору елементів вибіркової сукупності, а інша – в результаті недостатньо рівномірного представлення у вибірковій сукупності різних категорій елементів генеральної сукупності. Якщо систематичних похибок можна уникнути, то випадкових похибок уникнути не вдається. Їх величина залежить від обсягу вибірки, способу її формування, характеру коливання (варіації) ознаки в генеральній сукупності.

Основними перевагами вибіркового методу є [фещур]:

- практичність;
- зниження реєстрації помилок;
- проведення статистичних досліджень, пов'язаних із знищенням зразків;
- зниження затрат на проведення дослідження та обробку його результатів;
- швидкість та оперативність дослідження.

Найчастіше розрізняють такі методи формування вибірових сукупностей []:

- простий випадковий відбір;
- систематичний (механічний) відбір;
- типовий (районований) відбір;
- серійний відбір.

**Простий випадковий відбір** здійснюється шляхом вибору варіант без попереднього розчленування генеральної сукупності на окремі групи (класи). Цей спосіб забезпечує хороший результат, якщо між варіантами генеральної сукупності немає різких відмінностей.

При *систематичному відборі* досліджують одиниці сукупності, які розташовані на однаковій відстані та у певній послідовності серед

впорядкованої генеральної сукупності. При цьому задається початок відбору, крок відліку та обсяг вибірки. В геоєкології систематична вибірка використовується при зчитуванні інформації із спеціалізованих карт: у вибірку заноситься значення картованого параметра у вузлових (систематичних) точках, наприклад, у вузлах координатної сітки.

При **типовій вибірці** формування вибіркової сукупності відбувається на основі попередньої структуризації генеральної сукупності і незалежного відбору елементів із кожної групи (типу). В геоєкології дана вибірка найчастіше називається районованою. Для отримання районованої вибірки за картографічним матеріалом потрібно досліджувану територію поділити на складові частини, потім одиниці вибірки відбираються по кожному району окремо. Число одиниць, що відбираються в вибірку по кожному району приймається пропорційним його площі.

При **серійній вибірці** випадковим чином вибирають групи (серії) одиниць із генеральної сукупності, які повністю досліджуються і їх статистичні властивості екстраполюються на всю сукупність.

Використання того чи іншого способу формування вибіркової сукупності залежить від можливостей спостереження та його мети. Надійніші результати отримують, комбінуючи різні способи формування вибірки.

**Попередня обробка даних.** Провівши вибір із генеральної сукупності, виміряють одну чи декілька характеристик елементів. Якщо характеристика якісна, то проводять якимось чином її класифікацію і приписують кожній окремій класифікаційній групі (класу) якесь ціле число, що називається **рангом**. З допомогою рангів класи впорядковуються і надалі стають придатними для кількісного аналізу. Така процедура називається **ранжуванням**.

**Аналіз варіаційного ряду** розподілу полягає у виявленні закономірностей зміни частот залежно від зміни кількісної ознаки, яка покладена в основу групування. При аналізі варіаційних рядів найбільш важливими є такі групи показників:

- характеристики центру розподілу;
- характеристики розміру варіації;
- характеристики форми розподілу.

**Центром розподілу** називається таке значення змінної ознаки, навколо якого групуються інші варіанти. До характеристик центру розподілу відносяться середня величина, мода і медіана.

**Середня величина** – це інформативна міра “центрального положення” досліджуваної змінної величини. Середнє значення показує типову, характерну величину ознаки, віднесено до одиниці статистичної сукупності. В середній величині нівелюються індивідуальні відмінності одиниць сукупності, які зумовлені дією випадкових факторів, і виявляються загальні закономірності. Виділяються наступні форми середньої величини: середня арифметична, середня гармонійна, середня геометрична, середня квадратична.

**Середня арифметична** – найпоширеніша форма середньої величини. Її використовують для характеристики рядів розподілу, сума окремих значень ознаки в яких утворює загальний обсяг ознаки:

$$\bar{x}_a = \frac{\sum x}{n}, \quad (1)$$

де  $\bar{x}_a$  – середня арифметична,  $x$  – значення ознаки,  $n$  – кількість варіант ряду.

**Середня гармонійна** є величиною, яка обернена до середньої арифметичної з обернених значень ознаки:

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}, \quad (2)$$

де  $\bar{x}_h$  – середня гармонійна. Середня гармонійна використовуються коли не задана чисельність сукупності і варіанти зважуються за значеннями ваг.

**Середня геометрична** використовується при аналізі рядів динаміки для розрахунку середніх коефіцієнтів (темтів) зміни. Її ще іноді називають динамічною середньою. Розраховується за формулою:

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}, \quad (3)$$

де  $\bar{x}_g$  – середня геометрична.

**Середню квадратичну** використовують при розрахунках абсолютних і відносних показників варіації ознаки:

$$\bar{x}_q = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}, \quad (4)$$

де  $\bar{x}_q$  – середня квадратична.

Кожна із цих середніх величин може розраховуватись також в зваженому вигляді. **Зважування середньої величини** полягає у домноженні чисельника та знаменника розрахункової формули середньої величини на частоту реалізації ознаки  $f$ , а для середньої геометричної – у піднесенні  $x$  під дробом степеня  $\sum f$  до степеня  $f_i$ , де  $i \in (1; n)$ .

Окрім середніх величин використовують ще поняття моди та медіани. **Модою** називають таке значення ознаки, яке найчастіше зустрічається у сукупності. Для дискретного варіаційного ряду модою є варіанта, що має найбільшу частоту або частість. Для інтервального варіаційного ряду з однаковою шириною інтервалів моду розраховують за формулою:

$$M_0 = \underline{x}_{M_0} + h \cdot \frac{f_{M_0} - f_{M_0-1}}{(f_{M_0} - f_{M_0-1}) + (f_{M_0} - f_{M_0+1})}, \quad (5)$$



де  $M_0$  – мода;  $x_{M_0}$  – нижня межа модального інтервалу;  $h$  – довжина інтервалу;  $f_{M_0}$ ,  $f_{M_0-1}$ ,  $f_{M_0+1}$  – частоти модального, передмодального і післямодального інтервалів, причому **модальним** називається інтервал, що характеризується найвищою частотою ознак варіант, які входять до нього.

Якщо довжина інтервалів варіаційного ряду неоднакова, то для розрахунку моди потрібно звести ряд до інтервального з однаковими інтервалами. Варіаційний ряд може мати одну чи декілька мод. Наявність декількох мод свідчить про неоднорідність сукупності, тобто про об'єднання в одній сукупності різноякісних одиниць. найлегше визначити величину моди графічно. Для цього слід сполучити на гістограмі розподілу праву верхню вершину прямокутника, що відповідає модальному інтервалу (має найбільшу частоту) і з правою вершиною прямокутника, що відповідає передмодальному інтервалу (попередній прямокутник), а ліву вершину модального сполучити із лівою вершиною післямодального прямокутника (рис. 2.а).

**Медіаною** називається середнє значення ознаки в ранжованому ряді варіант, тобто значення рівновіддалене від початку і кінця варіаційного ряду. Якщо кількість варіант непарна, то медіаною є варіанта із порядковим номером:

$$M_e = \frac{x_{\frac{n+1}{2}}}{2} \quad (6)$$

Якщо кількість варіант парна, то:

$$M_e = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} \quad (7)$$

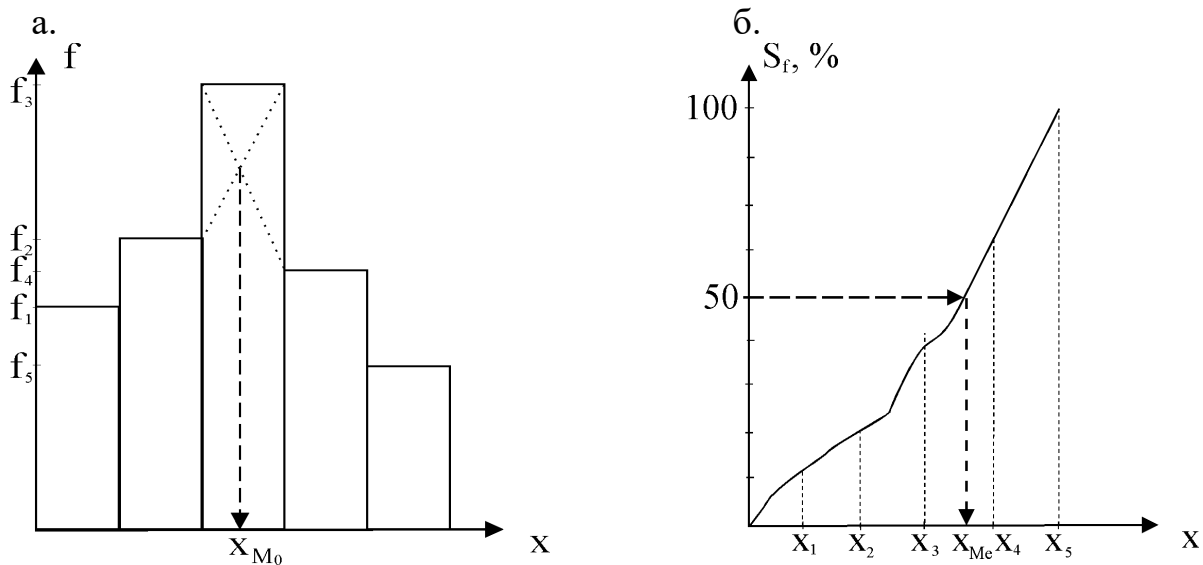
Для того, щоб знайти медіану інтервального ряду, потрібно спочатку знайти **медіанний інтервал**, тобто такий інтервал, для якого нагромаджена частота (або відносна частота) дорівнює півсумі всіх частот (відносних частот) або перевищує її. В загальному випадку значення медіани розраховується за формулою:

$$M_e = x_{M_e} + h_{M_e} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sum f - S_{M_e-1}}{f_{M_e}}, \quad (8)$$

де  $x_{M_e}$  – нижня межа медіанного інтервалу;  $h_{M_e}$  – довжина медіанного інтервалу;  $\sum f$  – сума частот (відносних частот);  $S_{M_e-1}$  – сума частот, нагромаджених перед медіанним інтервалом;  $f_{M_e}$  – частота медіанного інтервалу.

Найлегше визначити медіану графічним способом. Для цього слід на кумуляті (кривій накопичених частот) поділити останню ординату (суму накопичених частот) навпіл і через точку з половинною максимальною ординатою (тобто накопиченою частотою – 50%) провести пряму, паралельно

осі  $Ox$  до перетину з кумулятою. Абсциса перетину цієї прямої із кумулятою і є медіаною (рис. 2.б).



**Рис. 2.** Графічний спосіб визначення моди (а) і медіани (б) інтервального ряду

**Характеристика розміру варіації.** Середня величина є дуже інформативним показником. Але її типовість і надійність для всього ряду залежать від розміру і знаку відхилень пересічних варіант від середньої. Тому в статистиці важливим є не тільки розрахунок середньої, але й меж її довірчих інтервалів. Чим ці межі вужчі, тим краще середня характеризує загальний рівень ряду.

Відхилення значень варіант від середнього значення називається **варіацією ряду**. Показники варіації поділяються на **абсолютні** і **відносні**. Перші розраховуються за конкретними значеннями варіант. Серед абсолютних показників найважливішими є: розмах варіації, середнє арифметична відхилення і середнє квадратичне відхилення.

Розмах варіації являє собою максимальну амплітуду відхилення між максимальним і мінімальним значенням ряду:

$$R = x_{\max} - x_{\min}, \quad (9)$$

де  $R$  – розмах варіації,  $x_{\max}$  і  $x_{\min}$  – відповідно найбільше і найменше значення ряду. Використовується розмах варіації, як правило, тоді, коли важливо знати інтервал можливого коливання значень ряду. Однак розмах варіації не дуже надійний показник, оскільки він залежить від значень крайніх у варіаційному ряду варіант, які, як правило, найменш надійні. Тому більш показовою є міра розсіяння варіант навколо середнього значення. Такій умові відповідають середнє арифметичне та квадратичне відхилення.

**Середнє арифметичне відхилення** розраховується за формулою:

$$\bar{d} = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n} \quad (10)$$

або те ж саме у зваженій формі:

$$\bar{d} = \frac{\sum |x - \bar{x}| \cdot f}{\sum f}, \quad (11)$$

де  $f$  – частота відповідної варіанти. Середнє арифметичне відхилення дає певне уявлення про варіацію ознаки, але має один суттєвий недолік: іноді буває так, що відхилення від середнього значення ряду є значними за модулем, а середнє відхилення не дуже велике. Тому суттєво більшого поширення набув показник **середнього квадратичного відхилення**:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}, \quad (12)$$

або те ж саме у зваженій формі:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum f}}, \quad (13)$$

де  $f$  – частота відповідної варіанти. Хоча і середнє арифметичне відхилення ( $\bar{d}$ ) і середнє квадратичне відхилення ( $\sigma$ ) характеризують один і той же ж параметр – варіацію, але між ними існує деяка розбіжність у числових значеннях. Це пояснюється тим, що при піднесенні до квадрата питома вага малих відхилень зменшується, а великих збільшується. В багатьох джерелах [фещур, ] наводиться емпіричне відношення між цими величинами:

$$\sigma = 1,25 \bar{d} \quad (14)$$

**Відносних показників варіації** відомо багато. В спеціальній літературі [фещур,] вони розглянуті дуже широко, але ми зупинемось лише на двох із них – **коефіцієнтах варіації та дисперсії**, що є найбільш вживаними. **Коефіцієнт варіації** являє собою відношення середнього квадратичного відхилення до середнього арифметичного варіаційного ряду, виражене в процентах, і розраховується за формулою:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (15)$$

Коефіцієнт варіації використовується для оцінки однорідності сукупності. Якщо  $V \leq 33\%$ , сукупність є однорідною,  $\bar{x}$  – типовою і надійною характеристикою сукупності.

На основі вищесказаного ми підходимо до розуміння сутності **дисперсії**.

**Дисперсія** – це середня арифметична квадратів відхилень варіант від їх середньої арифметичної:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum f} \quad (16)$$

Як видно з формули (13), середнє квадратичне відхилення, по суті, є коренем квадратним із дисперсії. Дисперсія володіє властивістю мінімальності: дисперсія менша середньої арифметичної квадратів відхилень варіант від будь-якої сталої величини, що відрізняється від середньої арифметичної.

Якщо сукупність доволі велика і не дуже однорідна, то її, як правило, ділять на декілька груп. Тоді для оцінки впливу групоутворюючих ознак на загальну варіацію ознаки важливими є такі показники: загальна дисперсія, групова дисперсія, середня з групових дисперсій, міжгрупова дисперсія. **Загальна дисперсія** в такому випадку розраховуватиметься за формулою (16).

**Групова дисперсія** становитиме:

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum (x - \bar{x}_i)^2 \cdot f}{\sum f} \quad (17)$$

**середня з групових дисперсій:**

$$\bar{\sigma}_i^2 = \frac{\sum \sigma_i^2 \cdot f_i}{\sum f_i} \quad (18)$$

**а міжгрупова дисперсія:**

$$\delta_i^2 = \frac{\sum (\bar{x} - \bar{x}_i)^2 \cdot f_i}{\sum f_i} \quad (19)$$

де  $\bar{x}_i$  – середня для  $i$ -тої групи;  $\bar{x}$  – середня для всієї сукупності;  $f$  – частота реалізація явища;  $f_i$  – обсяг  $i$ -тої групи.

Якщо групові дисперсії не дорівнюють нулю, то значить в межах виділених груп ще залишилась варіація, зумовлена зовнішніми по відношенню до групувальних ознак. Така варіація оцінюється **залишковою дисперсією**. Міру впливу групувальної ознаки на утворення загальної дисперсії характеризує міжгрупова дисперсія. Тому **загальна дисперсія** дорівнює сумі середньої з внутрішньогрупових дисперсій і міжгрупової дисперсії:

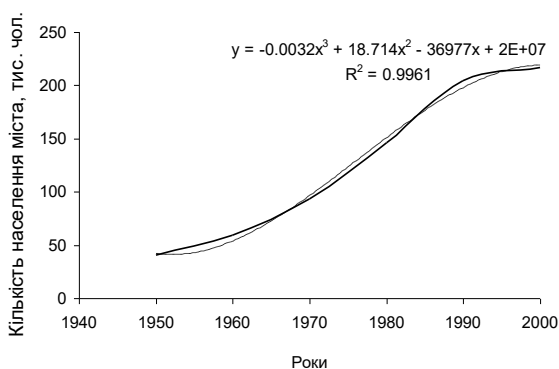
$$\sigma^2 = \bar{\sigma}_i^2 + \delta^2 \quad (20)$$

Відношення міжгрупової дисперсії до загальної дисперсії називають **коефіцієнтом детермінації**:

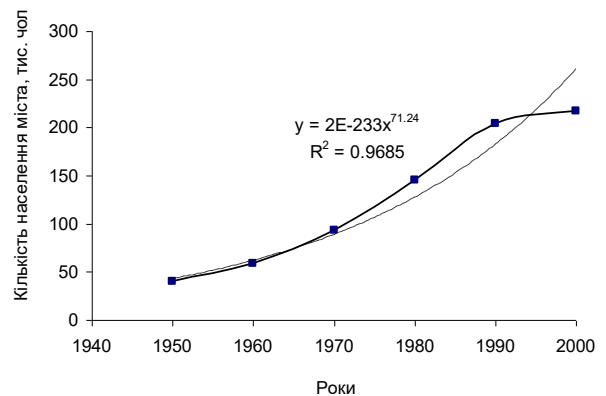
$$\eta^2 = \frac{\delta^2}{\sigma^2} \quad (21)$$

Цей коефіцієнт показує яку частину загальної дисперсії становить міжгрупова дисперсія, або іншими словами наскільки дія групувальної ознаки (тобто покладеної в основу виділення груп) впливає на загальну варіацію досліджуваної ознаки. Коефіцієнт детермінації використовується для оцінки адекватності рівняння тренду при побудові регресійних моделей екологічних явищ та процесів. Це дуже зручно використовувати при роботі з табличним процесором Excel 2000 пакету прикладних програм Microsoft Office 2000 (або іншими версіями цієї програми). В даній комп'ютерній програмі коефіцієнт детермінації позначається  $R^2$ . Якщо програма пропонує декілька альтернативних ліній тренду, то адекватнішим буде той тип рівняння тренду, для якого величина буде  $R^2$  більшою.

а.



б.



**Рис. 3.** Побудова лінії тренду за допомогою різних функцій (поліноміальної (а) та степеневі (б)) за допомогою табличного процесора Excel 2000

Як видно із рис. 3 більш адекватно описує рівняння лінії тренду графік поліноміальної функції, тому для нього характерно вище значення коефіцієнта детермінації.

Ми навмисно так широко зупинились на розрахунових формулах різних видів дисперсії. Дисперсійний аналіз є одним із найбільш поширених у моделюванні та прогнозуванні стану довкілля методів статистики. Він дозволяє відповісти на питання: чи вірогідний вплив того чи іншого фактора на стан техноекосистеми, або на результати впровадження тих чи інших природоохоронних заходів. Він також дає можливість порівнювати між собою декілька системно зв'язаних вибірок і визначити, чи існують між ними статистично вірогідні відмінності та яка ймовірність цих відмінностей. Спільною рисою всіх дисперсійних моделей є те, що у них перевіряється дія деякого загального фактора (в багатofакторному аналізі – дія одночасно кількох

взаємопов'язаних факторів) на об'єкт (техноекосистему). Детальніше про дисперсійний аналіз можна прочитати у [ , ].

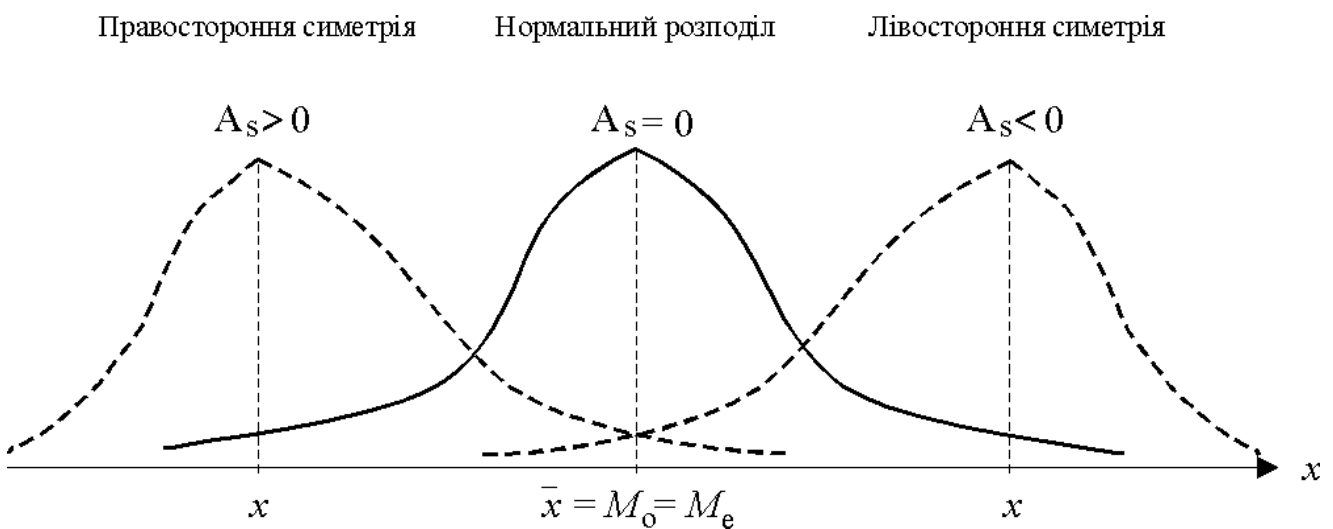
І накінець, третьою важливою групою показників аналізу варіаційного ряду є **характеристики форми розподілу**. Якщо безкінечно зменшувати інтервал варіаційного ряду, то з часом гістограма розподілу перетвориться на плавну криву, яка характеризуватиме залежність частоти реалізації події від величини досліджуваної ознаки. Таку криву називають **функцією щільності розподілу**, або просто **щільністю**, або **розподілом**. Основними характеристиками форми розподілу є число вершин розподілу, асиметрія та ексцес.

**Число вершин.** Вершина кривої розподілу, по суті, є модою. Розподіл з однією вершиною називається **унімодальним** (мономодальним), з двома – **бімодальним**, з багатьма вершинами – **мультимодальним**.

**Асиметрія.** Деякі криві розподілу (наприклад, при нормальному розподілі) симетричні відносно вертикальної лінії, що проходить через моду. Іноді одна сторона кривої більш пологою ніж інша. В такому випадку кажуть про **асиметрію** (скошеність) розподілу. Асиметрія визначається за формулою:

$$A_s = \frac{\sum (\bar{x}_i - \bar{x})^3 \cdot f}{\sigma^3 \sum f} \quad (22)$$

При нормальному розподілі  $A_s = 0$ , при правосторонній симетрії  $x > \bar{x}$  для більшості варіант, тому  $A_s > 0$ , а при лівосторонній симетрії навпаки –  $A_s < 0$  (рис. 4). Іноді правосторонню симетрію називають ще **додатньою**, а лівосторонню – **від'ємною**.

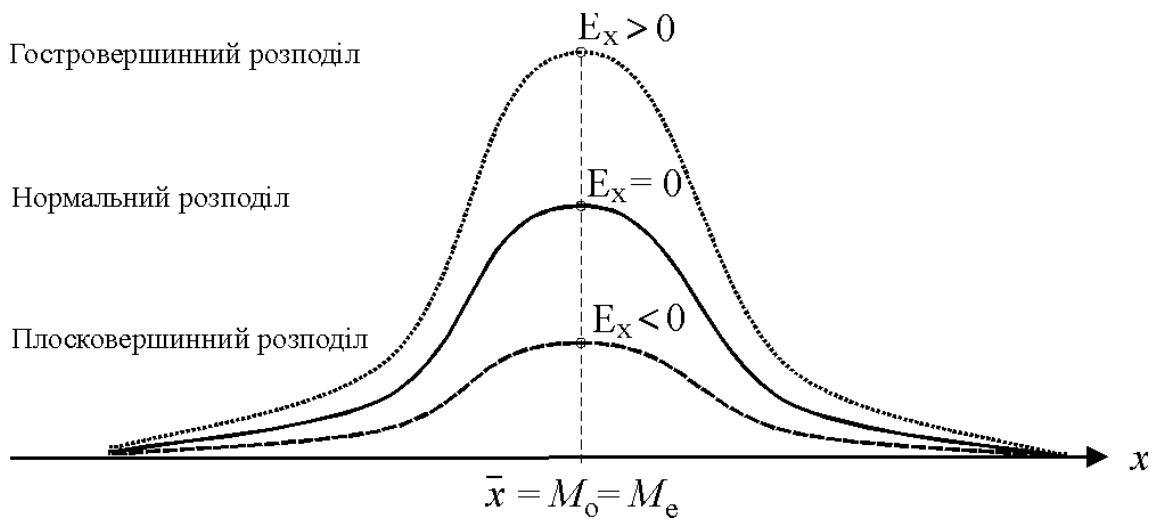


**Рис. 4.** Асиметрія розподілу

Якщо розподіл симетричний, то для нього можна розрахувати показник **ексцесу**:

$$E_x = \frac{\sum (x - \bar{x})^4 \cdot f}{\sigma^4 \sum f} \quad (23)$$

Для вищерозглянутого випадку нормального розподілу  $E_x = 0$ , при  $E_x > 0$  маємо *гостровершинний* розподіл, при  $E_x < 0$  – *плосковершинний* розподіл. Додатне значення  $E_x$  вказує на те, що крива щільності має в околі моди (медіани) більш високу і гострішу вершину. В цьому випадку кажуть про *додатний* ексцес у порівнянні із нормальною кривою. Від’ємне значення  $E_x$  (*від’ємний* ексцес) зумовлює нижчий і пологіший характер вершини у порівнянні із нормальним розподілом (рис. 5).



*Рис. 5. Ексцес розподілу*

Проаналізувавши таким чином варіаційний ряд, тобто визначивши його характеристики центру розподілу, розміру варіації та форми розподілу, можна приступити до моделювання ряду розподілу. *Моделювання ряду розподілу* теж здійснюється у три етапи:

- дослідження загальних характеристик розподілу;
- вирівнювання (підгонка) емпіричного розподілу за теоретичною кривою розподілу;
- перевірка узгодженості теоретичного розподілу емпіричному.

*Дослідження загальних характеристик* розподілу включає в себе аналіз варіаційного ряду. Іншими словами початковий етап побудови моделі розподілу полягає у визначенні середніх значень варіант варіаційного ряду та окремих інтервалів інтервального ряду, моди, медіани, середнього квадратичного відхилення, дисперсії, асиметрії та ексцесу розподілу. Після цього здійснюється побудова графічного зображення розподілу у вигляді одного із типів графіків (рис. 1).

На наступному етапі моделювання вибирається вид теоретичного розподілу, а потім здійснюється вирівнювання емпіричного ряду до вибраного виду теоретичного розподілу. Теоретичний розподіл відображає лише загальні

закономірності розподілу, що проявляються у вигляді певних внаслідок дії лише основних факторів. Тобто теоретичний розподіл описує в генералізованому аналітичному вигляді функціональний зв'язок між значеннями варіант ряду та їх частотами. В математичній статистиці та теорії ймовірності відомо багато стандартних видів розподілу: нормальний розподіл, біноміальний розподіл, розподіл Пуассона, Бета-розподіл, розподіл Коші, розподіл хі-квадрат, логнормальний розподіл, розподіл Стюдента тощо. В спеціальній літературі [ , ] можна взяти детальніше про дані розподіли. Ми зупинемось на розгляді лише перших трьох розподілів, оскільки саме вони є найбільш вживаними.

