Виникнення сферичної геометрії

Лекції

Кравчук О. М.

Розділ І. Виникнення сферичної геометрії

Першою, відмінною від евклідової, була сферична геометрія або сферика, як її називали в давнину.

Вона, як і інші математичні науки зародилась і розвивалась під впливом потреб розвитку людського суспільства, у процесі розв’язування конкретних задач практичного характеру з астрономії (визначення положення точок на сфері – зірок на небі), мореплавства (визначення курсу корабля у відкритому морі за положенням зірок), географії (складання точних географічних карт).

Перші спроби розв’язування цих задач належать ученим Стародавньої Греції: Арістарху Самоському, який обчислював відстані від Місяця до Землі та від Сонця до Місяця в кутових мірах, Ератосфену Кіренському – хто першим виміряв довжину дуги меридіана, Аполлонію й Архімеду, які розробили основи стереографічної проекції.

Засновником сферичної геометрії і сферичної тригонометрії вважають великого грецького астронома Гіппарха Нікейського (бл. 180 – 125 до н. е.) – автора “Трактату про хорди дуг кола” в дванадцяти книгах, де вперше були викладені основи сферичної геометрії й тригонометрії, але книги Гіппарха до нас не дійшли. Про них ми знаємо з прань іншого відомого астронома і геометра Клавдія Птолемея (бл. 100 – бл. 178). У творі “Велика математична побудова астрономії” (в тринадцяти книгах) Птолемей використав астрономічні дослідження Гіппарха, а також інших його попередників, зокрема Феодосія і Менелая.

Після завоювання Греції Римом грецька культура занепала і дальшого розвитку сферична геометрія дістала в Індії (Аріабхатта – V ст., Бхаскара II

– XII ст.) і Середній Азії (Аль-Баттані – IX ст., Абу-ль Вефа – XI ст., Насреддін Тусі – XIII ст.).

Поштовхом для виникнення сферики було вивчення зоряного неба. Спостереження небесних світил проводилось ще в Стародавньому Єгипті і Вавилоні, перш за все з метою введення календаря. Внаслідок за його створення взялася астрономія.

Єгипетські астрономи, які займалися спостереженням за небом, виявили, що різні явища природи, які повторюються, супроводжуються завжди тими самими небесними явищами. Так, перед початком розливу Нілу на ранковому небі з'являлася невидима до того часу яскрава зірка Сіріус; навесні перед початком жнив ставало видимим сузір'я Плеяд, а ранній захід його восени позначав час сівби й завершення мореплавання - період штормів. Ці й багато інших спостережень підказували людині, що між небесними явищами, зміною пір року і їхньою тривалістю має існувати зв'язок. Дійсно, видимість тих або інших сузір'їв була пов'язана з рухом сонця відносно зірок, таким, що переходить з одного сузір'я в інше. Тому й задача про тривалість року була пов'язана із цим рухом. Було зауважено, що цей рух день у день змінюється й сонце проходить той же самий видимий шлях вдруге лише через рік.

Завдання про визначення тривалості року полягало в тому, щоб визначити в добі, годинах і навіть хвилинах період часу між однаковими положеннями сонця на небі. Але, оскільки, вдень через його блиск зірки, поблизу яких у цей час перебувало Сонце й відносно яких легко було визначити його положення, не були помітні, то доводилося визначати положення Сонця за нічними спостереженнями зірок, і вже потім за допомогою геометричного креслення й досить громіздких обчислень визначати положення сонця та його денний і нічний шлях.

Для обчислення часу тривалості місяця потрібно було знати видимий шлях Місяця, тому що він визначався як період зміни місячних фаз. Хоча положення Місяця увесь час було видно на зоряному небі, але його шлях виявлявся настільки складним, що не так легко було заздалегідь визначити. Це було необхідним як для потреб календаря, так і для пророкування місячних затемнень, що дуже цікавило древніх астрономів.

Визначення тривалості року або місяця вимагало великої точності вимірювання часу.

Оскільки, ні рік, ні місяць не виражалися цілим числом кількості діб, постійно доводилося вносити в календар певні уточнення, без чого календарем не можна було б користуватися.

Отже, задача складання календаря вимагала створення геометричної картини руху небесних світил. Необхідно було за допомогою спостережень встановити видимі шляхи траєкторії руху небесних тіл і, відтворюючи їх на кресленні у вигляді деяких ліній, за їх допомогою вже проводити всі можливі розрахунки, необхідні для побудови календаря.

Однак, безпосередньому відшуканню й відтворенню на кресленні видимих шляхів руху небесних світил "перешкодили" філософські погляди вчених. Вважаючи небесні світила найбільш "досконалими" тілами природи, грецькі вчені спочатку думали, що ці "досконалі" тіла мають здійснювати й більш "досконалі" рухи, якими, на їх думку, поряд із прямолінійними були кругові і до того ж рівномірні рухи.

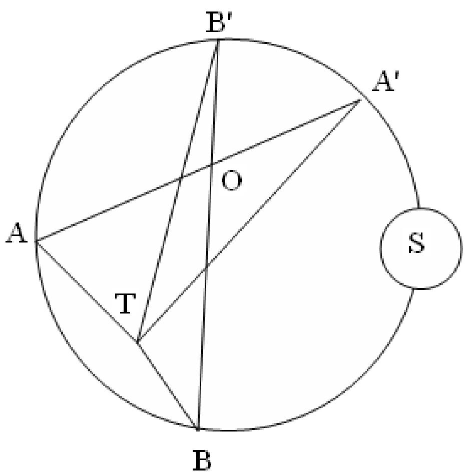


Рис. 1.1

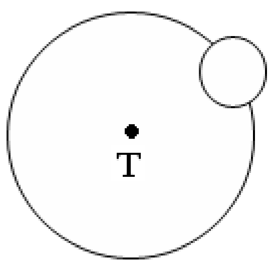


Рис. 1.2

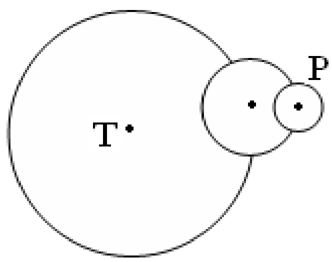


Рис. 1.3

Оскільки спостережувані рухи світил часто виявлялися нерівномірними й зовсім не круговими (як, наприклад, видимі шляхи руху планет, що являє собою складні лінії із численними петлями), то стародавні астрономи намагалися подати шляхи видимих рухів планет у вигляді комбінації різних кругових і рівномірних рухів, аби тільки не вийти за межі встановленої схеми.

Так на рис. 1.1, показано нерівномірний рух Сонця *S* навколо нерухомої, в їхньому розумінні, Землі *T*. Вони зображали і рівномірний і круговий, але вважали, що розташування Землі *T* не збігається із центром кола, по якому рухається Сонце. Дійсно, із малюнка видно, що із однакових шляхів *AB* і *A'B',* Сонце, яке проходить у один і той же час, більшим здавався той (*AB*), що був ближче до Землі (тому що видимий шлях по небу визначається видимим кутом, на який переміщається Сонце). У результаті рух Сонця на шляху *AB* здавався прискореним у порівнянні з його переміщенням шляхом *A'B'.* Шлях Місяця грецькі вчені представляли відповідно до рис. 1.2, де в центрі *T* великого кола перебувала Земля, а Місяць рухався рівномірно по маленькому колу, центр якого, у свою чергу рівномірно рухався по великому колу навколо Землі. Рух деяких планет зображувалися ще складніше (рис. 1.3). Так, наприклад, планета *P* рухалася рівномірно по першому колу, центр якого рівномірно рухався по другому колу, центр якого також рівномірно рухався по третьому колу навколо Землі *T*.

Використовуючи такі досить громіздкі схеми, вдавалося за допомогою рівномірних і кругових рухів відтворити з можливим для того часу ступенем точності все різноманіття рухів небесних світил.

В усіх обчисленнях, пов'язаних із цими кресленнями, необхідно було переходити до допоміжних побудов, що приводили до розв’язання трикутників, до використання тригонометрії, що тоді зародилася, і до розв’язання інших планіметричних, а іноді й стереометричних задач елементарної геометрії.

Ми завдячуємо єгиптянам за розподіл доби на 24 години. Вклад вавілонян у розвиток астрономії був більш значним. Птолемей посилається на вавилонські спостереження затемнень і зірок перших століть ”ери Набонасара”, що розпочалась в VIII ст. до н. е., а не на спостереження своїх земляків – єгиптян. Вавилонські астрономи ввели поділ екліптики на 12 знаків Зодіаку, поділ кожного з цих знаків на 30 градусів і шестидесяткове ділення градусів на хвилини і секунди. Вони описували рух планет вздовж екліптики з допомогою своєрідних “ступінчастих” і “зигзагоподібних” функцій, які відіграли важливу роль у розв’язуванні багатьох астрономічних задач. Стародавні греки ознайомились із вавилонською астрономією в IVст. до н.е., коли початкові назви планет були замінені назвами планет за вавилонським зразком. Астрономія, викладена в “Алмагесті ” Птоломея, була результатом тривалого (кількох століть) розвитку науки.

Крім “Алмагесту”, Птолемей залишив нам “Зйомку” і “Планісферій” - астрономічні праці, що широко застосовують математику. Перша, як і однойменна праця Діодора Олександрійського, містить виклад теорій ортогональної проекції небесної сфери на три взаємно перпендикулярні площини: меридіану, горизонту і першого вертикального круга. За допомогою даних проекцій розв'язувалась задача знаходження Сонця над горизонтом у визначений день і час для певної широти, причому на основі графічної побудови обчислювалась зенітна відстань Сонця. Користуючись тими ж методами, Птолемей знаходив дугу *2a,* яку описувала над горизонтом зірка, що мала нахил δ:

$$\cos\alpha = tg\delta \cdot tg\varphi$$

де, φ - висота полюса над горизонтом.

“Планісферій” - праця, що збереглась лише у латинському перекладі з арабського перекладу, містить стереографічну проекцію небесної сфери, тобто, проекцію північної півсфери на площину екватора з точки, розміщеної у південному полюсі. Тут, як і в багатьох працях Птолемея, викладені дослідження Гіппарха. Птолемей вказує, що проекцією будь-якого круга, як великого, так і малого, буде також круг (за виключенням великих кругів, які проходять через полюс і проектуються на прямі), але він не дає загального доведення цього важливого твердження, лише для частинних випадків — для екліптики, горизонта та ін.. Про інші важливі особливості стереографічної проекції – про збереження величини кутів – Птолемей також не згадує.

Видима небесна сфера являє собою сферу із центром в центрі Землі. Важливими колами цієї сфери є *горизонт* – нерухоме велике коло, що проходить паралельно дотичній площині до поверхні Землі в точці, в якій знаходиться спостерігач, *небесний екватор* – велике коло, що переходить саме в себе при видимому добовому обертанні небесної сфери, і *екліптика* – змінює своє положення при добовому обертанні небесної сфери, велике коло, за яким відбувається видимий річний рух Сонця. Полюси горизонту називають *зенітом* (у верхній півсфері) *і надиром* (в нижній півсфері).

Полюси небесного екватора називаються *полюсами світу*. А пряма, що їх з'єднує – *віссю світу*. Сонце перетинає небесний екватор в дні весняного і осіннього рівнодення, і перебуває на найбільшій відстані від небесного екватора в дні літнього та зимового сонцестоянь. Точки екліптики, що відповідають цим дням, описують при добовому обертанні небесної сфери лінії тропіків Рака і Козерога.

Екліптика утворює з небесним екватором сталий кут, що дорівнює 23 градуси, горизонт же утворює з небесним екватором кут, рівний доповненню широти місцевості до 30 градусів (вони перпендикулярні на земному екваторі і співпадають на полюсі).

Відомо, що геометрія на площині має виходити (як вказує саме слово "геометрія") із потреб вимірювання земельних ділянок таких розмірів, які дозволяють розглядати поверхню землі як площину.

Сферична геометрія, тобто геометрія на сфері, має, навпаки, "небесне" походження: з геометрією на сфері люди зустрілися вперше в астрономії, при вивченні видимої "небесної сфери". Вона виникла в I - II століттях нашої ери, коли після римських завоювань був встановлений тісний контакт між грецькими і Александрійськими геометрами і вавилонськими астрономами. В I столітті з’явилась “Сферика” Менелая, яка в той же час була використана в астрономії знаменитим Клавдієм Птоломеєм. Пізніше, з розвитком мореплавства і географії, сферичну геометрію стали застосовувати і до поверхні земної сфери.

Перше, й разом з тим одне з найскладніших, завдань перед математикою поставило мореплавство. Основним завданням, що стояло перед ним було визначення місця розташування корабля в морі. Мореплавство в давнину майже не ставило перед собою цього завдання: фінікійське, а потім грецьке й римське мореплавство були прибережними.

В епоху великих географічних відкриттів становище дуже змінилося. Під час тривалих морських плавань кораблі тижнями й місяцями перебували у відкритому морі й необхідність знаходити для них правильний шлях жадала від моряків серйозних знань. Дійсно, зміна напрямку вітру, морські течії й безліч інших причин змушували корабель увесь час змінювати напрям свого руху.

Уміння в цих умовах орієнтуватися в морі й правильно вести корабель було пов'язане з умінням визначати в певний момент часу місце розташування корабля. Першим і найважливішим завданням мореплавства було те, щоб навчитися визначати положення корабля, тобто його *географічні координати — широту й довготу*. Але із цією задачею була пов'язана й інша, не менш важлива задача: визначивши місце корабля, намітивши його курс, треба було розрахувати й позначити його подальший шлях. А це не можливо було зробити без географічної карти.

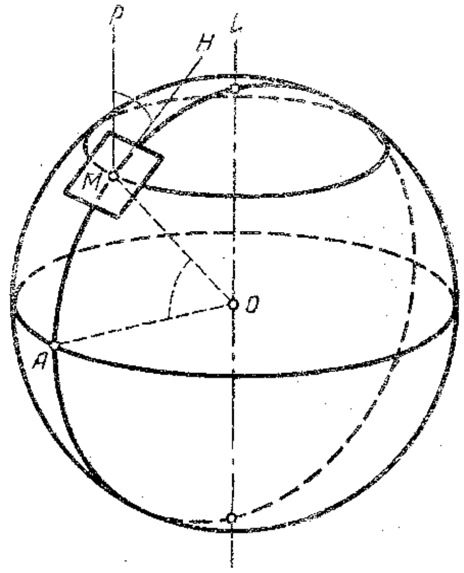


Рис. 1.4

Отже, другим важливим завданням було завдання складання географічних карт.

