Волинський національний університет імені Лесі Українки

Факультет інформаційних технологій і математики

Кафедра загальної математики та методики навчання інформатики

Марія Хомяк

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник

Луцьк-2024

УДК 519.21(075.8)
Х 76

Рекомендовано до друку Вченою радою Волинського національного університету імені Лесі Українки (протокол № 3 від 22.02.2024 р.)

Рецензенти:
О.В. Федуник-Яремчук, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу та статистики Волинського національного університету імені Лесі Українки
О.В. Гуда, кандидат технічних наук, доцент кафедри фізики та вищої математики Луцького національного технічного університету

Хомяк М.Я.
Х 76 **Теорія ймовірностей та математична статистика:** навчальний посібник / Марія Ярославівна Хомяк. Луцьк : ВНУ ім. Лесі Українки, 2024. 164 с.

Анотація: Посібник містись три розділи: «Випадкові події», «Випадкові величини» та «Елементи математичної статистики», в кожному з яких подано теоретичний матеріал, типові задачі з розв’язками, запитання для самоконтролю та вправи, а також необхідні таблиці та завдання для самостійної роботи здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (Інформатика).

УДК 519.21(075.8)
Х 76

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

У навчальному посібнику систематизовано теоретичний матеріал, що передбачено силабусом освітнього компонента «Теорія ймовірностей та математична статистка». Посібник містись три розділи: «Випадкові події», «Випадкові величини» та «Елементи математичної статистики», в кожному з яких окрім теоретичного матеріалу, запропоновано достатню кількість типових задач з розв'язками, що сприяє оволодінню матеріалу. Кожна тема містить запитання для самоконтролю та вправи. Посібник також містить необхідні таблиці та завдання для самостійної роботи здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (Інформатика).

Посібник може бути корисним для здобувачів освіти математичних і нематематичних спеціальностей.

РОЗДІЛ 1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1.1. Поняття теорії ймовірностей та випадкові явища

Теорія ймовірностей – це розділ математики, в якому вивчаються випадкові (стохастичні) явища і процеси.

Випадковими явищами називають такі, умови спостереження яких неоднозначно пов'язані з результатом цих спостережень.

Прикладами випадкових явищ можуть бути:

- строк служби деякого приладу,
- число викликів, які поступають на станцію швидкої допомоги за певний проміжок часу,
- траєкторія руху кулі при стрільбі.

Оскільки явища і процеси у суспільстві носять випадковий характер, то їх дослідження базуються на теорії ймовірностей та математичній статистиці.

Теорія ймовірностей є теоретичною основою статистики.

Вихідним поняттям теорії ймовірностей є поняття **стохастичного експерименту**, **випадкової події** та **ймовірності випадкової події**. *Стохастичними називають експерименти*, які можна повторяти будь яку кількість разів, але результати яких не можна передбачити.

Результати стохастичного експерименту називаються *випадковими подіями*. **Випадковою** називають подію, результат, якої неможливо передбачити.

Якщо, наприклад, дослід полягає в киданні монети, то поява герба (або цифри) є подією; якщо виготовлення підшипника даного типу – дослід, то відповідність підшипника стандарту – подія; якщо дослід – кидання грального кубика із цифрами (очками) від 1 до 6, то випадання будь-якої цифри - подія.

Події можуть бути **елементарними** (не підлягають подальшому роздрібненню) та **складними чи складеними** (можуть бути подані у вигляді комбінації елементарних подій). Так, «монета випала гербом» - подія елементарна, «монета випала гербом два рази підряд» - подія складна, бо є комбінацією подій «монета випала гербом» та «монета випала гербом».

Елементарна подія – це найпростіший результат стохастичного експерименту. Тобто, це такі результати випробування, які взаємно виключають один одного. Їх позначають $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$

Множину всіх елементарних подій називають ***простором елементарних подій*** і позначають Ω.

Таким чином, **простір елементарних подій Ω -** ***це сукупність всіх можливих наслідків стохастичного експерименту.***

Приклад **1**. Припустимо, що монету підкидають один раз. Простір елементарних подій, цього експерименту має вигляд Ω = {Г, Ц}, де Г означає появу герба, а Ц – появу цифри.

Приклад **2**. Монету підкидають двічі. Простором елементарних подій цього експерименту є множина Ω = {ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ}. Тут ГЦ означає, що при першому підкиданні з'явився герб, а при другому- цифра.

Приклад **3.** Підкидають шестигранний гральний кубик на якому вибиті очки від 1 до 6. Нас цікавить число очок, яке випало. Простором елементарних подій тут буде множина, яка складається з чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, тобто Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

В прикладах розглянутих вище простір елементарних подій був **скінченною множиною**. Але в багатьох задачах теорії ймовірностей експерименти мають **нескінченне число** можливих наслідків.

Приклад **4.** Будемо вважати, що монету підкидають до появи герба. Простором елементарних подій такого експерименту є множина Ω = {Г, ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦГ, ЦЦЦЦГ, …} (в цьому випадку наш експеримент продовжується нескінченно довго, Ω − *злічення* множина).

Неважко уявити собі задачу, де множина всіх наслідків стохастичного експерименту є **незліченною.**

Для прикладу, при опитуванні респондентів сукупність всіх результатів відповідей на запитання соціологічної анкети чи анкети статистичних служб становить простір елементарних подій.

На практиці простір елементарних подій – це вибірка.

Для повного визначення випадкової події важливо знати не лише про множину її результатів, а й як часто кожний результат зустрічається. У теорії ймовірностей передбачення випадкової події визначається за допомогою поняття ймовірності – оцінки можливості появи деякої події.

Ймовірність (the probability) - це числова характеристика, яка, характеризує шанс появи події. Позначають ймовірність літерою «*p*». Ймовірність – це число, яке знаходиться в межах від 0 до 1. Проте, іноді шанс появи події задають відсотками. Наприклад, 70% опитаних фахівців є менеджерами.

Ймовірністю випадкової події називають відношення кількості результатів m, що сприяють цій події, до загальної кількості можливих елементарних подій:

$$p = \frac{m}{n}.$$

Наприклад, якщо з 10 фахівців 7 менеджерів, то ймовірність того, що навмання вибраний фахівець виявиться менеджером, дорівнює 0,7.

У статистиці поняттю «ймовірність» відповідає поняття «відносна частота».

Відносна частота, появи деякої події (варіанти x_i, i – це номер варіанти) називається відношення $m(n_i)$ - кількості випробувань, в яких з’явилась подія x_i до загальної кількості фактично виконаних випробувань, n: $w = \frac{m}{n}$.

При багаторазовій реалізації дослідження (тобто коли $n \to \infty$), $w \to p$.

Видатними математиками проводились досліди – серії підкидань монети та обчислювались частоти появи герба:

	n	m	w (m/n)
Ж. Бюффон	4 000	2 032	0,5080
К. Морган	4 800	2 402	0,5005
В. Феллер	10 000	4 979	0,4979
К. Пірсон	24 000	12 012	0,5005

Отже, при досить великих n, $w \to 0,5$ або $\frac{1}{2}$, що є ймовірністю появи герба.

Питання для самоперевірки

1. Що є об’єктом вивчення теорії ймовірностей?
2. Що є предметом вивчення теорії ймовірностей?
3. Що є предметом вивчення математичної статистики?
4. В чому полягає відмінність між предметами вивчення цих двох наук?
5. Назвіть основні поняття теорії ймовірностей.
6. Дайте визначення стохастичного експерименту.
7. Що таке простір елементарних подій?
8. Дайте визначення елементарної події та випадкової події.
9. Наведіть приклади випадкових подій.
10. Що таке ймовірність?
11. Тричі підкидають монету. Опишіть простір елементарних подій.

1.2. Випадкові події та операції над ними

Події можуть бути ***достовірними*** - це події, що при визначених умовах обов'язково відбудуться, ***неможливими*** – це події, що при визначених умовах не можуть відбутись, ***випадковими*** - це події , що при визначених умовах можуть відбутись (безліч разів) або не відбутись.

Приклад. Якщо при підкиданні грального кубика випаде: число очок менше 10 − достовірна подія, число очок менше 3 − випадкова подія, число очок більше 10 − неможлива подія.

Достовірна подія відбувається при будь-якому результаті досліду, тому описується всім простором елементарних подій і позначається літерою Ω. Неможлива подія при жодному результаті досліду не відбувається, тому описується порожньою підмножиною і позначається знаком $\varnothing$.

Випадкові події надалі позначатимемо великими латинськими літерами: A, B, C, D, … або A_1, A_2, A_3, …

Зауважимо, що подія, про яку відомо, що вона вже відбулася чи обов'язково відбудеться є достовірною, а подія, яка може відбутися, а може і не відбутися, але ми не знаємо точно – випадкова. Тобто, визначальним фактором є не фактор часу, а фактор нашої обізнаності з реальним станом справ, фіксованості конкретного можливого варіанта в реальності.

Також корисно розуміти, що при потребі достовірну подію можна розглядати як випадкову з імовірністю 1 (шанс якої - 100%), а неможливу – як випадкову з імовірністю 0 (нульовий шанс).

Приклад. Подія, яка полягає у тому, що завтра буде вихідний день, може бути достовірною чи неможливою (це залежить від того, який день тижня сьогодні, і від розпорядку роботи на даному підприємстві) і її можна вважати випадковою подією. Результат розіграшу лотереї - також випадкова подія.

Випадковою подією також називають будь-яку підмножину A простору елементарних подій ($A \subseteq \Omega$).

***Приклад* 1**. Припустимо, що один раз підкидають гральний кубик і A – подія, яка полягає в тому, що число очок, яке з'явиться, ділиться на 3. Тоді $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{3, 6\}$.

Якщо B - подія, яка полягає в тому, що число очок, яке з'явиться, є парним, то $B = \{2, 4, 6\}$.

***Приклад* 2.** Припустимо, що монету підкидають до появи герба. Нехай A– подія, яка полягає в тому, що буде зроблено не більше трьох підкидань. Тоді $\Omega = \{Г, ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦГ, ЦЦЦЦГ, \ldots\}$, $A = \{Г, ЦГ, ЦЦГ\}$.

Таким чином, ***випадкові події,*** пов'язані з даним стохастичним експериментом, – ***підмножини*** в просторі елементарних подій Ω.

Події називаються **несумісними** , якщо поява однієї із них виключає появу інших в одному і тому ж досліді.

Приклад 3. Якщо монета випала гербом – вона точно випала не цифрою. Тому події «монета випала гербом» та «монета випала цифрою» є несумісними.

Події називаються **сумісними**, якщо поява однієї із них не виключає можливості появи інших.

Випадкові події утворюють **повну групу подій**, якщо при кожному досліді може відбутись будь-яка із цих подій і не може відбутись будь-яка інша подія, несумісна з ними.

Таким чином, кожну подію із повної групи несумісних подій можна називати результатом даного досліду (елементарною подією).

Події називаються **рівноможливими**, якщо за умовою досліду немає причини вважати яку-небудь із них більш можливою ніж іншу.

Приклад 4. Події «випаде герб», «випаде цифра» при підкиданні монети є рівноможливими, а наприклад, події «у однієї жінки народиться хоча б одна дитина» та «народиться двійня» не є рівноможливими.