**Нормальний розподіл** визначає щільність розподілу безперервної випадкової величини для значення варіант:

$$P(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (24)$$

де  $P(m)$  – щільність розподілу (іноді це ще називають диференціальною функцією Лапласа),  $t$  – нормоване відхилення ( $t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$ ),  $\sigma$  – стандартне (середнє квадратичне відхилення).

Він можливий, коли на значення варіант впливає велика кількість незалежних випадкових факторів і жоден із них не є жорстко домінуючим для даної ознаки. Нормальний розподіл описується симетричною кривою (рис. 4) і володіє рядом властивостей, що роблять його практично найбільш вживаним у статистиці. Так зокрема, площа, обмежена кривою щільності розподілу, дає загальну ймовірність реалізації події, що дорівнює 1, а площа під кривою між двома фіксованими точками пропорційна ймовірності появи точок, що знаходяться в проміжку між ними. Звідси, чим менше стандартне відхилення, тим гостріший пік кривої розподілу і тим більша кількість точок розміщуватиметься поблизу середнього значення.

Це дозволяє оцінити ймовірність даної події: 68,26% площі під кривою потрапляє в інтервал від  $\bar{x} - \sigma$  до  $\bar{x} + \sigma$ , 95,44% площі зосереджено між  $\bar{x} - 2\sigma$  і  $\bar{x} + 2\sigma$ , а 99,73 – між  $\bar{x} - 3\sigma$  і  $\bar{x} + 3\sigma$ . Крива нормального розподілу асимптотично наближається до осі  $x$  і для того, щоб заповнити весь простір під нею потрібна величезна кількість емпіричних спотережень. Але, як впливає із вищесказаного, за межами інтервалу від  $\bar{x} - 4\sigma$  до  $\bar{x} + 4\sigma$  лежить настільки мала частина площі, що ймовірностями, які не вкладаються в даний інтервал на практиці найчастіше нехтують.

**Біноміальний розподіл** поряд із нормальним теж належить до найбільш простих і застосовуваних розподілів. За біноміальним законом ймовірність настання певної події  $m$  разів при  $n$  незалежних спробах визначається за формулою:

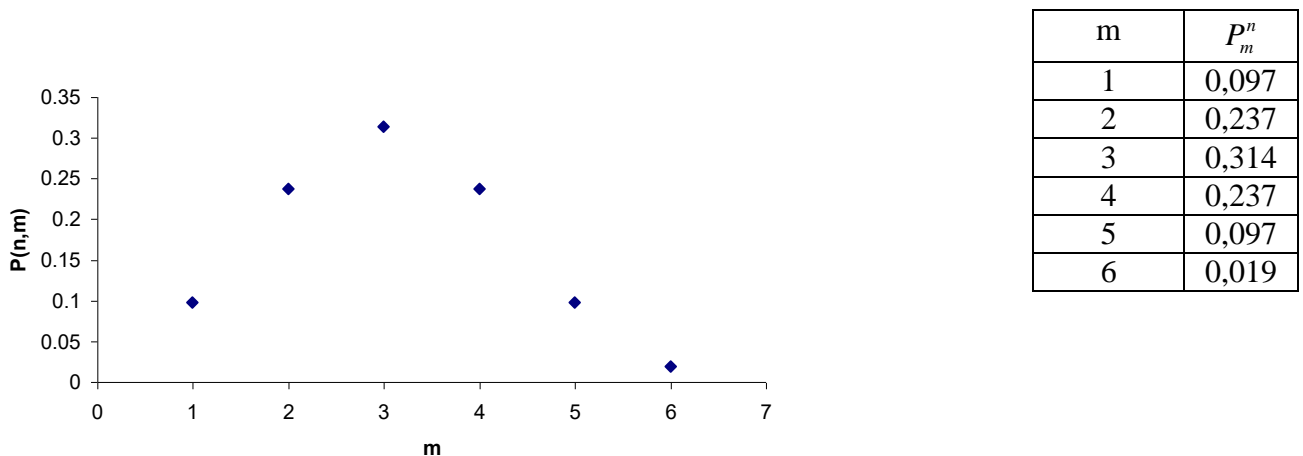
$$P_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}, \quad (25)$$



де  $p$  – ймовірність реалізації певної події;  
 $m$  – частота її реалізації;  
 $n$  – загальна кількість подій.

Біноміальний розподіл в моделюванні і прогнозуванні стану довкілля найчастіше застосовується, коли потрібно виявити закономірності розподілу ймовірності прояву двох взаємовиключаючих екологічних явищ при заданому рівні ймовірності  $p$ . Типовий приклад: нехай в басейні річки знаходиться певне промислове підприємство. За рік на ньому виникає 6 аварійних ситуацій із скидом забруднених стічних вод у річку. Усі ці скиди забруднених вод різні за розмірами і екологічною шкодою. В результаті деяких із таких скидів відбувається розчинення забруднюючих речовин у річковій воді і забруднення річки цими речовинами до концентрації, що перевищує ГДК. В цьому випадку позначимо кількість аварійних ситуацій через  $n$ , а кількість таких скидів, що призвели до забруднення води річки до рівня, вище ГДК –  $m$ . В таблиці 3 наведено результати розрахунку ймовірностей за біноміальним законом при  $p = 0,5$ ;  $n = 6$ . Як видно з рис. 6.. графік біноміального розподілу є дискретним.

**Таблиця 3.** Біноміальний розподіл ( $p = 0,5$ ;  $n = 6$ ).

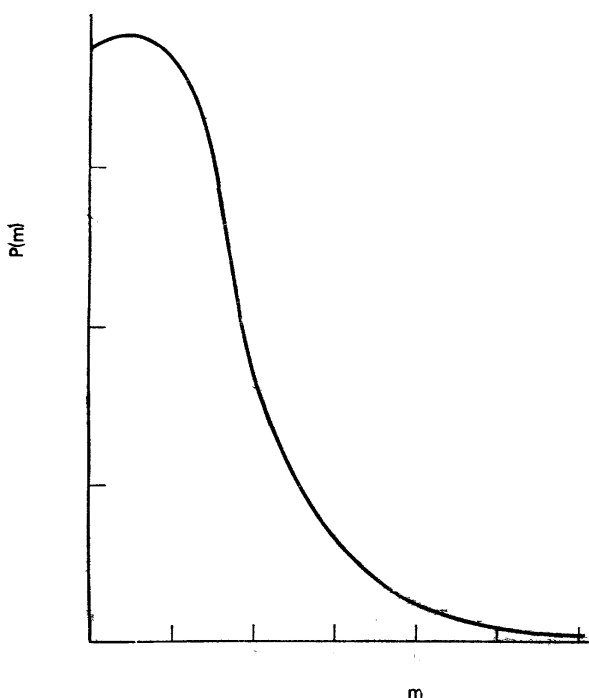


**Рис. 6.** Графік біноміального розподілу

**Розподіл Пуассона** являє собою по суті граничний випадок біноміального розподілу, коли ймовірність прояву явища дуже мала, а загальний розмір вибірки – великий. Ним користуються, зазвичай, при описі частот розподілу дуже рідких подій, наприклад, катастрофічних повеней чи паводків за довгого періоду спостережень. Щільність розподілу задається співвідношенням:

$$P_m = \frac{\mu^m \cdot e^{-\mu}}{m!}, \quad (26)$$

де  $\mu$  – середнє число подій, яке визначається як добуток кількості варіант на ймовірність їх прояву в одноразовій спробі ( $\mu = n \cdot p$ );  $m$  – частота прояву події.



**Рис. 7.** Щільність розподілу Пуассона

Як видно з графіка на рис. 7, розподіл Пуассона дуже близький до асиметричного біноміального.

Він застосовується при аналізі рідких і незалежних одне від одного явищ в часі і просторі.

Так, наприклад, даний вид розподілу використовується при побудові моделі частоти прояву катастрофічних паводків. До Пуассонівського наближається також і розподіл мікроелементів в зразку ґрунту. Аналогічний розподіл успішно застосовується при гідрохімічному аналізі природних вод, коли мова не йде про детерміновані моделі розсіювання забруднень, оскільки при їх побудові використовуються зовсім інші методи.

Наступним етапом є **вирівнювання (підгонка) емпіричного розподілу за теоретичною кривою розподілу**. Вона зводиться до порівняння порівняння частот фактичного розподілу з відповідними теоретичними частотами. Теоретичні частоти розраховуються за формулами (24-26). Наприклад, для нормального розподілу вони розраховуються за співвідношенням:

$$f_{\text{теор.}} = P(m) \cdot \frac{n \cdot h}{\sigma}, \quad (27)$$

де  $P(m)$  – значення диференційної функції Лапласа (розраховується за формулою (24));  $n$  – загальне число спостережень,  $h$  – ширина інтервалу;  $\sigma$  – стандартне (середнє квадратичне) відхилення.

Після цього приступають до наступного етапу моделювання рядів

розподілу – *перевірки узгодженості теоретичного розподілу емпіричному*. Вона здійснюється за допомогою *критеріїв узгодженості*. Їх існує доволі багато – критерій Пірсона ( $\chi^2$ , типу I, III, IV, VI), Романовського, Колмогорова, Ястремського, так званий критерій “*ncw*” і т.д. У зв’язку із напрямком і задачами нашої роботи зупинимось лише на критеріях Пірсона  $\chi^2$  і Колмогорова.

Англійський вчений **К. Пірсон** запропонував *критерій*, статистичну характеристику якого розраховують за формулою:

$$\chi^2 = \sum \frac{(f - f')}{f'}, \quad (28)$$

де  $f$  і  $f'$  – відповідно фактичні і теоретичні частоти.

За спеціальними таблицями [ ] визначають ймовірність досліджуваного значення  $\chi^2$  залежно від числа ступенів свободи (вільності) –  $k = m - 3$ , де  $k$  – число ступенів свободи, а  $m$  – кількість інтервалів (груп) і заданому рівні значимості, яка в західній спеціальній літературі та комп’ютерних програмах позначається *p-level*. Рівень значимості приймається як правило 0,05 або 0,01.

Якщо розраховане за формулою (28) значення критерію менше за табличне, то при прийнятому рівні значимості відхилення між фактичними і розрахунковими частотами несуттєве і спричинене випадковими факторами, а отже емпіричний розподіл відповідає теоретичному.

Критерій Колмогорова розраховується за наступною формулою:

$$\lambda = \frac{\max |S_f^{теор.} - S_f^{емп.}|}{\sqrt{n}} \quad (29)$$

$\lambda$  – критерій Колмогорова,  $S_f^{теор.}$  і  $S_f^{емп.}$  – сума накопичених теоретичних і емпіричних частот в долях одиниці,  $n$  – сума емпіричних частот.

Значення даного критерію теж табульовані [ ]. За заданого рівня значимості  $\alpha = 1 - k$  ( $\lambda$ ) по цих таблицях визначаються критичні значення  $\lambda_\alpha$ . Якщо розраховане значення критерію  $\lambda$  менше критичного  $\lambda_\alpha$ , то приймається гіпотеза про відповідність емпіричного розподілу теоретичному.

Критерій Колмогорова використовується для перевірки відповідності при достатньо великому  $n$ , але сучасні дослідження довели, що вже при  $n \geq 20$ , розподіл статистики вже практично не залежить від  $n$ .

Даний критерій узгодженості визначається фактично по одній точці, а тому в деяких випадках може не відобразити загальну узгодженість теоретичного та емпіричного розподілу. Крім того найбільша різниця накопичених теоретичних та емпіричних частот, як правило, спостерігається в середній частині кривої розподілу. Тому судження про співпадання теоретичних та емпіричних розподілів в крайових частинах (а іноді саме це потрібно в практичних розрахунках) потрібно виносити дуже обережно.

## 2. Аналіз структури та дослідження взаємозв'язків у екологічних системах

В моделюванні і прогнозуванні стану довкілля велика увага приділяється аналізу взаємозв'язків між різноманітними природними та техногенними процесами та явищами. Більшість екологічних процесів формується ланцюгом причинно-наслідкових явищ, що змінюються в часі і просторі. Для вивчення цих процесів необхідно встановити їх причини, рушійні сили або джерела, тенденції розвитку. При цьому виникає необхідність в дослідженні залежностей, що пов'язують досліджувані процеси між собою та з іншими процесами і явищами. Наприклад, для моделювання забруднення річкових вод важливим питанням є коливання стоку річки (витрати води). При розрахунках і прогнозах стоку слід дослідити і з'ясувати зв'язки між коливаннями водності річки та коливанням шару опадів (дошових і снігових), температури повітря, випаровуваності з поверхні суші і водойм, запасів води в сніговому покриві і т.д.

Задачі по дослідженню структури та взаємозв'язків екологічних процесів дуже різноманітні. Умовно їх можна розділити на дві групи:

- задачі, пов'язані із вивченням причин або факторів розвитку процесів в часі і просторі;
- задачі, пов'язані із визначенням конкретних значень або тенденцій розвитку даного процесу в майбутньому.

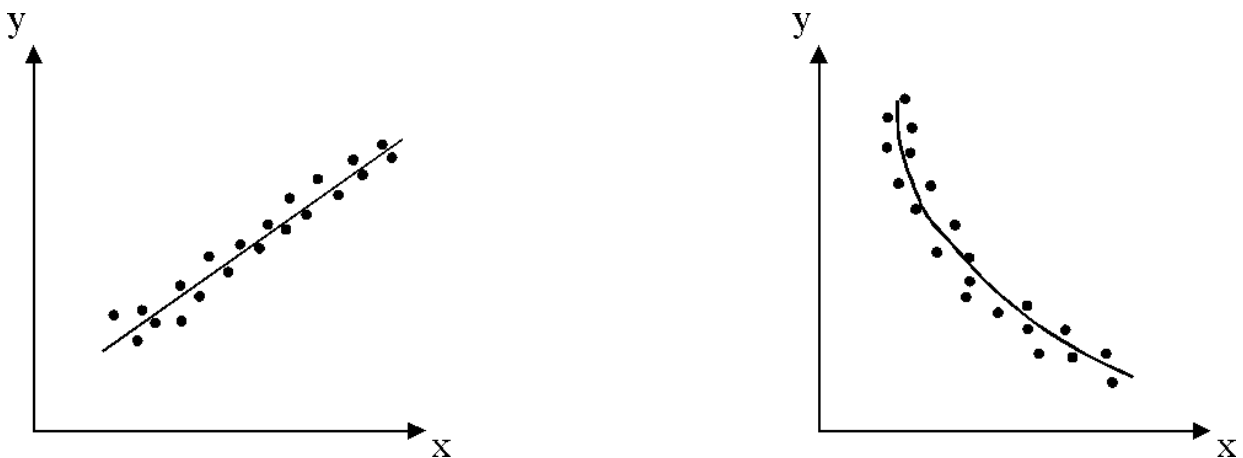


Рис. 8. Графіки прямолінійного та криволінійного зв'язку

Слід зауважити також, що задачі дослідження залежностей при моделюванні, взагалі то кажучи, не є чисто математичними задачами. Оскільки математичний аналіз в даному випадку обов'язково повинен супроводжуватись фізичним аналізом сутності екологічних процесів, відсутність останнього ж може спричинити серйозні прорахунки, похибки, а іноді й просто парадоксальні результати.

Взаємозв'язок досліджуваних процесів оцінюється по відповідності змін їх значень в часі і просторі. За формою графіка ця залежність може бути **прямолінійною** або **криволінійною** (рис. 8). Прямолінійні залежності вивчені краще, але в природі зустрічаються рідше. За тісністю зв'язку або ступенем

визначеності одного із співставлюваних процесів відносно іншого, зв'язки можуть бути **функціональні** і **стохастичні**. Окремим випадком даної класифікації є **відсутність зв'язку** між досліджуваними процесами.

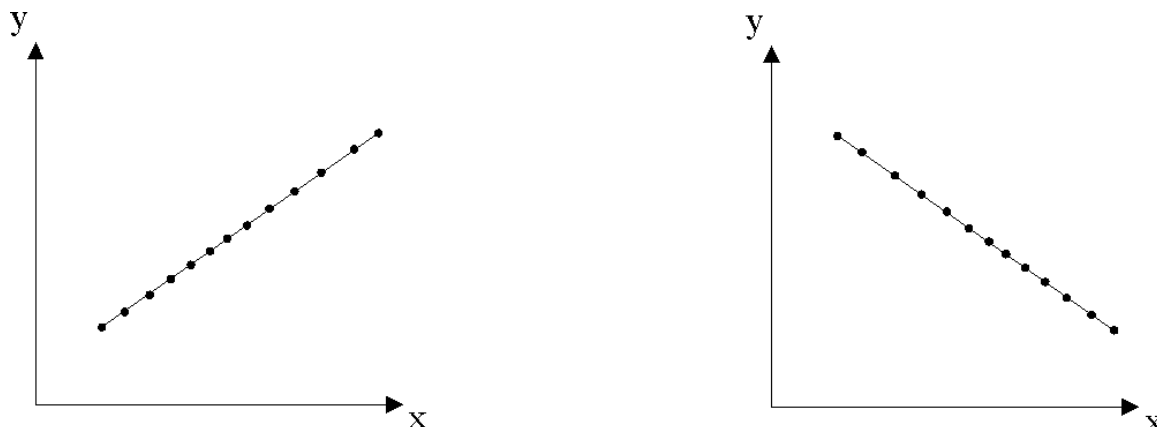


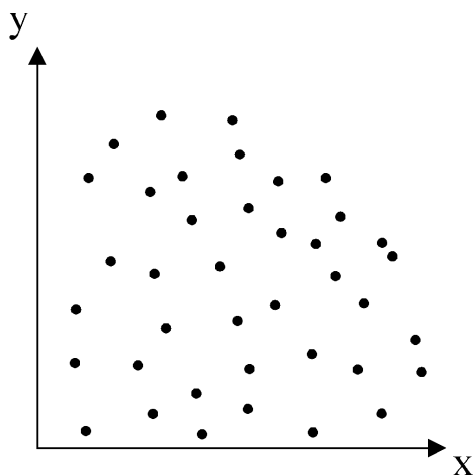
Рис. 9. Графіки зв'язку функціонально залежних величин

**Функціональні зв'язки.** Іноді залежність між досліджуваними величинами буває настільки тісною, що знаючи значення однієї із величин можна вказати точні значення іншої. Такі взаємозв'язки називаються функціональними. Наприклад, при моделюванні процесів забруднення повітря та масопереносу в атмосфері, для розуміння фізичної суті процесу, потрібно знати основні закони термодинаміки. Один із цих законів пов'язує тиск ( $P$ ), температуру ( $T$ ) і об'єм ( $V$ ) газу:

$$P = \frac{R \cdot T}{V} \quad (30)$$

За цим законом кожному індивідуальному значенню  $V$  при фіксованих значеннях  $R$  і  $T$  відповідає лише одне значення  $P$ . Якщо нанести відповідні пари значень співставлюваних величин на графік в декартових координатах (рис. 9) у вигляді точок, то утворена група точок лежатиме строго на одній лінії, тобто кожному значенню  $V$  відповідатиме певне значення  $P$  і навпаки.

Такі залежності зустрічаються, як правило, в технічних науках, у фізиці, екологічні явища виявляються пов'язані функціональною залежністю доволі рідко.



*Рис. 10. Графік зв'язку незалежних величин*

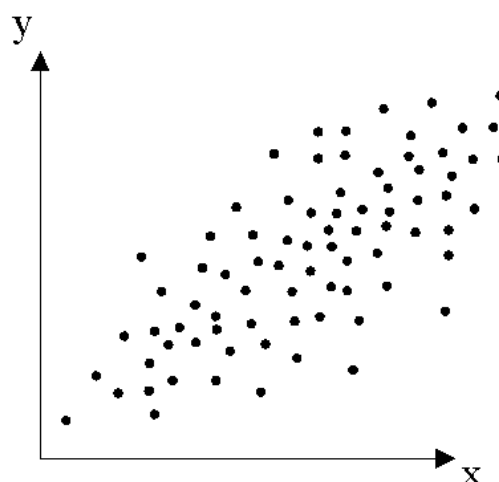
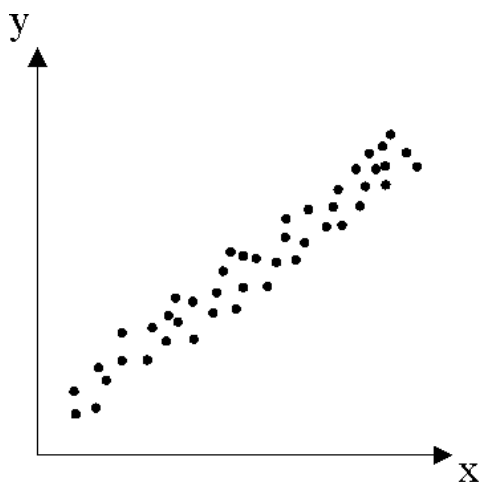
**Відсутність зв'язку.**

Досліджувані екологічні процеси і явища іноді бувають непов'язані одне з одним, тобто зміна одного із них відбувається незалежно від зміни іншого.

Випадкова величина  $Y$  називається незалежною від випадкової величини  $X$ , якщо закон розподілу  $Y$  не залежить від того, яке значення значення набуває  $X$ .

Графік зв'язку незалежних величин (рис. 10) являє собою поле точок, у якому кожному значенню  $X$  відповідає з відповідною щільністю весь діапазон можливих значень  $Y$  і навпаки.

**Ймовірнісна (стохастична) залежність.** Зустрічається в екології найчастіше. Якщо  $Y$  пов'язане із  $X$  стохастичною залежністю, то знаючи значення  $X$  не можна вказати точно значення  $Y$ , а можна вказати лише закон розподілу величини  $Y$ , який залежить від величини  $X$ .



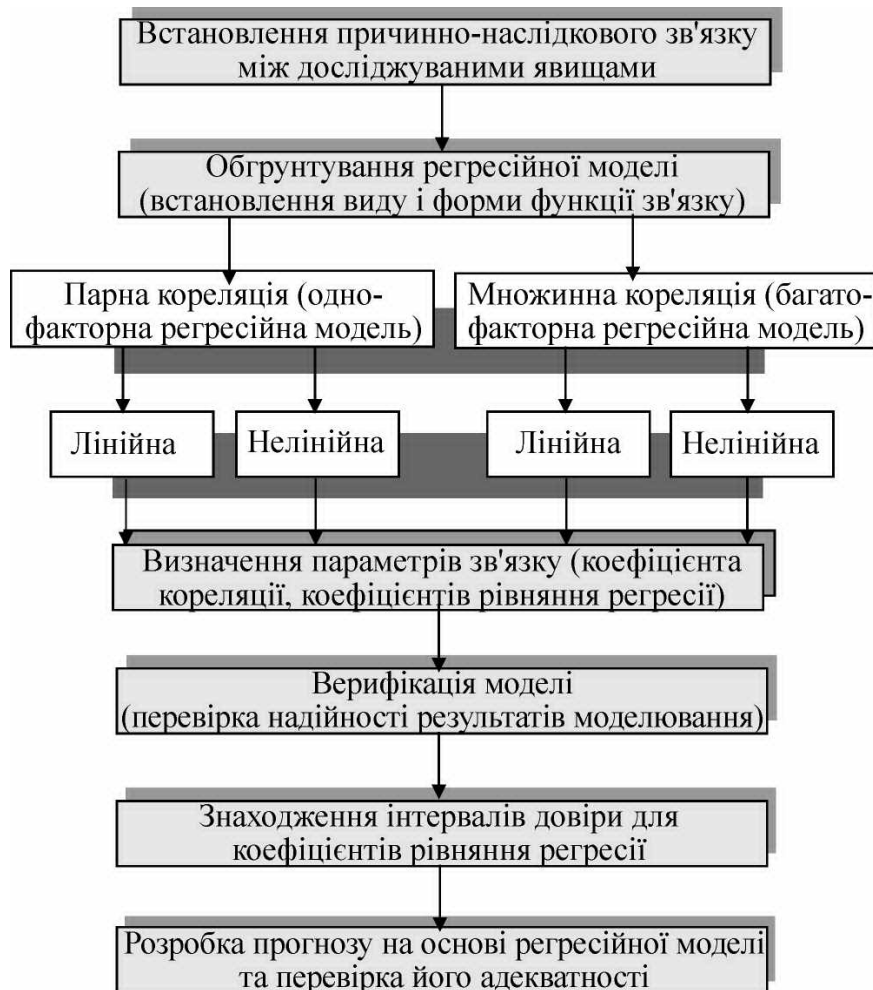
*Рис. 11. Графіки зв'язку стохастично залежних величин із високою та низькою щільністю зв'язку.*

На рис. 11 зображено графік стохастичної залежності більшої та меншої щільності зв'язку. Як видно із рисунку, точки кожної пари значень  $(X;Y)$  розміщуються в полі графіка ніби відносно якоїсь лінії. При цьому кожному значенню  $X$  відповідає своя смуга значень  $Y$ . Разом із зміною  $X$  змінюється середнє із можливих значень  $Y$  при даному  $X$ .

Стохастичний зв'язок між змінними проявляється, як правило, тоді, коли поряд із факторами, які впливають або на один або на інший процес, існують фактори, що впливають спільно як на перший, так і на другий процес.

По мірі збільшення щільності зв'язку форма графіка наблизатиметься до графіка функціональної залежності. Таким чином, функціональна залежність є

крайнім випадком найбільш тісної стохастичної (ймовірнісної) залежності. Полярним випадком є повна незалежність змінних. Між цими граничними випадками розміщуються всі градації ймовірнісної залежності – від найбільш сильної до найслабшої.



**Рис. 12.** Алгоритм реалізації моделі кореляційно-регресійного зв'язку

**Регресійна модель дослідження взаємозв'язку між екологічними процесами.** Для дослідження взаємозв'язку двох екологічних процесів або явищ найчастіше застосовується математична модель у вигляді рівняння регресії. Така модель називається **регресійною** або **кореляційно-регресійною**. Процес її побудови в загальному складається з двох етапів:

- встановлення на основі великої кількості спостережень того, як змінюється в середньому функція  $Y$  в залежності від зміни одного або декількох її головних аргументів (іншими словами – визначення форми зв'язку і знаходження рівняння зв'язку двох змінних величин);
- визначення ступеня взаємозв'язку двох досліджуваних явищ (якщо ці явища взаємопов'язані) або ступеню впливу головних досліджуваних факторів на досліджуваній вплив (якщо ці зв'язки носять причинно-наслідковий характер).

В роботі [ ] наводиться більш розгорнутий алгоритм реалізації моделі кореляційно-регресійного аналізу (рис. 12).