Розв'язання цих завдань було необхідним: не маючи карт і не маючи точного орієнтування, кораблі зайві тижні ходили по морю, що збільшувало небезпеку плавання, зменшувало число рейсів, приносило збитки купцям, здорожчувало товари, гальмувало торгівлю. Наскільки велика була необхідність у вирішенні цих завдань, показує хоча б той факт, що англійський парламент призначив велику премію за винахід надійного способу орієнтування в морі.

Розв'язання цих двох основних задач взяли на себе астрономія й математика. З'ясуємо тепер, у чому ж було математичне, а, зокрема, геометричне тлумачення цих завдань.

Визначення широти не представляло труднощів; усі труднощі виявилися у визначенні довготи. *Широтою* якого-небудь місця на земній сфері називається (рис. 1.4) кут *AOM,* утворений радіусом *OM,* проведеним із центра Землі до точки *M* (положення спостерігача), із площиною екватора.

Безпосередньо визначити цей кут спостерігач, звичайно, не міг, але він легко міг визначити кут *HMP*, який дорівнює *AOM* (*HMP* є кут між прямою *HM* — дотичною до меридіана *AM* у точці *M* — і напрямком *MP*, паралельним земній осі; тому кути *HMP* і *AOM* мають взаємно перпендикулярні сторони).

Дійсно, у напрямку *MP* спостерігач завжди бачить Полярну зірку, розташовану приблизно на продовженні земної осі *OL* (всі промені зору, спрямовані на цю зірку, паралельні один одному).

Тому для визначення широти точки *M* (тобто кута *AOM*) треба було визначити вночі, у даному місці *M,* кут променя зору, спрямованого на полярну зірку, з поверхнею землі в даній точці, тобто *HMP.* Цей кут і дає широту місця спостереження *M*. *Довготою* якої-небудь точки *M* (рис. 1.5) на земній сфері називається двогранний кут площини меридіана (*NMS),* що проходить через цю точку *M,* із площиною деякого меридіана *(NTS),* прийнятого за початковий.

Знаючи, що Сонце у своєму видимому русі навколо Землі “обходить’’ її дугу в 360°, за 24 години, тобто “проходить’’ дугу в 15° за 1 годину, одержали дуже простий спосіб визначення довготи. Він ґрунтується на тому, що різниця показань годинників у двох точках (наприклад, *M і T*) у той самий момент часу визначає довготу однієї точки (наприклад, *M)* відносно іншої (*T).*

Використати цей спосіб визначення довготи фактично можна було б так: відправляючись, наприклад, у подорож із міста *T,* ми беремо із собою годинники, що йдуть за місцевим часом міста *T*. Знаходячись в деякій точці *M* і бажаючи визначити тут її довготу відносно міста *T,* ми чекаємо найвищого положення Сонця на небі в точці *M,* тобто полудня, і, подивившись у цей момент на взяті із собою годинники, встановлюємо, котра година в цей момент у місті *T.*

Якщо годинники міста *T* показують, наприклад, 9 годин ранку, то це значить, що в місті *T* буде полудень через 3 години, а, отже, сонце, ”пройде” за ці 3 години від меридіана точки *M* до меридіана міста *T,* всього 3 • 15° = 45°, тобто точка *M* має східну довготу в 45° відносно точки *T*.

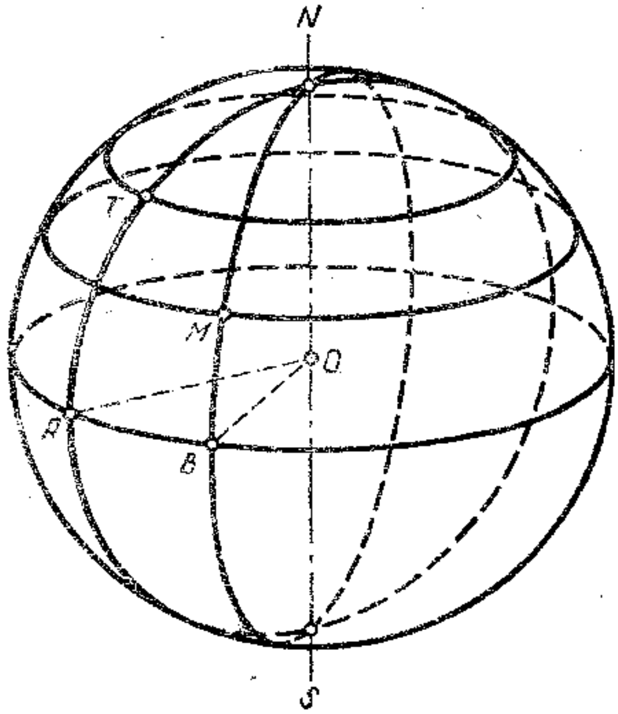


Рис. 1.5

Цей найпростіший спосіб визначення довготи в XVI і XVII століттях був зовсім непридатним для застосування на практиці. Справа в тому, що тоді не було годинників, придатних для перевезення на кораблях і придатних до тривалого й точного фіксування часу. Доводилося шукати інший спосіб визначення довготи.

Такий спосіб дала астрономія.

Ідея цього способу полягала в спостереженні таких небесних явищ, які були б одночасно й однаково видимі в різних місцях земної сфери.

Цими явищами були положення планет або Місяця відносно зірок. Використати ці небесні явища для визначення довготи можна було в такий спосіб: мандрівник, що перебував у точці *M* (рис. 1.5) і бажав визначити довготу відносно міста *T*, повинен був мати в руках таблиці, у яких були б заздалегідь передбачені можливі розташування планет відносно зірок і було б зазначено, у який момент часу на годинниках міста *T* має бути саме це розташування світил. Тоді, спостерігаючи розташування світил у деякий момент часу і фіксуючи час за годинниками місця спостереження — точки *M*, спостерігач із таблиці дізнавався, котру годину в цей час показують годинники в місті *T*. Знаючи у той самий момент часу показання свого годинника і годинника міста *T,* він відразу ж міг визначити довготу місця *M* відносно *T*.

Цей спосіб і був відкритий астрономами для визначення довготи на морі. Але для його використання були суттєві перешкоди, які треба було подолати. Для досить точного визначення довготи потрібно було скласти досить точні таблиці положень планет. Однак виявилося, що схеми рухів планет, складені стародавніми астрономами, стали тепер непридатними: положення планет, передбачувані ними, давали занадто великі розбіжності зі спостережуваними, внаслідок недостатньої точності астрономічних теорій.

Це означало, що постало питання про створення й про математичну обробку нової, більш глибокої, астрономічної теорії руху небесних тіл, що більш точно відображає їх дійсні рухи, ніж описувала система Птолемея.

Щоб ця теорія могла глибше проникнути в суть справи, щоб вона могла не тільки описувати спостережувані рухи планет, але й успішно передбачати їх, вона повинна була спробувати з'ясувати причини цих рухів, тобто причини, під впливом яких ці рухи відбуваються. Останні питання зовсім не розглядалися в системі Птолемея. Закони, яким задовольняли, описувані правдиві рухи небесних тіл, були відкриті Кеплером (1571 – 1630), а пояснення цих рухів було дано Ньютоном (1643 – 1727).

Які ж математичні задачі довелося розв’язувати астрономам при складанні таблиць положення планет, користуючись новою теорією їх руху?

Ми зараз побачимо, що ці задачі були досить складними і зовсім незвичайними для математики того часу. Найхарактернішим для цих задач було те, що математикам на кожному кроці доводилося мати справу із змінними величинами. Дійсно, щоб передбачити положення планети на небі потрібно було, крім визначення розташування самої еліптичної орбіти в просторі та її елементів (осі, фокусна відстань, ексцентриситет – рис. 1.6), вміти визначити положення планети *M* на самому еліпсі, наприклад, за допомогою кута між прямою *SM* і великою віссю еліпса. Цей кут був змінною величиною й залежав від часу *t* руху планети.

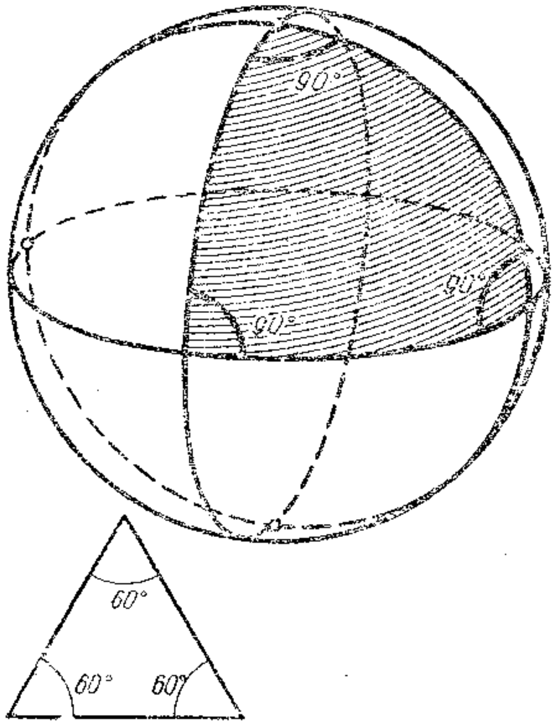


Рис. 1.6

Далі, треба було вміти визначати відстані *SM*, які тут були величинами змінними й залежали від часу. Швидкість планети *M* також була змінною, залежною від часу *t*, на відміну від сталої швидкості планет у системі Птолемея, причому ця змінна швидкість була спрямована по дотичній до еліпса, яку було не так просто будувати, як дотичну до кола. Для визначення швидкості планет доводилося обчислювати змінні площі еліптичних секторів, що представляло більші труднощі, ніж обчислення площі кругового сектора.

Визначення шляхів, пройдених планетами по їхніх орбітах, тобто визначення довжин дуг еліпсів, було більш складною справою, ніж визначення довжин дуг кіл. Нарешті, сама причина взаємодії між Сонцем і планетами, що обумовлювала їхній рух, теж була величиною змінною, тому що залежала від змінної відстані *SM* між Сонцем і планетою.

Отже, з математичної точки зору, ці задачі були задачами на визначення довжин дуг кривих, площ, проведення дотичних, визначення швидкостей і прискорень криволінійних рухів. Для всіх цих задач було спільним те, що в них йшла мова про змінні величини.

Але сама стародавня математика ніяких змінних величин не знала: з якими б задачами елементарної алгебри й геометрії не мали справу математики, у них ішла мова про дані або шукані, але завжди сталі величини. Тепер же у вказаних задачах у якості відомих і невідомих величин поряд зі сталими входили і змінні величини. Таким чином, ці задачі виявлялися новими й у більшості випадків зовсім непосильними для грецької математики.

Для розв’язання цих задач потрібна була математика змінних величин. Визначились, як окремі напрямки математичної науки, аналітична геометрія, диференціальне й інтегральне числення. За допомогою методів, розроблених в цих науках, і були складені, зокрема, астрономічні таблиці, що дозволяли визначати положення корабля в морі.

Ми вже зазначали, що другим завданням мореплавання було складання географічної карти, якою можна було б користуватися у морських подорожах. Те, що задача про побудову географічної карти була далеко не такою простою, як це може здатися на перший погляд, ілюструє наступний приклад. Добре відомо, що найкоротшим шляхом між двома точками на площині є відрізок прямої, що з'єднує ці дві точки. Найкоротший шлях між двома точками на поверхні сфери йде по найменшій з дуг великого кола, проведеного через ці точки. При зображенні земної поверхні на плоскій карті дуги великих кіл зображувалися прямими лініями. Наскільки важко здійснити цю вимогу, видно із рис. 1.6. Останній показує, що на поверхні сфери існує рівносторонній трикутник, утворений трьома дугами великих кіл і який має три прямі кути, тоді як на площині прямолінійний рівносторонній трикутник має всі кути, що рівні 60°. Ми бачимо, як змінюється сферичний трикутник при зображенні його на площині.

Завдання побудови географічної карти є дуже складним. Так, уже в той час, коли робилися перші спроби складання географічних карт, з'ясувалося, що Земля взагалі не має кулястої форми, а має форму поверхні, утвореної обертанням еліпса навколо його малої осі (вісь симетрії, перпендикулярна до великої осі). Така поверхня називається еліпсоїдом. Її меридіани мають форму еліпсів (рис. 1.7). Зрозуміло, що це відкриття ще більше ускладнило завдання складання географічних карт і воно не могло бути розв'язане лише за допомогою однієї елементарної математики.

Для його розв'язання потрібна була диференціальна геометрія, яка виникла як результат розвитку математики і зокрема аналітичної геометрії.

Однак, завдання складання географічної карти є досить цікавим. Справа в тому, що географічна карта будується за допомогою географічної координатної сітки (рис. 1.8), що є, по суті, тією самою системою координат, користуючись якою ми будуємо графіки в алгебрі й геометрії. Зокрема, положення точки на глобусі або на карті визначається двома числами - довготою й широтою, як і положення точки графіка в системі координат - її абсцисою й ординатою.