Дві події, що утворюють повну групу подій називаються **протилежними**. Протилежні події позначатимемо як A та $\bar{A}$. Тобто, $\bar{A}$ означає, що подія A не відбудеться.

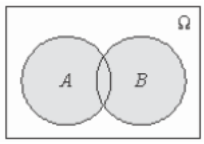
Приклад 5. При підкиданні монети події «випаде герб» та «випаде цифра» є протилежними. «Стрілець влучив» та «стрілець промахнувся» при пострілі також протилежні події.

Надалі ми часто користуватимемося терміном «**навмання**». Наприклад, якщо ми навмання дістаємо кульку із урни, то це означає, що будь – яка кулька із цієї урни має однакові шанси з іншими кульками бути витягнутою із цієї урни. При цьому нас не цікавить, яким конкретно способом ми реалізували діставання кульки із урни. Головне, щоб виконувався принцип однакової можливості кожної кульки бути витягнутою із урни.

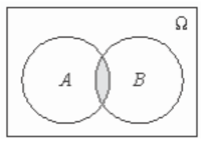
Найбільші помилки в соціологічних опитуваннях полягають саме в недотриманні цього принципу, адже досить складно забезпечити однакові шанси всіх респондентів бути опитаними. Взагалі існують певні методики, організації опитування респондентів, так щоб кожен респондент мав однакові шанси бути опитаним.

Розглянемо відношення операції над подіями.

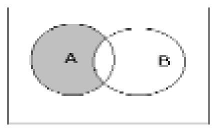
Сумою двох подій A та B називається подія $A + B$ ($A \cup B$), яка складається з елементарних подій , які належать хоча б одній із подій A або B. Тобто, подія $A + B$ означає, що відбувається принаймні одна із подій A або B.



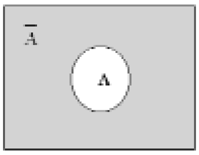
Добутком $A \cdot B$ ($A \cap B$) називається подія, яка складається з елементарних подій які належать одночасно і A, і B. Тобто, подія $A \cdot B$ означає, що події A та B відбуваються одночасно.

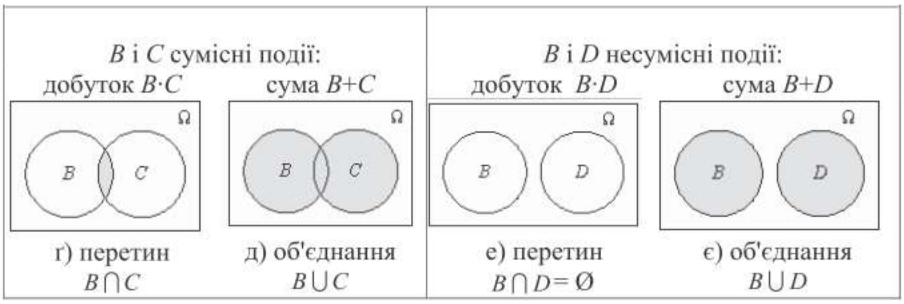


Різниця подій A та B відповідає множині $A - B$ ($A \backslash B$), яка складається з тих елементів A, які не належать B. Тобто, подія $A - B$ означає, що відбудеться A і не відбудеться B.



Подію **протилежну** до події A можна виразити через A: $\bar{A} = \Omega - A$.





Деякі властивості операцій над подіями

1. $\bar{\bar{A}} = A$
2. $\bar{A} = \Omega - A$
3. $A + B = B + A$
4. $A \cdot B = B \cdot A$
5. $(A + B)\, C = AC + BC$
6. $(A \cdot B)\, C = A(B \cdot C)$
7. $A + A = A,\ A \cdot A = A$
8. $A + \bar{A} = \Omega$
9. $A \cdot \bar{A} = \varnothing$
10. $A + \Omega = \Omega,\ A \cdot \Omega = A$

Приклад 6. Нехай $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ - множина елементарних подій, що відповідає підкиданню шестигранного кубика один раз

$A = \{3, 6\}$ − подія, що полягає у випаданні на числа, кратного 3.

$B = \{2, 4, 6\}$ − подія, що полягає у випаданні парного числа.

$C = \{1, 3, 5\}$ − подія, що полягає у випаданні непарного числа.

Тоді маємо:

$A + B = \{2, 3, 4, 6\}$, тобто випаде парне число, або кратне трьом;

$A \cdot B = \{6\}$, тобто випаде парне число кратне трьом;

$C \cdot B = \varnothing$, тобто ці події не мають спільних елементів, можна ще сказати, що ці події є несумісними;

$B - A = \{2, 4\}$, та $A - B = \{3\}$, $\overline{C} = B$.

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення достовірної події.
2. Дайте визначення випадкової події.
3. Яку подію називають неможливою?
4. Наведіть приклади достовірної, випадкової та неможливої подій.
5. Які події називають несумісними, а які сумісними?
6. Наведіть приклад несумісних подій.
7. Наведіть приклад сумісних подій.
8. Які події називають рівноможливими?
9. Дайте визначення протилежних подій. Наведіть приклад.
10. Дайте визначення суми двох подій.
11. Дайте визначення добутку двох подій.
12. Кидається два гральних кубики. Нехай результатом досліду є сума очок, що випадає на обох кубиках. Перелічіть можливі результати. Чи будуть вони рівноможливими? Обгрунтуйте відповідь.
13. Якщо всіх можливих рівноможливих результатів n, то чому дорівнює ймовірність появи кожного з них?

1.3. Означення ймовірності

Ймовірністю події A називається числова міра об’єктивної можливості настання цієї події в певному випробуванні. Позначається ймовірність $P(A)$.

Аксіоми теорії ймовірностей (Властивості ймовірності)

1. Імовірність достовірної події $P(\Omega) = 1$.
2. Імовірність неможливої події $P(\varnothing) = 0$.
3. Ймовірність будь-якої випадкової події $0 < P(A) < 1$.
4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
5. $P(A) \le P(B)$ якщо $A \subseteq B$.
6. $P(A + B) = P(A) + P(B)$, якщо A та B несумісні.

Класичне означення ймовірності

Нехай простір Ω складається з n елементарних рівноможливих подій, тобто $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \}$ та ймовірність кожної з елементарних подій

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n,$ дорівнює $p = \dfrac{1}{n}$.

Нехай A – випадкова подія, до складу якої входить m різних елементарних подій з простору Ω.

Ймовірністю події A називають відношення числа результатів досліду, які сприяють появі події A, до числа всіх рівноможливих результатів.

Тобто, в цьому випадку **ймовірність події A** визначається формулою:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}.$$

Це так зване класичне означення ймовірності.

***Приклад* 1**. Знайти ймовірність того, що число очок, яке випаде на гральному кубику буде парним.

Розв’язання. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $n = 6$.

Нехай A – «випаде парна кількість очок», $A = \{2, 4, 6\}$, $m = 3$.

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

***Приклад* 2**. Якщо в групі студентів - 15 дівчат та 10 хлопців, то ймовірність того що викладач, викликаючи студента навмання, викличе хлопця (подія A) визначається так:

$m = 10$, $n = 15 + 10 = 25$, $P(A) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 0,4$ або 40%.

Зауваження. Класичне означення ймовірності застосовне лише у випадку, коли простір Ω - скінченна множина.

Означення ймовірності в дискретному просторі

Нехай простір $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$ – зчисленна або злічена множина. В цьому випадку кажуть, що він є дискретним.

Позначимо $P(\omega_1) = p_1$, $P(\omega_2) = p_2$, …

Якщо A– випадкова подія ($A \subset \Omega$), яка містить k елементарних подій з простору Ω, $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$, то $P(A) = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$.

***Приклад* 3.** Монету підкидають до появи герба. Знайти ймовірність того, що герб з’явиться до п’ятого підкидання.

Розв’язання. Нехай A – «число підкидань менше або рівне 4»,

Ω = {Г, ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦГ, ЦЦЦЦГ, …}, A = {Г, ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦГ}

$P(\text{Г}) = \frac{1}{2}$, $P(\text{ЦГ}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $P(\text{ЦЦГ}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$,

$P(\text{ЦЦЦГ}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$,

$P(A) = P(\text{Г}) + P(\text{ЦГ}) + P(\text{ЦЦГ}) + P(\text{ЦЦЦГ}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

***Приклад* 4.** Знайти ймовірність того, що число очок, яке випаде на гральному кубику буде меншим 5.

Розв'язання. Нехай A – «випаде кількість очок менше 5»,

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = \frac{1}{6}$,

$P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Статистичне означення ймовірності

Нехай деякий стохастичний експеримент проведено n раз, в кожному з яких може відбутись подія A. Нехай m число експериментів, в яких відбулась подія A (тобто подія A відбулась m раз із n проведених випробувань.

Число $w = \frac{m}{n}$ називається відносною частотою появи події A.

Відносну частоту можна знайти тільки після проведення серій стохастичного експерименту. В багатьох випадках відносна частота стабілізується (наближається до сталого значення) при великому n. Число, біля якого стабілізуються відносні частоти події A при великому числі експериментів називається ймовірністю події A (**статистичною ймовірністю**).

***Приклад* 5.** Видатними математиками проводились серії підкидань монети та обчислювались частоти появи герба (див. п. 1.1). Було доведено, що при досить великих n, $w \to 0.5$ або $\frac{1}{2}$, що є ймовірністю появи герба.

Геометричне означення ймовірності

Нехай простір елементарних подій Ω є нескінченною множиною, тобто це відрізок числової прямої або область на площині, чи в просторі, а елементарні події ω – окремі точки в межах цієї області. Припустимо, що область Ω має скінченну міру $mes(\Omega)$ (на прямій – довжину, на площині – площу, у просторі – об'єм).

Тоді ймовірність будь-якої події $A \subset \Omega$ можна обчислити, користуючись таким означенням.

Геометричною ймовірністю події A називається відношення міри A до міри Ω: $P(A) = \dfrac{mes(A)}{mes(\Omega)}$.

***Приклад* 6.** На аудіокасеті записані концерти трьох співаків: першого – протягом 40 хв. звучання, другого – протягом 30 хв., третього – протягом 20 хв. Запис перемотується і навмання включається. Яка ймовірність, що звучатиме пісна другого співака.

Розв'язання. Нехай A – «звучатиме пісна другого співака»,

$mes(\Omega)$ = 40 + 30 + 20 = 90 хв. – довжина плівки або загальний час звучання аудіокасети.

$mes(A)$ = 30 хв. – час звучання другого співака.

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}.$$

***Приклад* 7.** У крузі радіусом 5 см навмання вибирається точка. Яка ймовірність того, що вона лежатиме в квадраті зі стороною 2 см, що міститься в цьому крузі.

Розв'язання. Нехай A – «точка лежатиме в квадраті»,

$mes(\Omega) = S_{\text{круга}} = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 5^2 = 78{,}5$ см^2.

$mes(A) = S_{\text{квадрата}} = a^2 = 2^2 = 4$ см^2.

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} = \frac{4}{78{,}5} \approx 0{,}05.$$

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення ймовірності події.