**Однофакторна лінійна регресійна модель.** Зупинимось детальніше на першому етапі дослідження взаємозв'язку двох змінних величин – **встановленні рівняння взаємозв'язку в лінійному вигляді.** Як відомо з попередніх розділів, загальний вигляд лінійного зв'язку:

$$\bar{y} = ax + b, \quad (31)$$

де  $\bar{y}$  – середнє із можливих значень  $Y$  при даному  $x$ . Функція, що виражає зв'язок між значенням аргументу і умовним середнім арифметичним досліджуваної залежної змінної, називається **рівнянням лінії регресії.** До даного рівняння, поряд із змінними, входять і коефіцієнти –  $a$  і  $b$ . Зміст цих коефіцієнтів детально розглядався в розділі, присвяченому використанню елементарних функцій в моделюванні і прогнозуванні стану довкілля. Так, зокрема, коефіцієнт  $a$  називається ще **кутовим коефіцієнтом** і характеризує нахил прямої лінії (графіка функції) до осі абсцис. Математичний зміст цього коефіцієнта полягає у тому, що він характеризує нахил лінії графіка функції до осі абсцис і дорівнює:  $k = tg \alpha$ . Коефіцієнт  $b$  називають **вільним членом рівняння.** Він показує довжину відрізка, який відсікає лінія графіку від початку координат. Якщо рівняння функції не містить коефіцієнта  $b$ , то її графік пройде через початок координат.

Для знаходження параметрів парної регресії застосовують **метод найменших квадратів** (МНК). Суть методу полягає в тому, що сума квадратів відхилень  $x_i$  від їх середньої  $\bar{x}$  є величиною мінімальною:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \min \quad (32)$$

За цим методом розрахований теоретичний розподіл має максимально точно відповідати емпіричному, тобто точки лінії регресії, розраховані теоретичним шляхом, повинні бути отримані таким чином, щоб сума їх відхилень від емпіричних (дослідним шляхом добутих) значень була мінімальною:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = \min \quad (33)$$

Знайдемо параметри  $a$  і  $b$  для (31) за допомогою методу найменших квадратів. Позначимо різницю фактичних і розрахованих значень через  $S$ :

$$S = y_i - \bar{y}(x_i) = y_i - ax_i - b \quad (34)$$

Тоді:

$$S^2 = (y_i - \bar{y}(x_i))^2 = (y_i - ax_i - b)^2 \rightarrow \min \quad (35)$$



Для знаходження мінімуму функції  $S^2$  від параметрів  $a$  і  $b$  слід визначити частинні похідні по  $a$  і  $b$ . Вони відповідно дорівнюють:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial a} = -2(\sum xy - a \sum x^2 - b \sum x) \\ \frac{\partial S}{\partial b} = -2(\sum y - a \sum x - bn) \end{array} \right\} \quad (36)$$

Як відомо, функція досягає мінімуму якщо її перша похідна дорівнює 0. Прирівнявши частинні похідні (36) до нуля, отримаємо систему двох лінійних рівнянь із двома невідомими ( $a$  і  $b$ ). Цю систему іноді ще називають **нормальною системою рівнянь** або **системою Гаусса**:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \sum x^2 + b \sum x = \sum xy \\ a \sum x + bn = \sum y \end{array} \right\} \quad (37)$$

Розв'язавши цю систему отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \\ b = \frac{\sum y - a \sum x}{n} = y - ax \end{array} \right\} \quad (38)$$

Коефіцієнти лінійної регресії розраховуються за ретроспективний період спостережень для вибіркової сукупності. Тому для доведення репрезентативності вибірки слід виконати оцінку значимості коефіцієнтів регресії, тобто довести, що лінійний зв'язок у вибірковій сукупності свідчить про такий же зв'язок у генеральній сукупності. Значимість коефіцієнта лінійної регресії перевіряють за допомогою  $t$ -критерію Стьюдента. За таблицею  $t$ -розподілу Стьюдента [ ] знаходять величину  $t_{\frac{\alpha}{2}}$  з  $k = n - 2$  ступенями свободи і рівнем значимості  $\alpha$ .

Розрахункове значення критерію знаходять за формулою:

$$t_{розр.} = |a| \cdot \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{\sum (y - \bar{y})^2} \cdot (n - 2)} \quad (39)$$

Якщо  $t_{розр.} > t_{крит.}$ , то коефіцієнт регресії вважається значимим, тобто характер зв'язку у вибірковій сукупності відповідає генеральній.

Але випадки лінійної регресії зустрічаються в моделюванні і прогнозуванні стану довкілля доволі рідко. Частіше лінійна регресія використовується для лінійної апроксимації існуючих екологічних закономірностей і взаємозалежностей.

**Однофакторна нелінійна регресійна модель.** В окремих випадках

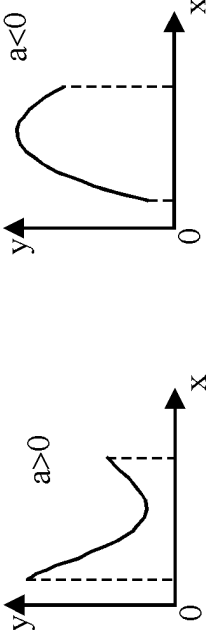
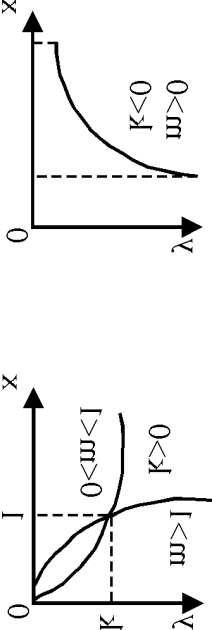
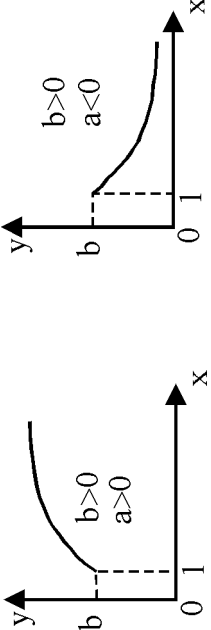
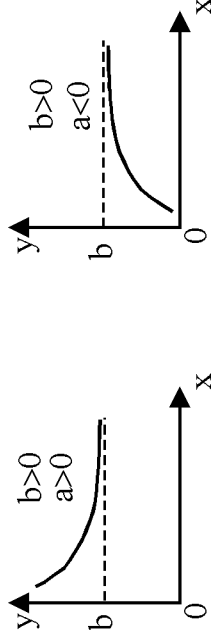
використати таку апроксимацію неможливо або ж недоцільно. Тоді досліджується *модель парної нелінійної регресії*. Методика розрахунку коефіцієнтів парної нелінійної регресії аналогічна розглянутій вище. В спеціальній літературі [ , ] вона описана доволі ґрунтовно. У зв'язку із напрямом та специфікою нашої роботи ми опустимо їх виведення і наведемо лише кінцеві формули для розрахунку коефіцієнтів парної нелінійної регресії у вигляді таблиці 4.

На наступному етапі на основі розрахунку параметрів рівняння регресії (лінійної чи нелінійної) вирішуються задачі, пов'язані із *визначенням конкретних значень або тенденцій розвитку даного процесу в майбутньому*. *Прогнозуванням* називається наукове передбачення ймовірнісних шляхів розвитку явищ і процесів для більш-менш віддаленого майбутнього. Проміжок часу від моменту, для якого є останні статистичні дані про досліджуваний об'єкт, до моменту, до якого належить прогноз, називається *періодом упередження*.

Суть прогнозування на основі регресійної моделі полягає у екстраполяції на майбутнє розрахованих за попередні періоди залежностей. Такий метод прогнозування виходить із збереження загальної тенденції розвитку явищ (процесів) у часі. На практиці прогноз показника отримують підстановкою у здобуте рівняння конкретного значення детермінуючого (визначаючого) фактора. Результатом прогнозу є точкова оцінка середнього значення функції при заданому рівні прояву (реалізації) фактора.

*Таблиця 4. Розрахунок коефіцієнтів парної нелінійної регресії (наводиться за [ ] із змінами авторів)*

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| Система рівнянь для визначення коефіцієнтів | $a \sum x^2 + b \sum x + cn = \sum y$ $a \sum x^3 + b \sum x^2 + c \sum x = \sum xy$ $a \sum x^4 + b \sum x^3 + c \sum x^2 = \sum yx^2$ | $n \lg k + m \sum \lg x = \sum \lg y$ $\lg k \sum \lg x + m \sum \lg^2 x = \sum \lg x \sum \lg y$ | $a \sum \lg x + bn = \sum y$ $a \sum \lg^2 x + b \sum \lg x = \sum y \lg x$ | $a \sum \frac{1}{x} + bn = \sum y$ $a \sum \frac{1}{x^2} + b \sum \frac{1}{x} = \sum \frac{y}{x}$ |
|---|---|---|---|---|

| Рівняння регресії       | Графік рівняння   |
|-------------------------|---|
| $y = ax^2 + bx + c$     |    |
| $y = kx^m$              |    |
| $y = a \cdot \lg x + b$ |   |
| $y = a/x + b$           |  |

Середнє значення прогнозу показника (вислідної ознаки)  $\bar{y}_{np.}$  при значенні детермінуючого фактора  $\bar{x}_{np.}$ , відповідно до рівняння лінійної регресії, визначається за формулою:

$$\bar{y}_{np.} = a\bar{x}_{np.} + b \quad (40)$$

Окремим важливим питанням є достовірність прогнозу. Для того аби довести достовірність прогнозу слід визначити межі його довірчого інтервалу  $\Delta\bar{y}_{np.}$ :

$$\Delta\bar{y}_{np.} = t_{a,k} \cdot S \cdot \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{x}_{np.} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (41)$$

де  $t_{a,k}$  –  $t$ -розподіл Стюдента з  $k = n - 2$  ступенями свободи і рівнем значимості  $\alpha$ ;  $n$  – кількість варіант (спостережень),  $S$  – точкова оцінка величини дисперсії  $\sigma$ .

**Багатофакторна регресійна модель.** Природа являє собою динамічну,

функціональну і поліваріантну систему, що об'єднана в єдине ціле надзвичайно складним сплетінням різноманітних постійно взаємодіючих природних факторів. Доволі часто в природі зустрічаються випадки, коли значення параметрів техноекосистеми формуються під впливом не однієї а кількох різних факторних ознак. При цьому жодна із даних ознак не справляє вирішального впливу на досліджувані параметри системи, але їх спільний вплив є відчутним. В такому випадку для дослідження структури взаємозв'язків у ТЕС використовують модель багатофакторної регресії.

Найскладнішим моментом багатофакторного регресійного моделювання є те, що, по-суті, досліджується зв'язок між значенням залежної змінної та довільною комбінацією незалежних (факторних) змінних. У зв'язку із такою поліваріантністю, складністю побудови моделі багатофакторної регресії та вибору кінцевої функції найчастіше для багатофакторного регресійного аналізу використовуються *метод виключень*, *покроковий регресійний аналіз* і *метод всіх можливих регресій* [ ].

Суть *методу виключення* полягає в тому, що будують рівняння, яке містить всі фактори. Потім для кожного фактора обчислюють статистику часткового  $F$ -критерію, тобто відношення різниці суми квадратів всіх факторів і всіх крім останнього фактора до дисперсії часткової величини цієї моделі. Якщо мінімальне значення часткового  $F$ -критерію менше за критичне (взяте із таблиці), то даний фактор виключається із моделі. Процедура продовжується поки не будуть виключені всі фактори, що відповідають даній умові.

*Покроковий регресійний аналіз* являє собою зворотну процедуру. Спочатку у модель включається фактор, що має найбільший коефіцієнт кореляції із залежною змінною. Потім до даного рівняння додають фактори із найменшими коефіцієнтами кореляції доти, доки не переберуть всі фактори. Контроль адекватності моделі здійснюється за допомогою часткового  $F$ -критерію.

Розглянемо детальніше *метод всіх можливих регресій*. На *першому етапі* цього методу встановлюють які фактори слід включати в модель. Це доволі складна процедура, яка вимагає глибокого розуміння суті модельованого процесу. З одного боку, всі фактори включені до моделі повинні мати статистичний зв'язок із результируючим показником. З іншого боку, рівняння множинної регресії адекватно відображає модельоване явище лише тоді, коли фактори є кореляційно незалежними. Якщо між факторами існує функціональний або дуже близький до нього статистичний зв'язок, то до моделі включається лише один із них, а всі інші виражаються через нього [ ].

На другому етапі здійснюється математико-статистичний аналіз факторів шляхом розрахунку парних та множинного коефіцієнтів кореляції (методика їх визначення буде наведена дещо згодом).

Рівняння лінійної багатофакторної регресії в загальному випадку має такий вигляд [ ]:

$$\bar{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_mx_m \quad (42)$$



- чим ближче значення  $|r|$  до 1, тим вища щільність зв'язку між ознаками.

Перевірку значимості коефіцієнта кореляції здійснюють шляхом розрахунку величини:

$$t_{розр.} = \sqrt{\frac{r^2}{1-r^2}}(n-2), \quad (47)$$

Дана величина має розподіл Стьюдента для заданої ймовірності  $\alpha$  і  $V = n - 2$  ступенів свободи. Якщо  $t_{розр.} > t_{крит.}$ , то між досліджуваними ознаками існує кореляційний зв'язок.

Для більш приблизної оцінки ступеня взаємозв'язку між досліджуваними ознаками використовують коефіцієнти Фехнера і Спірмена []. **Коефіцієнт Фехнера** розраховують за формулою:

$$K_{\phi} = \frac{C - H}{C + H}, \quad (48)$$

де  $C$  - число збігів знаків відхилень ознак  $x$  і  $y$  від їх середніх значень;  $H$  - число незбіжностей.

Коефіцієнт Фехнера, як і коефіцієнт кореляції, змінюється в межах від  $-1$  до  $1$ . При  $K_{\phi} = -1$  кажуть про існування узгодженої оберненої залежності, а при  $K_{\phi} = 1$  - узгодженої прямої залежності. Якщо  $K_{\phi} = 0$ , такої залежності не спостерігається.

**Коефіцієнт Спірмена** іноді ще називають коефіцієнтом рангової кореляції і розраховують за формулою:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (49)$$

де  $n$  - обсяг сукупності, а  $d$  - різниця рангів ознак  $x$  і  $y$ .

Для розрахунку коефіцієнта Спірмена спочатку слід побудувати з вихідних варіаційних рядів **ранжовані** таблиці, тобто такі таблиці, де значення варіант розташовувались би в порядку від найменшого значення до найбільшого. Потім кожне конкретне значення варіаційного ряду замінюють його рангом (порядковим номером) і рахують різницю рангів ознак  $x$  і  $y$ .

Якщо значення  $\rho = -1$ , то існує обернена кореляція рангів, якщо  $\rho = 1$  - пряма кореляція рангів,  $\rho = 0$  - кореляція рангів відсутня.

## Лекція № 6

Аналіз динаміки екологічних систем. Застосування диференціальних рівнянь та систем рівнянь для моделювання екологічних процесів

### План

1. Поняття про похідну та її використання в екологічних дослідженнях. Основні правила диференціювання
2. Первісна функції. Невизначений та визначений інтеграл
3. Диференціальні рівняння. Приклади їх застосування в екологічних дослідженнях
4. Основні методи розв'язування диференціальних рівнянь
5. Чисельне інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь

### 1. Поняття про похідну та її використання в екологічних дослідженнях. Основні правила диференціювання

Диференціальне числення найчастіше застосовується для вирішення задач визначення швидкості руху, прискорення, зміни, динаміки якогось об'єкта чи процесу або для визначення дотичної до кривої. Для екосистем вирішення задачі визначення швидкості є надзвичайно важливим для опису закономірностей зміни їх компонентів, які, в свою чергу, визначають собою структуру та властивості модельованої системи.

Основним поняттям диференціального числення є похідна. Аби зрозуміти сутність похідної функції, розглянемо її на прикладі визначення швидкості. Нехай автомобіль, що рухається, проходить відстань між двома точками ( $S_1$  і  $S_2$ ) у певні моменти часу ( $t_1$  і  $t_2$ ). Для того, аби визначити середню швидкість автомобіля за проміжок часу, як відомо з фізики, потрібно розділити шлях, який був пройдений автомобілем, на час, за який автомобіль проїхав цей шлях. Іншими словами, середня швидкість автомобіля визначиться як відношення приросту шляху ( $\Delta S = S_2 - S_1$ ) до приросту часу ( $\Delta t = t_2 - t_1$ ). Тобто, середня швидкість між даними точками на даному часовому інтервалі дорівнюватиме:  $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ . При нерівномірному русі середня швидкість недостатньо повно характеризує швидкість руху в конкретний момент часу  $t$ . Але чим меншим ми задамо проміжок  $\Delta t$ , тим точнішу характеристику швидкості отримаємо. Тому швидкість руху в конкретний момент часу  $t$  є границею, до якої прямує відношення  $\frac{\Delta S}{\Delta t}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Тобто:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (1)$$

**Похідною функції**  $y = f(x)$  називається границя відношення приросту функції  $\Delta y$  до приросту аргументу  $\Delta x$ , якщо приріст аргументу прямує до нуля. Тобто:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2)$$

Теж саме можна записати у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3)$$

Операція знаходження похідної будь-якої функції називається **диференціюванням**. Похідні основних елементарних функцій наведені в таблиці 1. Вищенаведена похідна має перший порядок. Функція може похідні і вищих порядків, а може й не мати навіть похідної першого порядку. Наприклад, похідна другого порядку позначається:  $f''(x)$  або  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ; похідна  $n$ -того порядку  $f^{(n)}(x)$  і т.д. Друга похідна показує швидкість зміни першої похідної, третя – другою і т.д.

В моделюванні екологічних систем досліджувана змінна часто може залежати від декількох змінних. В цьому випадку вводиться поняття **часткових похідних**. Частковими похідними функції  $U = f(x, y, z)$  називаються границі відношень:

$$\frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

$$\frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y} \text{ при } \Delta y \rightarrow 0$$

$$\frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z} \text{ при } \Delta z \rightarrow 0$$

Позначається це наступним чином:

$$\begin{aligned} U'_x &= \frac{dU}{dx} = f'_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \\ U'_y &= \frac{dU}{dy} = f'_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y} \\ U'_z &= \frac{dU}{dz} = f'_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z} \end{aligned} \quad (4)$$

Іншими словами: частковий диференціал – це функції  $U = f(x, y, z)$  взятий



у припущенні, що величини  $y, z$  не змінюються, тобто ( $\Delta y = \Delta z = 0$ ). Повний диференціал дорівнює сумі всіх часткових диференціалів:

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz \quad (5)$$

Похідна використовується в екологічних дослідженнях дуже часто: при моделюванні швидкості розмноження організмів в екосистемах, швидкості вимирання популяцій, кінетики хімічних реакцій, руху повітряних потоків, поверхневих та підземних вод, швидкості очистки води на очисних спорудах тощо. Наприклад, чисельність популяцій бактерій з часом  $t$  змінюється за законом:

$$N = N_0 + \frac{N_0 t}{c + t^2} \quad (6)$$

Швидкість зміни чисельності популяції (інтенсивність розмноження бактерій) можна розрахувати, взявши похідну від (6) за часом:

$$N' = N_0 \frac{c + t^2 - 2t^2}{(c + t^2)^2} = N_0 \frac{c - t^2}{(c + t^2)^2} \quad (7)$$

## 2. Первісна функції. Невизначений та визначений інтеграл

Для вирішення багатьох практичних завдань необхідно знайти функцію  $f(x)$  за її похідною  $f'(x)$ , тобто виконувати операцію, обернену до диференціювання. Наприклад: знайти закономірність, за якою змінювалась швидкість  $v(t)$ , якщо залежність зміни прискорення від часу  $a(t)$  відома. Шуканою функцією буде така  $u(t)$ ,  $dv$  для якої  $a = \frac{dv}{dt}$ . Або, наприклад, знайти закон руху  $s(t)$  матеріальної точки

за відомою залежністю зміни швидкості від часу; як відомо  $v(t) = \frac{ds}{dt}$ .

Функція  $F(x)$  називається **первісною** для функції  $f(x)$  на даному проміжку, якщо  $F(x)$  має своєю похідною функцію  $f(x)$  або своїм диференціалом  $f(x)dx$ , тобто:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{або} \quad dF(x) = f(x) dx.$$

Кожна функція, що має первісну, має нескінченну кількість первісних, які відрізняються одна від одної на постійний доданок. Сукупність усіх первісних  $F(x) + C$  для даної функції  $y = f(x)$  називають **невизначеним інтегралом** функції  $f(x)$ . Невизначений інтеграл позначається:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (8)$$

де  $f(x)$  - підінтегральна функція;  $f(x)dx$  - підінтегральний вираз;  $\int$  - знак інтеграла,  $x$  - змінна інтегрування.

В таблиці 1 наведено перелік похідних та інтегралів основних елементарних функцій (в зведеному і систематизованому вигляді запозичено з роботи[1]).

*Таблиця 1. Похідні та інтеграли основних елементарних функцій*

| Функція                | Похідна                      | Інтеграл  |
|------------------------|------------------------------|---|
| $y = a = \text{const}$ | $y' = 0$                     | $\int a dx = ax + C$                            |
| $y = x^n$              | $y' = nx^{n-1}$              | $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$         |
| $y = e^x$              | $y' = e^x$                   | $\int e^x dx = e^x + C$                         |
| $y = a^x$              | $y' = a^x \ln a$             | $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$           |
| $y = \log_a x$         | $y' = \frac{1}{x} \log_a e$  | $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$               |
| $y = \ln x$            | $y' = \frac{1}{x}$           | $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$                 |
| $y = \sin x$           | $y' = \cos x$                | $\int \sin x dx = -\cos x + C$                  |
| $y = \cos x$           | $y' = -\sin x$               | $\int \cos x dx = \sin x + C$                   |
| $y = \text{tg } x$     | $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$    | $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x + C$   |
| $y = \text{ctg } x$    | $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$   | $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg } x + C$ |
| $y = u \cdot v$        | $y' = u'v + uv'$             | $\int u dv = uv - \int v du$                    |
| $y = \frac{u}{v}$      | $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ | $\int x \cos dx = s \sin x + \cos x + C$        |
| $y = f[u(x)]$          | $y' = f'(u) \cdot u'(x)$     | $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$                 |

Серед основних методів інтегрування найчастіше застосовуються:

1. Безпосереднє інтегрування – інтегрування, котре проводиться за допомогою таблиць (табл. 1) без додаткових перетворень. В окремих випадках використовують *метод розкладання*, який базується на поданні підінтегральної

функції через суму функцій, кожна з яких є табличною.

2. Інтегрування підстановкою (заміна змінної). Зміст цього методу полягає в тому, що в інтегралі  $\int f(x)dx$  виконується заміна змінної  $x = \varphi(t)$ , тобто вводиться нова змінна  $t$  замість  $x$ . Отримують диференціал  $dx = \varphi'(t)dt$ . Тоді початковий інтеграл записується у вигляді:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \quad (9)$$

Якщо підстановка (заміна змінної) вдала, то другий інтеграл легко визначається. Найчастіше для введення нової змінної вибирають деяку функцію, що входить у підінтегральний вираз:  $f = z(x)$ .

3. Інтегрування частинами. Розглянемо дві неперервні (диференційовні) функції  $u = u(x)$  і  $v = v(x)$ . Візьмемо диференціал добутку цих функцій:

$$d(uv) = vdu + udv$$

Звідси:

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du$$

або

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (10)$$

Таким чином, інтеграл  $\int u dv$  зводиться до інтеграла  $\int v du$ , який часто обчислюється простіше.

**Визначений інтеграл.** Коли ми вели мову про невизначений інтеграл, то мали на увазі певну міру, а саме площу, що обмежена кривою в межах зміни незалежної змінної. Якщо ми взяли б будь-який конкретний інтеграл, то побачили, що по-суті, він є одним із нескінченної множини невизначених інтегралів даної функції. Постійна величина (константа) невизначеного інтегралу не може бути вказана точно. Коли ми інтегруємо, то абсолютно ясно, що не має смислу підставляти константу кожний раз, оскільки для кінцевого результату інтегрування вона не має значення, бо при розрахунку постійні скорочуються. Інша справа, якщо ми задамо межі інтегрування, тобто інтервал в якому змінюється  $\Delta x$ . Інтеграл, взятий від функції на певному проміжку значень аргументу  $(x_i, x_{i+1})$  називається визначеним і записується у вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_1^n f(x_i)\Delta x \quad (11)$$

Визначений інтеграл використовується в моделюванні і прогнозуванні стану довкілля доволі широко. Так, зокрема, за його допомогою обчислюють площі фігур, довжини ліній, об'єми тіл довільної форми, роботу змінної сили, величину поступання у довкілля забруднюючих речовин із змінною інтенсивністю поступання, швидкість зміни тих чи інших параметрів екосистем, абсолютні значення цих змін (шлях), центри маси та інерції тощо. Наприклад, якщо відома швидкість зростання чисельності популяції  $v(t) = \frac{dN}{dt}$ , то можна знайти приріст чисельності популяції  $\Delta N$  за проміжок часу  $\Delta t = t - t_0$ :

$$\Delta N = N(t) - N(t_0) = \int_{t_0}^t v(t) dt \quad (12)$$

З наукових робіт в галузі екології мікроорганізмів відома закономірність зростання популяції пеніцилінових грибків в ідеальних умовах (при необмеженості ресурсів живлення):  $v = ae^{kt}$ . Приріст такої популяції за проміжок часу  $\Delta t$  становитиме:

$$\Delta N = \int_{t_0}^t ae^{kt} dt = \frac{a}{k} e^{kt} \Big|_{t_0}^t = \frac{a}{k} (e^{kt} - e^{kt_0}) \quad (13)$$

### 3. Диференціальні рівняння. Приклади їх застосування в екологічних дослідженнях

*Диференціальним рівнянням* називається рівняння, що містить похідні невідомої функції (можливо навіть різних порядків), функцію і її аргумент (або декілька невідомих функцій). Замість похідних дане рівняння може містити також і диференціали. Загальний вигляд диференціального рівняння з однією невідомою функцією:

$$\Phi(x, y, y', x'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (14)$$

Якщо невідомі функції залежать від одного аргументу, то диференціальне рівняння називається звичайним, якщо від багатьох аргументів, – диференціальним рівнянням із частковими похідними.

Порядок диференціального рівняння визначається найвищим із порядків похідних, що до нього входять.

Найчастіше диференціальні рівняння застосовують тоді, коли досліджувані екологічні явища та процеси описуються гладкими функціями, коли при моделюванні даних явищ і процесів необхідно оперувати такими параметрами, як швидкість, прискорення тощо. Наприклад, відомо, що в

гідрогеокології, швидкість інфільтрації вод в ґрунт, визначається наступною залежністю:  $y = 15 + 5x^{-0.5}$ , де  $y$  – швидкість інфільтрації, мм/год, а  $x$  – час в годинах []. Для зручності ми позначили швидкість інфільтрації через  $y$ , хоча в дійсності ця величина є похідною від кількості води за часом. Тому, можемо записати:

$$\frac{dy}{dx} = 15 + 5x^{-0.5} \quad (15)$$

Візьмемо інтеграл від цієї функції:

$$y = 15x + 10x^{0.5} + C \quad (16)$$

Отже, ми розв'язали рівняння (15). Але такий розв'язок є загальним, оскільки ми включили до нього сталу  $C$ . Рівняння (16) таким чином є загальним розв'язком диференціального рівняння (15). Задаючи певні значення  $y$  при даному значенні  $x$  ми можемо отримати часткові розв'язки. Наприклад, ми можемо записати, що:

$$\frac{dy}{dx} = 15 + 5x^{-0.5}, y = 10 \text{ при } x = 0,5 \quad (17)$$

або

$$\frac{dy}{dx} = 15 + 5x^{-0.5}, y(0,5) = 10 \quad (18)$$

Підставивши (0,5;10) в загальний розв'язок (16), знайдемо значення  $C$ :

$$10 = 15 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,5^{-0.5} + C$$

Звідси:  $C = 18,1$ . Частковий розв'язок матиме вигляд:

$$y = 15x + 10x^{0.5} + 18,1 \quad (19)$$

Значення  $x$  і  $y$ , завдяки підстановці яких ми отримали частковий розв'язок, називаються **граничними умовами**. Якщо ж ми задамо значення функції  $y$  при  $x = 0$ , то така умова називається **початковою умовою**.