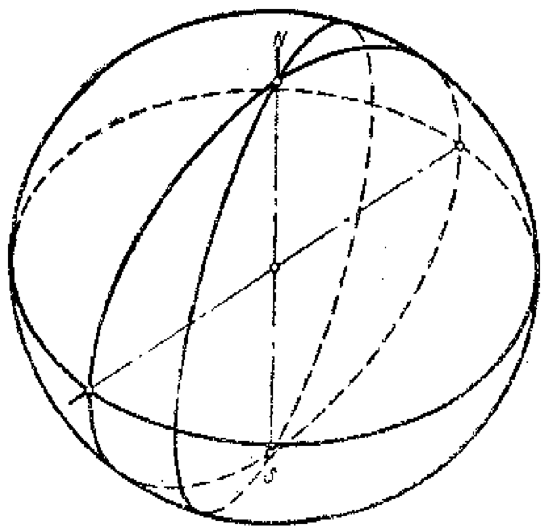


Рис. 1.7

У картографічному завданні ми бачимо один з перших прикладів використання координатної системи для характеристики положення точок на

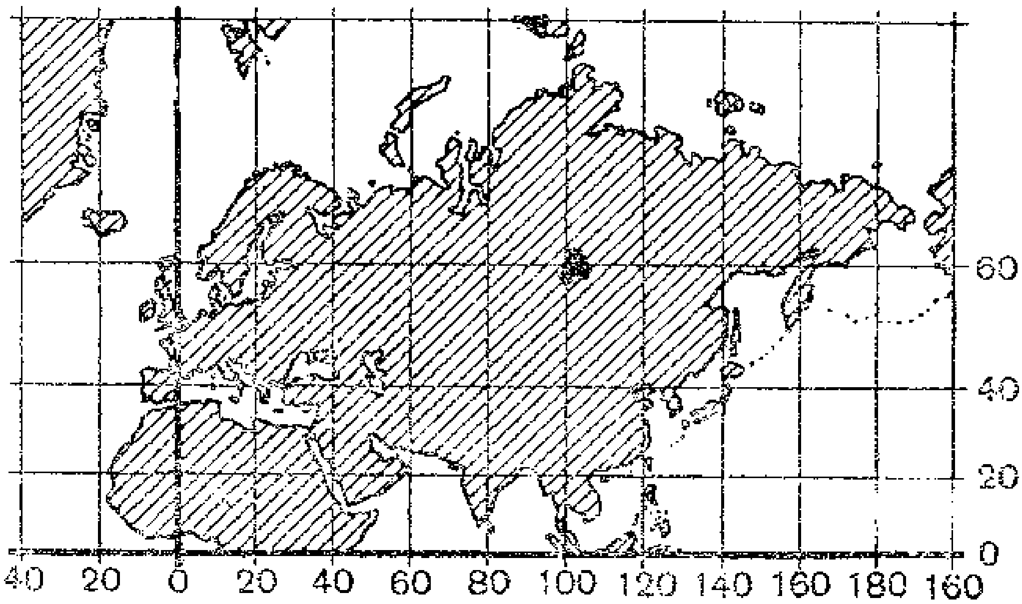


Рис. 1.8

Великий, вклад у розвиток сферичної геометрії внесли великий польський астроном М. Коперник (1473 – 1543), відомий датський астроном Т. Браге (1546 – 1601), видатний німецький астроном і математик Й. Кеплер (1571 – 1630), французький математик Ф. Вієт (1540 – 1603), шотландський математик Д. Непер (1550 – 1617) й інші.

Видатний вітчизняний математик, фізик і астроном Л. Ейлер (1707—1783) у своїх творах “Основи сферичної тригонометрії” (1753) і “Універсальна сферична тригонометрія” (1779) виклав основи цієї науки в тому вигляді, у якому ми їх вивчаємо сьогодні.

У наш час як плоска, так і сферична геометрія широко застосовуються в геодезії: на плоскій геометрії базується “нижча геодезія” – геодезія невеликих ділянок землі, на сферичній геометрії базується “вища геодезія” – геодезія великих ділянок землі.

Основні поняття сферичної геометрії

Сферична геометрія вивчає геометричні властивості фігур, розміщених на сфері. Основними поняттями сферичної геометрії є поняття *точки* і *великого кола* сфери. Позначимо точки літерами *A, B, C, …*, а великі кола і їх частини літерами *a, b, c, …*. Сферичну поверхню з центром *O* і радіусом *R* позначатимемо *(O,R)*, або сфера О.

Нагадаємо ряд тверджень, що лежать в основі сферичної геометрії:

1. Переріз сфери будь-якою площиною є колом. Площина, що проходить через центр сфери, називається *діаметральною* площиною, а лінія її перетину зі сферою – *великим колом*. Великі кола сфери ділять її на дві рівні частини. Площина великого кола є *площиною симетрії* сфери, а центр сфери – її *центром симетрії*.
2. Через дві не діаметрально протилежні точки сфери можна провести велике коло, і притому тільки одне. Два великих кола сфери перетинаються в двох точках. Взагалі два будь-які кола, що лежать на одній і тій самій сфері, можуть перетинатись не більш як у двох точках, де лінія перетину їх площин перетинає сферу.

Між плоскою і сферичною геометріями є багато спільного. Це можна пояснити тим, що для сфери характерна така ж „рухомість”, як і для площини: кожну точку площини і напрямок, що виходить із неї (рис. 1.9),

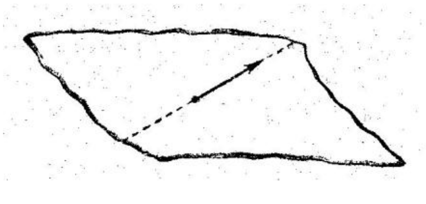


Рис. 1.9

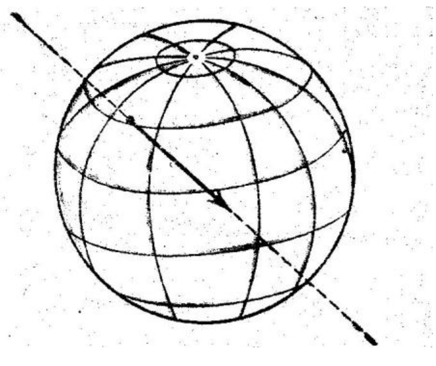


Рис. 1.10

можна сумістити рухом цієї площини із будь-якою іншою точкою площини і напрямком, який з неї виходить, і так само кожну точку сфери і напрям, що виходить з неї (рис. 1.10), можна сумістити рухом будь-якої іншої точки сфери і напрямком, який з неї виходить.

Сфера та її плоскі перерізи

Нагадаємо деякі відомості про сферу.

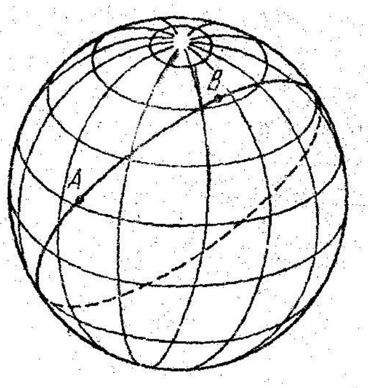
Сферою називається фігура, яка складається з усіх точок простору, рівновіддалених від даної точки. Ця точка називається *центром* сфери. Відстань від точки сфери до її центра називається *радіусом* сфери. (Радіусом називається також відрізок, який сполучає будь-яку точку сфери з її центром). Відрізки, які сполучають дві точки поверхні сфери і проходять через центр О, називаються *діаметрами*; очевидно, радіуси однієї і тієї самої сфери рівні між собою, а діаметр дорівнює сумі двох радіусів. Дві точки сфери, які є кірцями одного діаметра, називатимемо *діаметрально протилежними*. Фігура називається *сферичною,* якщо всі її точки лежать на одній і тій же сфері.

Основними поняттями сферичної геометрії є поняття *точки* і *великого кола* сфери. Будемо позначати точки буквами А, В, С, ..., великі кола та їх частини буквами a, Ь, c, ... Сферичну поверхню з центром у точці О будемо називати *сферою О.*

Великі кола

Якщо основними поняттями плоскої геометрії є точка, пряма і рух площини, то в сферичній геометрії таку ж роль відіграють точка сфери, велике коло і рух сфери. Пояснимо зміст цих понять.

Так як через кожні три точки простору, які не лежать на одній прямій, проходить єдина площина, то через будь-які дві точки сфери, які не є діаметрально протилежними (тобто кінцями одного діаметра) проходить єдина діаметральна площина. Тому *через будь-які точки сфери, які не є* *діаметрально протилежними, проходить єдине велике коло* (рис. 1.11). Цей



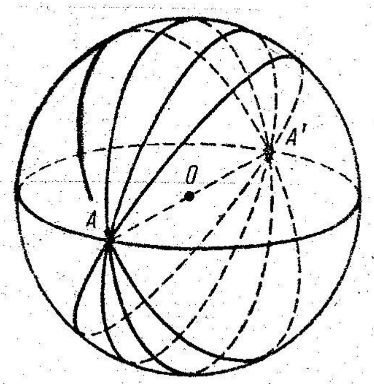
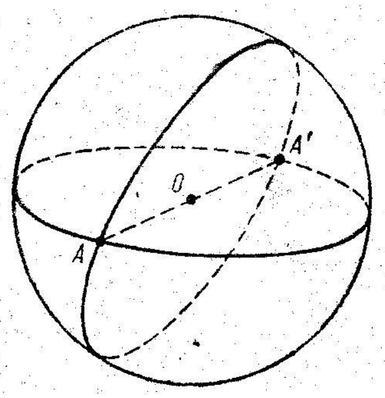


Рис. 1.11 Рис. 1.12

факт аналогічний тому, що на площині через будь-які дві точки проходить єдина пряма. Через дві діаметрально протилежні точки сфери, навпаки, можна провести нескінченну кількість великих кіл (рис. 1.12). Так як кожні дві діаметральні площини сфери перетинаються по її діаметру, то *будь-які два великі кола перетинаються у двох діаметрально протилежних точках сфери* (рис. 1.13). Тут ми спостерігаємо відмінність сферичної геометрії від плоскої геометрії, у якій дві прямі перетинаються не більше ніж в одній точці.

Аналогічно до того, як площина ділить простір на дві області, так *велике коло ділить сферу на дві області* (рис. 1.11), які називаються *півсферами*.



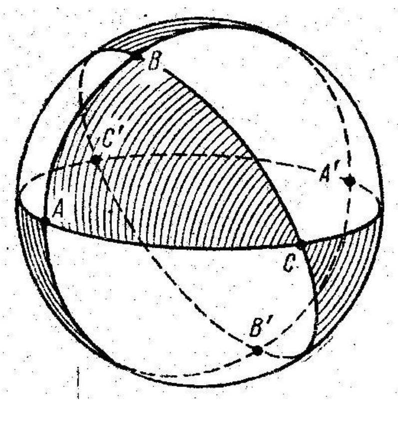


Рис. 1.13 Рис. 1.14

Оскільки дві площини, які перетинаються, ділять простір на чотири області, то *два великі кола ділять сферу на чотири області* (Рис. 1.13). Нарешті, так як три площини, які перетинаються в одній точці, ділять простір на вісім областей, то три великі кола, які не перетинаються в одній точці, ділять сферу на вісім областей (На рис. 1.14 зображені вісім областей *ABC, ABC′, AB′C, A′BC, AB′C′, A′BC′, A′B′C, A′B′C*`, на які ділять сферу великі кола *AB, AC і BC*, причому точки *A′, B′, C′* діаметрально протилежні точкам *A, B, C* і звідси, області *ABC* і A′B′C, *AB′C* і *A′BC′*, *A′BC* і *AB′C′* попарно діаметрально протилежні).

Якщо перші дві із цих властивостей аналогічні до властивостей прямих на площині, яка ділиться на дві області прямою і на чотири області двома прямими, які перетинаються, то третя із вказаних властивостей не повністю аналогічна відповідній властивості прямих на площині, так як три прямі, які попарно перетинаються, і не проходять всі три через одну точку, ділять площину не на вісім, а на сім частин (рис. 1.15).

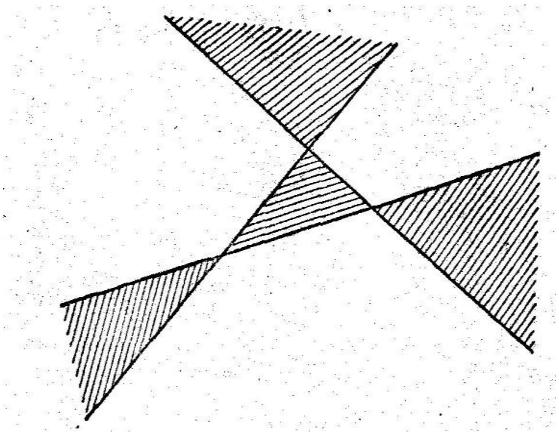


Рис.1.15

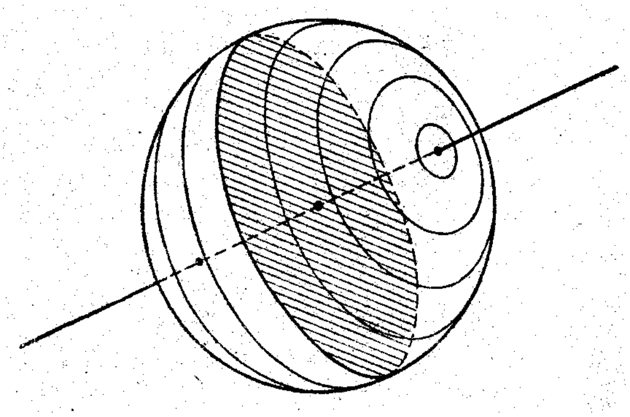


Рис. 1.16

Будь-якому великому колу відповідає дві діаметрально протилежні точки сфери, які відтинаються від неї діаметром, перпендикулярним до площини великого кола (рис. 1.16). Ці дві точки називаються *полюсами* великого кола.

Як відомо, полюсами екватора Землі є її географічні полюси – Північний і Південний. Очевидно, що кожним двом діаметрально протилежним точкам *A* і *B* на сфері відповідає єдине велике коло, для якого точки A і B є полюсами; це велике коло називається *полярою* пари діаметрально протилежних точок A і B. Кожна точка поляри називається полярно спряженою з кожним з її полюсів. Інакше кажучи, точки P, Q сфери є полярно спряженими, якщо радіуси OP і OQ перпендикулярні (O – центр сфери).

Розглянемо ряд тверджень, що лежать в основі сферичної геометрії.

Теорема 1. *Переріз сфери будь-якою площиною є коло.*

Д о в е д е н н я. Нехай крива AMB зображає переріз сфери радіуса R площиною G (рис. 1.17).