2. Обґрунтуйте, чому ймовірність будь-якої події A задовольняє нерівність $0 \le P(A) \le 1$.
3. В чому полягає суть класичного означення події?
4. Сформулюйте статистичне означення події.
5. Сформулюйте геометричне означення події.
6. З повного набору каменів доміно наугад взято один. Знайдіть ймовірність того, що сума очок на ньому дорівнює:

а) двом;

б) шести;

в) дванадцяти;

г) тринадцяти;

д) більша шести;

е) не більша шести.

7. При стрільбі з гвинтівки відносна частота попадання в ціль виявилась рівною 0,85. Знайти число влучень, якщо було зроблено 120 пострілів.
8. У прямокутному трикутнику з катетами 3 м і 4 м навмання вибрали точку. Яка ймовірність того, що вона потрапить в круг, вписаний в трикутник?
9. В розіграші першості по баскетболу приймає участь 18 команд, з яких випадковим чином формують 2 групи по 9 команд. Серед цих команд є 5 команд екстракласу. Знайти ймовірності подій:

А – «всі команди екстракласу попадуть в одну і ту ж групу»,

В – «дві команди попадуть в одну з груп, а три в іншу».

1.4. Елементи комбінаторики

При розрахунках ймовірностей в класичній схемі мають справу з елементами комбінаторики.

Комбінаторика − розділ математики, який присвячений розв'язуванню задач вибору і розташування елементів деякої скінченної множини згідно із заданим правилом. При розв'язуванні комбінаторних задач доводиться мати справу із скінченними множинами, для яких буває істотним порядок слідування елементів.

Множина – сукупність об'єктів довільної природи, які володіють спільною для всіх них характеристичною властивістю. Приклади: множина всіх дійсних чисел; множина цілих чисел – нескінченні множини; множина цілих чисел від 1 до 100 – скінченна множина.

Множина називається **впорядкованою**, якщо кожен елемент цієї множини має певний порядковий номер.

В основі комбінаторики лежать два елементарні правила – суми і добутку.

1. Правило суми. Якщо деякий об'єкт A можна вибрати m способами, а об'єкт $B - n$ способами, то об'єкт «A або B» можна вибрати $m + n$ способами.

2. Правило добутку. Якщо деякий об'єкт A можна вибрати m способами, і незалежно від кожного такого вибору, об'єкт $B - n$ способами, то пару об'єктів « A і B » можна вибрати $m \cdot n$ способами.

Правила комбінаторики можна перефразувати так.

Правило суми. Якщо $|A| = m$, $|B| = n$ і $A \cap B = \varnothing$,то $|A \cup B| = m + n$.

Правило добутку. $|A| = m$, $|B| = n$, то $|A \cap B| = m \cdot n$.

Приклад 1. У корзині є 2 різних яблука та 3 апельсина. Скількома способами можна вибрати фрукт із корзини?

Потрібно обрати один фрукт, який може бути яблуком або апельсином. Згідно з правилом додавання кількість способів буде 2 + 3 = 5.

Приклад 2. У їдальні є 3 перших страви, 5 других і 2 третіх страви. Скількома способами можна скласти з них повний обід?

Згідно з правилом множення повний обід можна скласти 3 · 5 · 2 = 30 способами.

Досить важливим у комбінаториці є поняття факторіалу.

Факторіал – функція, яка визначена на множині цілих невід'ємних чисел і ставить у відповідність даному числу n добуток всіх натуральних чисел від 1 до n включно. Позначають це так: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

За означенням вважають, що 0! = 1.

Приклад. 6! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 = 720.

Нехай маємо множину A, що складається з n елементів. Припустимо, що нам потрібно вибрати k елементів із цієї множини, $k < n$. Тоді важливо з'ясувати порядок, у якому розташовані вибрані елементи, береться до уваги чи ні, а також можливість повторень (чи можна один і той же елемент обирати ще раз).

Вибірка об'єму k з n-елементної множини (з n елементів) без повторення і упорядкована, називається **розміщенням** з n елементів по k елементів,

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Зокрема розміщення з n елементів по n елементів називається **перестановкою** n елементів, $P_n = n!$.

Приклад 3. Скільки різних чотирицифрових натуральних чисел можна скласти з чисел 1,2,3,4,5 за умови, що в кожне число кожна із цих цифр входить не більше одного разу?

$$A_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Приклад 4. Скількома способами можна скласти список з 4 студентів?

$P_4 = 4! = 24$.

Вибірка об’єму k з n-елементної множини з повторенням і упорядкована називається розміщенням з n елементів по k елементів з повторенням, $\overline{A_n^k} = n^k$.

Приклад 5. Скільки різних чотирицифрових натуральних чисел можна скласти з чисел 1,2,3,4,5, якщо числа можуть повторюватись?

$\overline{A_5^4} = 5^4 = 625$.

Вибірка об’єму k з n-елементної множини без повторення і невпорядкована називається **комбінацією** з n елементів по k елементів, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Приклад 6. Скількома способами можна обрати 3 особи із 6?

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20.$$

Вибірка об’єму k з n-елементної множини з повторенням і невпорядкована називається комбінацією з n елементів по k елементів з повторенням, $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$.

Приклад 7. В кондитерській є 6 різних сортів тістечок. Скількома способами можна обрати 8 тістечок?

$$\overline{C_6^8} = C_{13}^8 = \frac{13!}{8!(13-8)!} = 1287.$$

Зауваження. $\overline{C_n^k}$ – це число способів, якими можна розкласти k однакових предметів по n ящиках.

Приклад 8. Скількома способами можна покласти 15 однакових куль у 5 урн?

$$\overline{C_5^{15}} = C_{19}^{15} = \frac{19!}{15!(19-15)!} = 3876.$$

Приклад 9. На зборах присутні 10 осіб, 4 жінки та 6 чоловіків. Навмання обирається президія у складі трьох осіб.

а) Знайти ймовірність, що у президію увійдуть три особи жіночої статі.

Розв'язання. Скористаємось класичним означенням ймовірності.

Нехай A – «у президію увійдуть три особи жіночої статі», $|A|$ = $C_4^3=\dfrac{4!}{3!(4-3)!}=4$ та $|\Omega|$ = $C_{10}^3=\dfrac{10!}{3!(10-3)!}=120$.

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}.$$

б) Знайти ймовірність, що у президію увійдуть дві особи жіночої статі та один чоловік.

Розв'язання. Нехай A – «дві особи жіночої статі та один чоловік», $|A|$ = $C_4^2\cdot 6=\dfrac{4!}{2!(4-2)!}=6\cdot 6=36$ та $|\Omega|$ = $C_{10}^3=\dfrac{10!}{3!(10-3)!}=120$.

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}=0.3.$$

в) Знайти ймовірність, що у президію увійдуть три особи жіночої статі, якщо президія складаються з головуючого, заступника та секретаря.

Розв'язання. Нехай A – «у президію увійдуть три особи жіночої статі», $|A|$ = $A_4^3=\dfrac{4!}{(4-3)!}=24$ та $|\Omega|$ = $A_{10}^3=\dfrac{10!}{(10-3)!}=720$.

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{24}{720}=\frac{1}{30}.$$

Питання для самоперевірки

1. Що вивчає комбінаторика?
2. Сформулюйте правило суми.

3. Сформулюйте правило добутку.

4. Дайте означення розміщення.

5. Дайте означення перестановки.

6. Дайте означення комбінації.

7. В чому полягає відмінність розміщення і комбінації?

8. Випишіть всі розміщення двох осіб на чотирьох стільцях.

9. Скільки існує шестизначних чисел, що діляться на 5?

10. У Максима є 7 різних книг, в Антона – 9. Скількома способами вони можуть здійснити обмін між собою по 5 книг?

11. На зборах присутні 30 осіб. Скількома способами можна обрати президію у складі 3 осіб?

12. У ліфт 12-поверхового будинку на першому поверсі зайшло 10 людей. Скількома способами вони можуть вийти з ліфта?

13. В коробці 7 куль, серед яких 4 білі. Навмання взяли 3 кулі. Яка ймовірність того, що:

а) всі взяті кулі білі?

б) одна з них біла?

14. Із колоди (52 карти) навмання витягується 4 карти. Яка ймовірність того, що:

а) всі карти виявились тузами?

б) хоча б один туз?

в) 4 карти однакової масті?

г) 4 карти по одній з кожної масті?

д) дві дами?

1.5. Теореми додавання і множення ймовірностей

Теорема додавання для несумісних подій. Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

Якщо A і B – несумісні події, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Приклад. Виконується бомбометання по трьох складах боєприпасів, причому скидається одна бомба. Ймовірність влучити в перший склад 0,01; в другий – 0,008; в третій – 0,025. При влучанні в один із складів вибухнуть всі три. Знайти ймовірність того, що склади будуть зірвані.

Розглянемо події: A – «зрив складів», A_1 – «влучання в перший склад», A_2 – «влучання в другий склад», A_3 – «влучання в третій склад». Очевидно $A = A_1 + A_2 + A_3$.. Так як при скиданні однієї бомби події A_1, A_2, A_3 несумісні, то $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}01 + 0{,}008 + 0{,}025 = 0{,}043$.

Теорема додавання для сумісних подій. Ймовірність суми двох подій дорівнює сумі їх ймовірностей без ймовірності їх добутку,

$P(A + B) = P(A) + P(B) – P(A \cdot B)$.

Приклад. В класі 24 учні. Відомо, що 14 з них відвідує спортивну секцію, 7 – шаховий гурток, та 3 – обидва гуртки. Знайти ймовірність, що навмання вибраний учень відвідує хоча б один гурток.

Нехай A – «учень відвідує спортивну секцію», $P(A) = \frac{14}{24}$,

B – «учень відвідує шаховий гурток», $P(B) = \frac{7}{24}$,

$A \cdot B$ – «учень відвідує обидва гуртки», $P(A \cdot B) = \frac{3}{24}$.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = \frac{14}{24} + \frac{7}{24} - \frac{3}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}.$$

Зауваження. Теорема може бути узагальнена на довільне скінченне число подій. Наприклад для трьох подій $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(A \cdot C) - P(B \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C)$.

Умовна ймовірність події

Ймовірність події A, обчисленої за умови настання події B, називається умовною ймовірністю події A і позначається $P(A \mid B)$.

Умовна ймовірність має сенс для залежних подій. Якщо A і B – незалежні, умовна ймовірність перетворюється на звичайну: $P(A \mid B) = P(A)$.

Приклад 1. В урні 2 білі і 3 чорні кулі. З урни підряд виймають дві кулі. Знайти ймовірність того, що друга куля біла, якщо відомо, що перша була чорною.

Нехай A – «перша куля чорна», B – «друга куля біла».

$$P(B \mid A) = \frac{2}{5-1} = \frac{1}{2}.$$

Теорема добутку ймовірностей. Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї із них на умовну ймовірність другої, знайдену при умові, що перша подія відбулась.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

Приклад. В урні 2 білі і 3 чорні кулі. З урни підряд виймають дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі білі.

A – «поява двох білих куль». Подія A є добутком двох подій $A = A_1 \cdot A_2$, де A_1 – «поява білої кулі при першому вийманні», A_2 – «поява білої кулі при другому вийманні».