#### 4. Основні методи розв'язування диференціальних рівнянь

Диференціальні рівняння загалом дуже різноманітні. тому існує величезна кількість методів їх розв'язування. В зв'язку із специфікою даного посібника і орієнтацією його на моделювання і прогнозування стану довкілля, а не на глибокий розгляд диференціальних рівнянь, обмежимось лише наведенням найбільш поширених методів розв'язку найпростіших диференціальних рівнянь (таблиця 2).

У класичному математичному аналізі розроблено чимало прийомів знаходження розв'язків диференціальних рівнянь через елементарні функції. Але при вирішенні практичних задач ці методи виявляються, як правило, або зовсім неадекватними, або їх розв'язок є неефективним у зв'язку із неприпустимими витратами зусиль і часу.

**Таблиця 2. Основні методи розв'язку диференціальних рівнянь**

| Вид рівняння  | Метод розв'язку  |
|---|--|
| Найпростіші:<br>$\frac{dy}{dx} = f(x)$  | Проінтегрувати   |
| Найпростіші:<br>$\frac{dy}{dx} = f(y)$  | Розділити на $f(y)$ і проінтегрувати   |
| З розділеними змінними:<br>$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(y)}{f_2(x)}$  | Розділити відповідні функції і проінтегрувати  |
| Однорідні<br>$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$  | Перевірити на однорідність з доопомогою підстановки $y = vx$ .<br>У випадку позитивного результату звести до вигляду:<br>$v + x \frac{dv}{dx} = f(v)$<br>Розв'язати і підставити вираз для $v$ |
| В повних диференціалах:<br>$Q \frac{dy}{dx} + P = 0$<br>$\frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy}$                   | Із виразу $du/dx = P$ знайти $u$ , потім із виразу $du/dy = Q$ знайти $f(y)$ . Розв'язок виражається через $u$   |
| Не є рівнянням в повних диференціалах:<br>$Q \frac{dy}{dx} + P = 0$<br>$\frac{dQ}{dx} \neq \frac{dP}{dy}$ | Постарайтесь знайти інтегруючий множник, так щоб:<br>$\frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy}$<br>Потім розв'язувати як в попередньому рівнянні  |
| Не є однорідним і в повних диференціалах:<br>$\frac{dy}{dx} + Ay = B$                                     | Записати у вигляді:<br>$\frac{d}{dx} e^{\int A dx} y = e^{\int A dx} B$  |

Для вирішення прикладних задач розроблені методи наближеного розв'язку диференціальних рівнянь, що умовно можна підрозділити на три основні групи:

1. **Аналітичні методи**, застосування яких дозволить отримати розв'язок диференціального рівняння у виді аналітичної функції (метод **Пікара**);
2. **Графічні методи**, що дають наближене рішення у виді графіка (метод **Ейлера**);
3. **Чисельні методи**, коли шукана функція представляється у виді таблиці (метод **Рунге-Кутта**).

Очевидно, що розв'язок рівняння виду  $y = f'(x, y)$  зводиться до відшукування найближчих значень інтегралу якщо рівняння задовільняє початкові умови, розв'язок існує і він єдиний. Як відомо з загальної теорії диференціальних рівнянь, для цього досить, щоб, функція  $f_y'$  що фігурує в правій частині рівняння була неперервна в розглянутій області по обох аргументах і мала обмежену часткову похідну.

**Метод Ейлера.** В основі методу ламаних **Ейлера** лежить ідея графічної побудови розв'язку диференціального рівняння. Цей метод дає одночасно і спосіб знаходження шуканої функції в чисельній (табличній) формі. Ідея методу полягає в тім, що на малому проміжку зміни незалежної змінної  $x_0 \leq x \leq x_0 + h = x_1$  інтегральна крива диференціального рівняння  $y' = f(x, y)$  замінюється відрізком прямої (дотичної)  $y - y_0 = f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)$ .

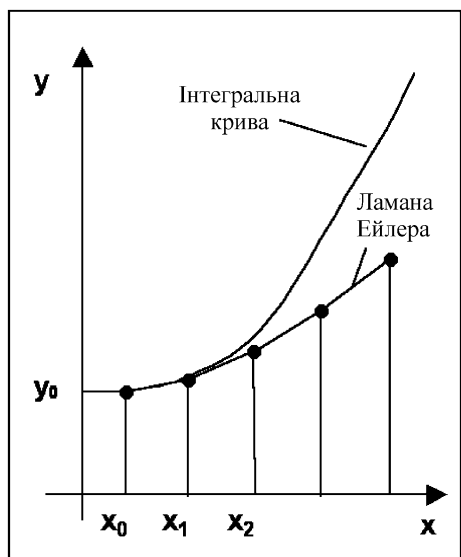


Рис. 1. Графічна суть методу Ейлера

Звідси  $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot h$  і процес можна повторити для проміжку  $x_1 \leq x \leq x_1 + h = x_2$  і т.д. Число  $h$  є тут кроком таблиці. Геометрично інтегральна крива замінюється при цьому ламаною, яку називають **ламанною Ейлера** (рис. 1).

Робоча формула для визначення значень  $y$  по методу **Ейлера** має вигляд

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k \quad (20)$$

де:

$$\Delta y_k = f(x_k, y_k) \cdot h, \quad y_k = y(x_k), \quad x_k = x_0 + kh$$

Метод **Ейлера** має малу точність, до того ж похибка кожного нового кроку систематично зростає. Найбільш прийнятним для практики методом оцінки точності є в даному випадку метод подвійного рахунка – із кроком  $h$  і з кроком  $h/2$ . Якщо в розв'язках, отриманих двома способами, збігаються десяткові знаки, то такі результати можна вважати вірними. Помилка методу пропорційна  $h^2$ . Існують різні уточнення методу **Ейлера**, що підвищують його точність так, що помилка методу стає пропорційною  $h^3$ .

**Метод Рунге-Кутта.** Нехай дане диференціальне рівняння першого порядку:

$$y' = f(x, y)$$

з початковими умовами  $y(x_0) = y_0$ . Виберемо крок  $h$  і для стислості введемо позначення  $x_i = x_0 + ih$  і  $y_i = y(x_i)$ , ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ). Приведемо без виведення один з варіантів відповідних розрахункових формул:

$$\begin{cases} k_1^{(i)} = h \cdot f(x_i, y_i), \\ k_2^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right), \\ k_3^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right), \\ k_4^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right) \end{cases} \quad (21)$$

Послідовні наближення  $y_i$  шуканої функції  $y$  визначаються по формулі:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (22)$$

де

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} (k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

В цьому випадку похибка на кроці пропорційна п'ятому степені кроку ( $h^5$ ). Звідси, зокрема, впливає, що при досить малому  $h$  і малих похибках



обчислень розв'язок рівняння, отриманий методом **Рунге-Кутта** за формулами (21), буде близьким до точного.

Геометричний зміст використання методу **Рунге-Кутта** з розрахунковими формулами (21) полягає в наступному: з точки  $(x_i, y_i)$  пересуваються в напрямку, визначеному кутом  $\alpha_1$ , для якого  $\operatorname{tg}\alpha_1 = f(x_i, y_i)$ . На цьому напрямку вибирається точка з координатами  $(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$ . Потім із точки  $(x_i, y_i)$  пересуваються в напрямку, визначеному кутом  $\alpha_2$ , для якого  $\operatorname{tg}\alpha_2 = f(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$ , і на цьому напрямку вибирається точка з координатами  $(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$ . Нарешті, із крапки  $(x_i, y_i)$  зрушуються в напрямку, обумовленому кутом  $\alpha_3$ , для якого  $\operatorname{tg}\alpha_3 = f(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$  і на цьому напрямку вибирається точка з координатами  $(x_i + h, y_i + k_3)$ . Цим задається ще один напрямок, визначений кутом  $\alpha_4$ , для якого  $\operatorname{tg}\alpha_4 = f(x_i + h, y_i + k_3)$ . Чотири отриманих напрямки **усереднюються** відповідно до останньої з формул (21). На цьому остаточному напрямку і вибирається чергова точка  $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i + h, y_i + \Delta y)$ .

Що ж стосується диференціальних рівнянь **n-ого** порядку:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (23)$$

для яких завдання Коші полягає в знаходженні рішення  $y = y(x)$ , що задовольняє початковим умовам:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де  $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$  – задані числа, то їх можна звести до системи диференціальних рівнянь першого порядку. Так, наприклад, рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y'), \quad (24)$$

можна записати у виді системи двох рівнянь першого порядку за допомогою стандартної заміни:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases} \quad (25)$$

Методи рішення систем звичайних диференціальних рівнянь ґрунтуються на відповідних методах рішення одного рівняння.

## 5. Чисельне інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь

Метод **Рунге-Кутта** застосовується також для наближеного розв'язку *систем звичайних диференціальних рівнянь*. Нехай, наприклад, задана система диференціальних рівнянь:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \quad (26)$$

$$\text{де } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Під *рішенням системи* (26) розуміється будь-яка сукупність функцій  $(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ , яка, будучи підставлена в рівняння (26), перетворює їх у тотожності. Оскільки система диференціальних рівнянь має незліченну безліч рішень, то для вибору одного конкретного рішення  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$ , крім самого рівняння, потрібні додаткові умови. У найпростішому випадку задаються початкові умови

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^{(0)} \quad (27)$$

що приводить до задачі Коші. Наприклад, знайдемо розв'язок  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$  системи (26), що задовольняє заданим початковим умовам (12), де  $x_0$  - фіксоване значення незалежної змінної, а  $\mathbf{y}^{(0)}$  - задана система чисел

$$\mathbf{y}^{(0)} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

Якщо  $x$  інтерпретувати як час, а  $y_1, \dots, y_n$  - як узагальнені координати деякої екологічної системи, то отримаємо наступний аспект задачі Коші: знаючи диференціальні рівняння, що керують системою, а також стан її в початковий момент часу  $x_0$ , визначити стан системи в будь-який момент часу  $x$ .

Задавши деякий крок  $h$  і ввівши стандартні позначення  $x_i = x_0 + ih$  і  $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_i(x)$ ,  $\Delta \mathbf{y}_i = \mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i$  при  $i=0, 1, 2, \dots$ , можемо записати:

$$\begin{cases} k_1^{(0)} = hf(x_0, y_0), \\ k_2^{(0)} = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}), \\ k_3^{(0)} = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}), \\ k_4^{(0)} = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + k_3^{(0)}) \end{cases} \quad (28)$$

Відповідно до методу Рунге-Кутта  $\Delta y_0$  приблизно визначають по формулі

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}), \quad (29)$$

звідси:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0.$$

Далі, прийнявши  $(x_1, y_1)$  за вихідні дані і повторюючи той же процес, знаходимо  $y_2$ . Аналогічно розрахунки проводяться далі.

Сучасна комп'ютерна техніка дозволяє суттєво спростити розрахунки при розв'язку диференціальних рівнянь та їх систем. На сьогодні існує два підходи до розв'язку диференціальних рівнянь за допомогою комп'ютера.

Перший з них передбачає написання програми на одній з мов програмування (як високого, так і низького рівня), яка б автоматично розв'язувала певне рівняння після задання умов розрахунку (граничних і початкових). В основі розробки такої програми лежить один із відомих математичних способів розв'язку диференціальних рівнянь (найчастіше, Ейлера, Рунге-Кутта). Даний метод є відносно складним, оскільки передбачає не лише знання теорії диференціальних рівнянь на високому рівні, але й володіння однією із мов програмування (Basic, Pascal, TurboPascal, Delphi, Visual Basic, C++ тощо).

Інший метод є дещо простішим. Диференціальні рівняння та їх системи можна розв'язувати за допомогою встроєних можливостей деяких комп'ютерних програм (Derive, Mathematica, MathCad, MathLab тощо). Алгоритми встроєних функцій по розв'язуванню рівнянь теж є стандартними (Ейлера, Рунге-Кутта, або їх модифікацій). Складність цього методу полягає в тому, що потрібно добре знати синтаксис програми, а математичних процесорах він, як правило, доволі складний. Хоча перевага методу – очевидна: суттєва економія

## Лекція № 7

### Прогнозування стану навколишнього середовища

#### План

1. Основні вихідні поняття прогнозування
2. Класифікація прогнозів та методів прогнозування
3. Особливості довго- та короткострокових прогнозів
4. Приклади базових методик прогнозування стану довкілля

#### 1. Основні вихідні поняття прогнозування

Моделювання стану довкілля тісно пов'язане із прогнозуванням стану його компонент, прогнозуванням антропогенного впливу на ці компоненти та їх здатності чинити опір зростаючому тиску сумпільства та виробництва, зберігати свою структуру та властивості, відновлювати втрачені параметри. В широкому смислі слова – **прогнозування** – це науково обґрунтоване передбачення перспектив розвитку тієї чи іншої системи, а також власне сам процес його отримання. **Екологічним прогнозуванням** називають передбачення стійких змін у навколишньому середовищі, що відбуваються внаслідок складних ланцюгових реакцій, зв'язаних як з безпосереднім впливом людства на довкілля, так і з віддаленими опосередкованими наслідками цих впливів [].

Результатом прогнозування є **прогноз** – сукупність науково передбачених даних (висновків) щодо значень параметрів системи у певні майбутні моменти часу.

Прикладів екологічних прогнозів можна навести дуже багато:

- прогноз розвитку промисловості, сільського господарства, транспорту, електроенергетики світу чи окремих регіонів і змін в екосистемах (в т.ч. і біосфері, як глобальній екосистемі) внаслідок впливу цих факторів;
- прогноз зміни окремих компонентів довкілля (клімату, ґрунтів, поверхневих та підземних вод, біоти, геологічного середовища);
- прогноз використання, скорочення та виснаження певних видів природних ресурсів;
- прогноз зміни структури промислового виробництва та його впливу на довкілля у зв'язку із впровадженням новітніх технологій, безвідходних та маловідходних технологій, замкнених циклів водокористування, утилізації відходів;
- прогноз розвитку глобальних екологічних проблем (“глобального потепління”, “озонових дір”, “кислотних опадів” і т.д.);
- прогноз зміни стану здоров'я населення як реакції на екологічну ситуацію в регіоні тощо.

#### 2. Класифікація прогнозів та методів прогнозування

На сучасному етапі прогнозування стану довкілля виросло в окрему,

досить складну і розгалужену галузь знань. Тому виникла об'єктивна необхідність в класифікації прогнозів. В загальному випадку прогнози можна класифікувати:

***1. За метою та задачами передбачення:***

- 1) прогноз дії на середовище – науково обґрунтоване передбачення видів, факторів та масштабів антропогенного впливу на навколишнє середовище, що чиниться внаслідок промислового, сільськогосподарського та інших видів виробництва у регіоні;
- 2) прогноз реакції середовища – науково обґрунтоване передбачення стійких змін у природному середовищі, викликаних прямою або побічною дією зазначених вище факторів; будуються ці прогнози шляхом моделювання функцій відклику екосистеми на дію зовнішніх (“стресових”) факторів; даний вид прогнозів є найбільш складним і неоднозначним – досьгодні в екологічній науці точаться дискусії з приводу зворотності чи незворотності таких змін;
- 3) прогноз зміни середовища — науково обґрунтоване передбачення змін природних комплексів та їх компонентів під дією всієї сукупності природно-антропогенних чинників.

***залежно від граничного терміну прогнозування:***

- 1) короткочасні, або оперативні прогнози (на 1-2 роки);
- 2) прогнози середньої тривалості (на 5-10 років);
- 3) довгострокові прогнози (на 15-25 років);
- 4) понаддовгострокові прогнози (на 50-100 років).

***за масштабами передбачуваних явищ:***

- 1) глобальні (фізико-географічні або ще їх називають планетарні);
- 2) регіональні (в межах крупних природних регіонів);
- 3) національні (в межах країни);
- 4) локальні (для невеликих територій).

***за призначенням:***

- 1) наукові прогнози (здійснюються для побудови сценаріїв майбутнього розвитку, є не дуже точними і часто надто гіпотетичним);
- 2) прикладні (розробляються для вирішення конкретних задач, що виникають в економіці або житті суспільства; є відносно точними; в якості приклада можна назвати демографічні або синоптичні прогнози);
- 3) прогнози-застереження (характеризуються найвищим ступенем гіпотетичності, основна їх задача – просвітницька, тобто інформування громадськості про наступаючі гострі проблеми).

У зв'язку із складністю та різноманітністю різних типів та видів прогнозів доцільно їх також поділяти за методом прогнозування. Методів прогнозування існує величезна кількість. Але в загальному випадку усі існуючі методи прогнозування стану природного середовища можна об'єднати у три основні групи:

- евристичні методи експертної оцінки;
- методи екстраполяції (статистичні методи);

- методи математичного моделювання.

**Метод експертної оцінки (метод евристичного, або інтуїтивного прогнозування)** – так званий *метод Делфі*, іноді в спеціальній літературі ще використовують термін “*метод спільної генерації ідей*”) базується на логічному моделюванні й полягає у вилученні прихованих у людини знань шляхом штучних навідних запитань. Методика розробки прогнозу передбачає спеціалізовану експертну оцінку, що здійснюється висококваліфікованими спеціалістами-експертами у певній вузькій галузі знань, та математичну обробку анкет із їх оцінками та висновками.

Застосовується, як правило, тоді, коли об'єкти прогнозування не підлягають повній або частковій формалізації. Недоліком цього методу прогнозу є високий рівень суб'єктивності висновків. Суб'єктивність проявляється у тому, що у різних груп експертів однакової кваліфікації результати прогнозу можуть суттєво відрізнятись.

**Метод екстраполяції** полягає у перенесенні результатів досліджень, отриманих у певній галузі діяльності на аналогічні галузі (метод аналогій) або перенесенні ретроспективно ортиманої інформації про попередній розвиток об'єкта на його наступний розвиток (метод ретроспективного аналізу і прогнозу).

Недоліком даного методу є обмеженість його філософсько-методологічної основи. А саме: метод ґрунтується на постулатах формальної логіки, коли кожна наступна подія детермінується попередньою, тобто ніби чіпляється за попередню. Як свідчать результати екологічних досліджень динаміку в часі будь-якої складної екосистеми представляється у вигляді зміни станів. Так, наприклад, А.М. Трофімов і М.В. Панасюк (1984) висунули геоситуаційну концепцію, суть якої полягає в тому, що природні косплекси еволюціонують від однієї “ситуації” до іншої. Окрім того, слід згадати, що в розвитку екосистем досить часто мають місце біфуркації, з допомогою яких в системному аналізі обґрунтовується непередбачуваність результатів будь-яких випадкових складних процесів. Типовим явищем у розвитку природних об'єктів є й псевдобіфуркації, тобто ефекти, пов'язані із можливим знаходженням екосистеми в одному із двох (кількох) різних станів при одних і тих же ж зовнішніх впливах. І це все відбувається на фоні розвитку суспільного виробництва і зростаючого антропогенного навантаження, яке теж далеко не є простим лінійним процесом. Але не дивлячись на ці недоліки методи екстраполяції застосовуються доволі широко завдяки своїй простоті і очевидності.

Різновидами методу екстраполявання є статистичні методи оцінки наступних значень варіаційного ряду, виходячи з попереднього характеру кривої. Реалізуються вони шляхом продовження існуючої тенденції на перспективний часовий інтервал. Іноді до екстраполяції відносять також інтерполяцію – тобто пошук проміжних значень варіаційного ряду між відомими її значеннями. Інтерполяція за своїм змістом зводиться до проведення через відомі точки заздалегідь відомих кривих ліній (лінійна, степенева, логарифмічна, експоненціальна, поліноміальна та інші види інтерполяції), а вже на цих лініях для відповідних моментів часу знаходяться конкретні значення досліджуваної ознаки.

Метод екстраполяції застосовують для короткострокових (оперативних) прогнозів, у тому разі, коли розвиток процесів протягом значного проміжку часу відбувається рівномірно, без значних стрибків (флуктуацій і біфуркацій).

**Метод математичного моделювання** процесів полягає в детальному аналізі причин та тенденцій можливих змін у стані довкілля, побудові часткових математичних моделей стану екосистеми і подальшому переходу до моделі реальної системи. Моделі відображають найсуттєвіші, найважливіші властивості та функції деякого складного процесу чи об'єкта. При прогнозуванні наслідків антропогенних впливів на природне середовище розрізняють **геофізичні** моделі (моделі процесів переносу або перетворення забруднюючих речовин у навколишньому середовищі) та **екологічні** моделі (зміни стану екосистеми, стійкості та потенціалу самоочищення системи тощо). Математичне моделювання оперує інструментами багатьох розділів математики (аналітичної геометрії, диференціальних рівнянь, математичного аналізу, теорії функцій тощо). Спирається даний метод на потужну базу фізичних та хімічних наук. Тому, що для того аби змоделювати стан чи розвиток будь-якої складної системи потрібно чітко уявляти собі суть процесів, які відбуваються в цій системі, з фізичної та хімічної точки зору. Без таких знань будь яка модель чи прогноз виглядають абсурдно.

Згідно з **принципом неповноти інформації (принципом невизначеності)**, всі методи екологічного прогнозування є обмеженими []. Суть цього принципу полягає в тому, що інформація, яка використовується при проведенні акцій з перетворення природи, завжди є недостатньою для апріорного судження про всі можливі наслідки здійснюваного заходу (особливо у віддаленій перспективі). Це пов'язане з винятковою складністю природних систем, їх індивідуальною унікальністю та неминучістю природних ланцюгових реакцій, направленість який часто важко передбачити. Для зменшення ступеня невизначеності моделювання необхідно доповнювати безпосередніми дослідженнями у природі, натурними експериментами і визначенням динаміки процесів. Принцип невизначеності є важливим обмеженням у використанні методу аналогій при екологічному прогнозуванні, оскільки аналогія є неповною через індивідуальність природних систем.

### **3. Особливості довго- та короткострокових прогнозів**

**Особливості довгострокового прогнозування.** Довгострокове прогнозування, як правило, відбувається на основі застосування статистичних методів. Ці методи дають більш-менш адекватні результати в тому випадку, якщо прогнозування ведеться на досить тривалий період часу (більш як 20 років), а інтервал часу збору інформації достатньо перевищує граничний термін прогнозу.

**Особливості оперативного прогнозування.** На відміну від довгострокового, оперативне (короткострокове) прогнозування ведуть на основі побудови динамічних формалізованих математичних моделей, що враховують внутрішню структуру і закони взаємодії компонентів системи.

Такий прогноз виявляється ефективним, оскільки більшість природних і соціально-економічних факторів не встигають істотно змінитися за період, на який складається оперативний прогноз, а вплив неврахованих факторів не встигає істотно збільшити невизначеність прогнозу.

#### 4. Приклади базових методик прогнозування стану довкілля

**Методика довгострокового прогнозування забруднення водного об'єкта** (за [1]). Період часу, охоплений ретроспективною статистичною базою даних, і період, на який складається прогноз, поділяється на інтервали  $t_n \dots t_{n+1}$  ( $n = 1; 2; 3 \dots$ ) однакової тривалості  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ . Потім за результатами обробки статистичних даних визначається максимальне значення антропогенної складової іонного стоку  $R_i(n)$  на кожному з таких інтервалів на момент складання прогнозу  $t$ . Прогноз на наступні моменти часу  $t$  ( $n > N$ ) складається за формулою:

$$R_i(n) = [R_i(n-1)]^2 / R_i(n-2) \quad (1)$$

Такий метод прогнозу ґрунтується на гіпотезі сталості темпів інтенсифікації забруднення, за яких  $R_i(n)$  змінюється з ростом  $n$  в геометричній прогресії. Тому такий прогноз буде реалістичним тільки при тривалому збереженні темпів розвитку екологічного процесу. У протилежному випадку (наприклад, в умовах кризи) дані такого прогнозу можуть виявитися помилковими. У такому разі слід збільшити період прогнозування й інтервал  $\Delta t$  прогнозування або ж зробити його таким, що дорівнює періоду коливань темпів розвитку господарської діяльності в регіоні.

**Регресійна модель поширення забруднення** (за [1]). Дана модель використовується для встановлення просторових та часових характеристик поширення забруднень по території, що оточує джерело забруднення. Суть методу полягає у тому, що істинна залежність концентрації забруднення від часу і координат апроксимується деяким поліномом, що залежить від часу ( $t$ ) і відстані ( $x$ ) уздовж напрямку поширення забруднення. Період спостереження і контрольована ділянка простору розбиваються на однакові інтервали  $\Delta t$  і  $\Delta x$ , а середню концентрацію забруднювача на кожному з таких інтервалів нормують шляхом ділення на певне значення концентрації  $C_0$  (наприклад, на величину ГДК або ж на значення концентрації в початковий момент на початковій ділянці контрольної території). Поліном, за допомогою якого складають регресію, має наступний вигляд:

$$u(i, k) = a_0 - a_1 u(i, k-2) - a_2 u(i+1, k-1) - a_3 u(i, k-1) + a_4 u_2(i, k-1), \quad (2)$$

де  $u(i, k) = C(i\Delta x, k\Delta t) / C_0$  — відносна (нормована на  $C_0$ ) концентрація забруднювача. Коефіцієнти  $a_j$  ( $j = 0; 1; \dots 4$ ) у цьому поліномі підбирають емпіричним шляхом за результатами регресійного аналізу даних хімічного дослідження проб.



## Лекція № 8

### Аналіз просторових закономірностей стану довкілля. Еколого-картографічне моделювання

#### План

1. Принципи картографічного моделювання
2. Властивості карт як моделей
3. Поєднання карт з іншими моделями
4. Інформаційні властивості карт
5. Прикладні методики математико-картографічного моделювання

#### 1. Принципи картографічного моделювання

У екологічній науці моделювання розуміється досить широко, як створення образу якого-небудь явища або процесу. Моделями в науках про взаємодію суспільства і природи служать географічні (геологічні, соціологічні і т.п.) описи, теорії і гіпотези, аеро- і космічні знімки, таблиці, профілі і діаграми, математичні і логічні формули, рівняння і символи. Особливе місце в переліку моделей стану довкілля займають екологічні карти. На сьогодні еколого-картографічне моделювання є одним із пріоритетних та перспективних напрямків моделювання та прогнозування стану довкілля. Моделюванням називають опосередковане практичне або теоретичне дослідження якого-небудь об'єкта або явища, при якому вивчається не сам об'єкт або явище, а якийсь його замітник: допоміжна штучна або природна система (Новик, Уємов, 1968; Берляндт, 1988). При цьому модель повинна знаходитися у визначеній об'єктивній відповідності з досліджуванним процесом або явищем, заміщаючи його на окремих етапах пізнання і даючи в кінцевому рахунку інформацію про сам модельований об'єкт.

У сучасній картографії *карти* найчастіше розглядаються як образно-знакові моделі, що відтворюють ту або іншу частину дійсності в схематизованій (генералізованій) і наочній формі. Картографічні моделі відбивають не тільки зовнішні форми, але також сутність явищ. Вони служать не тільки для реалізації накопичених знань (для передачі інформації), але також як засіб отримання нових знань. Поняття “картографічне моделювання” дозволяє охарактеризувати картографування і використання карт за допомогою загальних гносеологічних категорій, включити карти в клас моделей, розширити, доповнити і скорегувати картографічні методи, співвідносячи їх із загальнонауковими методами моделювання. З'являється можливість знайти оптимальні варіанти стикування з іншими видами моделювання (математичним, комп'ютерним і т.п.).

