Завдання для самостійного виконання

1. Чи є вектор $\overrightarrow{b} = (13; -1; -6)$ лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$, якщо

$$\overrightarrow{a_1} = (5; 1; -2),\ \overrightarrow{a_2} = (-1; -3; 2),\ \overrightarrow{a_3} = (1; 2; 0).$$

2. Розв'язати матричне рівняння $X \cdot A = 2 \cdot B + C$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -9; \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -13; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$$

4. Знайти алгебраїчне доповнення елемента m у визначнику Δ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 13 & -2 & m & 3 \\ -3 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & n & -2 \end{vmatrix}.$$

5. Система лінійних рівнянь записана у векторній формі. Записати її в розгорнутому вигляді. Дослідити на сумісність та визначеність. Знайти методом Гауса її загальний розв'язок та один частинний розв'язок.

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

6. Знайти раціональні корені многочлена

$$f(x) = 3x^6 - 20x^5 + 50x^4 - 56x^3 + 23x^2 + 4x - 4,$$

визначити їх кратність та розкласти многочлен на незвідні над полем дійсних чисел множники.

7. Обчислити $(-\sqrt{3} + i)^{18}$.

8. Знайти остачу від ділення многочлена

$$f(x) = 5x^{73} - 6x^{28} + x + i$$

на многочлен

$$g(x) = x^2 + (1 + i)x + i.$$

9. При діленні многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ дістали частку

$$\varphi(x) = x^2 - x - 2$$

та остачу

$$r(x) = 5x^3 + 2x^2 - x - 1.$$

Знайти остачу від ділення $f(x)$ на $\varphi(x)$.

10. За схемою Горнера знайти значення многочлена

$$f(x) = 4x^5 - 42x^3 - 28x^2 + 4x - 11$$

та всіх його похідних в точці $x_0 = 3$.

11. У векторному просторі R_3 дано два базиси $B_1 = \{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\}$ та $B_2 = \{\overrightarrow{e_1}'; \overrightarrow{e_2}'; \overrightarrow{e_3}'\}$. Знайти $[\overrightarrow{x}]_{\{\overrightarrow{e_i}'\}}$, якщо $[\overrightarrow{x}]_{\{\overrightarrow{e_i}\}} = (5; 3; 1)$;

$\overrightarrow{e_1} = (1; 1; 1)$; $\overrightarrow{e_2} = (2; 1; 1)$; $\overrightarrow{e_3} = (1; 1; 3)$;

$\overrightarrow{e_1}' = (0; 1; 1)$; $\overrightarrow{e_2}' = (1; 0; 1)$; $\overrightarrow{e_3}' = (1; 0; 2)$.

12. Чи утворює підпростір векторного простору V_2 над полем $\mathbb{R}$ множина векторів площини, початок яких збігається з початком координат, а кінець лежить на прямій $y = -120x$.

13. Чи буде ізоморфізмом відображення $\varphi : M_2 \to R_4$, де

$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, $R_4 = \{(-a; b; c; 1-d) : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

14. Ортогоналізувати систему векторів

$\overrightarrow{a_1} = (1; 2; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (0; 1; 4)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; 5; -2)$.

15. Звести матриці A_1 та A_2 до канонічного вигляду, де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \ A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Звести до канонічного та нормального виду квадратичну функцію

$Q(\overrightarrow{x}) = x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2x_3 + 2x_2x_4 + x_3x_4$.