За теоремою множення ймовірностей $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}1.$

З теореми слідує, що умовну ймовірність події B можна знайти за формулою: $P(B \mid A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}.$

Зауваження. Теорема може бути узагальнена на довільне скінченне число подій. Наприклад для трьох подій

$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid A \cdot B).$

Приклад. В цеху працюють сім чоловіків та три жінки. По табельним номерам навмання відібрані три особи. Знайти ймовірність того, що всі відібрані особи виявляться чоловіками.

Нехай подія A – «перша відібрана особа – чоловік», B – «друга відібрана особа – чоловік»; C – «третя відібрана особа – чоловік».

$P(A) = \frac{7}{10}$, $P(B \mid A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, $P(C \mid A \cdot B) = \frac{5}{8}$.

Шукана ймовірність того, що всі три вибрані особи будуть чоловіками,

$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid A \cdot B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{7}{24}.$

Теорема добутку ймовірностей для незалежних подій. Для незалежних подій теорема добутку спрощується: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Приклад 2. В урні 2 білі і 3 чорні кулі. З урни виймають дві кулі, але після першого виймання куля повертається в урну, і кулі в урні перемішуються, після чого виймається друга куля. Знайти ймовірність того, що обидві кулі білі.

В даному випадку події A_1 та A_2 незалежні,

$P(A) = P(A_1)\, P(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = 0{,}16.$

Означення. Дві випадкові події називаються незалежними, якщо $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Означення. Випадкові події A_1, A_2, … A_n називаються незалежними в сукупності, якщо $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$.

Означення. Події A_1, A_2, …, A_n називаються попарно незалежними, якщо виконується рівність $P(A_i \cdot A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Зауваження. Попарно незалежні події не обов’язково незалежні в сукупності.

Ймовірність настання хоча б однієї події

Припустимо, що в результаті випробування можуть відбутися n подій A_1, A_2, … A_n, незалежних в сукупності, ймовірності яких відомі p_1, p_2, …, p_n. Тоді ймовірності протилежних подій $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$, дорівнюють $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$, …, $q_n = 1 - p_n$.

Теорема. Ймовірність настання принаймні однієї із подій A_1, A_2, … A_n, незалежних в сукупності, знаходиться за формулою $P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n$.

Тобто, $P(A) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n}) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n$.

Наслідок. Якщо A_1, A_2, … A_n мають однакову ймовірність p, то ймовірність настання принаймні однієї із цих подій дорівнює $P(A) = 1 - q^n$, де $q = 1 - p$.

Приклад 3. Ймовірність того, що в один із літніх днів у Києві іде дощ – 0,2, а в Луцьку – 0,3. Знайти ймовірність того, що в деякий літній день

а) дощитиме в обох містах одночасно;

б) у Києві іде дощ, а в Луцьку – сонячна погода;

в) у Києві сонячно, а в Луцьку іде дощ.

Нехай A – «Києві іде дощ», $\bar{A}$ – «в Києві сонячно» B – «в Луцьку іде дощ»; $\bar{B}$ – «в Луцьку сонячно»;

P(A) = 0,2, P(B) = 0,3

а) $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$

б) $P\left(\bar{A}\right) = 1 - P\left(A\right) = 1 - 0,2 = 0,8$

$P\left(\bar{B}\right) = 1 - P\left(B\right) = 1 - 0,3 = 0,7$

$P(A\bar{B}) = P(A)P\left(\bar{B}\right) = 0,2 \cdot 0,7 = 0,14$

в) $P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P\left(B\right) = 0,8 \cdot 0,3 = 0,24$

Надійність складних систем

Надійністю називається ймовірність безвідмовної роботи пристрою чи системи протягом певного відрізку часу. В складних системах надійність всієї системи залежить від надійності її складових. При цьому можливі різні варіанти впливу складових на безвідмовну роботу системи.

Послідовним називають таке з'єднання елементів системи, при якому для безвідмовної роботи системи необхідна безвідмовна робота кожного елементу.

Якщо позначити B – безвідмовна робота системи, A_i – безвідмовна робота кожного елементу, то подія B з'явиться, якщо одночасно з'являться усі події A_i , тобто має місце добуток подій. Вважаючи всі події незалежними, за теоремою добутку можна записати

$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$ або

$$P\left(B\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(A_i\right),$$

де n –кількість елементів в системі. Отже, при послідовному з'єднанні надійність системи дорівнює добутку надійностей її складових. Приклад відображення послідовного з'єднання елементів системи наведений на рис.1 (в прямокутниках наведені надійності кожного блоку).

Приклад 4. Відшукати надійність системи, наведеної на рис. 1.

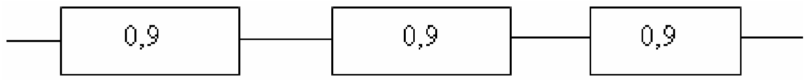


Рис. 1. Послідовне з’єднання елементів

Розв’язання. За формулою маємо $P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}729$.

Отже, при послідовному з’єднанні елементів надійність системи зменшується.

Більш цікавими є задачі по визначенню надійності окремих складових для забезпечення заданої надійності системи в цілому.

***Приклад* 5.** Яка повинна бути надійність кожного з чотирьох послідовно з’єднаних блоків, щоб надійність системи була більшою за 0,80?

Розв’язання. За умовою $P(B) > 0{,}8$. Отже,

$$(P(A_i))^4 > 0{,}8 \Rightarrow P(A_i) > \sqrt[4]{0{,}8} \Rightarrow P(A_i) > 0{,}946.$$

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте теорему додавання несумісних подій.
2. Сформулюйте теорему додавання сумісних подій.
3. Дайте означення умовної ймовірності події.
4. Сформулюйте теорему добутку залежних подій.
5. Сформулюйте теорему добутку незалежних подій.
6. Студент прийшов на залік, підготувавши лише 25 з 30 питань програми. Знайти ймовірність того, що студент відповість на два запитання викладача.
7. Два стрільці зробили по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучення для першого стрільця – 0,8, а для другого - 0,7. Яка ймовірність того, що : а) влучить лише один стрілець; б) влучить хоча б один стрілець.

1.6. Формула повної ймовірності та формула Байеса (Bayes)

Припустимо, що подія A може відбуватися в різних умовах, яким відповідають несумісні події $H_1, H_2, \dots H_n$, які утворюють повну групу подій і які назвемо гіпотезами.

Нехай відомі ймовірності $P(H_1)$, $P(H_2)$, … $P(H_n)$ та умовні ймовірності $P(A \mid H_1)$, $P(A \mid H_2)$, … $P(A \mid H_n)$.

Як знайти $P(A)$ в даній ситуації?

Теорема. Якщо подія A може відбутись тільки за умови того, що відбудеться одна із подій (гіпотез) H_1, H_2, … H_n, які утворюють повну групу подій, то ймовірність події A дорівнює сумі добутків імовірностей кожної із цих подій (гіпотез) на відповідні умовні ймовірності події A :

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) + ... + P(H_n)\cdot P(A|H_n).$$

Ця формула називається **формулою повної ймовірності**.

***Приклад* 1.** У трьох урнах лежать білі і чорні кулі. У першій – 3 білі і 1 чорна, у другій – 6 білих і 4 чорних, у третій – 9 білих і 1 чорна. З навмання взятої урни виймають одну кулю. Знайти ймовірність того, що вона біла.

Розв'язання. Нехай H_1 – «вибрано першу урну», H_2 – «вибрано другу урну», H_3 – «вибрано третю урну».

A – «вибрана куля – біла».

$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \dfrac{1}{3}$,

$P(A \mid H_1) = \dfrac{3}{4}$, $P(A \mid H_2) = \dfrac{6}{10}$, $P(A \mid H_3) = \dfrac{9}{10}$.

За формулою повної ймовірності,

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) + P(H_3)\cdot P(A|H_3) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10} = \frac{3}{4}.$$

***Приклад* 2.** На фабриці виготовляють гвинти. Перша машина виготовляє 25%, друга – 35%, а третя – 40% усіх гвинтів. Частка браку відповідно 5%, 4%, 2%. Яка ймовірність того, що випадково вибраний гвинт бракований?

Розв'язання. Нехай H_1 – «вибраний гвинт виготовлено першою машиною», H_2 – «вибраний гвинт виготовлено другою машиною», H_3 – «вибраний гвинт виготовлено третьою машиною».

A – «вибраний гвинт – бракований».

$P(H_1) = 0{,}25$, $P(H_2) = 0{,}35$, $P(H_3) = 0{,}4$,

$P(A \mid H_1) = 0{,}05$, $P(A \mid H_2) = 0{,}04$, $P(A \mid H_3) = 0{,}02$.

За формулою повної ймовірності,

$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) + P(H_3)\cdot P(A|H_3) = 0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}035 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 = 0{,}0345$.

Якщо до випробування відомі ймовірності подій $P(H_1)$, $P(H_2)$, … $P(H_n)$, а в результаті випробування подія A відбулась, то з урахуванням настання цієї події умовні ймовірності гіпотез обчислюються за **формулою Байєса**:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A|H_i)}{P(A)},\ i = 1, 2, ..., n.$$

Формули Байєса дозволяють переоцінити ймовірності (подій) гіпотез H_1, H_2, … H_n після того, як стане відомим результат випробування, наслідком якого є подія A, тобто формула Байєса дозволяє "поміняти місцями причину та наслідок":

за відомим фактом події обчислити ймовірність того, що ця подія відбулась з певною ймовірністю завдяки відомому факту.

Значення формули Байєса полягає у тому, що при настанні події A, можна перевіряти прийняті до досліду гіпотези. Такий підхід називається Байєсовським і дає можливість коректувати управлінські рішення.

***Приклад* 3.** За результатами перевірки контрольних робіт студентів з математики виявилось, що в першій групі отримали позитивну оцінку 8 студентів із 15, а у другій групі – 9 із 18. Знайти ймовірність того, що навмання обрана робота, яка має позитивну оцінку, обрана із робіт другої групи.

Розв'язання. Нехай A – «контрольна робота отримала позитивну оцінку», H_1 – «робота належить студенту із першої групи», H_2 – «робота належить студенту із другої групи, тоді:

$$P(H_1) = \frac{15}{23},\ P(H_2) = \frac{18}{23},$$

$$P(A \mid H_1) = \frac{8}{15},\ P(A \mid H_2) = \frac{9}{18}.$$

За формулою повної ймовірності,

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) = \frac{15}{23}\cdot\frac{8}{15} + \frac{18}{23}\cdot\frac{9}{18} = \frac{17}{23}.$$

За формулою Байєса,

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)\cdot P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{18}{23}\cdot\frac{9}{18}}{\frac{17}{23}} = \frac{9}{17} \approx 0{,}529.$$

Отже, ймовірність того, що навмання взята контрольна робота з позитивною оцінкою належить студенту з другої групи приблизно дорівнює 53%.

***Приклад* 4.** Зі скриньки, яка містить 5 білих і 3 чорних кулі, одна куля невідомого кольору загублена. Яка ймовірність витягнути навмання зі скриньки білу кулю (подія A)? Яка ймовірність того, що загублено чорну кулю, якщо витягнута навмання куля виявилась білою?