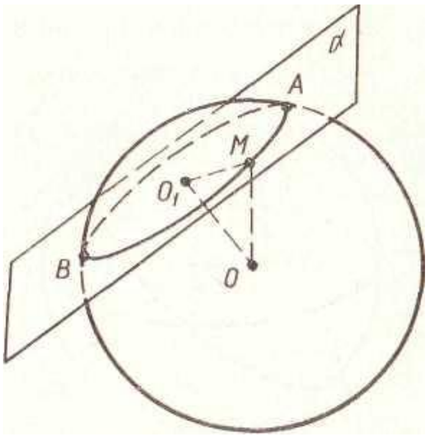


Рис. 1.17

Опустимо на площину G перпендикуляр OO_1 і візьмемо на кривій перетину довільну точку M: сполучивши її з точками O і O_1, отримаємо прямокутний трикутник OO_1M. Позначимо O_1M через r, тоді r = $\sqrt{OO_1^2 - OM^2}$. Коли точка M рухається по кривій AMB, довжини відрізків OM і OO_1 не змінюються, тому відстань O_1M = r є величиною сталою, і крива AMB, всі точки якої лежать у площині G, є колом (*малим колом)*. Навпаки, кожна точка M цього кола належить сфері. *Теорему доведено*.

З цього доведення очевидним є факт, що радіус r кола, яке є перерізом сфери площиною, можна обчислити за формулою $r = \sqrt{R^2 - h^2}$, де h – відстань від центра сфери до площини перерізу. Звідси бачимо, що площини, рівновіддалені від центра, перетинають сферу по рівних колах. Коли OO_1 = 0, то r = R і площина G проходить через центр сфери. Площина, що проходить через центр сфери, називається *діаметральною площиною*. У цьому випадку лінія перетину сфери з площиною називається *великим колом*. Теорему доведено.

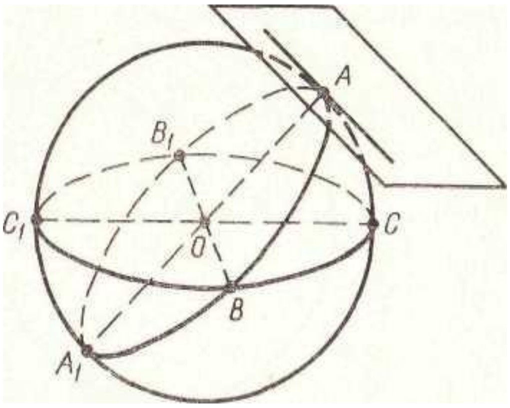
Теорема 2. *Великі кола сфери ділять її на рівні частини*.

Д о в е д е н н я. Повернемо одну половину сфери і вкладемо її в другу так, щоб збіглися їх перерізи половини сфери сумістяться, оскільки всі їх точки рівновіддалені від центра. Теорема доведена.

Наслідок. *Площина великого кола є площиною симетрії сфери, а центр сфери — її центром симетрії.*

Теорема 3. *Через дві не діаметрально протилежні точки сфери можна провести велике коло і до того ж тільки одне.*

Д о в е д е н н я. Нехай A і B — дві точки сфери O (рис. 1.18). За умовою точки A, B, O не лежать на одній прямій, а отже, через них проходить єдина площина. Ця площина в перерізі зі сферою дасть лінію, яка є великим колом.



Теорема 4. *Два великі кола сфери перетинаються в двох точках.*

Доведення. Площини великих кіл ABA_1 і CBC_1 мають спільну точку – центр сфери O і тому перетинаються по прямій (рис. 1.18). Точки перетину цієї прямої зі сферою і будуть точками

Рис. 1.18

перетину обох великих кіл.

Про велике коло, яке проходить через дві діаметрально протилежні точки B і B_1, говорять, що воно *сполучає точки* B і B_1,. Якщо два великі кола проходять через одну і ту ж точку, то вони перетинаються в цій точці. Теорема доведена.

Наслідок. *Два будь-які кола, що лежать на одній і тій самій сфері, можуть перетинатися не більш як у двох точках, а саме в тих точках, де лінія перетину їх площин перетинає сферу.*

Площина, яка проходить через точку A сфери і перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку A, називається *дотичною площиною*. Точка A називається *точкою дотику* (рис. 1.18).

Пряма, що проходить через точку A сфери перпендикулярно до радіуса, проведеного в точку A, називається *дотичною* до сфери.

Теорема 5. *Дотична площина має зі сферою тільки одну спільну точку — точку дотику.*

Теорема 6. *Через будь-яку точку сфери можна провести безліч дотичних, всі вони лежать у дотичній площині до сфери.*

Взаємне розміщення двох кіл на сфері

Теорема 1. *Велике коло має з малим колом дві спільні точки, одну спільну точку або не має з ним спільних точок залежно від того, чи буде сферичний радіус даного малого кола, менший від квадранта, більший за сферичну відстань відповідного йому полюса малого кола від даного великого кола, рівний цій відстані або менший за неї.*

Зауважимо, що у формулюванні теореми ми маємо на увазі сферичний радіус малого кола, менший від квадранта, і відповідний йому полюс; під *сферичною відстанню* полюса малого кола від великого кола розуміємо дугу, меншу або рівну квадранту.

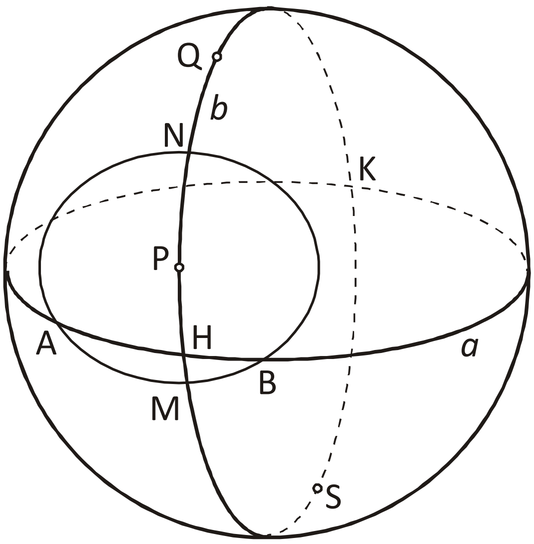


Рис. 1.19

Д о в е д е н н я. Нехай P – той із полюсів даного малого кола, якому відповідає сферичний радіус, менший від квадранта, і рис. 1.19 – дане велике коло (рис. 1.19, 1.20, 1.21). Позначимо через H і K точки перетину даного великого кола з великим колом b, що проходить через P і перпендикулярне до a; позначення виберемо так, щоб дуга PH не перевищувала квадранта, тобто була сферичною відстанню точки P від великого кола a (можливий також випадок, коли точка P співпадає з H).

Велике коло b, що проходить через полюс даного малого кола, перетинає останнє в двох точках M і N. Дійсно, на великому колі b знайдуться такі дві точки, відстань від яких до точки P буде рівна радіусу малого кола.

1) Розглянемо спочатку той випадок, коли сферичний радіус даного малого кола, менший від квадранта, більший за сферичну відстань PH відповідного йому полюса P малого кола від великого кола a (рис.1.19). У цьому випадку дуга PH буде меншою від кожної із рівних дуг PM і PN, а тому точка H буде лежати на дузі MPN. Оскільки ця остання дуга менша за півколо, то точка K, діаметрально протилежна H, не лежить на дузі MPN.

Звідси випливає, що в площині великого кола b точки H і K лежать по різні боки від прямої HK, тому хорди MN і HK перетинаються всередині кола b, а тому і всередині даної сфери.

Ми довели, що одна з точок лінії перетину l площини даного малого кола з площиною великого кола a (а саме точка перетину хорд MN і HK) лежить всередині сфери. Звідси робимо висновок, що пряма l перетинає сферу в двох точках A і B. Ці точки будуть належати як даному малому колу, так і великому колу a.

2) Нехай тепер сферичний радіус даного малого кола, менший квадранта, дорівнює відстані PH. У цьому випадку точка H буде лежати на даному малому колі (рис. 1.20), а точка K поза ним, бо, $PH = PM = PN$, а $PK > PH$.

Позначимо через S полюс великого кола a, що лежить з точкою P по різні боки від a, і через X – точку великого кола a, відмінну від H і K. Зі сферичного трикутника XPS будемо мати $PX + XS > PS$ або $PX + XS > PH + HS$, звідки $PX > PH$. Точка X лежить поза даним малим колом.

Ми не можемо міркувати тут, як у геометрії на площині. Дійсно, у прямокутному сферичному трикутнику катет може бути як меншим, так і більшим за гіпотенузу.

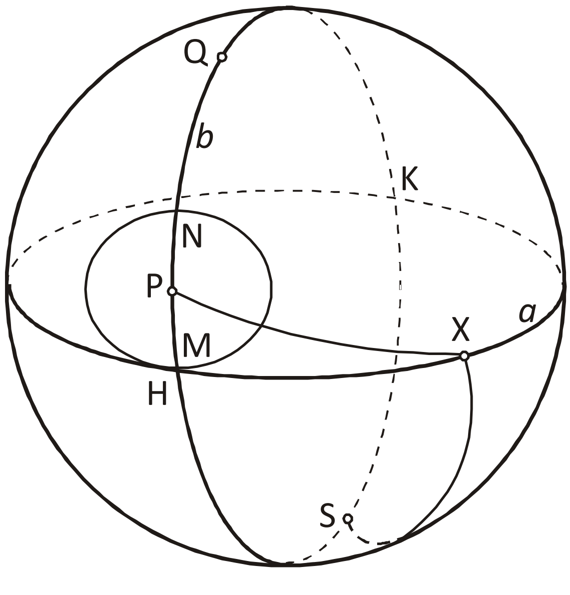
3) Якщо ж сферичний радіус даного малого кола, менший від квадранта, є меншим за відстань PH, то точки H й K обидві будуть лежати поза даним малим колом (рис. 1.21). Для будь-якої точки X даного великого кола a, відмінної від H і K, будемо знову мати $PX + XS > PS$, звідки $PX > PH > PM$. *Теорема доведена.*

Наслідок. *Якщо позначити через* D *сферичну відстань між яким-небудь із полюсів даного малого кола і будь-яким із полюсів даного великого кола, через* R *– сферичний радіус малого кола, який відповідає вибраному полюсу, і через* q *– квадрант, то обидва дані кола мають дві спільні точки в тому випадку, коли у всіх трьох співвідношеннях*

$$|q - R| \le D; \;\; D \le q + R; \;\; D + R \le 3q \tag{1.1}$$

мають місце знаки строгої нерівності. Обидва кола мають одну спільну точку, якщо хоча б один зі знаків нерівності змінюється в цих співвідношеннях знаком рівності, і не мають спільних точок, якщо хоча б одне із співвідношень (1.1) не виконується.

Обмежимось розглядом випадку, коли дані кола мають дві спільні точки. Якщо позначити через h сферичну відстань PH і через r – сферичний радіус даного малого кола, меншого від квадранта, то умова перетину в двох точках має вигляд $$h < r \tag{1.2}$$



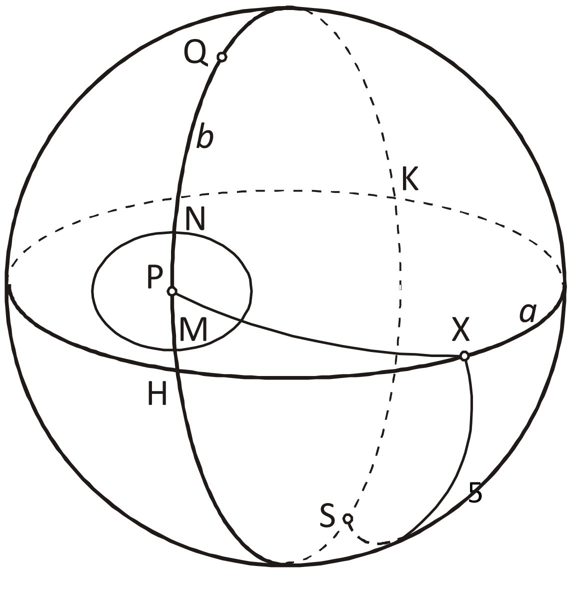


Рис. 1.20 Рис. 1.21

Будемо тепер довільно вибирати той чи інший полюс кожного з даних кіл.

Якщо за полюс даного малого кола взяти точку P, а за полюс Q даного великого кола – той із його полюсів, який лежить з точкою P по один бік від даного великого кола a (рис.1.19) (якщо точка P лежить на найбільшому колі a, то в якості точки Q можна брати будь-який із полюсів останнього), тоді покладають $D = q - h$; $R = r$, і нерівність (1.2)

Будемо тепер довільно вибирати той чи інший полюс кожного з даних кіл.

Якщо за полюс даного малого кола взяти точку P, а за полюс Q даного великого кола – той із його полюсів, який лежить з точкою P по один бік від даного великого кола a (рис.1.19) (якщо точка P лежить на найбільшому колі a, то в якості точки Q можна брати будь-який із полюсів останнього), тоді покладають $D = q - h$; $R = r$, і нерівність (1.2) набере вигляду

$$q - D < R.$$

Оскільки при цьому $D \le q$, $R < q$, то у всіх трьох співвідношеннях (1.1) отримаємо знаки строгої нерівності.

Якщо за полюс даного малого кола взяти точку P_1, діаметрально протилежну точці P, а за полюс великого кола – ту ж точку Q, що і вище, то покладають

$$D = h + q; \quad R = 2q - r,$$

і нерівність (1.2) запишеться у вигляді

$$D - q < R.$$

Оскільки в цьому випадку $q < D \le 2q$ і $R < q$, то у всіх співвідношеннях (1.1) отримаємо знову знак нерівності.

Можна було б взяти за полюс малого кола точку P_1, а за полюс великого кола точку S; при цьому $D = q - h$; $R = 2q - r$, і умова (1.2) буде мати вигляд

$$q - D < 2q - R.$$

Оскільки $D < q$; $q < R < 2q$, то у співвідношеннях (1.1) і в цьому випадку мають місце знаки нерівності.

Якщо велике коло має з даним малим колом одну спільну точку, то воно називається *дотичним* до малого кола, а спільна точка обох кіл – *точкою дотику.* З вище наведеного доведення теореми 1 можна сформулювати *висновок* у вигляді теореми.

Теорема 2. *У кожній точці малого кола існує дотичне до нього велике коло, і це велике коло перпендикулярне до сферичного радіуса малого кола, проведеного в точку дотику.*

Розглянемо тепер питання про взаємне розміщення двох малих кіл.

Теорема 3.