Картографічне моделювання – це створення, аналіз і перетворення картографічних творів як моделей об'єктів і процесів з метою їхнього використання для отримання нових знань про ці об'єкти і процеси. Самі *карти* розглядаються як математично визначені, просторові образно-знакові моделі дійсності. Картографічне моделювання — один із проявів загальнонаукового методу моделювання, тому воно спирається на його загальні принципи, переломлюючи їх згідно своїм можливостям та предмету пізнання (рис. 1, наводиться за []).



*Рис. 1. Ієрархія принципів еколого-картографічного моделювання*

Наведені на схемі (рис. 1) загальні принципи моделювання зазнали наукової конкретизації в картографії і тих науках, що користуються картографічною формою моделювання. Картографічне моделювання спирається на чотири основні принципи:

- математичної формалізації, що забезпечує перехід від сферичної поверхні планети до площини через картографічні проєкції;

- символізації, тобто використання систем умовних знаків;
- генералізації, що виявляється в доборі головного, істотного і його цілеспрямованому узагальненні згідно призначення, тематики і масштабу карти;
- системності, що визначає всі етапи складання і генералізації картографічного зображення, проектування легенд і знакових систем.

Серед інших принципів моделювання, що використовуються у науках про Землю і суспільство, найбільш істотні для картографування принцип системності, конкретизований стосовно просторових і часових характеристик геосистем, принцип історизму, що розкривається в порівняльному й актуалістичному підходах і т.д. Дуже важливим є також принцип ієрархічності класифікацій, адже таксономічні класифікації – основа для розробки легенд карт.

Таким чином, кожна конкретна картографічна модель реалізується на основі власне картографічних принципів моделювання і принципів моделювання, прийнятих у галузевих науках (умовно назвемо їх принципами тематичного моделювання). Складна ієрархія принципів моделювання, що визначають властивості карти як моделі, ілюструється схемою (мал. 2.1).

## 2. Властивості карт як моделей

**Просторово-часова подібність.** Існує кілька проявів подібності картографічного зображення і його реального прообразу []:

- а) геометрична подібність, що виявляється в подібності розмірів об'єктів картографування і їхніх зображень, що забезпечує точність вимірів по картах у межах можливостей даного масштабу, шкали, прийнятого січення;
- б) часова подібність, що означає адекватну передачу стану і розвитку явищ у даний (відображуваний на карті) момент часу;
- в) подібність відносин, що полягає в подібності зв'язків, територіальної співвідпорядкованості. взаємного розташування об'єктів.

**Змістова відповідність** – одна з найважливіших властивостей картографічної моделі. Вона передбачає науково обґрунтоване зображення явищ, їх головних типових особливостей з урахуванням генезису, ієрархії і внутрішньої структури. Змістова відповідність визначається рівнем вивченості явища, повнотою і достовірністю вихідної інформації, науково обґрунтованою методикою складання і правильною картографічною генералізацією. Змістова відповідність виявляється через ізоморфізм – однозначну відповідність моделі й об'єкта, що характерно для великомасштабних аналітичних карт, і гомоморфізм, коли одному об'єкту на карті відповідає деяка множина реальних об'єктів. В той же ж час карта містить елементи суб'єктивної інтерпретації дійсності, але це не можна розглядати як недолік, а, скоріше, як перевагу

карти. Адже такий підхід значною мірою захищає від формалізму, дозволяючи досвідченому спеціалісту-екологу використовувати свої знання і дані, що не піддаються формалізації.

**Абстрактність.** Найбільшою мірою абстрагуванню сприяє генералізація картографічного зображення – цілеспрямований добір, узагальнення, ідеалізація об'єктів, виключення незначних і малоістотних для даної карти деталей, акцентування уваги на головних рисах і т.д. Абстрактність картографічної моделі дає переваги, незамінні при дослідженні.

**Вибірковість.** Суть цієї властивості полягає в тому, що картографічна модель здатна роздільно відтворювати фактори, явища і процеси, що у реальній дійсності діють спільно. Узагалі будь-яка карта показує явища вибірково (селективно), але в найбільшій мірі цією властивістю володіють аналітичні карти. З їх допомогою можна розщеплювати взаємозв'язки, ніби “розкласти по полицках” і піддати аналізу самі складні екологічні явища та процеси.

**Синтетичність** картографічної моделі, навпаки, забезпечує цілісне зображення явищ і процесів, що у реальних умовах виявляються ізольовано. Картографічний синтез пов'язаний з введенням узагальнюючих понять, показників, умовних позначок, з розробкою синтетичних легенд.

**Метричність** – найбільш явна властивість карти, що забезпечується математичним законом проєкції, точністю складання і відтворення карти. Масштаб, класифікації, шкали і градації умовних позначок дозволяють виконувати по картах усілякі виміри і визначення, а, зокрема:

- а) одержувати якісні характеристики;
- б) здійснювати виміри в абсолютному або відносному вираженні;
- в) вводити бальні оцінки, що носять проміжний характер між якісними і кількісними показниками.

Завдяки своїм метричним властивостям карти є основою для створення математичних моделей. Ближче усього до карт у цьому відношенні стоять космічні та аерофотознімки, фотограметричні моделі, графіки і схеми.

**Наочність** – прямий наслідок образного характеру картографічної моделі. Величезне значення наочності підтверджується на сьогодні оснащенням сучасних електронно-обчислювальних систем засобами візуалізації інформації, бурхливим розвитком ГІС-технологій. Властивості наочності позбавлені математичні і поняттєві моделі.

**Оглядовість** – найспецифічна властивість карти, що дозволяє досліднику охопити єдиним поглядом як завгодно великі простори. Саме завдяки цій властивості моделюються охоплюються головні властивості екосистем, причому інформація подається в систематизованому й формалізованому вигляді.

**Однозначність** зображення також впливає з математичного закону побудови карти. Цю властивість варто розуміти ширше, ніж просту взаємну

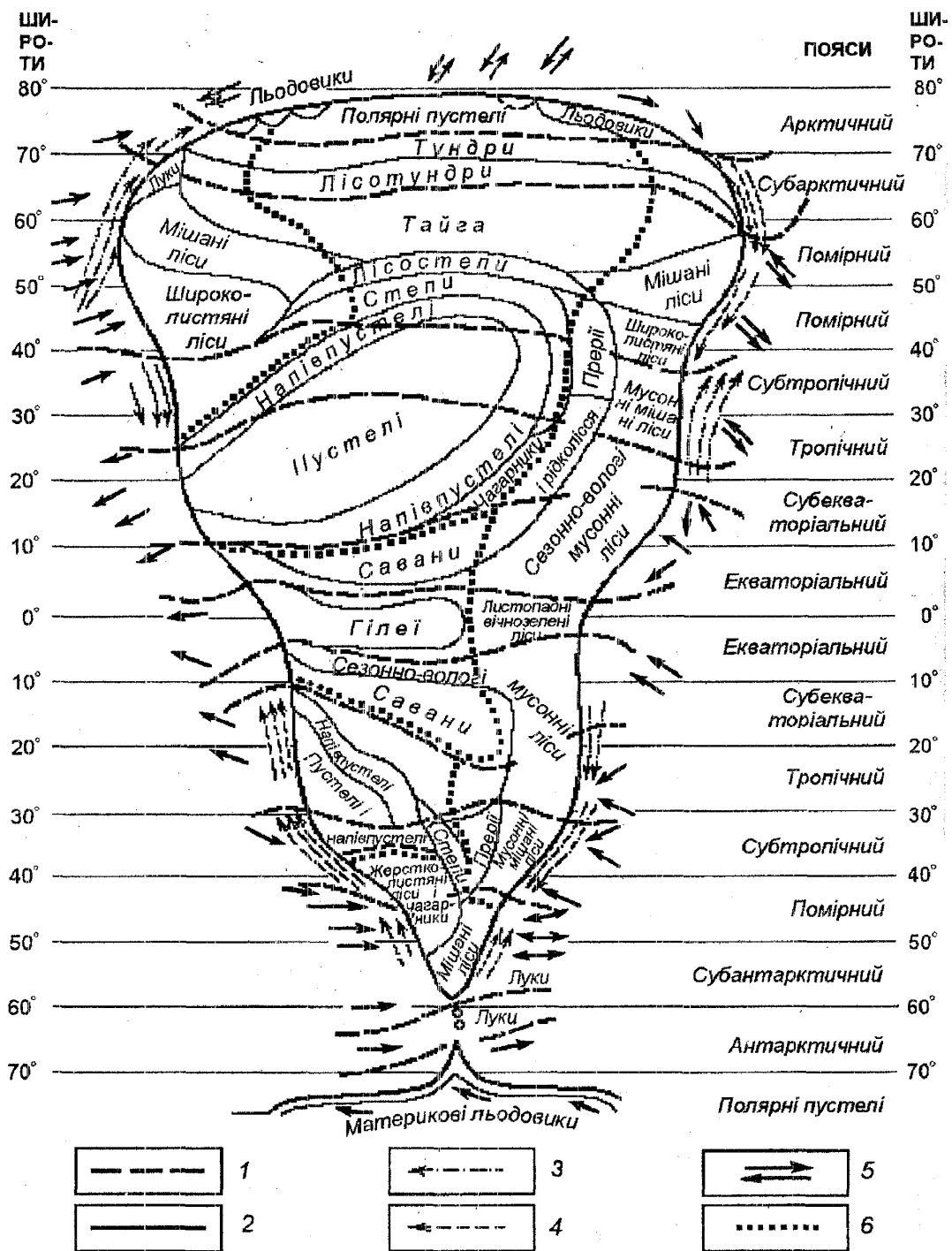
однозначну відповідність точок на карті і на земній поверхні, коли будь-якій крапці точці з координатами  $X$  и  $Y$  поставлено у відповідність лише одне значення ( $Z$ ) картографованого показника:  $Z = F(X, Y)$ . Однозначність має й інше трактування. Справа в тім, що всякий знак, будь-яка точка, лінія або полігон на карті мають лише один, зафіксований у легенді, зміст.

**Безперервність зображення.** Математичне рівняння можна скласти тільки по окремих відомих значеннях, в описі або на схемі недосліджені місця опускаються. Для створення карти необхідно володіти даними для всієї території. Безперервність картографічного зображення – велика перевага лише у випадку досконалої вивченості території, але при недостатній або нерівномірній вивченості ця властивість може стати недоліком карти.

### 3. Поєднання карт з іншими моделями

Спільне застосування карт і інших моделей – характерна риса сучасних екологічних досліджень, особливо в тих випадках, коли мова йде про вивчення складних екосистем.

Типовий приклад цього – **теоретико-картографічне моделювання**, тобто поєднання образно-знакових картографічних моделей з ідеальними теоретичними, з одного боку, карти сприяють висуванню наукових концепцій і гіпотез, а з іншого – різного роду апріорні схеми, представлені в картографічній формі, отримують наочне “предметне” відображення. Саме таким шляхом перевіряють, конкретизують і коректують теорії, гіпотези, прогнози й екстраполяції, зіставляють їх з фактичними картами, аеро- і космічними зображеннями або з об'єктами, що реально існують у природі. Абстрактні картографічні моделі дуже зручні для відпрацьовування принципів і методики дослідження. Вони дають можливість поставити дослід в контурному, базовому вигляді, а потім, змінюючи просторові умови, ускладнюючи модельне зображення, уводячи нові фактори й аномалії, моделювати на картах екстремальні ситуації, що не зустрічаються в реальній дійсності, наприклад, в цілях прогнозу стану довкілля.



Умовні позначення:

1. межі поясів; 2. межі зональних типів ландшафтів; 3. Теплі течії;
4. холодні течії; 5. переважаючі напрямки вітрів; 6. межі секторів

**Рис. 2.** Схема розміщення географічних поясів та природних зон на гіпотетичному (ідеальному) материку, обриси якого відповідають розподілу суші за відповідними географічними широтами, а гори умовно відсутні (за О. Рябчиковим)

Яскравим прикладом ідеальної теоретико-картографічної моделі є карта так званих “ідеальних материків” (рис. 2). Вона прекрасно передає асиметрію

розподілу суші і моря на земній кулі, що зручно для теоретичного аналізу глобальної широтної зональності, меридіональної секторності й інших природних закономірностей. З даною картою добре узгоджуються ідеальні ґрунтово-геохімічні поля, що дозволяє порівнювати і аналізувати з прийнятною точністю територіальну складову сучасних передумов геоекологічної ситуації, вмісту та міграції хімічних елементів (в т.ч. і полютантів) та інш. Такі абстрактні і спрощені моделі можна далі порівнювати з реальними ситуаціями в Євразії, Північній і Південній Америці, відзначаючи при цьому “аномальні” особливості, пов’язані з площею і конфігурацією кожного реального материка, його географічним положенням і орографією, розміщенням постійних і сезонних центрів дії атмосфери, пануючих вітрів (в т.ч. і транскордонного переносу) і морських течій.

Теоретико-картографічне моделювання дозволяє:

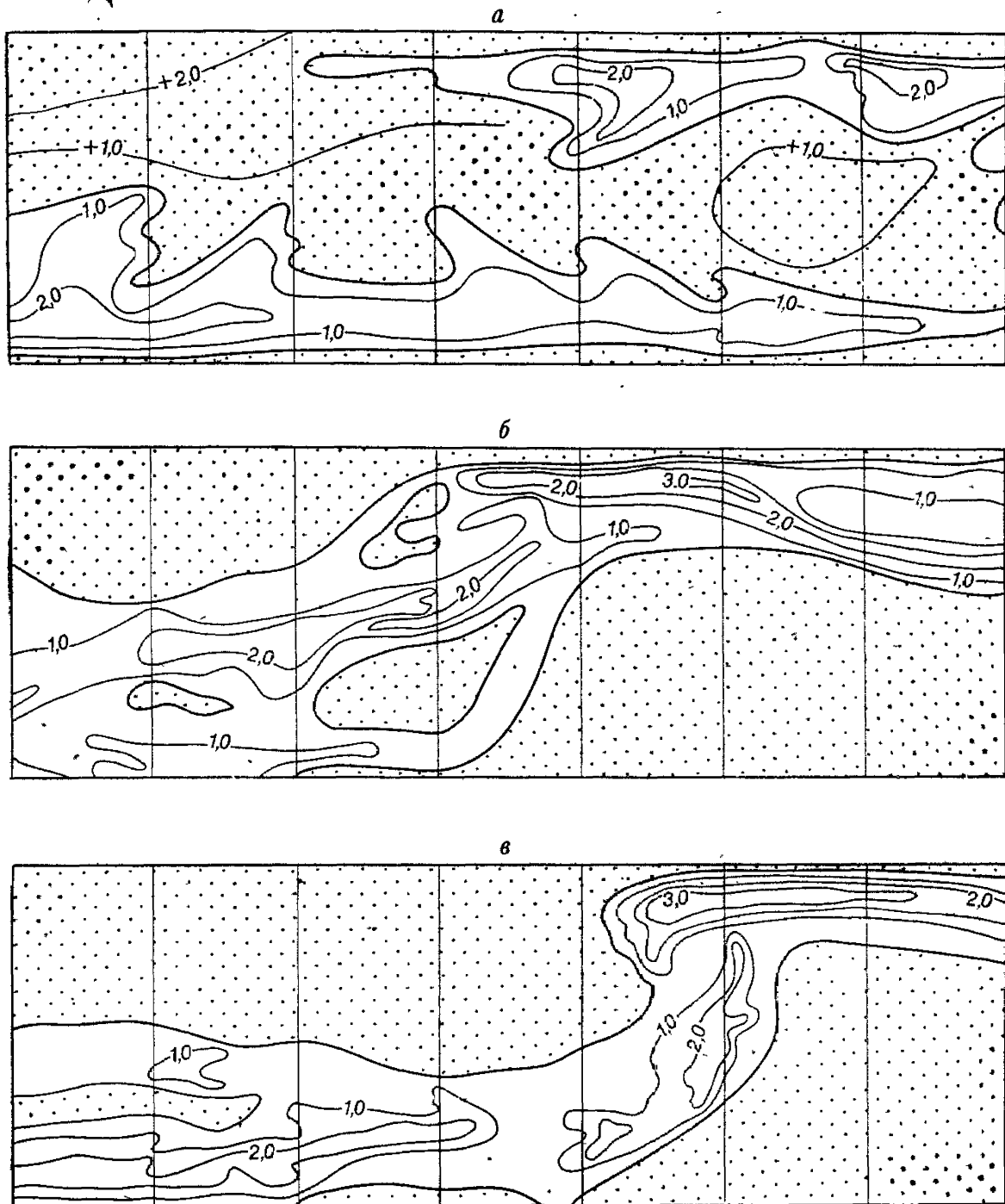
- а) аналізувати й упорядковувати властивості реальних об’єктів дійсності;
- б) відбирати (виділяти) властивості, істотні з теоретичної точки зору, і будувати моделі, що володіють цими властивостями;
- в) аналізувати і порівнювати ідеальні моделі з реальними об’єктами, виділяти нормальні й аномальні фактори;
- г) створювати і розвивати подільші теоретичні напрацювання;
- д) уточнювати й удосконалювати послідовними наближеннями саму теоретико-картографічну модель.

**Експериментально-картографічне моделювання.** Якщо взаємодія картографічних і теоретичних моделей здійснюється на рівні високої абстракції й ідеалізації досліджуваного об’єкта, то спільне застосування карт і фізичних, лабораторних моделей дозволяє реалізувати найбільш конкретне, предметне дослідження. У цьому випадку карта стає засобом точного кількісного аналізу результатів моделювання. Наприклад, при дослідженні на лабораторних моделях механізму ерозійної діяльності, сучасних несприятливих геологічних процесів (в т.ч. і антропогеннозумовлених), при оцінці екологічних умов гідроекосистем, при аналізі впливу того чи іншого підприємства на стан оточуючого середовища складаються карти, що фіксують різні стадії експерименту.

На рис. 3 представлені карти послідовних етапів формування перекатів, утворення піщаних гряд і улоговин, їх зміщення по руслу при лабораторному моделюванні в лотку. Це ніби серія дуже докладних різночасних карт (січення рельєфу русла — 1 см), по яких дуже зручно простежити й оцінити картометрично динаміку руслових процесів.

Точно так само, комбінуючи лабораторні моделі і карти, простежують і вимірюють динаміку ярів, масштаби дефляції ґрунтів, зміни поверхневого та

підземного стоку, забруднення поверхневих, підземних вод, ґрунтів, атмосфери, динаміку лісових масивів, величини антропогенного навантаження та інші екологічні процеси.



**Рис. 3.** Картографічне відображення результатів моделювання руслових процесів у лабораторному лотку. Сезонні переміщення перекату (запозичено з роботи Берлянта А.М., 1988):

а – весняна повінь; б – початок літньої межені; в – кінець літньої межені



Окремо слід згадати високу пізнавальну ефективність математико-картографічного моделювання, що використовує сильні сторони математичних і картографічних моделей у процесі аналізу і синтезу багатофакторної і різномірної просторово-тимчасової інформації (Жуков, 1980). Картографічна інтерпретація математичних розрахунків приводить їх до виду, оптимального для дослідження, попереджує помилки і прорахунки, дозволяє оцінити точність математичного моделювання і його еколого-географічну достовірність. Найбільш глибоко особливості даного виду моделювання розглянуті і в роботі []. В цій праці В.Т. Жуков, С.Н. Сербенюк, В.С. Тікунов (1980) пропонують конкретні прикладні методики побудови кореляційних, регресійних, факторних, таксономічних моделей та перспективи автоматизації процесів математико-картографічного моделювання.

Спільне використання карт і математичних моделей вплинуло не тільки на картографію, але і на математизацію всієї екологічної науки, перш за все, шляхом:

- а) модифікації математичних понять і термінів відповідно до картографічної термінології;
- б) перетворення математичного апарату з урахуванням просторових властивостей карти;
- в) розробку способів картографічного відображення й аналізу математичних моделей.

#### 4. Інформаційні властивості карт

Карта як модель має високу інформативність. Однак у розумінні сутності і властивостей картографічної інформації немає єдності. В загальному випадку під картографічною інформацією розуміють зміст карти, відомості, укладені в ній і одержувані по карті, кількість умовних позначок, ймовірність появи того або іншого знака, їх розманітність, спосіб графічної передачі тематичного змісту і т.п.

Важливою характеристикою карти є її інформаційна ємність. Для оцінки інформаційної ємності карти використовується формула ентропії К. Шеннона:

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i,$$

де  $p_i$  – ймовірність появи  $i$ -того знаку на карті. При отриманні інформації з декількох карт ця формула набуває вигляду (Сургу, 1972):

$$H = \sum_{q=1}^Q \sum_{i=1}^n p_{iq} \log_2 p_{iq}$$

де  $q = 1, 2, \dots, Q$  – карти різної тематики, різночасні або різного масштабу, а  $p_{iq}$  – ймовірність появи  $i$ -го знаку на  $q$ -ій карті.

Для неперервних картографічних зображень (наприклад, для карт ізоліній) існує інша ймовірнісна модель, відповідно до якої карта розглядається як безліч елементарних комірок  $\Delta S$  із щільністю розподілу імовірностей  $p(S)$ . Тоді ентропія виражається функцією:

$$H' = \int p(S) \log_2 p(S) \Delta S dS$$

причому рівняння для  $H$  і  $H'$  не виводяться одне з іншого.

Крім ймовірнісно-статистичного підходу до оцінки кількості картографічної інформації застосовується комбінаторний підхід. Суть його полягає у врахуванні числа знаків на карті, кількості їх характеристик, градацій, дат (або періодів), співвідношення тематичного змісту з географічною основою і т.п. Згідно цього підходу кількість інформації розраховується як:

$$I_s = \log_2 \left( \sum_{k=1}^n R_k N_k \prod_{i=1}^{m(k)} D_{k,i} \right)$$

де  $n$  – число знаків, що позначають види територіальних об'єктів;  $m(k)$  – число характеристик знаків;  $N_k$  – число знаків, що позначають об'єкт кожного виду;  $D_{k,i}$  – градації  $i$ -тої характеристики  $k$ -того виду;  $R_k$  – дата для кожного знаку об'єкта. У цій формулі враховані комбінації якісних, кількісних і тимчасових характеристик знаків, однак не прийняті в увагу їхні територіальні зв'язки і просторові поєднання.

І ймовірнісний і комбінаторний підходи до інформаційної ємності карти мають визначений сенс, якщо мова йде про оцінку навантаження карти. Однак інформація, що одержує читач (споживач карти), не може бути зведена тільки до навантаження. Карта на відміну від інших засобів комунікації дає не просто послідовність сигналів (знаків), а безліч знаків одночасно, що створює можливість їхньої просторової комбінації, тобто додавання, взаємного перекриття, сусідства, об'єднання, перетинання і т.п. У цьому принципову відмінність карти від інших засобів комунікації.

Для формування картографічних образів використовуються усі графічні засоби: форма, структура, орієнтування знаків, колір, відтінки кольору і т.д. Застосовуються способи поєднання (накладення і перетину) знаків, упорядкування й групування, використовуються різні інформативні плани, коли одні образи виступають у якості головних і “повідомляються” читачу в першу чергу, а інші як би “відтираються” на другий план.

## 5. Прикладні методики математико-картографічного моделювання

Формалізоване картографічне зображення будується на доволі жорсткій математичній основі (назвемо її умовно проекцією), по суті, вже пристосовано для математичного аналізу. Як уже зазначалось вище, кожній точці карти з координатами  $x$  і  $y$  поставлено у відповідність лише одне значення картографованого явища  $z$ , а це дозволяє розглядати зображення даного явища як функцію  $z = F(x, y)$ . Багато явищ, показані на картах, реально зв'язані між собою функціональними або статистичними залежностями, інші – можуть бути умовно представлені як функції простору і часу. Ці залежності складні, різноманітні і не завжди досить вивчені, але для їх аналізу вдається застосувати формальний математичний апарат, абстрагуючись від малоістотних деталей, ставлячи задачі з певними обмеженнями, апроксимуючи складні і невідомі функції простішими.

У принципі майже всі розділи сучасної математики застосовні для обробки картографічного зображення. Однак деякі розділи математики застосовуються традиційно більш інтенсивно і ефективно.

### **Прийоми математичного аналізу.**

**Апроксимації.** Найбільш розроблений і широко застосовується для роботи з картами апарат теорії апроксимації, що дозволяє аналітично описувати поверхні і виконувати дії з ними. Апроксимація – це наближення, спрощення реальних складних залежностей, заміна невідомих функцій відомими.

Будь-яку складну і неправильну поверхню, зображену на карті і задовольняючому рівнянню  $z = F(u, v)$ , можна апроксимувати, тобто приблизно представити функцією виду:

$$z = F(u, v) + \varepsilon,$$

де  $\varepsilon$  – залишок, що не піддається апроксимації.

Функцію  $f(u, v)$  можна також розкласти в ряд, представивши рівняння поверхні у вигляді:

$$z = f_1(u, v) + f_2(u, v) + \dots + f_n(u, v) + \varepsilon$$

де  $f_i(u, v)$  – компоненти розкладання, що описують апроксимуючу поверхню, які є невідомими. Визначення їхніх чисельних величин здійснюється за умови мінімізації квадратів відхилень апроксимуючої поверхні від вихідної:

$$\sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^m [F(u_i, v_i) - f(u_i, v_i)]^2 = \min$$

де  $i=1, 2, \dots, m$  – число точок на карті, у яких визначені відхилення. Існують різні способи апроксимації в залежності від конкретних задач дослідження і застосовуваного математичного апарату.

**Апроксимація за допомогою алгебраїчних багаточленів.** У цьому випадку функція  $f(u, v)$  розкладається по степенях координат  $u$  і  $v$ :

$$f(u, v) = A_{00} + A_{10}u + A_{01}v + A_{20}u^2 + \dots + A_{mn}u^m v^n,$$

де  $A_{rs}$  – коефіцієнти членів розкладання з координатами  $u$  у ступені  $r$  і  $v$  в ступені  $s$ , які невідомі. Для обчислення коефіцієнтів з вихідної карти знімають ряд значень  $z_i$ , після чого складається система рівнянь, розв'язуваних спільно способом найменших квадратів.

**Апроксимація за допомогою ортогональних алгебраїчних багаточленів** відрізняється від попереднього способу тим, що апроксимуюче рівняння знаходять не у вигляді сум степенів координат  $u$  і  $v$ , а за допомогою систем лінійно незалежних ортогональних багаточленів (поліномів)  $\varphi_r(u)$  і  $\varphi_s(v)$ , перший з яких залежить тільки від координат  $u$ , а другий – тільки від координат  $v$ ;  $r$  і  $s$  – індекси, що вказують степінь поліномів, що приймають значення  $0, 1, 2, \dots, m$  і  $0, 1, 2, \dots, n$ .