Розв'язання. Тут можливі дві події-гіпотези: H_1 – «загублено білу кулю», H_2 – «загублено чорну кулю», тоді: $P(H_1) = \frac{3}{8}$, $P(H_2) = \frac{5}{8}$.

A – «витягнуто білу кулю», $P(A \mid H_1) = \frac{5}{7}$, $P(A \mid H_2) = \frac{4}{7}$.

За формулою повної ймовірності,

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) = \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7} + \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{5}{8}.$$

За формулою Байєса,

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{7}.$$

Питання для самоперевірки

1. Запишіть формулу повної ймовірності.
2. Як на практиці застосувати формулу повної ймовірності?
3. Запишіть формулу Байєса.
4. Яке практичне значення формули Байєса?
5. Зі скриньки, яка містить 4 білих і 4 чорних кулі, одна куля невідомого кольору загублена. Яка ймовірність витягнути навмання зі скриньки білу кулю? Яка ймовірність того, що загублено чорну кулю, якщо витягнута навмання куля виявилась білою?

1.7. Повторні незалежні досліди. Формула Бернуллі

В задачах соціології, економіки та ін. досить часто доводиться мати справу з задачами, які можна представити у вигляді подій, що багаторазово повторюються за даних сталих умов. Досить часто необхідно знайти ймовірність того, що подія A відбудеться рівно k раз у серії із n дослідів.

Нехай проводяться n випробувань, у кожному з яких подія A може як відбутись, так і не відбутись. Припустимо, що ці випробування є незалежними.

Означення. Випробування називаються **незалежними** стосовно деякої події A, якщо ймовірність цієї події в кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань.

Означення. Серія повторних незалежних випробувань з одним із можливих результатів A або $\overline{A}$, у кожному з яких подія A має одну і ту саму ймовірність $P(A) = p$ називається **схемою Бернуллі**.

Зауважимо, що у схемі Бернуллі $P(\overline{A}) = 1 - p$.

Теорема. Якщо ймовірність p настання події A в кожному досліді є сталою, то ймовірність того, що подія A відбудеться рівно k раз у n незалежних дослідах обчислюється за формулою:

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, де $q = 1 - p$.

Ця формула носить назву **формули Бернуллі**. А ще її називають біномною формулою.

Зауваження. Формула застосовується, якщо $n \leq 10$. Якщо $n > 10$, розрахунки будуть громіздкими, тому в цьому випадку користуються граничними формулами Схеми Бернуллі, які ми розглянемо пізніше.

***Приклад* 1.** Із партії, в якій 12 стандартних і 4 нестандартні деталі, навмання беруться 3 деталі з поверненням. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей :

1) усі три стандартні;

2) не більш як одна нестандартна;

3) принаймні одна нестандартна.

Розв'язання: 1) Маємо схему трьох незалежних випробувань. Нехай подія A – «узята щоразу деталь стандартна», $P(A) = \dfrac{12}{16} = 0.75$, $q = 1 - p = 0{,}25$, $k = 3$.

$P_3(3) = C_3^3(0,75)^3(0,25)^0 = 0{,}422$.

2) Подію «із трьох деталей не більш як одна нестандартна» можна розглядати так: узято 3 стандартні деталі або 2 стандартні і одну нестандартну деталь.

$P_3(k \geq 2) = P_3(2) + P_3(3) = C_3^2(0,75)^2(0,25)^1 + C_3^3(0,75)^3(0,25)^0 = 0{,}844$

3) Протилежною для даної буде подія «усі три деталі стандартні». Їй рівносильна подія $k < 3$. Обчислимо цю ймовірність:

$P_3(k < 3) = 1 - P_3(3) = 1 - C_3^3(0,75)^3(0,25)^0 = 0{,}578$.

Наслідок. Найімовірніше число k_0, якому в схемі Бернуллі відповідає найбільша ймовірність обчислюється із наступного співвідношення:

$np - q \leq k_0 \leq np + p$.

***Приклад* 2.** В кімнаті 4 лампочки. Для кожної лампочки ймовірність того, що вона буде працювати протягом року дорівнює 0,75.

1) Яка ймовірність того, що протягом року не вийде з ладу 3 лампочки?

2) Яка ймовірність того, що протягом року не вийдуть з ладу від однієї до трьох лампочок?

3) Яке найімовірніше число лампочок, що не вийдуть з ладу протягом року? Яка ймовірність цієї події?

Розв'язання:

1) Ймовірність того, що протягом року з ладу не вийде 3 лампочки, обчислимо застосовуючи формулу Бернуллі, при цьому врахуємо, що $n = 4$, $p = 0{,}75$, $q = 1 - p = 0{,}25$, $k = 3$. Тоді $P_4(3) = C_4^3(0,75)^3(0,25)^1 = 0{,}422$.

2) Імовірність того, що протягом року не вийдуть з ладу від 1 до 3 лампочок:

$P_4(1 \leq k \leq 3) = C_4^1(0,75)^1(0,25)^3 + C_4^2(0,75)^2(0,25)^2 + C_4^3(0,75)^3(0,25)^1 = 0{,}68$.

3) Найімовірніше число лампочок, які вийдуть з ладу протягом року, обчислимо за формулою:

$4 \cdot 0{,}75 - 0{,}25 \le k_0 \le 4 \cdot 0{,}75 + 0{,}25$ або $0{,}25 \le k_0 \le 1{,}25$, $k_0 = 1$.

Отже, протягом одного року найімовірніше вийде з ладу одна лампочка. Імовірність цієї події $P_4(1) = C_4^1 (0{,}75)^1 (0{,}25)^3 = 0{,}423$.

Приклад *3*. Кубик кидають 5 разів. Яка найімовірніша кількість випадань шістки?

Розв'язання: $n = 5$, $p = \frac{1}{6}$, $q = 1 - p = \frac{5}{6}$,

$5 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \le k_0 \le 5 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ або $0 \le k_0 \le 1$, $k_0 = 0$ або 1,

тобто найімовірнішими є два значення кількості випадань шістки 0 та 1.

Питання для самоперевірки

1. Які досліди називають незалежними? Чи зустрічаються вони в реальному житті?

2. Що таке повторні незалежні досліди?

3. Поясніть сутність схеми Бернуллі.

4. Запишіть формулу Бернуллі.

5. Яке практичне значення формули Бернуллі?

6. Запишіть формулу для найімовірнішого числа успіхів.

7. Із партії, в якій 8 стандартних і 3 нестандартні деталі, навмання беруться 3 деталі з поверненням. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей :

1) усі три стандартні;

2) не більш як одна нестандартна;

3) принаймні одна нестандартна.

1.8. Граничні теореми схеми Бернуллі

У випадках, коли необхідно обчислити ймовірність $P_n(k)$ появи події A рівно k разів при великій кількості дослідів n, наприклад $P_{830}(260)$, формулою Бернуллі стає досить складно користуватись. Тому в таких випадках користуються наближеними формулами, які називають асимптотичними. Ці формули носять назву: "локальна та інтегральна формули Муавра – Лапласа" та теорема Пуассона.

Теорема Пуассона. *Якщо* ймовірність p того, що подія A відбудеться у кожному досліді прямує до нуля ($p \to 0$) при необмеженому зростанні числа дослідів n ($n \to \infty$), причому добуток np прямує до сталого числа λ ($np \to \lambda$), то ймовірність $P_n(k)$ того, що подія A відбудеться рівно k раз в n незалежних дослідах, задовольняє граничній рівності:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \text{ або } P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = P(\lambda),$$

де $P(\lambda)$ - функція Пуассона, значення якої табульовані.

Приклад 1. В магазин привезли 800 пляшок мінеральної води. Імовірність того, що при перевезенні пляшка розіб'ється дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що магазин отримає:

а) 3 розбитих пляшки;

б) не більше 5 розбитих пляшок.

Розв'язання: $n = 800$, $p = 0{,}004$, $\lambda = np = 800 \cdot 0{,}004 = 2$

а) $P_{800}(3) \approx P(2) = 0{,}18$

б) $P_{800}(0 \le k \le 5) \approx$ 0,041 + 0,13 + 0,209 + 0,223 + 0,178 + 0,114 = 0,895.

Розглянемо випадок, коли не виконується умова, що $p \to 0$. Абрагам де Муавр вперше отримав граничну Теорему для випадку $p = \dfrac{1}{2}$. Пізніше цей результат узагальнив Лаплас для всіх $p \in [0,1]$.

Нехай у кожному із n незалежних дослідів подія A може відбутись із ймовірністю p, та не відбутись із ймовірністю $q = 1 - p$. Нехай $P_n(k)$, імовірність того, що в n дослідах подія A відбудеться рівно k раз, а $P_n(a \le k \le b)$ − ймовірність того, що число появ події A міститься між a та b.

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Якщо n є достатньо великим числом, а $p \ne 0, p \ne 1$, то

$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)$, де $\varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)$ - функція Гауса, значення якої табульовані.

Властивості функції φ:

1) Функкія парна: $\varphi(-x) = \varphi(x)$,

2) Для $x \ge 5$, $\varphi(x) \approx 0$.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Якщо n є достатньо великим числом, а $p \ne 0, p \ne 1$, то має місце така формула:

$P_n(a \le k \le b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right)$, де

$\Phi(x)$ - функція Лапласа, значення якої табульовані.

Властивості функції $\Phi(x)$:

1) Функкія непарна: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$,

2) Для $x \ge 5$, $\Phi(x) \approx \frac{1}{2}$.

Зауваження. Обираючи формулу для обчислень за схемою Бернуллі бажано керуватись такими міркуваннями:

1. Якщо n - велике, а p - "не мале", тобто $npq \ge 20$, то для знаходження ймовірностей $P_n(k)$ та $P_n(a \le k \le b)$ застосовують формули із Теорем Лапласа.

2. Якщо n - велике, а p – мале настільки, що $np \le 10$ то для знаходження ймовірностей $P_n(k)$ застосовують формулу Пуассона. Для обчислення

ймовірності $P_n(a \le k \le b)$ теж складено таблиці, які підсумовують значення функції Пуассона.

Питання для самоперевірки

1. В чому полягає суть Теореми Пуассона?
2. В яких випадках її застосовують?
3. В чому полягає суть Теорем Муавра-Лапласа?
4. В яких випадках їх застосовують?
5. В магазин привезли 1000 пляшок мінеральної води. Імовірність того, що при перевезенні пляшка розіб'ється дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що магазин отримає:

а) 3 розбитих пляшки;

б) не більше 5 розбитих пляшок.

РОЗДІЛ 2. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

2.1. Поняття випадкової величини та функції розподілу

Поняття випадкової події дозволяє вивчати лише якісні наслідки стохастичних експериментів. Проте, на практиці важливо вивчати також і кількісні результати, наприклад кількість гербів при підкиданні двох монет, кількість влучень при стрільбі, кількість дітей у сім'ї, вік респондента і т. ін.

Такий кількісний результат стохастичного експерименту називається випадковою величиною.

Означення. Під випадковими величинами розуміють величини, які можуть приймати ті чи інші значення (кількісні!) в залежності від випадку.