- *Якщо різниця сферичних радіусів двох малих кіл, менших від квадранта, більша за сферичну відстань між відповідними цим радіусам полюсами, то обидва кола не мають спільних точок, і одне із двох малих кіл лежить всередині другого, а друге – поза першим.*
- *Якщо різниця тих же радіусів рівна сферичній відстані між відповідними їм полюсами, то обидва кола мають одну спільну точку і всі інші точки одного з двох кіл лежать всередині другого, а всі інші точки другого – поза першим.*

- *Якщо різниця тих же радіусів менша від сферичної відстані між відповідними їм полюсами, а сума тих же радіусів більша за цю відстань, то обидва малі кола мають дві спільні точки.*
- *Якщо сума тих же радіусів рівна сферичній відстані між відповідними їм полюсами, то обидва кола мають лише одну спільну точку, і всі інші точки кожного із двох кіл лежать поза другим колом.*
- *Якщо сума тих же радіусів менша від сферичної відстані між відповідними їм полюсами, то обидва кола не мають спільних точок і всі точки кожного із двох кіл лежать поза іншим.*

Д о в е д е н н я . Нехай r і r' – сферичні радіуси даних малих кіл, менших від квадранта; P і P' – відповідні цим радіусам полюси (рис. 1.22); M і N – точки перетину малого кола P з великим колом a, яке проходить через точки P і P'; M' і N' – точки малого кола P' з тим же великим колом.

Розглянемо випадок коли $|r-r'|<PP'<r+r'$. В цьому випадку одна з точок M і N належить дузі $M'P'N'$, інша їй не належить. Звідси випливає, як і при доведенні теореми 1, що хорди MN і $M'N'$ перетинаються всередині великого кола a, і тому всередині даної сфери. Далі, знову, як при доведенні першої частини теореми 1, можна показати, що лінія перетину площин обох даних малих кіл перетинає сферу в двох точках. Ці точки і є спільними точками обох даних малих кіл.

Інші твердження теореми доводяться аналогічно випадку двох кіл на площині.

Наслідок 1. *Позначимо через D відстань між довільними двома полюсами даних малих кіл, через R і R' – радіуси малих кіл, що відповідають вибраним полюсам, і через q – квадрант. Обидва дані малі кола мають дві спільні точки, якщо у всіх трьох співвідношеннях*

$$|R-R'|\le D;\quad D\le R+R';\quad D+R+R'\le 4q \tag{1.3}$$

мають місце знаки строгої нерівності, тобто якщо сферична відстань між полюсами менша від суми відповідних сферичних радіусів, але більша за їх різницю, і якщо сума сферичної відстані між полюсами і обох сферичних радіусів менша від повної довжини великого кола. Обидва кола мають одну спільну точку, якщо хоча б один зі знаків нерівності замінюється в цих співвідношеннях знаком рівності, і не мають спільних точок, якщо хоча б одне із співвідношень (1.3) не виконується.

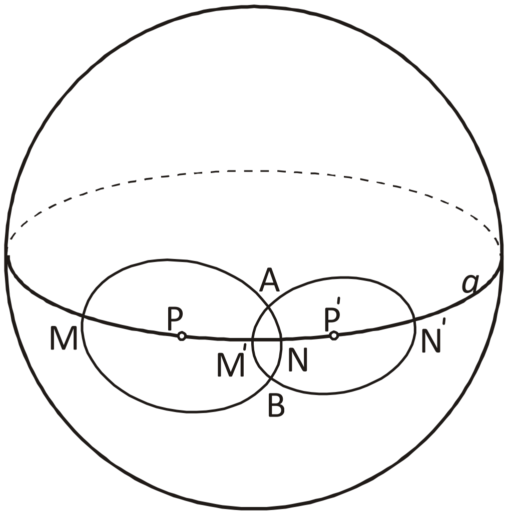


Рис. 1.22

Обмежимось розглядом випадку, коли дані малі кола мають дві спільні точки. Якщо позначити через d сферичну відстань між тими полюсами P і P' малих кіл, яким відповідають сферичні радіуси, менші від квадранта, то умови перетину можна записати так

$$|r - r'| < d < r + r' \qquad (1.4)$$

Будемо тепер довільно вибирати полюси даних малих кіл.

Якщо за полюси даних малих кіл брати точки P і P', то покладаючи $D = d$; $R = r$; $R' = r'$, нерівності (1.4) набувають вигляду

$$|R - R'| < D < R + R'.$$

Оскільки в цьому випадку $D \le 2q$; $R < q$; $R' < q$, то і з останньому із співвідношень (1.3) має знак строгої нерівності.

Якщо за полюси даних малих кіл беруть точку P і точку, діаметрально протилежну точці P', то покладають $D = 2q - d$; $R = r$; $R = 2q - r'$, і нерівності (1.4) набувають вигляду

$$|R - 2q + R'| < 2q - D < R + 2q - R'.$$

Звідси випливає, що $D + R + R' < 4q$; $D < R + R'$; $D > R' - R$. Оскільки, крім того, $R < q < R'$, то у всіх трьох співвідношеннях (1.3) мають місце знаки строгої нерівності.

Взявши за полюси даних малих кіл точку, діаметрально протилежну до точки P, і саму точку P', ми прийшли б до аналогічних міркувань і до тих же результатів.

Якщо за полюси даних малих кіл брати точки, діаметрально протилежні обом точкам P і P', то покладаючи $D = d$; $R = 2q - r$; $R' = 2q - r'$, і нерівності (1.4) набувають вигляду

$$|R - R'| < D < 4q - (R + R').$$

Звідси випливає, що $|R - R'| < D$ і $D + R + R' < 4q$. Оскільки в цьому випадку $D \le 2q$; $R > q$; $R' > q$, то у всіх співвідношеннях (1.3) мають місце знаки строгої нерівності.

Наслідок 2. *Умови, указані в наслідку 1, залишаються в силі, якщо одне із двох даних кіл велике, а друге – мале.*

Дійсно, якщо в умовах (1.3) покласти $R' = q$, то тоді наберуть вигляду (1.1).

Зауважимо, що для двох великих кіл у співвідношеннях (1.3) завжди мають місце знаки строгої нерівності (два великі кола завжди перетинаються).

Наслідок 3. *Якщо одна з трьох даних дуг менша за суму двох інших, але більша за їх різницю, і сума трьох дуг менша за довжину великого кола, то існує сферичний трикутник, сторони якого відповідно рівні даним дугам.*

Перш за все, з умови, що одна з даних дуг менша за суму двох інших, але більша за їх різницю, випливає, що і кожна з даних дуг менша за суму двох інших, але більша за їх різницю. Звідси і з припущення, що сума всіх трьох дуг менша за довжину великого кола, випливає, що кожна із даних дуг менша за половину довжини великого кола. Дійсно, з $a < b + c$ і $a + b + c < 4q$ випливає $a < 2q$.

Нехай тепер AB – одна із трьох даних дуг. Кола з полюсами в точках A і B та сферичними радіусами, рівними відповідно двом іншим даним дугам, мають (за наслідками 1 і 2) дві спільні точки C' і C''. Трикутник ABC' (а також і ABC'') має необхідні властивості.

У випадку, коли два малі кола мають тільки одну спільну точку, справедливе твердження.

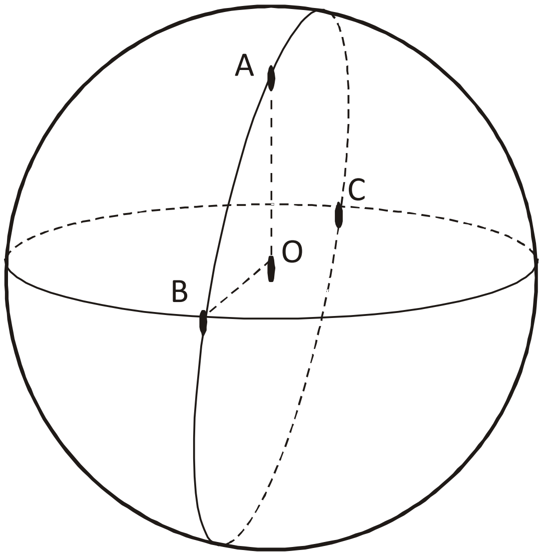
Теорема 4. *Якщо два малі кола мають тільки одну спільну точку, то ця спільна точка лежить на одному великому колі з їхніми полюсами, і обидва кола мають у спільній точці і спільне дотичне велике коло.*

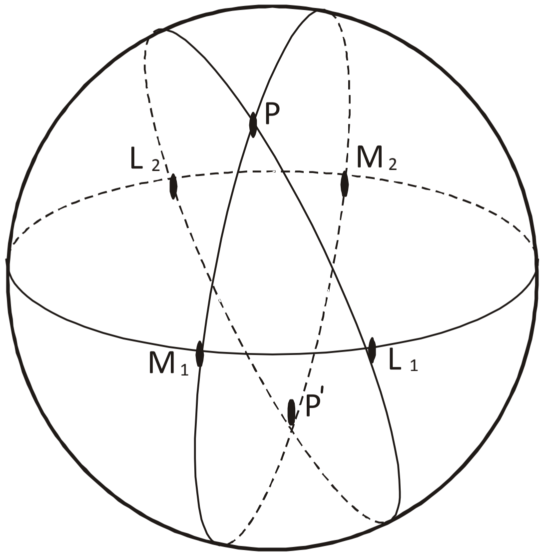
У цьому випадку кажуть, що обидва малі кола *дотикаються* одне до одного (“зовнішнім” або “внутрішнім” способом).

Оскільки при відображенні відносно діаметральної площини полюси великого кола, яке утворюється на сфері при перетині цією площиною, переходять один в одного, то великі кола, що проходять через ці полюси, при вказаному відображенні переходять самі в себе. Тому кути, які утворюють ці великі кола з великим колом, яке відтинається площиною, рівні кутам, суміжним з ними, а тому є прямими кутами. Таким чином, *великі кола, одне з яких проходить через полюс другого, перетинаються під прямим кутом.* Будемо називати такі великі кола *перпендикулярними.*

Навпаки, позначимо на одному з двох перпендикулярних великих кіл точку A (рис. 1.23), полярно спряжену з точкою перетину B. Ми отримаємо таку точку, що проведений до неї радіус сфери перпендикулярний до діаметральної площини, яка відтинає друге велике коло, тобто точку, що є полюсом цього кола. Тому *кожне з двох перпендикулярних великих кіл проходить через полюс другого великого кола.*

Звідси випливає, що велике коло, яке є полярою точки перетину двох великих кіл, перпендикулярне обом великим колам, тобто *існує єдине велике коло, одночасно перпендикулярне до двох великих кіл* (рис. 1.24). Для порівняння зауважимо, що на площині спільні перпендикуляри мають лише паралельні прямі, причому дві паралельні прямі мають не один, а нескінченну кількість спільних перпендикулярів.





Теорема 5. *Для того щоб велике коло перетиналося з яким-небудь колом на сфері під прямим кутом, необхідно і достатньо, щоб перше з цих кіл проходило через полюси другого.*

Д о в е д е н н я**.** Нехай I – спільна точка двох кіл, прямі IT і It – дотичні до великого і малого кіл в цій точці, P і P' – полюси малого кола, O – центр сфери.

Умова, вказана в теоремі, *достатня*. Справді, якщо велике коло проходить через точки P і P', то його площина містить дві прямі, не паралельні між собою і перпендикулярні до прямої It, а саме діаметр PP' і радіус OI. Отже, ця площина, а значить і дотична IT, перпендикулярна до It.

Та сама умова є *необхідною*. Дійсно, якщо два кола перетинаються під прямим кутом, то площина великого кола містить прямі IT і OI, перпендикулярні до It. Отже, вона перпендикулярна до цієї прямої, а тому й до площини малого кола, і містить внаслідок цього діаметр PP', що перпендикулярний до цієї останньої площини і проходить через точку O.

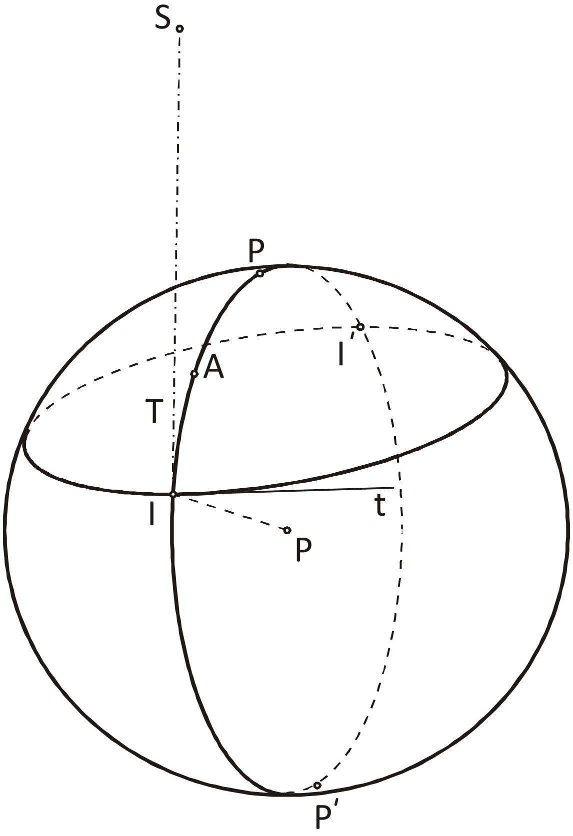


Рис.1.25

Наслідок. *Через точку, що лежить на сфері, можна провести велике коло, перпендикулярне до даного кола цієї сфери; це велике коло буде єдиним, якщо дана точка не є полюсом даного кола.*

Відстань між двома точками на сфері

Важливим є поняття про найкоротшу відстань між двома точками на сфері. У геометрії Евкліда найкоротшою відстанню між двома точками є відрізок прямої, що сполучає ці точки. На сфері найкоротшою відстанню між точками є дуга великого кола, що проходить через ці точки. Як відомо, через дві точки площини (і простору) можна провести пряму і тільки одну. Так само *через дві точки на сфері, які не є діаметрально протилежними, завжди можна провести велике коло і тільки одне*. В цьому ми переконалися, довівши теорему 3.

На пряму на площині не потрібно накладати ніяких обмежень, а на велике коло, на точки A і B сфери ми наклали умову, щоб вони не були кінцями одного й того самого діаметра, бо тоді можна провести вже не одне велике коло, а безліч. У цьому перша аналогія й відмінність між великими колами сфери й прямими на площині.

Переконаємося, що дуга великого кола є найкоротшою відстанню між точками на сфері.