Апроксимуюче рівняння записується у вигляді

$$\bar{z} = f(u, v) = \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n A_{rs} \varphi_r(u) \varphi_s(v)$$

Точність апроксимації оцінюється по формулі середньої квадратичної помилки:

$$\mu = \pm \frac{\sum_{i=1}^{mn} \mathcal{E}_i^2}{mn}$$

**Інші види апроксимацій.** У якості апроксимуючих можна брати будь-які відомі алгебраїчні або тригонометричні функції, що володіють тими або іншими корисними властивостями або задовольняють які-небудь апріорно задані умови, або полегшують обчислення. Наприклад, якщо потрібно отримати лише позитивні значення  $z$ , то доцільно застосувати експонентний поліном:

### **Прийоми математичної статистики**

Прийоми математичної статистики призначені для вивчення по картах просторових і тимчасових статистичних сукупностей і утворених ними статистичних поверхонь. Статистичними сукупностями називаються масові, якісно однорідні множини випадкових величин або явищ. Терміном “випадкові” позначають такі величини і явища, що складним чином залежать від багатьох факторів і сумарний ефект їхньої взаємодії (результат) не можна прогнозувати з повною впевненістю, а лише з деякою імовірністю. На картах статистичні сукупності утворюють статистичні поверхні – якийсь статистичний

рельєф, який зображується ізолініями або картографіями.

Статистична обробка картографічного зображення переслідує головним чином три завдання:

- 1) вивчення характеристик і функцій розподілу явища;
- 2) вивчення форми і тісноти зв'язку між явищами;
- 3) оцінка ступеня впливу окремих факторів на досліджуване явище і виділення ведучих факторів

Для *характеристики розподілу явища* на карті використовуються різні узагальнюючі статистики. До них відносяться середні величини і показники різноманітності. Із середніх найбільш уживані мода, медіана, середня арифметична і середня зважена арифметична, а з набору показників різноманітності найпоширенішими є розмах, середнє квадратичне відхилення, дисперсія і коефіцієнт варіації.

*Оцінка форми і тісноти зв'язку* між явищами. Для характеристики взаємозв'язку явищ, зображених на картах різної тематики, використовується апарат кореляційного аналізу. Кореляційний аналіз створює основу і для більш складних видів аналізу: регресійного, дисперсійного, факторного і ін.

Найбільш популярний коефіцієнт кореляції  $r$ , що характеризує зв'язок між двома явищами  $A$  і  $B$ , якщо цей зв'язок близький до прямолінійного. Числові значення  $r$  можуть змінюватись від  $-1$  до  $+1$ . При  $r = +1$  або  $r = -1$  існує функціональний прямий або зворотний зв'язок. Коли  $r$  близький до  $0$ , то зв'язок між явищами відсутній. При  $r > |0,7|$  зв'язок вважається істотним.

Для розрахунку коефіцієнта кореляції, як і інших показників зв'язку, необхідно сформувати дві вибірки з порівнюваних карт. З цією метою на карти поординатно поміщають сітки рівновіддалених точок і в кожній точці знімають значення  $a_i$  і  $b_i$ . Перш ніж приступити до визначення тісноти зв'язку, необхідно мати уявлення про форму зв'язку, для чого доцільно побудувати графік, відкладаючи по осях значення  $a_i$  і  $b_i$ . Точки на графіку утворять поле кореляції, по виду якого судять про тісноту і форму зв'язку. Якщо точки дають великий розкид, розташовуються безсистемно, то це свідчить про відсутність зв'язку між явищами. Якщо ж поле кореляції витягнуте у вигляді більш-менш вузької смуги, значить зв'язок між явищами існує, причому чим вузьча ця смуга, тим зв'язок сильніший.

Якщо смуга кореляції наближається до лінійної форми, то зв'язок між явищами можна оцінити коефіцієнтом кореляції. У випадках, коли поле кореляції явно скривлене, необхідно обчислити кореляційне відношення.

Коефіцієнт кореляції розраховується по формулі:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (a_i - M_a)(b_i - M_b)}{n \sigma_a \sigma_b}$$

де  $M_a$  і  $M_b$  – середні арифметичні для явищ  $A$  і  $B$ ;  $\sigma_a \sigma_b$  – середні квадратичні відхилення для явищ  $A$  і  $B$ ;  $n$  – число пар даних, отриманих з карт.

Наближене значення середньої квадратичної помилки коефіцієнта кореляції підраховують по формулі

$$m_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$$

У випадках, коли зв'язок між явищами має явно криволінійний характер, обчислюють кореляційне відношення

**Оцінка факторів.** При екологічному аналізі даних, узятих з карт, завжди можна виділити ряд факторів, що викликають варіабельність пов'язаних з ними явищ та ознак. Наприклад, кліматичні показники впливають на розсіювання забруднюючих речовин поблизу конкретного джерела викидів та на певній відстані від нього, геологічна будова і літологічний склад порід певної території, в значній мірі визначає особливості міграції полютантів та наявність і масштаби геохімічних бар'єрів, тип ґрунту впливає на потенціал його самовідновлення тощо.

Оцінка впливу тих або інших факторів (груп факторів) на мінливість середніх значень досліджуваного явища і є задачею *дисперсійного аналізу*. З цією метою дисперсія вибіркової сукупності розкладається на складові, обумовлені дією різних факторів. Кожна складова дає оцінку дисперсії в загальній сукупності. Перевірка значимості цих оцінок виконується за допомогою таблиць статистики  $F$ , що розраховується теоретично. Якщо значення  $F$ , отримане в результаті обчислень, виявиться менше табличного, то це значить, що немає основ вважати вплив досліджуваного фактора істотним. Якщо ж розрахункове значення  $F$  більше табличного, то цей вплив можна вважати істотним.

Розрахункове значення  $F$  отримується за формулою:

$$F = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_0^2}$$

де  $\sigma_n^2$  – дисперсія, обумовлена явищем досліджуваного фактора, а  $\sigma_0^2$  – залишкова дисперсія, що характеризує вплив всіх інших причин. Значення сум квадратів відхилень знаходяться по наступних робочих формулах:

$$S = \sum a_1^2 + \sum a_2^2 - \frac{(\sum a_1 + \sum a_2)^2}{n_1 + n_2}$$

$$S_n = \frac{(\sum a_1)^2}{n_1} + \frac{(\sum a_2)^2}{n_2} - \frac{(\sum a_1 + \sum a_2)^2}{n_1 + n_2}$$

$$S_0 = S - S_n,$$

де  $a_1$  і  $a_2$  – значення, що відносяться до випадкового і досліджуваного факторів, а  $n_1$  і  $n_2$  – їх число у вибірці.

Ступені свободи визначаються за формулою:

$$\chi = n_1 + n_2 - 1$$

$$\chi_n = 1 \text{ (число досліджуваних факторів мінус одиниця)}$$

$$\chi_0 = n_1 - 1 + n_2 - 1 = n_1 + n_2 - 2$$

Оцінки дисперсій одержують по формулах

$$\sigma^2 = \frac{S}{\chi}; \quad \sigma_n^2 = \frac{S_n}{\chi_n}; \quad \sigma_0^2 = \frac{S_0}{\chi_0}$$

У ході дисперсійного аналізу можна не тільки оцінити істотність впливу фактора на мінливість досліджуваної ознаки, але також оцінити у відсотках частку, внесену цим фактором у загальне варіювання. Для цього береться відношення факторіальної і залишкової суми квадратів відхилень до суми квадратів відхилень, що характеризує загальне розсіювання:

$$\text{вплив факторів, включених у модель: } N = \frac{S_n}{S} 100\%$$

$$\text{вплив залишкових факторів: } O = \frac{S_0}{S} 100\%$$

Одним з видів багатомірного статистичного аналізу є **факторний аналіз**, що дозволяє виділити один або кілька головних факторів, які чинять основний вплив на вислідну ознаку. Рівняння факторного аналізу має вигляд

$$a_p = \sum_{i=1}^k l_{pr} f_r + e_p$$

де  $a_p$  – вихідні показники;  $f_r$  – виділені головні фактори, що дають синтетичну оцінку досліджуваного явища;  $l_{pr}$  – «вага» кожного фактора в синтетичній оцінці (так зване “факторне навантаження”) і  $e_p$  – залишок, що характеризує невраховані відхилення.

Факторний аналіз ґрунтується на дослідженні кореляційної матриці між багатьма показниками (10-30 і більше), що впливають на досліджуване явище. У ході аналізу виділяють кілька головних факторів (три-чотири), що узагальнюють вплив окремих вихідних показників. Потім дається змістовна теоретична інтерпретація виявлених головних факторів.

Аналогічні задачі вирішуються і за допомогою **компонентного аналізу**,

що відрізняється від факторного тим, що в ньому не розглядаються залишки, оскільки загальна дисперсія змінних цілком вичерпується встановленими компонентами. Компонентний аналіз має переваги перед факторним, тому що не ставить умови випадковості розподілу вихідних показників. Головні компоненти — це лінійні комбінації вихідних показників, що описуються рівнянням:

$$K_r = \sum_{p=1}^n l_{pr} a_p$$

де  $K_r$  —  $r$ -та компонента;  $l_{pr}$  — вага показника  $a_p$  у  $r$ -тій компоненті;  $p = 1, 2, \dots, m$  і  $r = 1, 2, \dots, m$ .

Ця група прийомів використовується для оцінки ступеня однорідності і взаємної відповідності явищ, досліджуваних по картах.

Одна із останніх тенденцій еколого-картографічного моделювання — використання в прикладних дослідженнях прийомів **теорії інформації**. Теорія інформації — це математична дисципліна, що широко використовує ймовірнісні підходи. У еколого-картографічній найчастіше використовується основна функція теорії інформації — ентропія. У математичній теорії інформації ця функція служить мірою невизначеності випадкового експерименту. Широкі пізнавальні можливості функції ентропії привернули до неї увагу екологів, і тепер ентропія застосовується для вивчення організації біогеоценозів, диференціації території, аналізу мереж розселення, установаження різноманітних екологічних взаємозв'язків.

Поки що на жаль не існує універсальних методик, які б пов'язали поняття ентропії з кількістю картографічної інформації. Тому при аналізі карт використовується більше логарифмічна функція ентропії, що володіє корисними властивостями. Ентропією  $E(A)$  деякої системи  $A$  називається сума добутків ймовірностей ( $\omega_i$ ) різних станів цієї системи на логарифми ймовірностей, узяті зі зворотним знаком:

$$E(A) = E(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) = - \sum_{i=1}^n \omega_i \log_2 \omega_i$$

У теорії інформації для розрахунків прийнято брати логарифм імовірностей за основою 2, що пов'язано з використанням двійкової системи числення. Зміст функції ентропії не зміниться, якщо користуватися десятковими або натуральними логарифмами.



## Лекція № 9

### Застосування комп'ютерних (інформаційних) технологій у моделюванні і прогнозуванні стану довкілля.

#### План

1. Еколого-інформаційні системи як інструмент комплексного моніторингу навколишнього середовища
2. Бази даних екологічної інформації
3. Системи комп'ютерної обробки результатів моніторингових спостережень
4. Інформаційні технології системного аналізу інформації про стан навколишнього природного середовища
5. Комп'ютеризовані системи для прийняття рішень по оптимізації навколишнього середовища

#### **1. Еколого-інформаційні системи як інструмент комплексного моніторингу та моделювання стану навколишнього середовища**

Одна із новітніх тенденцій розвитку суспільства й науки – інформатизація. Усвідомлення неповноти й відсутності системності знань про навколишнє середовище наприкінці двадцятого століття збіглося з бурхливим розвитком інформатики й обчислювальної техніки. Комп'ютер щільно входить у наше життя, інтенсивно змінюючи його, але й, допомагаючи вирішувати складні науково-прикладні проблеми. У результаті на стику багатьох областей знання, таких як науки про навколишнє природне середовище (географічного, біологічного циклів тощо), біометрії, математики, синергетики, інформатики та теорії інформації, виникла нова прикладна галузь науки – [екоінформатика](#). Її основна задача – використання інформаційних технологій для збору, узагальнення, обробки, аналізу інформації про стан навколишнього природного середовища та використання цієї інформації з метою розробки шляхів та заходів поліпшення стану довкілля та вирішення гострих екологічних проблем.

Перша електронно-цифрова машина ENIAC була створена в 1946 році. На сьогодні потужності та технічні характеристики комп'ютерної техніки того часу викликають у спеціалістів скепсис (перша ЕОМ займала величезну кімнату – 6 метрів у висоту і 26 метрів у довжину, а її обчислювальні можливості поступались розрахунковій потужності сучасних мікрокалькуляторів). Але значення цього винаходу на сьогодні переоцінити просто складно. Перший персональний комп'ютер Altair 8800 з'явився в 1974 році. В кінці 1970-х р.р. американська фірма “Commodore” випустила PET – один із перших масових персональних комп'ютерів. Його використовували в

основному в різноманітних офісах та навчальних закладах. Розпочався комп'ютерний бум.

В вісімдесяті роки, протягом всього одного десятиліття, у всіх розвинутих країнах світу були створені національні еколого-інформаційні системи, які включали національні системи моніторингу атмосфери, водних ресурсів, ґрунтів і інших компонентів природного середовища, а також системи збору й аналізу географічно прив'язаної інформації про антропогенне навантаження і стан здоров'я населення. У дев'яностих роках, за рахунок появи нових інформаційних технологій і розвитку мережі Internet, зокрема, формування "всесвітньої павутини" (World Wide Web) ці системи виявилися об'єднаними в єдину екоінформаційну систему світу, на серверах якої зберігаються величезні обсяги інформації про стан навколишнього середовища планети Земля, отримані за допомогою систем екологічного моніторингу.

Вважається, що екоінформаційні системи містять у собі системи екологічного моніторингу і є функціональною основою процесу керування екологічною безпекою розвитку й взаємодії суспільства й природи. Перед **екоінформаційною системою** стоять наступні основні завдання:

- підготовка інтегрованої інформації про стан навколишнього середовища, прогнозів ймовірних наслідків господарської діяльності й рекомендацій з вибору варіантів безпечного розвитку регіону для систем підтримки ухвалення рішення;
- імітаційне моделювання процесів, що відбуваються в навколишньому середовищі, з урахуванням існуючих рівнів антропогенного навантаження і можливих результатів прийнятих управлінських рішень;
- оцінка ризику для існуючих і проєктованих підприємств, окремих територій і т.п., з метою керування безпекою техногенних впливів;
- нагромадження інформації з тимчасових трендів параметрів навколишнього середовища з метою екологічного прогнозування;
- підготовка електронних карт, що відбивають стан навколишнього середовища регіону;
- складання звітів про досягнення цілей стійкого розвитку для федеральних і міжнародних організацій;
- обробка і нагромадження в базах даних результатів локального і дистанційного моніторингу й виявлення параметрів навколишнього середовища найбільш чутливих до антропогенних впливів;
- обґрунтування оптимальної мережі спостережень для регіональної системи екологічного моніторингу;
- обмін інформацією про стан навколишнього середовища (імпорт і експорт даних) з іншими екоінформаційними системами;

- надання інформації, необхідної для контролю за дотриманням прийнятих законів, для екологічного утворення, для засобів масової інформації і т.д.

В екоінформаційній системі можна виділити три рівні (рис. 1), які відрізняються за методом вирішення задач екологічного моніторингу й методах роботи з екологічною інформацією. Верхній щабель займають програмні модулі для підтримки прийняття рішень по оптимізації навколишнього середовища, середній – програмне забезпечення, що дозволяє провести системний аналіз інформації про стан навколишнього середовища, а нижній – модулі обробки первинної екологічної інформації.



*Рис.1. Структура екоінформаційної системи.*

На нижньому рівні екоінформаційної системи для збереження даних про стан навколишнього середовища використовуються різноманітні системи управління базами даних (СУБД) – *MS Access, Informix, Lotus, FoxPro, Oracle*, тощо, а для обробки результатів спостережень – електронні таблиці (*MS Excel, SuperCalc, Origin і т.д.*), пакети прикладних програм (*MathCAD, Matlab, Mathematica, Maple, Statistica, SPSS, Stata, StatGraphics, Surfer, Turbo Grafer* і багато хто інших). Така кількість різноманітного програмного забезпечення зумовлена величезним числом різнопланових задач по обробці результатів спостережень за станом навколишнього середовища, отриманих за допомогою локальних і дистанційних методів екологічного моніторингу.

На середньому рівні екологічної інформаційної системи для аналізу інформації про стан навколишнього середовища використовуються географічні інформаційні системи (ГІС). Подібні системи, забезпечуючи введення,

збереження, відновлення, обробку, аналіз і візуалізацію усіх видів географічно прив'язаної інформації, дозволяють систематизувати видачу такої інформації для управління екологічними процесами, реалізуючи досвід, накопичений фахівцями в даній галузі.

Системи підтримки прийняття рішень в області екологічної безпеки неминуче ґрунтуються на математичному моделюванні процесів, що відбуваються в природі. Це закономірно, тому що враховуючи складність організації екосистем та поліваріантність їх розвитку, просто необхідно “програвати” на ЕОМ сценарії розвитку тих чи інших процесів та явищ, будувати оперативні та адекватні прогнози. На жаль, на сьогодні обчислювальна потужність комп'ютерів занадто мала, а методи математичного моделювання навколишнього середовища не досить досконалі, аби їх результати могли б широко використовуватися для підтримки прийняття рішень в області природоохоронної діяльності. Тому в даний час нагромадження знань, необхідних для підтримки прийняття рішень, ґрунтується на різних спрощених методах оцінки впливу на навколишнє середовище (різноманітних уніфікованих методиках, експертних системах, окремих імітаційно-моделюючих інформаційних системах тощо).

## 2. Бази даних екологічної інформації

Останнім часом бази даних (БД) і системи керування базами даних (СУБД) широко входять в усі сфери діяльності людини, пов'язані з використанням комп'ютерної техніки. На базі СУБД будуються різноманітні інформаційні й інформаційно-керуючі системи, що використовуються у всіх галузях людської діяльності. При цьому відповідні БД можуть містити, у принципі, будь-які дані, однак, у більшості випадків, це дані алфавітно-цифрові (тобто текст) або числові.

**База даних**, БД (data base, database, DB) – сукупність даних, організованих за визначеними правилами, що встановлює загальні принципи опису, збереження й маніпулювання даними. Збереження даних у БД забезпечує централізоване управління, дотримання стандартів, безпеку й цілісність даних, скорочує надмірність і усуває суперечливість даних. БД не залежить від прикладних програм. Створення БД і звертання до неї (по запитах) здійснюються за допомогою системи керування базами даних (СУБД). Програмне забезпечення локальних обчислювальних мереж спочатку підтримувало режим роботи, при якому робочі станції мережі посилали запити до БД, розташованої на обслуговуючому їхньому комп'ютері – *файл-сервері* (file server), одержували від нього необхідні файли, виконували сукупність операцій пошуку, вибірки й коректування – *транзакції* (transaction) і відсилали файли назад. При іншому режимі робочі станції виступають у ролі клієнтів, а

сервер БД цілком обслуговує запити (як правило, записані мовою SQL) і відсилає клієнтам результати, реалізуючи технологію *клієнт-сервер* (client/server). БД може бути розміщена на декількох комп'ютерах мережі; у цьому випадку вона називається *розподіленою БД* (distributed database). БД ГІС містять набори даних про просторові об'єкти, тому утворюють *просторові БД* (spatial database); цифрова картографічна інформація може бути організована у *картографічні бази даних* (map database), картографічні банки даних.

З поняття бази даних тісно пов'язаний і інший термін – *банк даних* (databank, data bank) – інформаційна система централізованого збереження і колективного використання даних. Містить сукупність баз даних, СУБД і комплекс прикладних програм. Банк даних називають *локальним* (local databank), якщо він розміщений в одному обчислювальному центрі (ОЦ) або на одному комп'ютері; *розподіленим* (distributed databank) – система об'єднаних єдиним адмініструванням, але за допомогою комп'ютерної мережі територіально роз'єднаних локальних банків даних. Картографічні банки даних іменуються також *банками цифрових карт*. Отже, поняття банку даних є дещо ширшим, ніж поняття бази даних.

Загальноприйнятим є представлення БД як взаємозалежної сукупності таблиць. Кожна таблиця складається з рядків (записів) і стовпців (полів). Кожний запис несе інформацію про деякий об'єкт, кожне поле містить значення деякої властивості об'єкта. У найпростішому випадку вся БД складається з однієї таблиці. Як приклад можна розглянути табличне зведення даних хімічного аналізу води, де кожний рядок містить дані про хімічний склад досліджуваної води, що відібрана в конкретній точці відбору проб (водопості або гідростворі), а значеннями полів є концентрація кожної окремо забруднюючої речовини, загальна мінералізація, сухий залишок, прозорість, мутність, рН, БСК, ХСК тощо. Подібного роду дані прийнято називати *атрибутивними* або *фактографічними*, або простіше – *табличними*.

Основні операції, які можна виконувати над атрибутивними даними, передбачають пошук даних по різних запитах, упорядкування даних (наприклад, за алфавітом), поєднання взаємозалежних даних із різних таблиць, обчислення сумарних значень, побудова різноманітних звітів. Крім того, СУБД дозволяє виконувати операції по створенню і модифікації БД: додавання і видалення записів, редагування (тобто зміна значень) полів запису, зміна структури записів (додавання й видалення полів і т.п.).

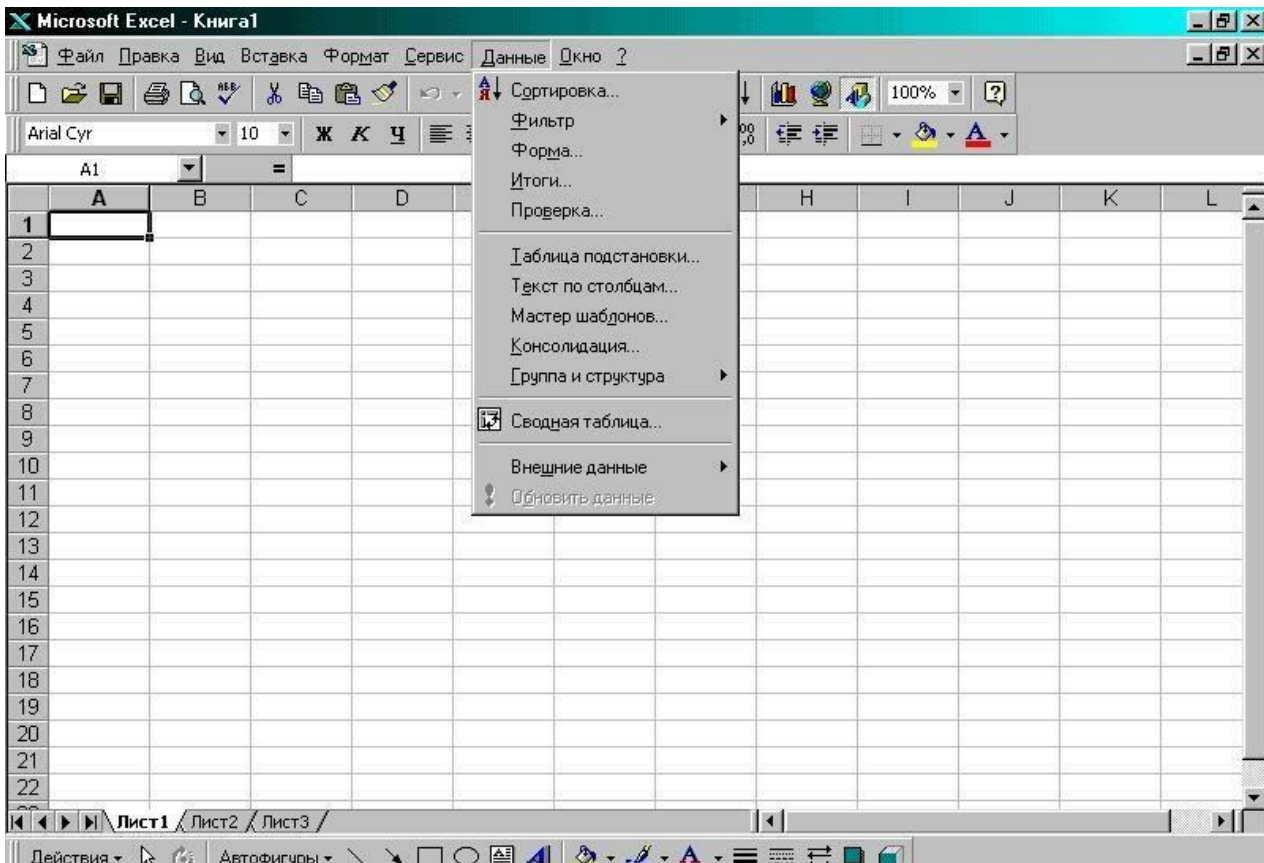
В загальному випадку можна сформулювати основні функції баз даних:

- збереження інформації;
- перегляд і пошук бази даних;
- вибірка даних із таблиці;
- формування звітів;

- введення й редагування інформації;
- контроль інформації;
- відображення інформації;

До сучасних баз даних ставляться наступні вимоги:

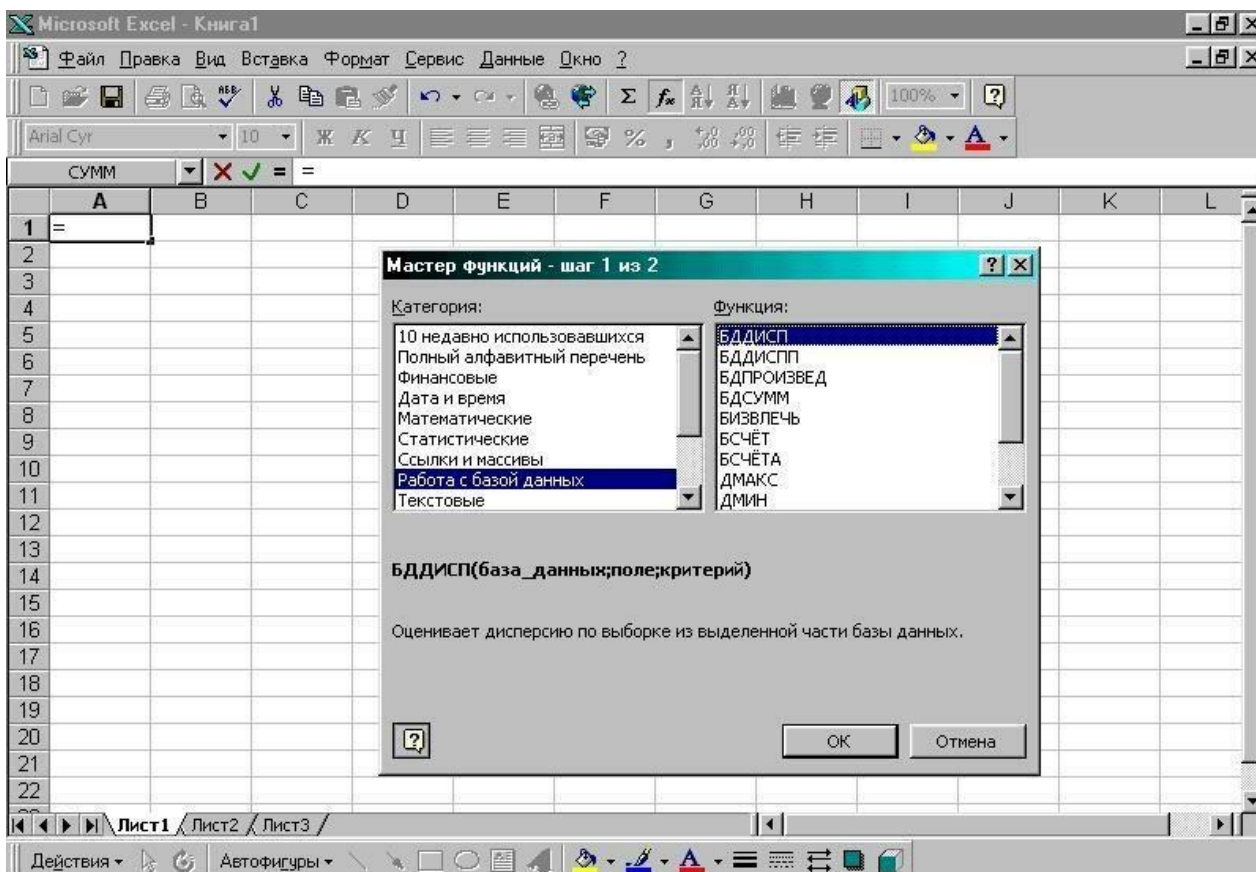
- ефективне виконання однієї і тієї ж СУБД різних функцій;
- мінімізація надмірності збережених даних;
- надання для процесів прийняття рішень несуперечливої інформації;
- забезпечення управління безпекою;
- відсутність підвищених вимог до персоналу, зв'язаній з розробкою, підтримкою й удосконалюванням прикладних програм при більшій продуктивності і менших витратах;
- проста фізична реорганізація бази даних;
- можливість централізованого керування базою даних;
- спрощення процедури експлуатації ЕОМ.