Прикладами випадкових величин, що набувають різних числових значень під впливом багатьох випадкових факторів, можуть бути:

а) кількість очок, яка випадає на верхній грані за одне кидання грального кубика;

б) кількість бракованих виробів серед n навмання вибраних;

в) кількість підкидань монети до першої появи герба;

г) кількість викликів, які надходять на телефонну станцію протягом деякого проміжку часу;

д) тривалість часу обслуговування покупця;

е) час виконання деякого завдання і т. д.

Випадкові величини позначатимемо великими літерами X, Y, Z, …, а їхні можливі значення – малими літерами x, y, z, …, латинського алфавіту.

Строгіше означення випадкової величини пов'язане з поняттям простору елементарних подій.

Оскільки результат стохастичного експерименту описується елементарними подіями, то для визначення випадкової величини необхідно кожній елементарній події поставити у відповідність число – кількісний результат експерименту, тобто визначити функцію на просторі елементарних подій.

Означення. Нехай задано простір елементарних подій Ω. Однозначна числова функція $X = f(\omega)$, $\omega \in \Omega$, яку задано на просторі елементарних подій, називається випадковою величиною.

Різноманітність випадкових величин дуже велика. Якщо простір Ω дискретний (множина скінченна або зліченна), то випадкова величина дискретна. Неперервному простору елементарних подій (Ω − незліченна множина, або множина значення якої суцільно заповнюють деякий інтервал) відповідає неперервна випадкова величина.

У наведених прикладах траплялися два типи випадкових величин: дискретні величини − приклади а) – г) і неперервні величини – приклади д), е).

Приклади.

1) Один раз підкидають гральний кубик. Випадкова величина – кількість очок, що з'явились в результаті підкидання. Тоді, X: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2) Один раз підкидають монету. Випадкова величина – кількість гербів. Тоді, X: 0, 1.

3) Підкидають монету до появи герба. Випадкова величина – кількість підкидань. Тоді, X: 1, 2, 3, 4, …

4) Навмання вибирають точку на відрізку [0, 1]. Випадкова величина – координата точки. Тоді, X – всі значення $x \in [0, 1]$.

5) Нехай випадкова величина Y − час очікування трамвая на зупинці. Якщо відомо, що проміжок часу між прибуттям трамваїв не перевищує T, то значення Y належать відрізку $[0, T]$.

Властивості випадкових величин.

Якщо X та Y – випадкові величини, то випадковими величинами також є:

1) сума $X + Y$,
2) різниця $X – Y$,
3) добуток $X \cdot Y$,
4) частка $\frac{X}{Y}$, $Y \neq 0$,
5) функція $f(X)$.

Зазначимо, що для того щоб описати випадкову величину, не достатньо вказати всі можливі її значення, потрібно знайти ймовірності того, що вона приймає ті чи інші значення, тобто задати розподіл випадкової величини.

Співвідношення між значеннями випадкової величини і їхніми ймовірностями називається **законом розподілу випадкової величини**.

Розподіл випадкової величини, так само як і в елементарній математиці функцію, можна задавати табличним способом, графічно, аналітично (за допомогою формул).

Універсальним способом задання закону розподілу ймовірностей є **функція розподілу** $F(x) = P(X < x)$, де x – довільне дійсне значення.

Інколи функцію $F(x)$ називають інтегральною функцією розподілу.

Властивості функції розподілу

1. Якщо $F(x)$ − функція розподілу випадкової величини X, то $0 \le F(x) \le 1$ для будь-якого x.

2. Функція розподілу $F(x)$ випадкової величини X є неспадною функцією, тобто для будь-яких $x_1 < x_2$ виконується рівність: $F(x_1) \le F(x_2)$.

3. Ймовірність попадання випадкової величини X в деякий інтервал $[a, b)$: $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

4. Якщо $F(x)$ − функція розподілу, то $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення випадкової величини.
2. Які типи випадкових величин ви знаєте?
3. Які випадкові величини називають дискретними?
4. Що таке неперервна випадкова величина?
5. Що таке закон розподілу випадкової величини?
6. Дайте визначення функції розподілу?
7. Наведіть властивості функції розподілу.

2.2. Дискретні випадкові величини

Означення. Випадкова величина називається дискретною, якщо множина її можливих значень є скінченною або зліченною.

Дискретна випадкова величина завжди приймає значення деякої числової послідовності.

Приклади дискретних випадкових величин: сукупність оцінок, які отримали студенти з певного предмета під час сесії, кількість бракованих виробів у навмання відібраній партії із 30 виробів, кількість "гербів", що випали при десятикратному підкиданні монети.

Нехай X – дискретна випадкова величина, можливими значеннями якої є числа x_1, x_2, …, x_n. Через $p_k = P\{ X = x_k \}$ позначимо ймовірність того, що випадкова величина X набуває значення x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Події $\{X = x_k \}$ утворюють повну групу несумісних подій, тому $\sum_{k=1}^{n} p_k = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, тобто випадкова величина неодмінно прийме якесь значення, а останнє твердження є достовірною подією, ймовірність якої дорівнює 1.

Означення. Законом розподілу ймовірностей (законом розподілу) дискретної випадкової величини називається відповідність між усіма її можливими значеннями та їхніми ймовірностями.

Табличний запис закону розподілу – це таблиця значень x_k випадкової величини та відповідних їхніх імовірностей p_k :

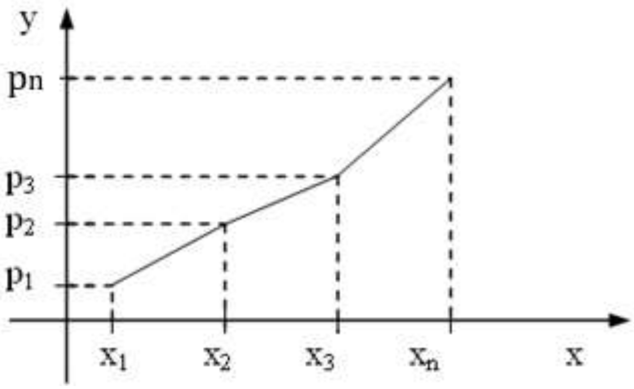
X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Ця таблиця називається **рядом розподілу** дискретної випадкової величини.

Ряд розподілу можна задати графічно, якщо по осі абсцис відкласти всі можливі значення випадкової величини x_1, x_2, …, x_n, а по осі ординат – імовірності цих значень, p_1, p_2, …, p_n. З’єднавши точки $(x_k,\ p_k)$ послідовно відрізками прямої лінії, отримаємо ламану, яку називають **многокутником імовірностей**.

Зауважимо, що сума ординат многокутника дорівнює одиниці.

Ця властивість многокутника розподілу є визначальною. Якщо у прямокутній системі координат задано деяку ламану, що задовольняє означенню функції, яка має попередньо вказану властивість, то така ламана задає закон розподілу деякої випадкової величини.



За допомогою табличного запису закону розподілу можна визначити функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X за формулою: $F(x)=\sum\limits_{x_k<x} p_k$, у якій сумування проводиться за усіма індексами k, для яких $x_k < x$.

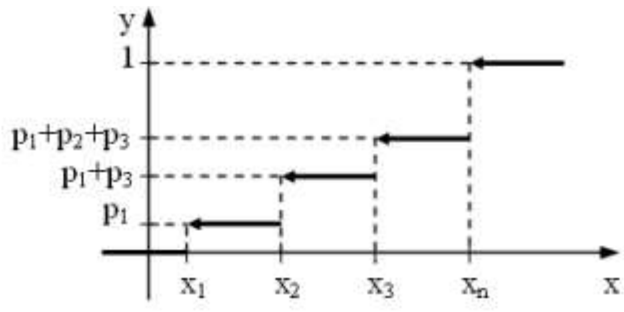
Функцію розподілу $F(x)$ також можна записати у вигляді:

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ x \le x_1; \\ p_1,\ x_1 < x \le x_2; \\ p_1+p_2,\ x_2 < x \le x_3; \\ p_1+p_2+p_3,\ x_3 < x \le x_4; \\ \ldots \\ p_1+p_2+\ldots+p_n=1,\ x > x_n. \end{cases}$$

У випадку, коли множина різних значень x_k випадкової величини X є нескінченною і зліченною, то її закон розподілу також можна записати у формі таблиці, яка складатиметься з двох нескінченних рядків:

X	x_1	x_2	…	x_k	…
P	p_1	p_2	…	p_k	…

Графік функції розподілу дискретної випадкової величини:



Приклад 1. Один раз підкидають монету. Випадкова величина X – кількість гербів. Тоді розподіл можна задати наступним чином:

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$F(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0;\\ \frac{1}{2}, \ 0<x\le 1;\\ 1, \ x>1.\end{cases}$$

Приклад 2. Один раз підкидають гральний кубик. Випадкова величина X – кількість очок, що з’явились в результаті підкидання. Тоді розподіл можна задати наступним чином:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$F(x)=\begin{cases}0, \ x\le 1;\\ \frac{1}{6}, \ 1<x\le 2;\\ \frac{2}{6}, \ 2<x\le 3;\\ \frac{3}{6}, \ 3<x\le 4;\\ \frac{4}{6}, \ 4<x\le 5;\\ \frac{5}{6}, \ 5<x\le 6;\\ 1, \ x>6.\end{cases}$$

Приклад 3. Підкидають монету до появи герба. Випадкова величина X – кількість підкидань. Тоді розподіл можна задати наступним чином:

X	1	2	3	$\ldots$
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\ldots$

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 1; \\ \frac{1}{2},\ 1<x\le 2; \\ \frac{3}{4},\ 2<x\le 3; \\ \ldots \end{cases}$$

Основні закони розподілу дискретних випадкових величин

1. Біноміальний (Біномний) закон розподілу, *X ~ B*(*n, p*).

Нехай проводиться n незалежних випробувань за схемою Бернуллі і $p = P\ (A)$ – ймовірність появи події A в кожному окремому випробуванні. Тоді запишемо закон розподілу дискретної випадкової величини X – кількості появ події A в цих n випробуваннях.

Випадкова величина X може набути значень 0, 1, 2, …, n. Імовірності цих значень обчислюються за формулою Бернуллі (біномною формулою).

X	0	1	2	$\ldots$	n
P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\ldots$	p^n

$q = 1 - p$

Таким чином, ми одержимо закон розподілу описаної випадкової величини X, який називається біномним.

Цей факт позначають $X \sim B(n,\ p)$, що означає випадкова величина X має біномний розподіл з параметрами n та p.

2. Закон розподілу Пуассона, $X \sim P(\lambda)$.

Дискретна випадкова величина X має закон розподілу Пуассона з параметром λ, ($\lambda > 0$), якщо вона набуває значень 0, 1, 2, …, n, … з ймовірностями: $P(X = n) \approx \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$.

Цей розподіл є граничним випадком біноміального закону, тобто коли $n \to \infty$, $np \to \lambda$. Так як при цьому ймовірність p події A в кожному окремому досліді є малою, то закон розподілу Пуассона часто називають законом рідкісних явищ.

Закон розподілу Пуассона має широке застосування в задачах статистичного контролю якості, у теорії надійності, теорії масового обслуговування. За цим же законом розподілена кількість вимог щодо виплати страхових сум.