Довжина найкоротшої лінії, що сполучає дві точки A і B сфери, називається *сферичною відстанню* між точками A і B.

Теорема 7. *Сферичною відстанню між двома точками на сфері є дуга великого кола, менша від 180°.*

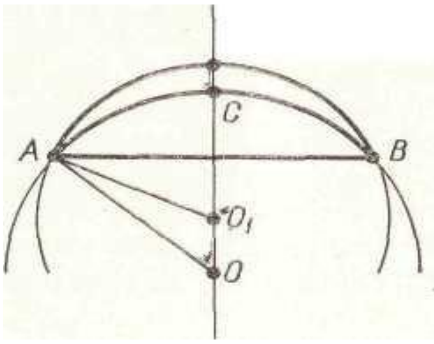


Рис. 1.25

Д о в е д е н н я. Нехай A і B — дві точки сфери O (рис. 1.25). Через хорду AB можна провести безліч площин, кожна з яких перетинатиме сферу по деякому колу (теорема 1). Серед цих кіл найбільшим є велике коло. Для доведення теореми досить показати, що серед усіх дуг сфери, для яких відрізок AB — спільна хорда, найменшою є дуга великого кола. Під *дугою великого кола*, що сполучає дві точки, або просто *дугою*, будемо розуміти дугу, меншу від 180°.

Дійсно, вмістимо всі дуги в одну площину великого кола поворотом кожного кола навколо хорди A, причому нехай менші з двох дуг AB кожного кола лежатимуть з одного боку від хорди A. З двох таких дуг меншою буде та, яка має більший радіус (рис. 1.25).

Нехай r — радіус дуги ABC більшого кола з центром у точці O, а r_1 —- радіус дуги AC_1B меншого кола з центром у точці O_1. Тоді з трикутника OO_1A маємо: $OO_1 + r_1 > r$ або $OC_1 > OC$. Оскільки радіус дуги великого кола буде найбільшим, то дуга AB цього кола буде найкоротшою. Це дає підставу стверджувати, що велике коло на сфері має схожість з прямою на площині.

Але й тут між ними є деяка відмінність. Через дві точки на сфері, що не лежать на кінцях одного й того самого діаметра, можна провести єдине велике коло, при цьому дані дві точки поділяють коло на дві нерівні частини (рис. 1.26) — на меншу частину *AMB* і більшу *BNA*. Оскільки сума цих дуг дорівнює 360°, то менша дуга *AMB* менша 180°, а більша дуга *BNA* більша 180°. Очевидно, що твердження про найкоротшу відстань стосується тільки дуги *AMB*, меншої від 180°.Тому не випадково ця умова є в теоремі 7. Отже, дуга великого кола, менша від 180°, є найкоротшою лінією на сфері.

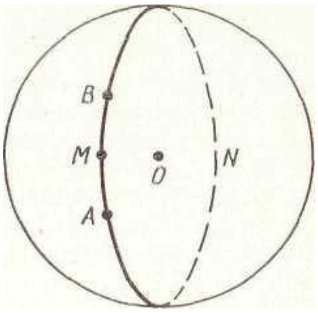


Рис. 1.26

Щоб не робити кожного разу таких обмежень щодо найкоротшої відстані між двома точками на сфері, у сферичній геометрії, Ейлер запропонував, розглядати тільки дуги, менші від 180°. Ця пропозиція Ейлера відома під назвою *обмеження Ейлера.* Дійсно, якщо дотримуватись обмеження Ейлера, то ні в попередній, ні в щойно розглянутій аналогії між дугою великого кола й прямою на площині не потрібно накладати додаткових умов.

Існує й третя аналогія, а саме*: дві прямі на площині перетинаються тільки в одній точці; дві дуги великих кіл, які задовольняють обмеження Ейлера, перетинаються в одній точці.* Отже, точка на сфері визначається перетином двох дуг великих кіл.

У порівнянні із площиною тут є одна особливість: дві дуги великих кіл (при їх продовженні) обов'язково перетнуться у двох діаметрально протилежних точках (теорема 4).

В елементарній сферичній геометрії, як правило, розглядаються тільки фігури, утворені дугами великих кіл, які задовольняють обмеження Ейлера. Крім таких фігур, у сферичній геометрії розглядаються й малі кола.

Ми вже знаємо, що діаметр, перпендикулярний до площини якого-небудь великого кола сфери, перетинає її у двох точках *P* і *P'*, які називаються *полюсами* цього кола або його дуги (рис. 1.27). Велике коло *QMP*

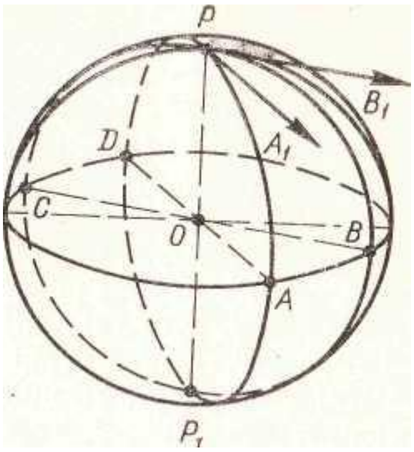


Рис. 27

називають *геометричним екватором,* або *полярою* точок *P* і *P'*. Справедлива така теорема:

Теорема 8. *Всі точки поляри рівновіддалені від свого полюса на сферичну відстань, яка дорівнює 90°.*

До в е д е н н я**.** Візьмемо на полярі довільне число точок *A,B,C,D….* і побудуємо в площині *ABC* відрізки *OA,OB,OC,OD,…*.(рис. 1.27). За означенням відрізок *OP* перпендикулярний до площини *ABC*. Отже, *OP OA, OP OB, OP OC, OP OD*, бо відрізки *OA, OB, OC, OD* проходять через основу перпендикуляра *OP* і лежать у площині *OAB*. Звідси *PA* = *PB* = *PC*= *PD* = ... = 90°. Отже, *теорему доведено*.

Таким чином, полюс даної дуги великого кола є точка на сфері, віддалена від усіх точок цієї дуги на 90°.

Дуги *PA, PB, PC, PD,* ... називаються *сферичними радіусами* кола *OAB*. Оскільки цим дугам відповідають прямі центральні кути, то їх називають *квадрантами*, або *чвертями*, великого кола. Очевидно, що всі квадранти даної сфери рівні між собою.

Справедлива *обернена* теорема.

Теорема 9. *Якщо дана точка сфери віддалена на 90° від двох будь-яких не діаметрально протилежних точок даної дуги, то вона є полюсом цієї дуги великого кола.*

Поняття руху на сфері

Поняття руху на сфері можна ввести аналогічно до відповідного поняття на площині. *Рухом* на сфері називається таке перетворення сфери, при якому зберігаються відстані між точками.

Отже, якщо фігура F перетворюється у фігуру F' на сфері рухом, то при цьому будь-які дві точки A і B фігури F переходять у такі точки A' і B' фігури F', що $AB = A'B'$.

Основні властивості рухів на площині переносяться відповідно на рухи сфери, але рухи на сфері мають деякі властивості, яких не мають рухи на площині. Зокрема, оскільки відстань між будь-якими двома діаметрально протилежними точками сфери одна й та ж і дорівнює двом радіусам сфери, то *при будь-якому русі сфери діаметрально протилежні точки переходять у діаметрально протилежні точки сфери.*

Найпростішими рухами сфери є *поворот* сфери *навколо будь-якої осі,* що проходить через центр сфери, *симетрія* сфери *відносно будь-якої площини,* що проходить через центр сфери, *симетрія* сфери *відносно її центра.*

При повороті сфери навколо деякого її діаметра MM' (вісь повороту) на кут α кожна точка A сфери, крім точок M і M', описує дугу кола, яке лежить у площині, перпендикулярній до осі MM', тобто кожне таке коло повертається у цій площині на кут α в одному і тому самому напрямку (рис. 1.28). Поворот сфери навколо свого діаметра MM' має дві *нерухомі* точки — це точки M і M', тоді як на площині нерухомою точкою повороту є єдина точка площини — центр повороту. За аналогією до цього діаметрально протилежні точки M і M' називаються *центрами* повороту, тобто поворот на сфері має два центри повороту — M і M'.

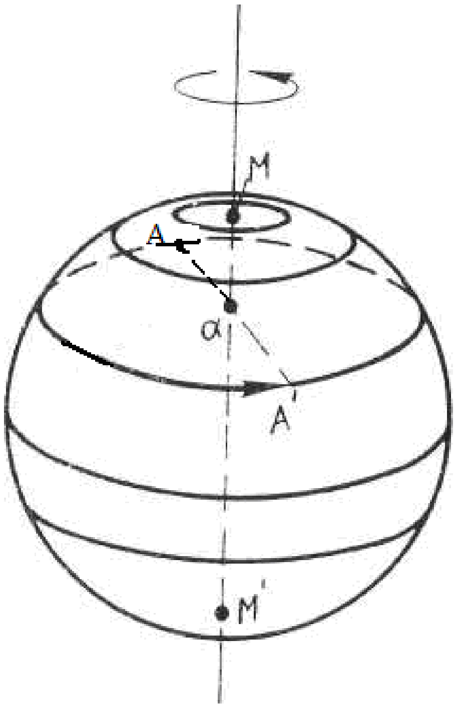


Рис. 28

Яким рухом на сфері можна сумістити діаметрально протилежні точки M і M'? Очевидно, що коли провести діаметр AA', перпендикулярний до діаметра MM', то при повороті навколо осі AA' на кут 180° точка M перейде в точку M'. Такі точки M і M' називають *симетричними відносно центра O* сфери. Точка O — центр симетрії. Отже, *центральну симетрію відносно центра сфери можна розглядати як поворот на* 180° *навколо певним чином вибраного діаметра.*

Поняття *центральної симетрії* на сфері можна ввести так, як і поняття центральної симетрії на площині Справді, $OM = OM'$ лежать на одній прямій — діаметрі, точки M і M'' лежать з різних боків від точки *O*. Отже, точки *M* і *M′* симетричні відносно точки *O* у звичайному розумінні. Звідси маємо, що кожні дві діаметрально протилежні точки сфери є симетричними відносно центра сфери. *Центральносиметричні фігури на сфері можна сумістити рухом сфери.* На рисунку 29 зображено центральносиметричні трикутники *MBC* і *M'B'C'*. Тут відрізки *MM'*, *BB', CC '* є діаметрами сфери О, відповідні пари точок є кінцями діаметрів — діаметрально протилежними точками. Проте таке розміщення центральносиметричних трикутників не є єдино можливим. У загальному випадку називають *симетричними* і такі сферичні трикутники, відповідні вершини яких хоч і не є діаметрально протилежними, але можуть бути переміщені в таке положення деяким рухом на сфері.

Введемо поняття симетрії сфери відносно площини великого (діаметрального) кола сфери. Для цього спочатку введемо поняття симетрії сфери відносно великого кола. Дві точки *M* і *M′* називаються *симетричними відносно деякого великого кола k,* якщо велике коло *MM′* перпендикулярне до кола *k* і одна з дуг, що має своїми кінцями точки *M* і

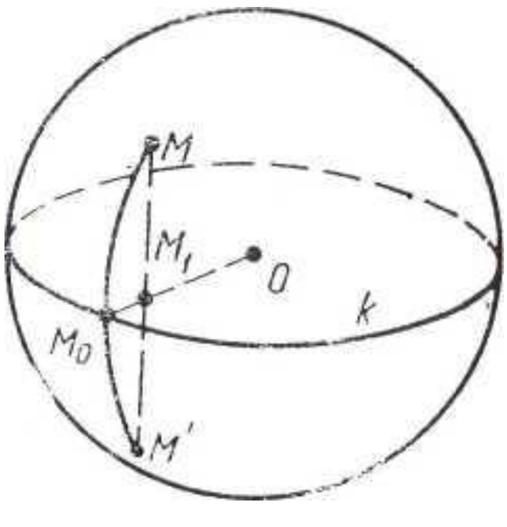


Рис. 1.29

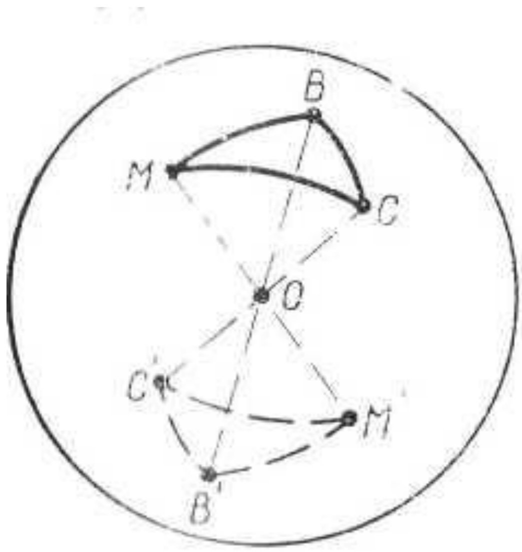


Рис. 1.30

M', ділиться великим колом *k* навпіл. Зауважимо, що при цьому і друга дуга з тими самими кінцями *M* і *M′* ділиться великим колом *k* навпіл (рис.1.30).

Можна також сказати, що точки M і M' симетричні відносно діаметрального кола k, яке лежить у площині π.

Аналогічно фігура F' на сфері називається *симетричною фігурі F на цій самій сфері відносно кола k,* якщо кожна точка фігури F' є симетричною певній точці фігури F відносно великого кола k і, навпаки, кожна точка фігури F симетричною певній точці фігури F' відносно цього самого великого кола k. Велике коло k при цьому відіграє роль осі симетрії. Можна довести, що *дві точки, симетричні на сфері відносно деякого її великого кола k, симетричні в просторі відносно площини, яка перетинає сферу по великому колу k*. У даному випадку $MM' \perp OM_0$ і $MM_1 = M_1M'$.

Отже, іншим прикладом руху сфери є *симетрія сфери відносно деякої її діаметральної площини П*, при якій кожна точка A переходить в таку точку, що площина $П$ перпендикулярна до відрізка AA' і проходить через його середину (рис. 1.31).