*Рис. 2. Меню Данные табличного процессора MS Excel.*

Програм, які дозволяють створювати та використовувати бази даних на сьогодні існує дуже багато. Характерною тенденцією для цих програм є підвищення їх спільної сумісності, розширення можливостей експорту і імпорту даних з одного формату в інший, використання універсальних засобів формування запитів (SQL). Найпростіші бази даних можна створювати і в

стандартних, встановлених практично на кожному комп'ютері програмах. Наприклад, в *MS Excel*. Зокрема, ця програма містить доволі багато можливостей для сортування, фільтрування, консолідації, групування, приєднання зовнішніх даних. Усі ці функції знаходяться в меню **Данные** (рис. 2).



*Рис. 3. Мастер функций MS Excel.*

Окрім того, *MS Excel* надає користувачу деякі спеціальні функції для роботи з базами даних. Їх можна знайти, запустивши **Мастер функций** і вибравши категорію **Работа с базой данных** (рис. 3).

### **3. Системи комп'ютерної обробки результатів моніторингових спостережень**

*Електронні таблиці* виникли як певний прообраз звичайних таблиць. Початок електронним таблицям як таким поклала в 1979 р. програма *VisiCalc*, в основу роботи якої вже був уведений принцип відображення в певній клітинці таблиці результатів розрахунків, для отримання яких були задіяні інші клітинки. У 1981 р. з'явилася програма *SuperCalc*, а у 1983 р. – пакет *Lotus 1-2-3*. В ній уже було передбачена графічна візуалізація результатів розрахунків і це багато в чому зробило програму *Lotus 1-2-3* лідером на ринку аналогічних програм. Наприкінці 80-х років конкуренція на ринку електронних таблиць

загострилась – боротьба точилась між програмами 1-2-3 версії 2.01 і 3.0 фірми Lotus Development Corporation, Excel 2.1 фірми Microsoft, Quattro 1.0 фірми Borland International і SuperCalc 5 фірми Computer Associates. В зв'язку з посиленням позиції MS Windows на ринку програмних середовищ до середини 1990 р.р. найбільш популярним став пакет Excel.

**Електронні таблиці Excel** дозволяють вирішувати дуже багато задач по обробці даних, зосереджених у таблиці. У Excel передбачений автоматичне введення даних із SQL-серверів і різних СУБД. Обробка даних передбачає, крім арифметичних операцій, можливість роботи з матрицями, обчислення найрізноманітніших статистичних характеристик. Передбачені доволі потужні методи для графічного аналізу даних та графічної візуалізації результатів розрахунку. Починаючи з версії 7.0 програма Excel має встроєні можливості для відображення даних на географічній карті. Досягається це завдяки інтеграції у програму ГІС-модуля фірми MapInfo Corp. Складні задачі можуть вирішуватися в межах декількох зв'язаних таблиць, які називаються в Excel робочою книгою.

Позитивними сторонами MS Excel безумовно є також відносна простота роботи, широкі можливості для експорту-імпорту інформації в різноманітні формати, добра сумісність з іншими програмами, особливо з програмами наступного рівня (рис. 1) – ГІСами (уже згадуване Mapinfo, MapPoint, Surfer), розгалужена довідкова система, відносно високий рівень захисту інформації, наявність найрізноманітніших довідкових матеріалів по роботі з даним пакетом, широкі можливості для написання власних функцій користувача та підпрограм за допомогою редактора VBA.

В той же ж час MS Excel має й певні недоліки: занадто високий ступінь стандартизації, що іноді не дозволяє користувачу внести необхідний суб'єктивний момент в результати роботи, виконаної в програмі. Програма має слабші, в порівнянні з іншими табличними та статистичними процесорами, розрахункові можливості (розрахунок проводиться, як правило безальтернативно, лише за однією закладеною формулою, яка, на думку розробників з Microsoft, є найбільш оптимальною, хоча для вирішення конкретної прикладної задачі, як правило стала б у пригоді менш універсальна, але точніша й адекватніша методика).

Наприклад, оцінимо за допомогою MS Excel суттєвість залежності концентрацій забруднюючих речовин у донних відкладах р. Стир для чотирьох забруднюючих речовин у межах м. Луцька від місця відбору проб. Нульова гіпотеза ( $H_0$ ) у даному випадку формулюється так: відсутність залежності між забрудненням донних відкладів р. Стир і місцем відбору проб. Вихідні дані представлені у табл. 1.

**Таблиця 1.** Вміст забруднюючих речовин у донних відкладах р. Стир вище й



*нижче очисних споруд*

| Місце відбору проб води з<br>р. Стир       | Досліджувані речовини, мг/кг |         |        |      |
|--|------------------------------|---------|--------|------|
|  | Цинк                         | Свинець | Нікель | Мідь |
| Вище комунальних очисних споруд м. Луцька  | 165,5                        | 97,8    | 78,1   | 67,4 |
| Нижче комунальних очисних споруд м. Луцька | 307,5                        | 152,2   | 86,2   | 83,7 |

Після завершення вводу даних, отримуємо таблицю, показану у верхній частині рис. 4. Перевірка даних таблиці на закон розподілу випадкової величини довела їх нормальний розподіл.

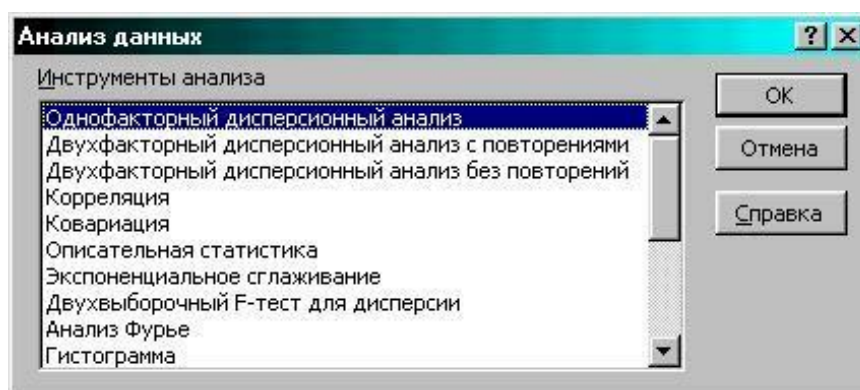
Для того, аби провести процедуру однофакторного дисперсійного аналізу слід виконати наступні дії:

**Сервис**

**Анализ данных**

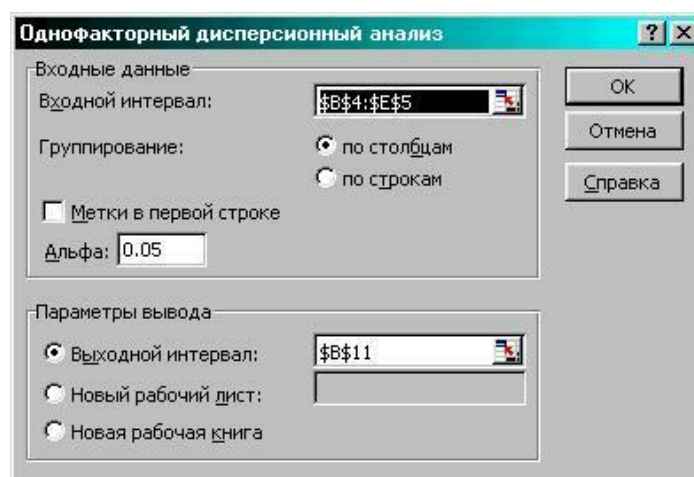
**Однофакторный дисперсионный анализ**

З'явиться вікно, зображене на рис. 4.



*Рис. 4. Вікно вибору способу обробки даних **Анализ данных** меню **Сервис***

В цьому вікні слід вибрати інструмент аналізу **Однофакторный дисперсионный анализ** і клацнути **Ок**. З'явиться вікно, що показано на рис. 5.



*Рис. 5. Вікно установки параметрів для однофакторного дисперсійного аналізу*

В даному вікні опції означають наступне:

#### **Входной диапазон**

Посилання на діапазон, що містить аналізовані дані. Посилання повинне складатися не менш чим із двох суміжних діапазонів даних, дані в які розташовані по рядках або стовпцях.

#### **Группирование**

Установіть перемикач у положення **По столбцам** или **По строкам** у залежності від розташування даних у вхідному діапазоні.

#### **Метки в первой строке/столбце**

Якщо перший рядок вихідного діапазону містить назви стовпців, установіть перемикач у положення **Метки в первой строке**. Якщо назви рядків знаходяться в першому стовпці вхідного діапазону, установіть перемикач у положення **Метки в первом столбце**. Якщо вхідний діапазон не містить міток, то необхідні заголовки у вихідному діапазоні будуть створені автоматично.

#### **Альфа**

Уведіть рівень значимості, необхідний для оцінки критичних параметрів F-статистики. Рівень альфа зв'язаний з ймовірністю виникнення помилки, внаслідок відкидання вірної гіпотези.

#### **Выходной диапазон**

Уведіть посилання на комірку, розташовану у лівому верхньому куті вихідного діапазону. Розміри вихідної області будуть розраховані автоматично, і відповідне повідомлення з'явиться на екрані в тому випадку, якщо вихідний діапазон займає місце існуючих даних або його розміри перевищують розміри листа.

#### **Новый лист**

Установіть перемикач, щоб відкрити новий лист у книзі і вставити результати аналізу. Ця функція доволі зручна, якщо необхідно зберегти результати роздільно з вихідними даними.

#### **Новая книга**

Аналогічно можна зберегти результати не лише на новому листі, але й у нову робочу книгу.

|  |                   | Досліджувані речовини, мг/кг |         |          |           |             |               |
|--|-------------------|------------------------------|---------|----------|-----------|-------------|---------------|
| Місце відбору проб                         |                   | Цинк                         | Свинець | Нікель   | Мідь      |             |               |
| Вище комунальних очисних споруд м. Луцька  |                   | 165.5                        | 97.8    | 78.1     | 67.4      |             |               |
| Нижче комунальних очисних споруд м. Луцька |                   | 307.5                        | 152.2   | 86.2     | 83.7      |             |               |
| Однофакторный дисперсионный анализ         |                   |                              |         |          |           |             |               |
| ИТОГИ                                      |                   |                              |         |          |           |             |               |
|  | Группы            | Счет                         | Сумма   | Среднее  | Дисперсия |             |               |
|  | Столбец 1         | 2                            | 473     | 236.5    | 10082     |             |               |
|  | Столбец 2         | 2                            | 250     | 125      | 1479.68   |             |               |
|  | Столбец 3         | 2                            | 164.3   | 82.15    | 32.805    |             |               |
|  | Столбец 4         | 2                            | 151.1   | 75.55    | 132.845   |             |               |
| Дисперсионный анализ                       |                   |                              |         |          |           |             |               |
|  | Источник вариации | SS                           | df      | MS       | F         | P-Значение  | F критическое |
|  | Между группами    | 33243.03                     | 3       | 11081.01 | 3.779551  | 0.115819082 | 6.591392      |
|  | Внутри групп      | 11727.33                     | 4       | 2931.833 |           |             |               |
|  | Итого             | 44970.36                     | 7       |          |           |             |               |

Рис. 6. Результати однофакторного дисперсійного аналізу даних із табл. 1

У вікні результатів (рис. 6) використані стандартні позначення *MS Excel*:

*SS* – сума квадратів; *между группами* – міжгрупова сума квадратів; *внутри групп* – внутрішньогрупова сума квадратів; *итого* – повна (загальна) сума квадратів; *df* – число ступенів свободи; *MS* – середній квадрат (фактична дисперсія); *F* – розрахункове значення критерію Фішера; *P-Значение* – розрахункове значення мінімальної значимості; *F-критическое* – критичне значення розподілу Фішера.

Отже, як видно з результатів розрахунку розрахункове значення критерію Фішера (3,78) менше ніж критичне значення (6,59). Тому гіпотеза про відсутність залежності між забрудненням донних відкладів р. Стир і місцем відбору проб приймається при заданому рівні значимості 0,05. Оскільки *P-Значение* достатньо велике (0,115), то нема підстав для відкидання гіпотези про рівність дисперсій.

Пакети прикладних програм дозволяють підготувати документ, що включає як об'єкти, документи інших типів або гіперпосилання на інші документи і програми обробки. В останні роки в розвитку програмного забезпечення для персональних ЕОМ простежується тенденція застосування

інтегрованих пакетів, що включають поряд зі спеціалізованими програмами й програми підготовки звітів. Модульний підхід до моделювання простежується й у сучасних пакетах.

### **Пакет MATLAB**

Одним їх із них є *MATLAB* фірми “The MathWorks Inc” (USA). Система *MATLAB* призначена для виконання інженерних і наукових розрахунків і високоякісної візуалізації одержуваних результатів. Ця система застосовується в математиці, обчислювальних експериментах, імітаційному моделюванні. У пакет входить безліч перевірених та верифікованих чисельних методів, оператори графічного представлення результатів, засоби створення діалогів. Відмінною рисою *MATLAB* у порівнянні зі звичайними мовами програмування є матричне представлення даних і великі можливості матричних операцій над даними. Використовуючи пакет *MATLAB* можна як із кубиків побудувати досить складну математичну модель, або написати свою програму (досить схожу на Фортран-програму). А можна використовуючи **SIMULINK** і технологію візуального моделювання скласти імітаційну модель або систему автоматичного регулювання.

Гнучка мова *MATLAB* дає можливість інженерам і вченим легко реалізовувати свої ідеї. Могутні чисельні методи і графічні можливості дозволяють перевіряти припущення і нові виникаючі ідеї, а інтегроване середовище дає можливість швидко одержувати практичні результати. Сьогодні *MATLAB* використовується в безлічі областей, серед яких обробка сигналів і зображень, проектування систем керування, фінансові розрахунки і медичні дослідження. Для проектування систем керування, цифрової обробки сигналів, комунікаційних систем широко використовується *SIMULINK*, що дозволяє моделювати динамічні системи, оцінювати їхню роботу, модифікувати проект за допомогою графічних блок-діаграм. *SIMULINK* – це інтерактивне середовище для моделювання й аналізу широкого класу динамічних систем.

### **Пакет MATHCAD**

Інша сторона розвитку сучасного програмного забезпечення – орієнтація на “непрограмуючого користувача”. У цьому випадку користувач такого пакета одержує можливість зосередитися на сутності самої задачі, а не способах її програмної реалізації. У свою чергу користувач повинний ясно представляти можливості використовуваного пакета і закладених у ньому методів, а також уміти вибрати необхідний пакет, що відповідає розв'язуваній задачі.

Всі етапи створення й використання математичної моделі легко простежити при роботі з пакетом *MATHCAD* фірми “MathSoft Inc.” (USA). *MATHCAD* – універсальний математичний пакет, призначений для виконання інженерних і наукових розрахунків. Математичне забезпечення пакета дозволяє вирішувати задачі практично по всі розділах математики. Пакет весь час удосконалюється. На сьогодні найпопулярнішими є версії *MATHCAD 8.0* і

*MATHCAD 2000*. Позитивною рисою цієї програми є присутність на вітчизняному ринку не лише оригінальної (англомовної), але й русифікованої версії програми. Як зазначають більшість кваліфікованих користувачів, *MATHCAD* дуже простий у роботі – практично як калькулятор. В той же ж час він дозволяє здійснювати обчислення з довільною точністю, роботу з різними типами даних (комплексні, вектори, матриці), використання бібліотеки математичних функцій (яка може бути доповнена програмами на Фортрані). Основна перевага пакета перед типовими мовами програмування – звична математична мова, на якій формулюється розв'язувана задача.

Пакет поєднує в собі: редактор математичних формул, інтерпретатор для обчислень, бібліотеку математичних функцій, процесор символічних перетворень, текстовий редактор, графічні засоби представлення результатів. Пакет *MATHCAD* відноситься до інтегрованих пакетів, тобто дозволяє не тільки зробити обчислення, але й одержати документ – підсумковий звіт з коментарями, формулами, таблицями й графіками.

До позитивних якостей *MATHCAD* варто віднести також відкритість – усе приведене в документі може бути відтворено (тобто експортовано в інші програми для подальшої роботи), а інтеграція в одному документі вихідних даних, методу рішення й результатів дозволяє зберегти налаштування для вирішення подібних задач.

### **Пакет STATISTICA**

У багатьох природничо-наукових областях статистичні методи були і залишаються важливою складовою частиною процедури обробки результатів вимірів. Це стосується фізики, хімії, біології, геології, метеорології і багатьох інших. Сучасні програми для статистичної обробки даних дозволяють застосовувати складні сучасні методи аналізу навіть у тих областях, де раніше такі дослідження були надзвичайно трудомісткими (медицина, біоценологія) і, отже, проводилися досить рідко.

Система *STATISTICA* може служити не тільки ефективним інструментом для наукових досліджень, але і надзвичайно зручним середовищем для навчання методам статистичного аналізу. По позитивних сторін системи слід віднести просту модульну структуру, унікальні можливості по обміну інформацією із іншими програмами, абсолютну зрозумілість та інтуїтивну передбачливість інтерфейсу. Система *STATISTICA* із самого початку свого створення активно використовується в навчальному процесі у ВУЗах. Детальніше з особливостями та перевагами даного пакета ми ознайомимось в ході виконання лабораторних робіт по стохастичному моделюванню.

### **Інші математичні пакети**

Усе різноманіття математичних пакетів не обмежується перерахованими вище системами. Дещо менш поширеними є:

*MAPLE V* – система символічних перетворень (частково входить у

MATHCAD);

*MATHEMATICA* – дуже система аналітичного вирішення будь-яких математичних задач;

*SPSS* – дуже потужний статистичний процесор, який сьогодні на рівних конкурує із системою *STATISTICA*;

*Stata* – невеликий, але досить популярний і перспективний статистичний процесор, спеціалісти особливо його рекомендують для проведення економіко-статистичних розрахунків;

*StatGraphics* – версій цієї програми існує дуже багато, до недавнього часу (поки її не потіснили програми *STATISTICA* та *SPSS*) *StatGraphics* був абсолютним лідером ринку статистичних процесорів

Даний перелік можна продовжувати ще дуже довго. Але хотілось би звернути увагу на ще одну групу програм – **графічні пакети**. До недавнього часу в наукових колах була поширена думка, що графічні пакети призначені лише для візуалізації результатів розрахунків. На сьогодні завдяки їм можна вирішувати задачі, які далеко виходять за межі простої візуалізації результатів розрахунку. Зокрема, за їх допомогою можна реалізувати графічне та картографічне моделювання того чи іншого об'єкта, тобто здійснювати побудову концептуальних знакових моделей, які належать до ідеальних моделей. Безумовно, ці моделі не завжди будуються на формалізованому апараті математичного аналізу. Але все ж певний елемент застосування кількісної інформації для них є обов'язковим. Хотілось би зупинитись на декількох таких пакетах:

**Golden Software Surfer 7.0** – невелика, дуже проста, але потужна й зручна програма для побудови просторових поверхонь, ліній рівня і різноманітних карт. По-суті, програма *Surfer* не будує карт, вона будує графіки поверхні і, абстрагувавшись, такий графік можна вважати картою (тому, що власне, електронні карти будуються за допомогою ГІС-програм). В той же ж час іноді для територіально-просторової візуалізації і не потрібно будувати складних і загромождених карт – достатньо принципової генералізованої схеми досліджуваного явища, із чим *Surfer* справляється блискуче. Серед всіх інших переваг програми, нам особливо подобається можливість сумістити даний візуалізатор з електронними таблицями *MS Excel*, адже *Surfer* читає файли формату *\*\*.xls*.

*Grapher 2* – програма для побудови двовимірних графіків від того ж виробника Golden Software (USA).

Окремо хотілось би згадати про потужні векторні – AutoCAD, Corel DRAW, Adobe Illustrator, MS Visio та растрові – Corel PhotoPaint, Photoshop та інші графічні процесори. Вони дозволяють не лише дуже якісно провести графічну візуалізацію, а й завдяки потужним експортно-імпортним можливостям та підтримкою графічних обмінних форматів часто

використовуються як допоміжні модулі при роботі з ГІС-програмами.

#### **4. Інформаційні технології системного аналізу інформації про стан навколишнього природного середовища**

Звичайні (атрибутивні) СУБД виявляються непристосованими для роботи з таким специфічним видом даних, як графічні (просторові) об'єкти. Графічний об'єкт характеризується прив'язкою до деякої системи координат (наприклад, географічних). Об'єкт задається, як мінімум, однією парою координат (X, Y), що визначає точку його місця розташування. Крім того, об'єкт може мати визначену форму й розміри, які можна задати набором координат характерних точок. Прикладами об'єктів можуть бути будинки, земельні ділянки, стовпи, колодязі, дороги, водойми, природні зони, адміністративні райони, країни і т.п.

Зрозуміло, координати точок об'єктів можна вважати атрибутивними даними і зберігати у звичайній БД. Однак такий підхід не дозволяє вирішувати такі задачі, де важливим є саме просторовий характер об'єктів. Це, насамперед, відображення об'єктів на екрані або принтері, просторовий пошук, розрахунок геометричних характеристик об'єктів (довжина, площа), візуальне редагування об'єктів, а також різноманітні задачі просторового аналізу.

База даних, спроектована таким чином, щоб зберігати інформацію про графічні об'єкти, називається *геоінформаційною базою даних* (ГБД). Зміст ГБД не обмежується координатами об'єктів. Насамперед, об'єкти можуть бути класифіковані по типах, геометричних характеристиках, призначенню й інших ознаках. Тому ГБД повинна мати визначену структуру, що відбиває цю класифікацію. Крім того, із кожним об'єктом може бути зв'язана визначена атрибутивна інформація. Наприклад, для об'єктів-будинків може бути задана адреса, корисна площа, число поверхів, власник, дата ремонту й інші характеристики. Ця інформація також повинна зберігатися в складі ГБД. Атрибутивна інформація може використовуватися для формулювання запитів до БД і для керування відображенням об'єктів.

Зрозуміло, що програми для роботи з ГБД повинні, поряд із функціями, характерними для звичайних СУБД, виконувати великий набір операцій із графічними об'єктами. Підсумовуючи вищесказане, можна дати визначення наступних важливих понять.

*Геоінформаційна база даних* (ГБД) – це організована сукупність просторових і табличних даних, що описують деяку територію і розташовані на ній об'єкти.

*Геоінформаційна система* (ГІС) – це програмна система, призначена для збереження, обробки й відображення даних, що зберігаються в ГБД.

До появи перших геоінформаційних систем привело об'єднання

комп'ютерної технології (особливо по обробці й аналізу даних) і традиційної географічної (конкретно – еколого-географічної) карти, відкрило нові обрії просторового аналізу розподілу природних і антропогенних явищ.

**ГІС** – інформаційна система, що забезпечує збір, збереження, обробку, доступ, відображення й поширення просторово-координованих даних. ГІС містить дані про просторові об'єкти у формі їхніх цифрових представлень (векторних, растрових, квадратових і інших), включає відповідний набор функціональних можливостей, у яких реалізуються операції геоінформаційних технологій, підтримується програмним, апаратним, інформаційним, нормативно-правовим, кадровим і організаційним забезпеченням.

**Таблиця 2. Підходи до трактування терміну «ГІС»**

| Термін   | Джерело                                |
|--|--|
| Географічна інформаційна система ( <i>Geographic Information System</i> )                                | Американська термінологія              |
| Географічна інформаційна система ( <i>Geographical Information System</i> )                              | Європейська термінологія               |
| Геоінформатика ( <i>Geoinformatics</i> )   | Канадська термінологія                 |
| Геореляційна інформаційна система ( <i>Georelational Information System</i> )                            | Технічна термінологія                  |
| Інформаційна система з природних ресурсів ( <i>Natural Resources Information System</i> )                | Дисциплінарна термінологія             |
| Інформаційна система з геології чи наук про Землю ( <i>Geoscience or Geological Information System</i> ) | Дисциплінарна термінологія             |
| Просторова інформаційна система ( <i>Spatial Information System</i> )                                    | Негеографічний термін                  |
| Система аналізу просторових даних ( <i>Spatial Data Analysis System</i> )                                | Термінологія на основі функцій системи |

На перший план при впровадженні ГІС-технологій виходять наступні питання: розробка районних екологічних геоінформаційних систем, відображення картографічної інформації в кадастрових ГІС, відображення картографічної інформації в екологічних ГІС, використання картографічної інформації у будівництві, дослідження глибинних покривів Землі, аналіз функцій від двох перемінних у тематичній картографії, розрахунок прямого економічного ефекту від упровадження геоінформаційних систем.

Геоінформаційні системи на даний час поєднують у собі точність і якість цифрових карт, величезну кількість довідкової інформації, потужний набір



інструментів для обробки й аналізу даних і, неодмінно, здатність обміну спеціалізованою інформацією через *Internet*.

Сучасний інструментарій ГІС дозволяє одержувати доступ до просторової інформації, грамотно її проаналізувати, врахувати всі алгоритми обробки. ГІС допомагає краще керувати проектами. Вона надає економні й ефективні інструменти, що дозволяють задовольнити потреби ринку у всезростаючих сервісних послугах в області геодезії й картографії без яких-небудь затримок. Рішення на базі ГІС сприяють підвищенню конкурентоздатності підприємства чи організації на ринку високих технологій та інформаційних послуг. Проектування інфраструктури й розробка відповідного проекту інженерної підготовки й освоєння території теж вимагають у даний час автоматизації й використання відповідних ГІС.

Основна задача, яка ставиться перед ГІС-технологіями – моделювання стану довкілля. ГІС-моделювання – це створення багат шарової електронної карти, у якій опірний шар описує географію досліджуваної території, а кожний з інших шарів – один з аспектів стану цієї території, а також виявлення взаємозв'язків, прогнозування, оцінка об'єктів і явищ на основі різного поєднання і сполученого аналізу цих шарів.

Термін “карта” асоціюється із деяким зображенням на площині, з різнобарвними лініями й областями, умовними знаками й написами, із заданим масштабом. Так приблизно і виглядає карта, коли вона візуалізується на екрані або виводиться на принтер чи плотер. Але це – зовнішній вигляд. Щоб успішно працювати з картами, потрібно уявляти собі, у чому суть поняття карти в ГІСах, із чого складається карта і які операції можна виконувати з картою. Карта складається з одного або декількох шарів, кожний шар містить один або кілька типів графічних об'єктів. Кожному типу відповідає безліч графічних об'єктів цього типу. Шари карти і типи графічних об'єктів є компонентами карти, а сама карта є один із компонентів ГБД.