3. Геометричний закон розподілу, $X \sim G(p)$.

Нехай проводиться незалежні випробування, в кожному з яких може відбутись подія A з ймовірністю $p = P\ (A)$. Дискретна випадкова величина X – кількість випробувань до першого настання події A матиме геометричний розподіл, який задається наступним чином:

X	1	2	3	…	n	...
P	p	pq	pq^2	…	pq^n	...

Питання для самоперевірки

1. Яка випадкова величина називається дискретною?
2. Як можна задати закон розподілу дискретної випадкової величини?
3. Назвіть основні закони розподілу дискретних випадкових величин.
4. Дайте означення біномного закону розподілу.
5. Дайте означення розподілу Пуассона.
6. Дайте означення геометричного розподілу.

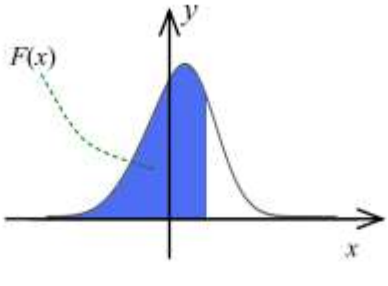
2.3. Неперервні випадкові величини

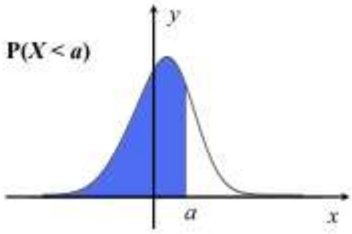
На практиці значення кожної випадкової величини, пов’язаної з певним стохастичним дослідом, або підраховуються (число очок, яке випадає при киданні грального кубика; число покупців, які зроблять покупки у крамниці; число автомобілів, які переїдуть перехрестя на зелене світло), або вимірюється (час очікування тролейбуса на зупинці, вага наугад взятої особи, кількість молока у пакеті).

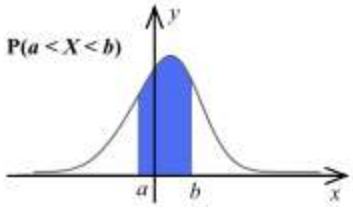
Зрозуміло, що результати вимірювання подаються числом певних одиниць, тобто можливі результати реального вимірювання є дискретними. Однак, коли мова йде про можливі значення тривалості певного явища, довжини, площі, об’єму, ваги тощо, тобто про величини неперервні у просторі і часі, природно вважати, що значення таких величин неперервно заповнюють певний проміжок (скінченний або нескінченний). А оскільки у такому випадку закон розподілу випадкової величини неможливо задати ймовірностями окремих значень, тому на передній план виступають ймовірності того, що випадкова величина набирає значення з інтервалів певного типу (випадкова величина задається функцією розподілу), або ж ймовірність того, що випадкова величина набирає значення з досить малого околу точки (випадкова величина задається щільністю розподілу імовірностей).

Означення. Випадкова величина X називається неперервною (абсолютно неперервною), якщо її функцію розподілу можна подати у вигляді:

$F(x) = P(X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$, де $f(t)$ – деяка функція, яку називають щільністю розподілу ймовірностей.







Властивості функції щільності.

1) $f(t) \geq 0$ для всіх значень t.

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

3) $P(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(t)dt$, $P(X = a) = 0$.

4) $f(x) = F'(x)$

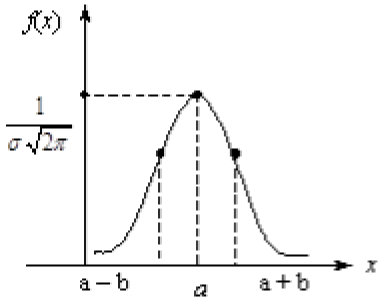
Графік функції $f(t)$ називається кривою розподілу неперервної випадкової величини.

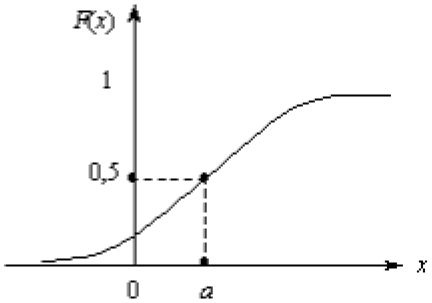
Приклади неперервних законів розподілу

Зауважимо, що функції $F(x)$ можуть бути різними, але кожній з них підпорядковується якийсь певний клас явищ, тому їх називають законами.

<u>1. Нормальний закон (закон Гауса), X ~ N(a, σ^2):</u>

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)}{2\sigma^2}}, \; F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x)$$





Закон нормального розподілу, - один з найпоширеніших законів. Це фундаментальний закон у теорії ймовірностей і в її застосуванні.

Нормальний розподіл найчастіше зустрічається у вивченні природних і соціально-економічних явищ. Інакше кажучи, більшість статистичних сукупностей у природі і суспільстві підпорядковується закону нормального розподілу. Відповідно можна сказати, що сукупності значної частини великих за обсягом вибірок підпорядковуються закону нормального розподілу. Ті із сукупностей, які відхиляються від нормального розподілу в результаті спеціальних перетворень, можуть бути наближені до нормального. У зв'язку з цим слід пам'ятати, що принципова особливість цього закону стосовно до інших законів розподілу полягає в тому, що він є законом границі, до якої наближаються інші закони розподілу в певних (типових) умовах (**Сума великої кількості вип. величин завжди має нормальний розподіл!**).

Суть даного закону полягає в тому, що при вимірювання деякої характеристики певної сукупності елементів завжди спостерігають відхилення в обидва боки від норми через велику кількість неконтрольованих причин, причому що більші ці відхилення, то рідше вони зустрічаються.

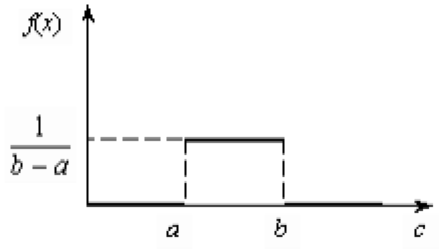
Наприклад, підприємство випускає стержні довжиною 1 м. Тобто в середньому довжина – 1 м, але внаслідок неконтрольованих випадкових причин трапляються відхилення від норми, деякі стержні чуть довші чи коротші, але більшість стержнів істотно не відрізняються від норми. Великі відхилення трапляються надто рідко.

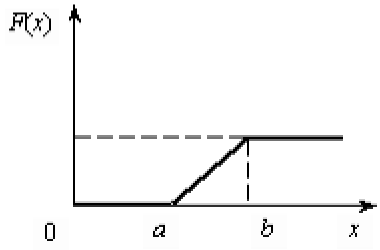
Ще один приклад, якщо потрібно оцінити розумові здібності деякої групи людей, то відомо, що більшість людей має приблизно однакові розумові здібності, тобто середні, що є нормою. Люди геніальні, так само як і бездарні зустрічаються приблизно однаково рідко.

2. Рівномірний розподіл

Рівномірний розподіл маємо, коли ймовірність того, що випадкова величина потрапить в проміжок (a, b) є пропорційною довжині цього проміжку і не залежить від розташування проміжку на осі.

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\notin(a;b),\\ \dfrac{1}{b-a},\ x\in[a;b].\end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases}0,\ x\le a;\\ (x-a)(b-a);\ a<x\le b;\\ 1;\ \ x>b.\end{cases}$$

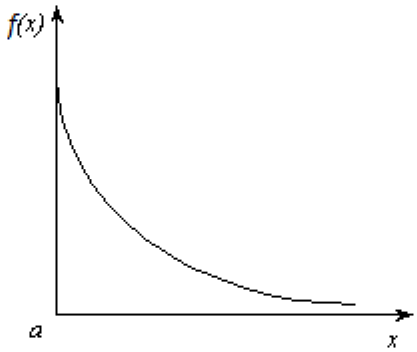


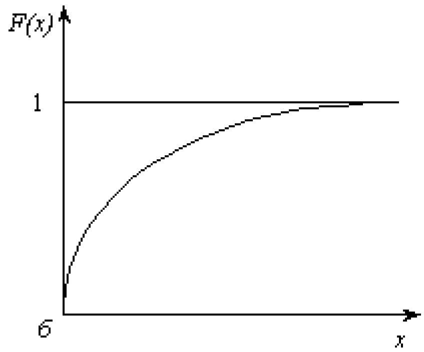


3. Показниковий (експоненційний) закон розподілу:

Випадкові величини з таким законом розподілу широко застосовуються в задачах з теорії надійності та теорії масового обслуговування.

$$f(x)=\begin{cases}0,\ \ x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x},\ x\ge 0.\end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases}0,\ x<0;\\ 1-e^{-\lambda x},\ x\ge 0.\end{cases}$$





Питання для самоперевірки

1. Яка випадкова величина називається неперервною?
2. Як можна задати закон розподілу неперервної випадкової величини?
3. Назвіть основні закони розподілу дискретних випадкових величин.
4. Дайте означення рівномірного закону розподілу.
5. Дайте означення показникового розподілу.
6. Дайте означення нормального розподілу.

2.4. Числові характеристики випадкових величин

Закон розподілу випадкової величини дає загалом вичерпну інформацію про цю випадкову величину, тому, що дозволяє обчислити ймовірності будь–яких подій, пов’язаних з цією величиною. Але такий закон розподілу не завжди дає можливість в компактній формі представити істотні особливості випадкової величини.

Характеристики випадкової величини, які є числами, називають числовими характеристиками або точковими оцінками. Вони у стислій формі визначають найбільш важливі риси розподілу. Такими числовими характеристиками є математичне сподівання, дисперсія, мода, медіана, моменти різних порядків і т. п.

Розглянемо деякі найбільш важливі числові характеристики та їх основні властивості.

Означення. Дві випадкові величини називаються ***незалежними***, якщо закон розподілу однієї із них не залежить від того, які можливі значення прийняла друга величина.

В протилежному разі, випадкові величини залежні.

Математичне сподівання. Походження терміну математичне сподівання пов’язане з початковим періодом виникнення теорії ймовірностей, коли її застосування обмежувалось азартними іграми. Гравця цікавило середнє значення очікуваного виграшу, тобто математичне сподівання виграшу.

Означення. Математичним сподіванням, або середнім значенням дискретної випадкової величини *X*, називається сума добутків всіх її значень на відповідні їм імовірності: $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n + \ldots$.

Для неперервної випадкової величини математичне сподівання обчислюють за такою формулою: $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$.

Математичне сподівання завжди має ту ж розмірність, що і досліджувана величина. Інші назви математичного сподівання – середнє значення або центр розподілу.

Математичне сподівання випадкової величини є невипадковою сталою величиною, яка залежить тільки від закону розподілу.

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання сталої величини дорівнює цій сталій:

$M(C) = C, C – const.$

2. Сталий множник можна винести за знак математичного сподівання:

$M(k X) = k M(X)$.

3. Математичне сподівання суми (різниці) випадкових величин дорівнює сумі (різниці) їх математичних сподівань: $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.

4. Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань: $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.