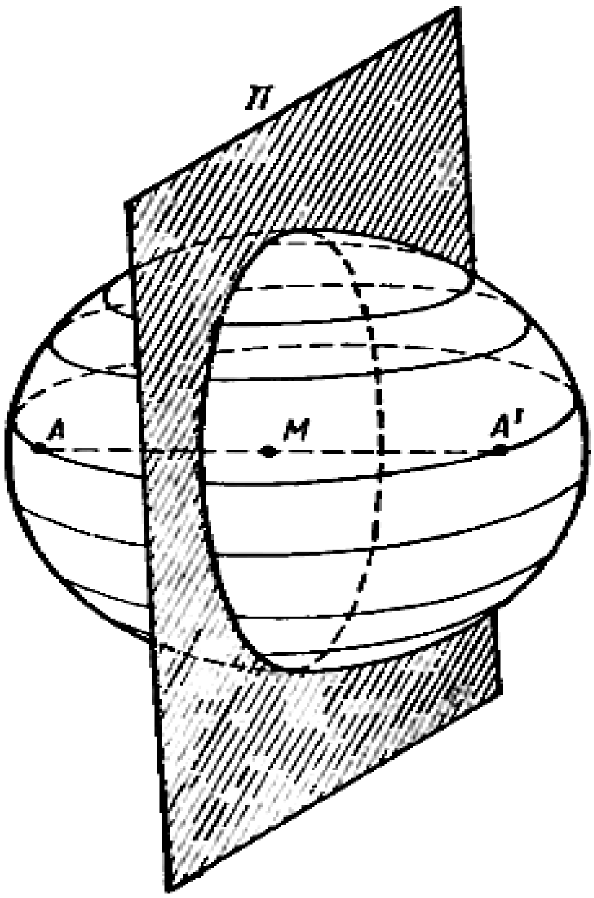


Рис. 1.31

Поворот і симетрія є, в деякому розумінні, основними рухами сфери; тому можна довести, що *будь-який (нетотожний) рух сфери або є поворотом, або є симетрією, або є послідовним виконанням повороту і симетрії* .

Як і в планіметрії, *композиція будь-яких двох рухів сфери також є рухом сфери.*

Рівність сферичних фігур

Поняття рівності фігур на сфері можна ввести аналогічно до того, як це робиться для фігур на площині. По-перше, дві сферичні фігури називаються *рівними,* якщо вони мають рівні відповідні елементи. По-друге, дві сферичні фігури називаються *рівними,* якщо якимось рухом на сфері одна з них відображається на другу, при цьому вершини однієї фігури переходять у вершини другої, так, що порядок вершин зберігається. Для площини такі два означення рівності фігур рівносильні.

Зауважимо, що рівність фігур означують ще й так: дві фігури називаються *рівними,* якщо одну з них можна сумістити з другою накладанням. Зрозуміло, що у фігур, які при накладанні суміщаються, рівні всі відповідні елементи (рис. 1.32).

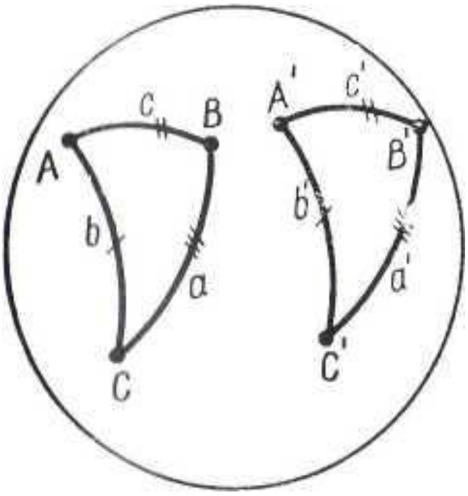


Рис. 1.32

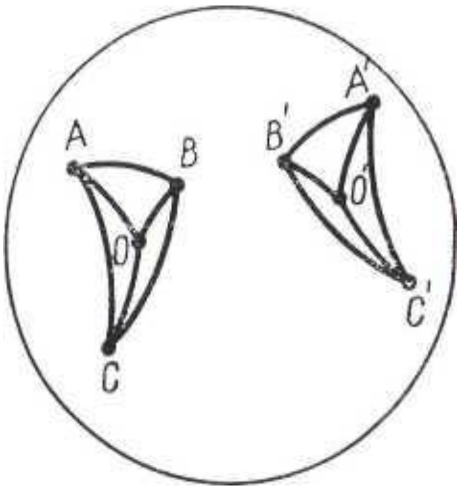


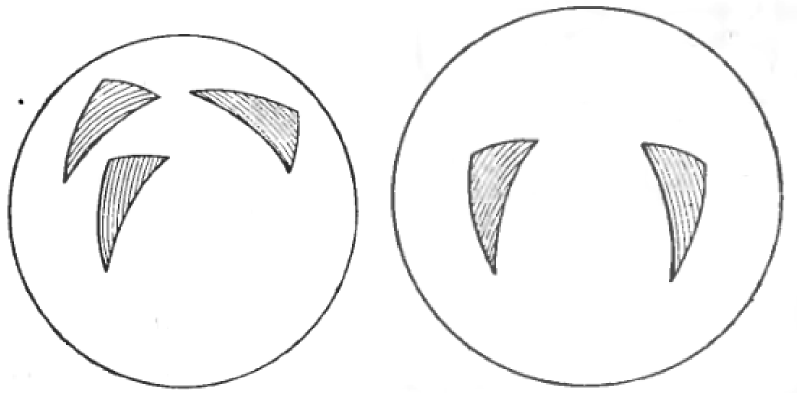
Рис.1.33

Але обернене твердження для сферичних фігур не завжди правильне. Наприклад, всі елементи трикутника *ABC* рівні відповідним елементам трикутника *A'B'C'* (рис. 1.33), але сумістити їх накладанням не можна, бо вони мають протилежну орієнтацію. Для таких трикутників замість терміна «рівні» вживають термін «симетричні».

Предмет сферичної геометрії

Визначимо зміст сферичної геометрії: *сферична геометрія вивчає ті властивості фігур на сфері, які зберігаються при будь-яких рухах сфери.* Фігури на сфері, які можуть бути переведені одна в іншу деяким рухом сфери, називаються *рівними* фігурами, геометричні властивості фігур однакові.

Інколи предмет сферичної геометрії означається по-іншому. Тому, замість рухів, означених вище, розглядаються тільки *повороти* сфери і вивчаються ті властивості фігур, які зберігаються при поворотах.



а) б)

Рис. 1.34

Фігури, які переходять одна в іншу при деякому повороті, називають в цьому випадку *рівними.* Фігури ж, які переходять одна в іншу *при рухах*, але не можуть бути суміщені *поворотом*, рівними не вважаються; такі фігури називають (при вказаному підході до сферичної геометрії) *симетричними.* Так, на рис. 1.34а) показані рівні фігури (сферичні трикутники.), а на рис. 1.34б) – симетричні фігури.

Ці два підходи до сферичної геометрії можна співставити з двома аналогічними підходами геометрії на площині. Тому сукупність всіх рухів площини можна розуміти як таку, яка вказана у статті „Аксіоми і основні поняття геометрії” (тобто розглядаються всі повороти, паралельні перенесення площини, а також симетрії відносно прямої і композиції симетрії і поворотів, симетрії і паралельних перенесень). З іншого боку, припустимо також побудову геометрії на площині, при якій допускається лише “рух І-го роду” - повороти і паралельні перенесення. При такому підході рівними вважаються лише фігури, які переходять одна в іншу при деякому повороті і перенесенні, тобто фігури, не тільки *„рівні”* у звичному розумінні цього слова, але і які мають

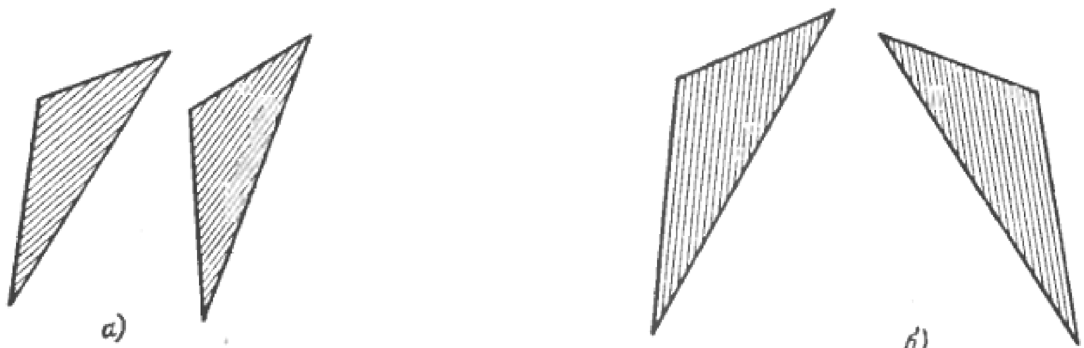


Рис. 1.35

однакову орієнтацію (за або проти годинникової стрілки). Фігури ж, *„рівні”* у звичайному розумінні, але які мають протилежні напрямки обходу, вважаються при такому підході до площинної геометрії не рівними, а лише „симетричними”. На рис. 1.35а) зображені рівні трикутники, а на рис. 1.35б) – симетричні.

Якщо розуміти під „рівними” фігурами такі, які можуть співпадати за допомогою „накладання”, то розглянуті вище два підходи до планіметрії будуть відповідати двом різним означенням слова „накладання”. З іншого боку, можна припустити в якості „накладань” будь-які „механічні” переміщення плоских фігур, не виводячи їх з розглядуваної площини.

Якщо визначити рівність фігур за допомогою таких „накладань” (тобто рухів І-го роду), то ми прийдемо до другого із вказаних вище підходів до планіметрії; трикутники, зображені на рис. 1.35б) в такому випадку рівними не будуть, так як ні яке переміщення одного з цих трикутників, яке не виводить його з площини малюнка, не може сумістити його з іншим трикутником. З іншого боку, можна припускати в якості „накладань” і такі переміщення фігур, які виводять їх з розглядуваної площини. Наприклад, симетрія відносно прямої при такому підході також стає „накладанням”, бо її можна здійснити переміщенням у просторі (обертанням навколо осі, рис. 1.36).

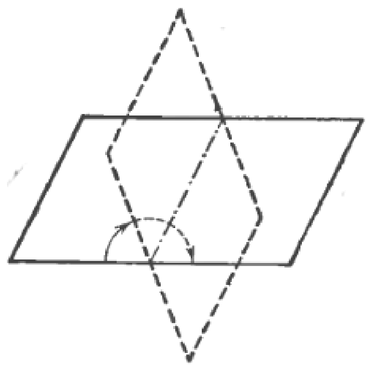


Рис.1.36

Такий підхід підводить до звичайного розуміння рівності фігур (трикутники, які зображені на рис. 1.35б), в цьому випадку вважаються рівними).

Таким чином, відмінність між двома вказаними підходами до планіметрії полягає в тому, що під рухами в одному випадку розуміється „механічне” переміщення фігур у самій площині, що розглядається, а в іншому випадку – „механічні переміщення”, що здійснюються в тривимірному просторі.

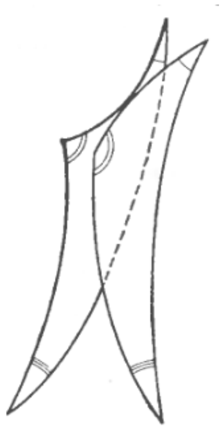


Рис.1.37

Слід зауважити, що два вказані підходи до планіметрії приводять, до двох різних геометричних систем. Саме в геометрії, що ґрунтується на рухах І-го роду, існують поняття змісту в звичайній планіметрії; сюди відноситься: напрям обходу фігури (площа, взята з тим чи іншим знаком від напряму обходу), косий добуток двох векторів та ін. Проте в шкільному викладанні ці питання зазвичай залишаються поза увагою, у зв'язку з чим найбільш природним є розгляд всіх рухів, а не лише рухів І-го роду.

У випадку геометрії на сфері розбіжність між вказаними двома підходами здається на перший погляд ще більш принциповою. Адже ніяким „механічним" переміщенням (в тривимірному просторі) одного з трикутників, зображених на рис. 1.34б), його не можна накласти на інший з цих трикутників (якщо всередині трикутник ABC із сфери і прикласти його до трикутника $A'B'C'$ „другим боком", то трикутники не сумістяться - заважає викривленість сфери, рис. 1.37).

Проте ці розуміння не є принциповими: якщо сферу вважати розміщеною в чотиривимірному просторі, то симетричні фігури (наприклад, трикутник, зображений на рис. 1.34б) можуть бути суміщені за допомогою „механічного" переміщення в цьому чотиривимірному просторі (тобто за допомогою „руху І-го роду" в чотиривимірному просторі).

Принцип двоїстості

Ми бачили, що будь-які рухи сфери переводять пару діаметрально протилежних точок знову в пару діаметрально протилежних точок. Таким чином, *пара діаметрально протилежних точок є у сферичній геометрії самостійним геометричним об'єктом.* Відмітимо одну важливу властивість цих пар точок: *будь-якій теоремі сферичної геометрії відповідає інша теорема цієї геометрії, що отримується з першої* *взаємною заміною слів:* „пара діаметрально протилежних точок” і „велике коло”, „лежить на” і „ проходить через”, „з’єднуються” і „перетинаються в і.т.д. Наприклад :

будь-які два великі кола на сфері перетинаються в одній парі діаметрально протилежних точок,

будь-які дві пари діаметрально протилежних точок сфери з’єднуються одним великим колом.

Ця властивість теорем сферичної геометрії є наслідком того, що будь-якому великому колу на сфері *ABC* взаємно однозначно відповідає пара її полюсів P і P_1, а будь-якій парі діаметрально протилежних точок сфери P і P_1 взаємно однозначно відповідає їх полярна, при чому якщо велике коло проходить через пару діаметрально протилежних точок, то полюси цього кола лежать на полярі цієї пари точок (рис. 1.38). Ця властивість називається *принципом двоїстості*, а теореми, отримані одна з одної вказаною заміною називаються *двоїстими одна одній теоремами.*

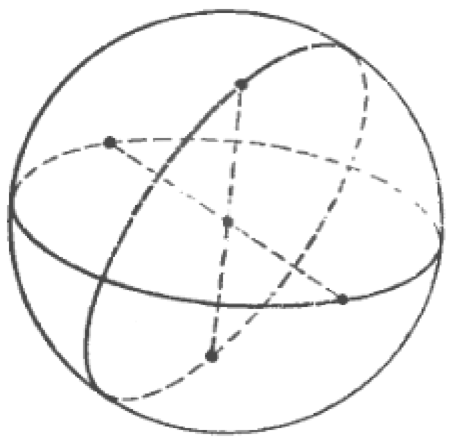


Рис. 1.38

Якщо одна з двох двоїстих теорем доведена, то доведення другої теореми може бути отримане з доведення першої теореми переходом від кожного великого кола до його полюсів, а від кожної пари діаметрально протилежних точок – до їх поляр.