Розбивка карти на шари й типи об'єктів цілком залежить від бажань користувача, що створює карту. Звичайно, це відбиває реальні взаємозв'язки об'єктів і може залежати від призначення карти. До одного типу звичайно, відносять такі об'єкти, що мають однаковий набір характеристик, що їх описують. Наприклад, усі земельні ділянки мають такі характеристики – тип ґрунту, призначення ділянки, форма власності, власник і т.п.

При розбивці карти на шари варто враховувати, що відображення карти завжди виконується пошарово, причому користувач може задати необхідний порядок шарів (від нижнього шару до верхнього). Об'єкти певного шару, перешаровуючись, можуть перекрити собою об'єкти з раніше відображених (нижніх) шарів. На противагу цьому, для типів об'єктів одного шару не гарантується якийсь визначений порядок відображення. Завжди можливо змінити існуючу розбивку на компоненти, увести нові шари або, навпаки,

об'єднати існуючі, змінити шар і тип для деяких об'єктів і т.п.

Кожний графічний об'єкт відноситься до одному з п'яти геометричних типів:

- [Точкові об'єкти](#)
- [Лінійні об'єкти](#)
- [Площинні об'єкти](#)
- [Текстові об'єкти](#)
- [Растрові об'єкти](#)

Найбільш важливою характеристикою геоінформаційної системи є набір підтримуваних нею **моделей представлення просторових даних**. По складу підтримуваних моделей можна судити про потенційні можливості й характер функцій просторового аналізу в програмному забезпеченні ГІС. **Моделлю представлення інформації** називається система концепцій та правил, що використовується для опису типів об'єктів і взаємин між екземплярами об'єктів. При цьому одна група аналітичних функцій просторового аналізу може бути реалізована на декількох моделях, друга – тільки на одній моделі. Модель просторової інформації визначає характер практично всіх наступних операцій і методів аналізу інформації, спосіб введення даних і особливості одержуваних результатів. Найбільш розповсюдженими моделями є **векторна модель із внутрішньооб'єктною топологією, векторна з лінійно-вузловою топологією і растрова**. У деяких додатках може бути використана **модель даних САПР**. Серед перспективних моделей варто назвати **модель квадротомічного дерева і векторні моделі з концептуальною топологією**. Використовуючи особливості кожної моделі, у ГІС реалізуються ті або інші функції просторового аналізу геоданих.

Класичні функції просторового аналізу включають полігональні оверлеї, аналіз близькості, буферизацію, алгебру карт, побудову та аналіз моделей рельєфу, моделювання мереж. Операції буферизації забезпечують такі можливості як, наприклад, побудова карт шумового забруднення від транспортних потоків, поширення забруднень по території, моделювання надзвичайних ситуацій на точкових об'єктах підвищеної техногенно-екологічної небезпеки і т.д. За допомогою оверлейних операцій між шарами різних карт можна згенерувати нові карти взаємних співвідношень між об'єктами, карти спільної поширеності явищ. Результатом аналізу мереж можуть бути карти транспортної доступності, поширення забруднень по річковій мережі, розрахунок оптимальних транспортних потоків.

ГІС-технології дозволяють здійснювати:

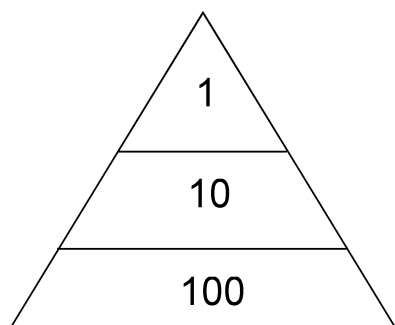
- ведення комплексного й галузевого кадастру;
- пошук і раціональне використання природних ресурсів;
- моніторинг екологічних ситуацій;

- контроль умов життя населення – охорона здоров'я, соціальне обслуговування;
- картографування – створення тематичних карт, національних і регіональних атласів, відновлення карт;
- територіальне й галузеве планування й керування промисловістю, сільським господарством, транспортом, енергетикою і т.д.

При аналізі методичних особливостей використання ГІС-технологій у роботі еколога слід особливо акцентувати увагу на програмному забезпеченні. Класифікаційну належність програмного забезпечення ГІС демонструє табл. 3, а співвідношення між наявністю й потребами споживачів у різноманітних програмних засобах для геоінформаційних досліджень ілюструє рис. 7.

**Таблиця 3.** Класифікація програмних засобів (ПЗ) ГІС-технологій

| Клас ПЗ          | Введення і форматування просторових даних | Створення і ведення атрибутивних баз даних | Запити до баз даних | Просторовий аналіз |
|------------------|---|--|---------------------|--------------------|
| ГІС-конструктори | Так                                       | Так  | Так                 | Так                |
| ГІС-аналітики    | Обмежене                                  | Так  | Так                 | Так                |
| ГІС-глядачі      | Ні  | Обмежене                                   | Так                 | Обмежене           |



### **ГІС-конструктори**

(повнофункціональні модульні ГІС, виробничі картографічні системи, промислові бази даних).

### **ГІС-аналітики**

(повнофункціональні настільні ГІС, промислові і настільні бази даних)

### **ГІС-глядачі (від англ. Viewer)**

(настільні ГІС-глядачі, мережеві ГІС-клієнти, Web-браузери)

**Рис. 7.** Різноманітні класи ГІС-продуктів

**MGE** (Modular GIS Environment) – модульне ГІС-середовище, донедавна флагман у великій піраміді ГІС-продуктів, розроблених компанією INTERGRAPH. **MGE** – це повнофункціональна інструментальна ГІС, до складу якої входить більш ніж 60 модулів різного функціонального призначення, і одночасно — наскрізна виробнича картографічна система. Спектр функціональності модулів **MGE** неймовірно широкий і незамінний у тих

випадках, коли інші програмні продукти не можуть вирішити всіх проблем.

У якості базового графічного ядра в системі *MGE* використовується векторний редактор корпорації Beantly – *Microstation J (SE)*. Усі додатки *MGE* є програмними надбудовами над *MicroStation*, що являє собою могутній багатофункціональний графічний редактор і має розвинуті засоби створення власних програмних додатків.

В основі програмних засобів створення й маніпулювання базами картографічних даних *MGE* лежить традиційна для такого рівня ГІС модель лінійно-вузлової топології просторових об'єктів із традиційною пошаровою організацією і зв'язана з ними описова або атрибутивна інформація, збережена в зовнішньої СУБД. Серед усієї сукупності продуктів *MGE* три модулі є базовими, оскільки містять основні функції створення й супроводу ГІС проекту. Це **MGE Basic Nucleus** – ядро системи, **MGE Basic Administrator** – основний адміністратор і **MGE Base Mapper** – базовий картографічний модуль. Наявність цих продуктів у системі необхідно практично при будь-якій конфігурації робочих місць. Набір додаткових додатків *MGE* у системі залежить від конкретної розв'язуваної задачі.

**GeoMedia** – перший заснований на технології Jupiter продукт корпорації Intergraph в області ГІС. Це універсальний географічний клієнт, покликаний відігравати роль "настільного" ГІС-інструментарію для задоволення потреб широкого кола користувачів у географічній інформації. Завдяки можливостям читання, інтеграції і спільного аналізу даних із різномірних джерел (найбільш популярних форматів ГІС, САПР і БД), *GeoMedia* здатна доповнити або замінити геоінформаційні системи попереднього покоління – такі як, наприклад, *MGE*.

*GeoMedia* – "настільний" аналітичний інструмент, призначений, насамперед для підтримки прийняття рішень на всіх рівнях. Користувач *GeoMedia* одержує повний набір функцій для реалізації географічного аналізу. Відкритість продукту дозволяє вести свої власні бази даних (як табличні, так і просторові), створювати з них тематичні шари карти, зображувати результати просторового аналізу й аналізу атрибутивних даних у виді вибірок із шару або самостійних шарів, вносити необхідні зміни в існуючі дані, формувати тематичні карти, що містять тільки необхідний набір шарів, інтегрувати бази даних із картографічними даними і багато чого, багато чого іншого.

Пакет *SICAD/open* (Simmence, Germany) призначений для побудови глобальних геоінформаційних систем. *SICAD/open* – це комплексна система інтеграції взаємозалежних інформаційних атрибутів і графічних об'єктів у банку геоданих. Зміни в одній області автоматично відображаються в іншій. Як інформаційну основу використовується корпоративні СУБД INFORMIX або ORACLE, що дозволяє використовувати переваги стандартної системи керування базами даних клієнт-сервер:

- SQL як користувальницьку мову запитів;
- комплексну інтеграцію;
- колективний доступ;
- можливість мережної розподіленої обробки.

*SICAD/open* є комбінованою растрово-векторною системою, що пропонує всі інструменти для введення, збереження, обробки й аналізу растрових і векторних даних: геодезичних, топографічних і аерофотознімків.

**ARC/INFO** – ведучий програмний продукт компанії ESRI – високорівнева ГІС-система. Безумовно, *Arc/Info* найбільш громіздка система, вимагає дуже значних обчислювальних ресурсів, складна в освоєнні і надзвичайно дорога система. В західних країнах (особливо в США) *Arc/Info* намагається претендувати на роль стандарту de facto як засіб об'єднання різних геологічних, геофізичних, географічних, екологічних прикладних систем. На теренах колишнього СРСР ситуація інша – у зв'язку з тим, що це програмне забезпечення дуже дороге, широкого поширення *Arc/Info* не зазнав.

**MicroStation GeoGraphics** – платформа на базі свого відомого продукту *MicroStation* для побудови географічних інформаційних систем. *MicroStation GeoGraphics* позиціонується на ринку як самостійна геоінформаційна система, але її скоріше варто розглядати як інструментарій для розробки власних програм, оскільки кожний проект вимагає індивідуального підходу в плані настроювань інтерфейсу, створення макросів і додаткових модулів. Потужні інструментальні засоби дозволяють розробляти будь-які робочі місця відповідно до ідеології проекту. Головне достоїнство *GeoGraphics* полягає в тому, що це інтеграційна ГІС-платформа високого рівня. Тобто все різноманіття інструментів *MicroStation* залишається доступним користувачу *GeoGraphics* як розробнику, і, крім цього, надається можливість створення власних спеціалізованих програм на базі *GeoGraphics*. *MicroStation GeoGraphics* працює прямо із СУБД *Oracle* і через драйвери ODBC із СУБД *MS Access*, *FoxPro*, *INFORMIX*, *SQL Server* і ін.

**AutoCAD Map 2000** – модуль для створення карт і просторового аналізу в середовищі *AutoCAD*, а також збереження, організації, аналізу й обміну інформацією про будь-які географічні об'єкти, їх форму і розташування в різних графічних форматах. Він містить весь набір стандартних засобів і спеціальні засоби для створення, обробки й збереження карт і географічних даних.

Основні можливості *AutoCAD Map 2000*:

- дозволяє працювати одночасно з декількома проектами і декількома кресленнями під час одного сеансу роботи.
- дає найкращі інструменти для швидкого й точного «сколювання» карт із паперових носіїв. Сколювання карт значно прискорює переклад паперових карт у цифрову форму.

- додаткова інформація, зв'язана з об'єктами карт, дозволяє значно розширити можливості аналізу й ухвалення рішення. AutoCAD Map надає велику гнучкість у підключенні інформації, керуванні їй і створенні запитів.
- здійснення доступу до інформації в зовнішніх базах даних із використанням SQL-зв'язків.
- підтримка растрових зображень. Растрові зображення є потужними засобами представлення графічної інформації. Аерофотознімки і фотографії із супутників надають точну й сучасну інформацію в легкодоступному форматі.

Автотрасування і поліпшена автоприв'язка дозволяють створювати і розміщати нові об'єкти, ґрунтуючись на існуючих об'єктах за допомогою тимчасової допоміжної геометрії.

**GeoMedia** доповнює лінію продуктів *MGE*. У той час, як *MGE* у першу чергу призначалася для конструкторів ГІС, що формують бази геоданих і керують інформацією, *GeoMedia* розрахована на ГІС-аналітиків і ГІС-глядачів, що синтезують нові дані, знання й рішення на основі вже наявних даних. Ці дані зможуть бути використані для комплексного еколого-географічного аналізу й прийняття обґрунтованих управлінських рішень.

Використовуючи сервери даних, *GeoMedia* дозволяє підключатися до джерел, розташованих у різних географічних точках, і одночасно аналізувати дані різних типів і форматів. Будучи цілком інтегрованою в технологію *Windows*, *GeoMedia* проста в користуванні і не вимагає ніяких спеціальних знань, що до мінімуму скорочує час навчання й звикання.

Геоінформаційна система **MapInfo** була розроблена наприкінці 80-х р.р. ХХ ст. фірмою Mapping Information Systems Corporation (U.S.A.). Пакет *MapInfo* спеціально спроектований для обробки й аналізу інформації, що має адресну або просторову прив'язку. *MapInfo* – це картографічна база даних. Встроєна мова запитів SQL MM, завдяки географічному розширенню, дозволяє організувати вибірки з урахуванням просторових відносин об'єктів, таких як віддаленість, вкладеність, перекриття, перетинання, площі і т.п. У *MapInfo* мається можливість пошуку й нанесення об'єктів на карту по координатах, адресі або системі індексів.

*MapInfo* дозволяє редагувати й створювати електронні карти. Оцифровка можлива як за допомогою дигітайзера, так і по сканованому зображенню. *MapInfo* підтримує растрові формати GIF, JPEG, TIFF, PCX, BMP, TGA (Targa), PIL (SPOT – супутникові фотографії). Універсальний транслятор *MapInfo* імпортує карти створені у форматах інших геоінформаційних і САПР-систем: *AutoCAD* (DXF, DWG), *Intergraph/MicroStation Design* (DGN), *ESRI Shape* файл, *AtlasGIS*, *ARC/INFO Export* (E00). У *MapInfo* можна працювати з даними у форматах *Excel*, *Access*, *xBASE*, *Lotus 1-2-3* і текстовому. Конвертація файлів

даних не потрібно. З MapInfo Ви маєте доступ до віддалених баз даних *ORACLE, SYBASE, INFORMIX, INGRES, QE Lib, DB2, Microsoft SQL* і ін. У *MapInfo* можна створювати тематичні карти наступних основних типів: картограми, стовпчасті і кругові діаграми, метод значків, щільність крапок, метод якісного тла і безперервної поверхні. Сполучення тематичних шарів і методів буферизації, районування, злиття й розбивки об'єктів, просторової й атрибутивної класифікації дозволяє створювати синтетичні багатокомпонентні карти з ієрархічною структурою легенди.

Пакет *MapInfo* ( Mapping Information Systems Corp., USA) в останні роки займає ведучі позиції серед геоінформаційних систем для персональних комп'ютерів. Mapping Information Systems входить у число американських компаній, що найбільш динамічно розвиваються

*ArcView* – теж відносно недорогий і простий у вивченні програмний продукт, що володіє функціями картографування і геоінформаційного аналізу та дозволяє користувачу швидко робити просторові й атрибутивні вибірки різних даних і відображати потрібну інформацію. *ArcView* забезпечує повний набір функціональності для початкового картографування, роботи з табличними даними, підтримку безлічі типів даних .

Найбільшою перевагою *ArcView* є набір засобів геообробки й аналізу. Ці засоби дозволяють проводити такі складні просторові операції з географічними даними як створення буферних зон навколо картографічних об'єктів, вирізка, злиття, перетинання, об'єднання тим і присвоєння даних по місцю розташування.

Однією з найпростіших геоінформаційних систем є *Atlas GIS*. У цій системі є тільки одне графічне вікно й ряд вікон табличних і довідкових. Графічне вікно відповідає листу папера, де розміщається карта й елементи її оформлення (назва карти, загальна легенду і до 4-х тематичні легенди, масштабна лінійка). Найсильніше місце пакета – графічний інтерфейс. Він простий і логічний. Практично всі операції виконуються однозначно і не більш ніж за два-три кроків. Універсальність *Atlas GIS* виявляється в незалежності аналітичної роботи від поточного порядку шарів карти. Усі операції однаково доступні для будь-якого шару. При створенні нових об'єктів доступні режими об'єктної прив'язки, копіювання загальної границі і т.д.

Можна формувати запит за атрибутивним критерієм, вказавши конкретне значення, границі (від і до) або використовуючи потужний для даного типу ГІС, конструктор запитів з обчисленням по складній функції, що містить, у тому числі і логічних операторів.

Геоінформаційна система *WinGIS* розроблена австрійською фірмою *PROGIS*. У цій системі реалізована ідея багатовіконної обробки векторних, растрових і табличних даних. Перевагами системи *WINGIS* є: простота і зручність використання, застосування концепції багатопарової побудови

зображення, об'єднання можливостей роботи з векторними й растровими об'єктами одночасно. У порівнянні з іншими ГІС система *WINGIS* відрізняється універсальністю своїх графічних можливостей і гнучкістю своїх програмних засобів, що можуть працювати паралельно.

Настільна геоінформаційна система *WINGIS* поєднує в собі базу даних і графічний редактор. База даних заснована на реляційній системі керування базами даних – SQL. Також система містить потужний генератор звітів, що має функції сучасних текстових процесорів, таблиць і списків, дозволяє виконувати аналіз шляхом поєднання різних полів даних у запиті і статистичний аналіз (усереднення, максимум, мінімум і т.д.), поєднання тематичних даних із графічними, а також об'єднання декількох незалежних баз даних у єдиний проект. У системі *WINGIS* передбачені спеціальні функції над об'єктами: пошук в околицях полігонів і усередині заданого радіуса, автоматичне створення рівнобіжних поліліній, поділ складних графічних об'єктів на прості лінії й точки, об'єднання векторних полігонів, автоматичне створення сіток, автоматична математична прив'язка після оцифровки і т.д.

Доволі своєрідною ГІС-системою є *CADdy*. Вона дозволяє без спеціального настроювання системи вести проектування й створення земельної (міської) кадастрової інформаційної системи. За допомогою *CADdy* здійснюється розробка графічних інформаційних систем, призначених для вирішення задач ведення, диспетчеризації і управління по земельному й міському кадастрах, кадастрах муніципальних інженерних мереж (каналізації, водопостачання й ін.) і доріг. А також забезпечується вирішення задач управління земельними ділянками, будинками і капітальними, системами електро-, водо- і газопостачання, телекомунікаційними мережами, оформлення ліцензій на будівництво, відвід земельних ділянок, облаштуваність захисних зон і парків, ведення планів розвитку території, землевідводів і землекористування, а також баз даних по будівництву й експлуатації доріг.

*WinCAT* (Siemens Nixdorf) – геоінформаційна система, орієнтована на інтеграцію й аналіз графічних і семантичних баз даних з обмеженими можливостями введення й редагування. Основною одиницею роботи в *WinCAT* є проект, він поєднує в собі всю графічну й семантичну інформацію у виді тематичних шарів. Тематичними шарами є векторні і растрові файли і запити до таблиць ODBC. Тематична картографія в *WinCAT* розвита дуже сильно, кожний шар у проекті може нести тематичне навантаження. Тематика може бути створена для будь-яких типів графічних об'єктів – площинних, лінійних, точкових і т.д. Інформація в тематичному шарі може відобразитися як стиль графічного об'єкта (колір, заливка, стиль і товщина лінії, розмір символу і т.д.), так і із застосуванням елементів ділової графіки, у виді діаграм, гістограма і т.д.

Локальні запити можна складати по декількох полях, результат роботи запиту можна подивитися в таблиці. На карту можуть бути нанесені області



пошуку у виді полігонів різної форми, із ними можна зв'язати будь-який тематичний шар. На карті й у таблиці будуть відбиті тільки ті об'єкти, що потрапили в області пошуку. Операції по перетворенню координат WinCAT не підтримує.

Вище розглянуті програмні продукти розроблені виключно іноземними (переважно американськими) компаніями. При всіх їх перевагах і технічних можливостях вони початково мають 2 недоліки: графічне оформлення картографічної інформації не відповідає державним стандартам на відповідні види продукції, що діють на території країн колишнього СРСР, а, окрім того, ліцензія на користування цими системами коштує дуже дорого. Роботи по створенню ГІС-продуктів велись не лише за кордоном, але й у Росії і на навіть в Україні.

Одним з найвідоміших та найпоширеніших російських програмних продуктів цієї галузі є *ГІС "Панорама"*, розроблений фірмою "Геоспектрум" разом із топографічною службою ВР РФ. У цьому пакеті важливе місце займає автоматизована інформаційна система земельного кадастру – *"Панорама-Кадастр"*. Вона призначена для оперативного збору, нагромадження, збереження і використання земельно-кадастрових даних (топографічного й правового характеру) при кадастровому картографуванні, оперативного управління земельними ресурсами. Система дозволяє вести оперативну інформацію про землекористувачів, земельні ділянки, операції проведених із земельними ділянками, а також прив'язувати цю інформацію до цифрових карт і виконувати розрахункові задачі з видачею звітних матеріалів. Кадастрова інформація про земельні ділянки зберігається в реляційній базі даних, доступ до якої здійснюється за допомогою SQL-запитів. Цифрові карти місцевості мають внутрішній формат *ГІС-Панорама*.

Центр Геоінформаційних Досліджень ІГ РАН розробив геоінформаційну систему *GeoGraph/GeoDraw*. Популярність цього ГІСу стабільно зростає. Основними перевагами *GeoGraph/GeoDraw* є: поєднання сучасних професійних можливостей програмних засобів ГІС з їхньою доступністю для широкого кола користувачів; створення і нарощування універсального ядра ГІС, що охоплює базовий набір функцій будь-яких ГІС, і на основі якого будуються конкретні допоміжні програми; високі вимоги до якості створюваних цифрових карт і професійна реалізація функцій роботи з ними; можливість створення спеціалізованих програм на основі *GeoGraph/GeoDraw*, що можуть по дуже низькій ціні і масово поширюватися з потрібними базами даних.

Отже, ГІС-програми відкривають широкі горизонти в системному аналізі інформації про стан навколишнього природного середовища. Сучасні ГІСи дозволяють не лише зберігати екологічну інформацію, формуючи базу даних, та будувати електронні карти стану довкілля, але й аналізувати основні тенденції та закономірності, що відбуваються в природі. Окрім того, за їх допомогою можна створювати експертні системи (наприклад, кадастрові, міські

геоінформаційні системи, що включатимуть усі інженерні мережі та комунікації населеного пункту, моделі динаміки і впливу природо-заповідного фонду, прогнозні моделі масштабів та поширення небезпечних, шкідливих та уражуючих факторів при виникненні небезпечних або аварійних ситуацій на техногенно-небезпечних об'єктах) які допомагатимуть у прийнятті управлінських рішень у галузі оптимізації природного середовища.

## **5. Комп'ютеризовані системи для прийняття рішень по оптимізації навколишнього середовища**

Але створення експертних систем – це основна задача не стільки ГІС-програм, скільки експертних систем для прийняття (підтримки) рішень по оптимізації природного середовища. Систем цих на сьогодні існує доволі багато. При їх розробці закладено чисельний алгоритм вирішення певного завдання, кінцевим результатом роботи якого є пропозиція спеціалісту, що працює з даною програмою, прийняти або відхилити пропоноване комп'ютером рішення даної проблеми.

Специфіка цих програм у їх вузькій спеціалізації, індивідуальності. Тобто певна програма може, як правило, вирішувати лише одну задачу, а однотипні програми, написані однією мовою програмування, іноді навіть на одному програмному ядрі, вирішують лише кожна своє завдання. Звичайно, такі системи, являють собою окремі комп'ютерні програми, як правило, нескладні за структурою, написані на якійсь із мов програмування високого чи навіть низького рівня (*Pascal, TurboPascal, Delphi, Visual Basic, C++* тощо). Рідше ці програми створюються в програмному середовищі певного програмного продукту. Багато сучасних програм характеризуються відкритою архітектурою, тобто містять встроєні редактори та мови програмування. Наприклад, програма *Mapinfo* містить встроєний редактор мови *MapBasic*. Як правило, такі редактори є доволі простими в освоєнні, якщо порівнювати їх із повнофункціональними мовами програмування і дозволяють створювати програмні додатки, які працюють на ядрі “материнської” програми. Також широко практикується створення експертних систем у вигляді макросів або спеціального форматування (підготовки полів, закладання розрахункових формул, вставка зв'язків та посилань між окремими масивами даних) у середовищі поширених програм (наприклад, в *MS Excel, MS Access, MathCad* тощо).

Типовим прикладом експертної системи для прийняття рішень в щоденній практиці спеціаліста-еколога є програмний комплекс *АРМ “Еколога”*, розроблений київської фірмою “ТопазІнформ”.

*Таблиця 4. Структура системи АРМ "Еко"*

| № | Найменування модуля | Призначення програмного продукту  |
|---|---------------------|---|
| 1 | Інвентаризація      | Формування звітності з інвентаризації джерел викидів шкідливих речовин в атмосферу                            |
| 2 | ОВНС                | Формування таблиць оцінки впливу на навколишнє середовище (ОВНС) з урахуванням проведення заходів на джерелах |
| 3 | Норма               | Нормування викидів (дозвіл на викид, нормативи, заходи, контроль)   |
| 4 | Тандем              | Формування заходів із досягнення нормативів ГДВ, звикористанням бази даних пилогазоочисного обладнання        |
| 5 | Експерт             | Підбір пилогазоочисного обладнання і формування експертних висновків  |
| 6 | Викид               | Розрахунок питомих викидів, форма 2-ТП (повітря), плата за викид  |
| 7 | Е О Л               | Розрахунок розсіювання шкідливих речовин в атмосферу (ОНД - 86)   |
| 8 | Бойлер              | Розрахунок викидів забруднюючих речовин від котлів продуктивністю до 30 т/год                                 |
| 9 | Ліміт               | Нормування викидів (ліміт на викид, плата за викид)   |

Позитивною стороною даної експертної системи є багатовекторність і комплексність – окремі додатки взаємодіють між собою, вільно відбувається переконвертація даних, спільне використання баз даних. Окрім того, до переваг даного пакета слід віднести той факт, що АРМ "Еколог" узгоджено з Міністерством екології та природних ресурсів України. Серед усіх елементів даного комплексу (табл. 4) хотілось би розглянути детальніше програму *ЕОЛ*.

Дана програма являє собою автоматизовану систему розрахунку забруднення атмосфери. *ЕОЛ* призначений для оцінки впливу шкідливих викидів проєктованих і діючих (реконструйованих) підприємств на забруднення приземного шару атмосфери. В основу розробки програми закладено алгоритм оцінки забруднення повітря згідно "Методики розрахунку концентрацій в атмосферному повітрі шкідливих речовин, що містяться у викидах підприємств. ОНД-86". Система *ЕОЛ* дозволяє розраховувати поля забруднень для точкової моделі джерела викиду шкідливих речовин із круглим і прямокутним виходом труби; лінійної моделі; двох моделей площинного джерела (моделі ставка-відстійника й моделі джерела, що складається з безлічі окремих точкових джерел, розташованих близько одне від одного, з однаковими значеннями конструктивних і технологічних характеристик). При оцінці впливу проєктованих і реконструйованих підприємств на забруднення атмосфери розрахунок здійснюється з врахуванням фонових (існуючих) концентрацій. При розрахунку розсіювання забруднюючих речовин в атмосфері можуть враховуватися поправки на рельєф. У систему встроєна база даних ГДК (1500 речовин) і груп сумачії (усього 40).

Навчальне видання

**Фесюк Василь Олександрович**

**Географічне моделювання і прогнозування**

Курс лекцій

Друкується в авторській редакції