Кути на сфері

Кутом на сфері називається фігура, утворена деякою точкою (наприклад, *P*) і двома півколами (наприклад, PAP_1 і PBP_1), спільним кінцем яких є ця точка. Точка *P* називається *вершиною* кута, півкола - його *сторонами*. Будемо позначати сферичний кут, як і в геометрії на площині, через кут *APB* (рис. 1.39).

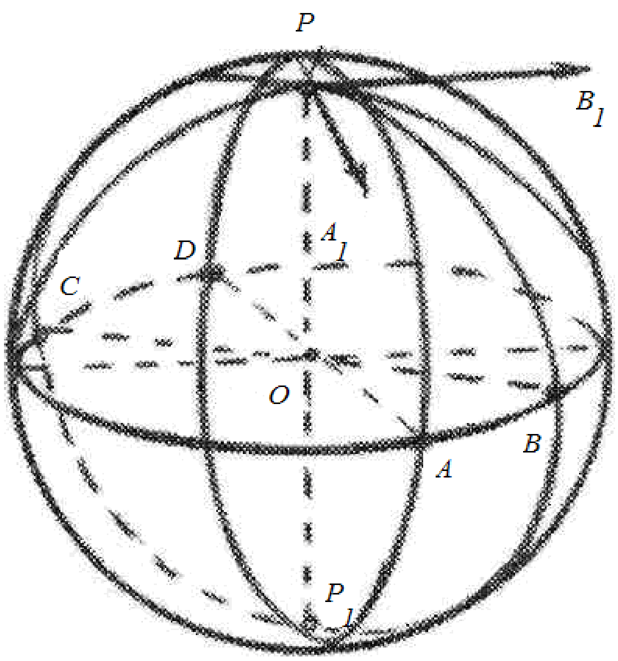


Рис. 39

Теорема. *Сферичний кут APB вимірюється дугою AB, що лежить між його сторонами, для якої вершина кута (точка P) є полюсом.*

Д о в е д е н н я. Проведемо площини PP_1A і PP_1B відповідно через діаметр PP_1 та точки A і B. Ці площини можна назвати площинами сторін сферичного кута APB.

Утворений при цьому двогранний кут APP_1B буде відповідати сферичному куту APB. До кожної із сторін кута APB проведемо дотичні PA_1 і PB_1. За властивістю дотичної кожна з них лежить у площині тієї дуги, до якої вона дотикається, і буде перпендикулярна до радіуса OP, проведеного в точку дотику, тобто A_1P перпендикулярна PO і B_1P перпендикулярна до PO. Отже, кут A_1PB_1 є лінійним кутом двогранного кута APP_1B. Проведемо через центр сфери O площину CAB перпендикулярну до діаметра PP_1. Переріз буде дугою великого кола CAB, для якої точка P є полюсом. За побудовою OB_1 перпендикулярна PP_1 і OA перпендикулярна PP_1. Отже, кут AOB також буде лінійним кутом двогранного кута APP_1B. Оскільки кут AOB центральний, то він вимірюється дугою кола AB, на яку він спирається. Таким чином, для розглянутих кутів можна записати такі рівності: сферичний $\angle APB = \angle APP_1B = \angle A_1PB_1 \wedge \angle AOB$, вимірюється дугою AB. Отже, сферичний кут APB вимірюється дугою AB, що й треба було довести.

Кутом між двома лініями, що перетинаються в просторі називається кут між дотичними до цих ліній в точці їх перетину. Частинним випадком загального поняття кута між двома лініями є кут між двома великими колами на сфері. На рис. 1.40 зображений кут BAC між великими колами AB і AC на сфері і XAY, що вимірює цей кут між дотичними AX та AY до цих великих кіл.

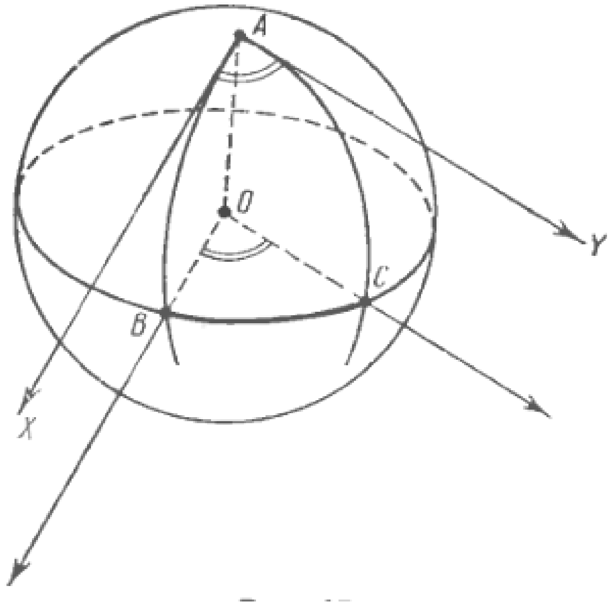
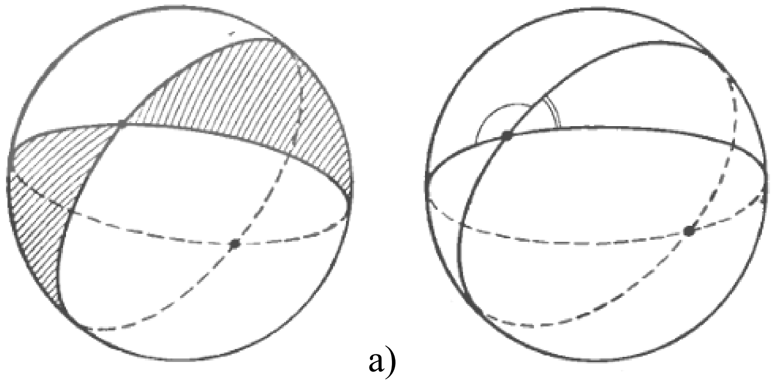


Рис. 1.40

Якщо ми проведемо велике коло, яке є полярою вершини A кута на сфері і яке перетинає сторони цього кута в точках B і C, то промені OB і OC відповідно паралельні кутам AX та AY, дотичним до сторін кута (рис. 1.40). Тому довжина дуги великого кола BC рівна відношенню $\angle BAC$ на радіус сфери, тобто *кут на сфері рівний довжині дуги великого кола між точками сторін кута, полярно спряженими з вершиною кута, поділеною на радіус сфери.*

Має місце теорема:

Теорема. *Так як два кути BAC і $BA'C$, утворені двома півколами при їх різних кінцях, рівні одному і тому ж куту BOC, то ці кути рівні між собою і величина кожного з них називається кутом між двома великими півколами. Два великі кола визначають чотири кути між двома півколами попарно рівними один одному. Ті з цих кутів, дві сторони яких є продовженням сторін другого кута, рівні і називаються вертикальними кутами (рис. 1.41а); ті з цих кутів які мають одну спільну сторону, становлять в сумі розгорнутий кут π і називаються суміжними кутами (рис. 1.41б).*



а) б)

Рис. 1.41

Наслідки. 1. *Мірою сферичного кута є:*

а) двогранний кут, утворений гранями APP_1 і BPP_1;

б) лінійний кут AOB;

в) дуга AB, яка є полярою для вершини P;

г) кут між дотичними у вершині P, проведеними до сторін сферичного кута.

2. Дуга великого кола, яка проходить через полюс, перпендикулярна до поляри, тобто дуга PA перпендикулярна до дуги AB. Дійсно, із стереометрії відомо, що площина APP_1 (рис. 1.39), яка проходить через пряму PP_1, перпендикулярну до площини CAB, буде також перпендикулярна до цієї площини. Звідси двогранний кут $BAOP$, утворений цими площинами, дорівнює 90 градусів, отже, і відповідний йому сферичний кут також рівний 90 градусів, а це і означає, що дуга PA перпендикулярна до дуги AB, якщо сферичний кут між ними дорівнює 90 градусів.

3. *Сферичний перпендикуляр* до даної дуги великого кола проходить через її полюс.

4. *Суміжні сферичні кути* в сумі дорівнюють 180 градусів (рис. 1.39).

Сферичні кути BAP і APC за аналогією до суміжних кутів на площині називаються *суміжними* сферичними кутами. Оскільки кут BPA вимірюється дугою BA, а кут APC вимірюється дугою AC, то

$$\angle BPA + \angle APC = = 180^\circ, \text{ бо } \quad BA + \quad AC = 180^\circ.$$

5. *Вертикальні сферичні кути* рівні.

Для дуг великого кола на сфері вводиться поняття *рівності* залежно від відповідних центральних кутів. Дуга великого кола, що відповідає розгорнутому центральному куту, називається півколом; всі такі півкола рівні між собою, оскільки всі розгорнуті кути рівні між собою.

Кут між двома великими колами

Теорема 1. *Кут між двома великими півколами, що мають своїми кінцями*

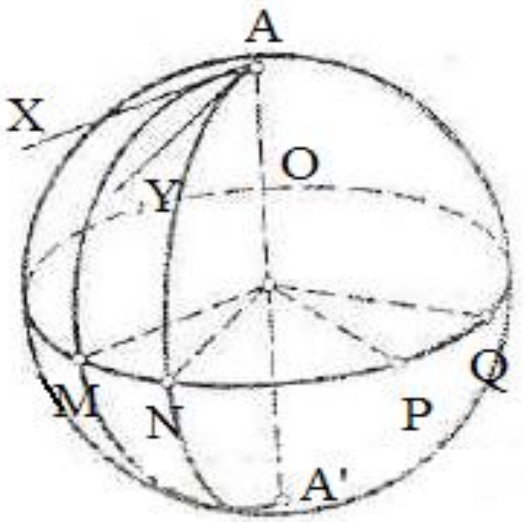


Рис. 42

кінці одного й того ж діаметра, дорівнює кутові між тими півплощинами, в яких вони лежать. Він вимірюється розміщеною між даними півколами дугою великого кола, яке має своїми полюсами кінці цих півкіл.

Д о в е д е н н я. Нехай AMA' і ANA' - два великі півкола, що мають своїми кінцями точки A і A' (рис. 1.42). Нехай AX і AY – дотичні до цих кіл у точці A. Через те що обидві дотичні перпендикулярні до прямої AA', то вони утворюють лінійний кут двогранного кута $MAA'N$.

З другого боку, площина великого кола, полюсами якого є точки A і A', перпендикулярна до прямої AA'. Ця площина перетинає півплощини AMA' і ANA' по прямих OM і $0N$, які також утворюють лінійний кут двогранного кута *MAA'N.* Але цей кут є водночас центральним кутом, що відповідає дузі *MN* великого кола; тим самим доведена друга частина теореми.

Теорема 2. *Кут між двома великими колами вимірюється дугою великого кола, яка сполучає їх полюси, або дугою, їй доповняльною .*

Д о в е д е н н я. Нехай, як і вище, *AMA'* і *AMA'* — два великі півкола, які перетинають у точках *M* і *N* велике коло, площина якого перпендикулярна до прямої *AA'.* Це останнє велике коло проходить через полюси *P, P'* і *Q, Q´* двох даних великих кіл, бо діаметри сфери *PP' і QQ´*, відповідно перпендикулярні до площин *AMA'* і *ANA'*, перпендикулярні до прямої *AA'.* Крім того, діаметри *PP'* і *QQ´* відповідно перпендикулярні до радіусів *OM* і *ON* сфери. Отже, кут між ними дорівнює кутові *MON* або доповняльному його кутові.

Питання для самоконтролю до розділу 1

1. Передумови виникнення сферичної геометрії.
2. Як в давнину називали сферичну геометрію?
3. хто зробив перші спроби розв’язування задач сферичної геометрії?
4. В чому полягала задача складання календаря? Як вона пов’язана з небесними світилами?
5. Назвіть праці Птоломея.
6. Що називається горизонтом?
7. Що називається небесним екватором?
8. Сформулювати означення екліптики.
9. Як називаються полюси небесного екватора?
10. Як називаються полюси небесного екватора?
11. Хто був засновником сферичної геометрії? Які вчені зробили вклад у розвиток Сферичної геометрії? Які завдання ставило мореплавство перед математиками?
12. Сформулюйте означення широти.

13. Що називається довготою? Як вона визначається.?
14. Яку форму має Земля?
15. Що вивчає сферична геометрія?
16. Що таке площина симетрії? Центр симетрії?
17. Які точки називаються діаметрально протилежними?
18. Сформулювати теорему про взаємне розміщення двох кіл на сфері
19. Які кола називаються перпендикулярними?
20. Що розуміють під сферичною відстанню між точками?
21. Що розуміють під дугою великого кола?
22. Сформулювати теорему про точки поляри.
23. Що називається рухом на сфері?
24. Наведіть приклади найпростіших рухів сфери.
25. Яким рухом на сфері можна сумістити дві діаметрально протилежні точки?
26. Що таке центр повороту?
27. Введіть поняття центральної симетрії.
28. Які точки називаються симетричними відносно центра сфери?
29. Які фігури на сфері можна сумістити рухом сфери?
30. Які трикутники називаються сферичними, симетричними сферичними?
31. Дайте означення симетричних точок відносно деякого великого кола k?
32. Яка фігура називається симетричною?
33. Які сферичні фігури є рівними?
34. Чи існують такі фігури, які не суміщаються поворотом?
35. Які переміщення здійснюються в трьохвимірному просторі?
36. Розкрийте суть принципу двоїстості.
37. Які теореми називаються двоїстими одна одній?
38. Що називається кутом на сфері?
39. Сформулюйте теорему про вимірювання сферичного кута?
40. Який кут називається кутом між двома лініями?

41. Що є мірою сферичного кута?
42. Дайте означення кута між двома великими півколами.
43. Що таке поляра і полюс?
44. Який перпендикуляр називається сферичним?
45. Які сферичні кути називаються вертикальними? Суміжними?
46. Сформулюйте теорему про кут між двома великими півколами.