5. Якщо значення випадкової величини збільшити чи зменшити на одну і ту ж сталу C, то на цю ж сталу C зросте чи зменшиться математичне сподівання цієї випадкової величини: $M(X \pm C) = M(X) \pm C$.

6. Математичне сподівання відхилення випадкової величини від її математичного сподівання дорівнює нулю: $M(X - M(X)) = 0$.

Дисперсія випадкової величини.

Математичне сподівання випадкової величини дає вірне уявлення про її середньозважене значення – центр розподілу. Однак, для повної характеристики випадкової величини цього мало. Дві випадкові величини можуть мати однакові математичні сподівання, але зовсім різне розсіяння навколо центра розподілу. Наприклад, при стрільбі по мішені майстра спорту зі стрільби і простого студента центр розсіювання мало відрізняється від правильного – від яблучка, але в майстра кулі лягають купчасто, у студента – істотно розсіюються. Середній вік студентів і жителів міста може бути однаковим (наприклад, 21 рік), але розкид, розсіювання цих двох випадкових величин різне – у студентів вік від 17 до 25 років, у жителів міста – від дитячого віку до пенсійного.

Найчастіше для характеристики розсіяння випадкової величини X відносно центру розподілу використовується дисперсія.

Означення. Математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання $M(X)$ називають ***дисперсією*** випадкової величини X та позначають $D(X)$: $D(X) = M(X - M(X))^2$.

Властивості дисперсії

1. Дисперсія сталої величини дорівнює нулю: $D(C) = 0$.

2. Сталий множник можна винести за знак математичного сподівання:

$D(kX) = k^2 D(X)$.

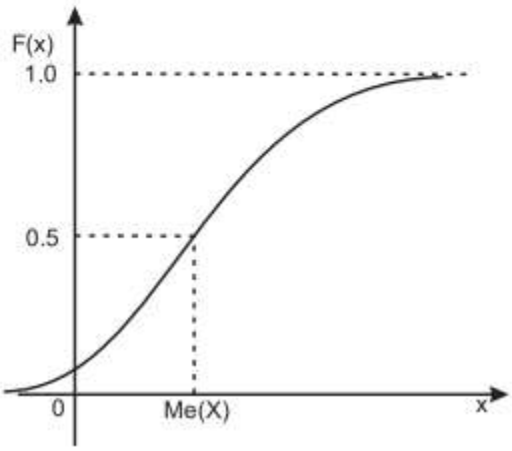
3. Дисперсія суми (різниці) двох незалежних випадкових величин X та Y дорівнює сумі дисперсій цих величин: $D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y)$.

4. Дисперсія випадкової величини X дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини і квадратом її математичного сподівання: $D(X) = M(X^2) - M(X)^2$.

Математичне сподівання випадкової величини X характеризує центр розсіяння, а дисперсія є мірою розсіяння випадкової величини X навколо її математичного сподівання. Але, якщо випадкова величина і її математичне сподівання мають одну і ту ж розмірність, то дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини. Цього недоліку можна уникнути, якщо скористатись середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Означення. Медіаною $Me(X)$ випадкової величини X називається таке число x_{me}, для якого виконується рівність: $P(X < x_{me}) = P(X > x_{me}) = \frac{1}{2}$.

Це означає, що ймовірність того, що випадкова величина матиме значення більше або менше за медіану дорівнює одному і тому ж числу $\frac{1}{2}$. З геометричної точки зору, вертикальна пряма x_{me} ділить площу фігури під кривою функції розподілу $F(x)$ на дві рівні частини.



Для дискретної випадкової величини медіаною називають те значення випадкової величини, яке ділить множину значень випадкової величини на дві частини з рівною кількістю значень випадкової величини.

Означення. Модою *Mo* (*X*) випадкової величини *X* називається найбільш імовірне її значення (для якого відповідна ймовірність p_i або щільність ймовірності $f(x)$ досягає свого максимуму).

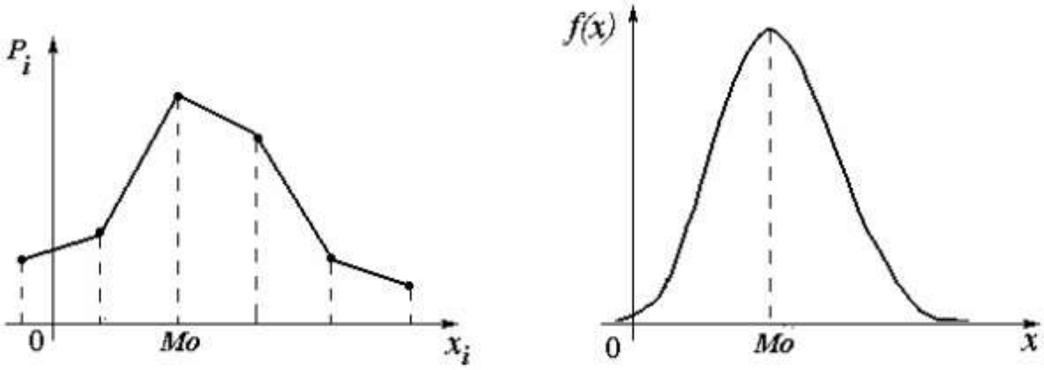


Рис. Мода дискретної і неперервної випадкових величин

Розподіли, що мають більше однієї моди називаються мультимодальними. Як правило, мультимодальність вказує на те, що набір даних не підпорядковується нормальному закону розподілу. Мода, як один із середніх показників, застосовується частіше для даних, що мають нечислову природу. Наприклад, експерти за допомогою моди визначають найпопулярніші типи продуктів, а це вже можна врахувати при прогнозі продажів чи плануванні випуску продукції.

Приклад 1. Дано ряд розподілу дискретної випадкової величини X:

X	1	2	3
p	0,4	0,5	0,1

Знайти $M(X)$, $D(X)$.

Розв'язання. $M(X) = 1\cdot 0,4 + 2\cdot 0,5 + 3\cdot 0,1 = 1,7$

$M(X^2) = 1^2\cdot 0,4 + 2^2\cdot 0,5 + 3^2\cdot 0,1 = 3,3$

$D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = 3,3 - 1,7^2 = 0,41.$

Приклад 2. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ 2x, 0 < x \le 1, \\ 0, x > 1 \end{cases}$$

Знайти $M(X)$, $D(X)$.

Розв'язання.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx + \int_{0}^{1} x\cdot 2xdx + \int_{1}^{+\infty} x\cdot 0dx = 0 + \int_{0}^{1} 2x^2dx + 0 = \left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0dx + \int_{0}^{1} x^2\cdot 2xdx + \int_{1}^{+\infty} x^2\cdot 0dx = \int_{0}^{1} 2x^3dx = \left.\frac{x^4}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

Початкові і центральні моменти, інші числові характеристики

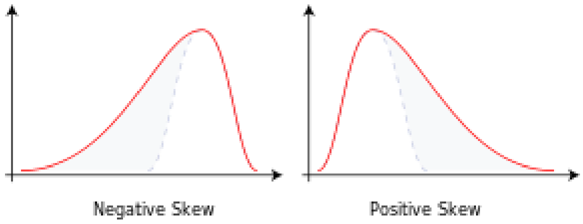
Означення. Початковим моментом порядку k випадкової величини X називається математичне сподівання величини X^k: $\nu_k = M(X^k)$.

$\nu_1 = M(X)$, $\nu_2 = M(X^2)$, …

Означення. Центральним моментом порядку k випадкової величини X називається математичне сподівання величини $(X - M(X))^k$: $\mu_k = M(X - M(X))^k$.

$\mu_1 = M\,(X - M(X)) = 0$, $\mu_2 = M(X - M(X))^2 = D(X)$, $\mu_3 = M(X - M(X))^3$ …

Означення. Коефіцієнтом асиметрії розподілу називається величина $A_s = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$.



Означення. Коефіцієнтом ексцесу розподілу називається величина $E = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$.

Для нормального розподілу $\dfrac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$; із чого випливає, що ексцес нормального розподілу дорівнює нулю. Якщо ексцес деякого розподілу відмінний від нуля, то крива щільності цього розподілу відрізняється від кривої щільності нормального розподілу: якщо ексцес додатній, то крива теоретичного має вищу та «гострішу» вершину ніж крива нормального; якщо ексцес від'ємний, то крива теоретичного має нижчу та «плоскішу» вершину ніж крива нормального.

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення математичного сподівання випадкової величини.
2. Наведіть властивості математичного сподівання.
3. Дайте означення дисперсії випадкової величини.
4. Наведіть властивості дисперсії.
5. Дайте означення середнього квадратичного відхилення.
6. Дайте означення моди і медіани.
7. Дайте означення початкового моменту випадкової величини.
8. Дайте означення центрального моменту випадкової величини.

2.5. Основні закони розподілу та їх характеристики

Основні закони розподілу дискретних випадкових величин

1. Біноміальний (Біномний) закон розподілу, $X \sim B(n, p)$.

Нехай проводиться n незалежних випробувань за схемою Бернуллі, $p = P(A)$ − ймовірність появи події A в кожному окремому випробуванні, $q = 1 - p$. Тоді запишемо закон розподілу дискретної випадкової величини X – кількості появ події A в цих n випробуваннях.

Випадкова величина X може набути значень 0, 1, 2, …, n. Імовірності цих значень обчислюються за формулою Бернуллі (біномною формулою).

X	0	1	2	…	n
P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	p^n

Означення. Випадкова величина X має *біномний розподіл* з параметрами (n, p), якщо:

$$P\left(X = k\right) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0,1,...,n;$$

$$q = 1 - p,\ 0 < p < 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Цей факт позначають $X \sim B(n, p)$, що означає випадкова величина X має біномний розподіл з параметрами n та p.

Для біномного розподілу $M(X) = np$, $D(X) = npq$.

Приклад 1. Відомо, що завод виготовляє 96% стандартних деталей. Взято 1000 деталей для перевірки. Випадкова величина X – кількість взятих стандартних деталей. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання. $n = 1000$, $p = 0{,}96$, $q = 1 - p = 0{,}04$

$M(X) = np = 1000 \cdot 0{,}96 = 960$

$D(X) = npq = 1000 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}04 = 38{,}4$

$\sigma(X) = \sqrt{D\left(X\right)} = \sqrt{38{,}4} \approx 6{,}2$

2. Закон розподілу Пуассона, $X \sim P(\lambda)$

Дискретна випадкова величина X має закон розподілу Пуассона з параметром λ, ($\lambda > 0$), якщо вона набуває значень 0, 1, 2, …, k, …, n, … з ймовірностями: $P(X = k) \approx \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.

Цей розподіл є граничним випадком біноміального закону, тобто коли $n \to \propto$, $np \to \lambda$. Так як при цьому ймовірність p події A в кожному окремому досліді є малою, то закон розподілу Пуассона часто називають законом рідкісних явищ.

Закон розподілу Пуассона має широке застосування в задачах статистичного контролю якості, у теорії надійності, теорії масового обслуговування. За цим же законом розподілена кількість вимог щодо виплати страхових сум.

Для даного розподілу $M(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$.

3. Геометричний закон розподілу, $X \sim G(p)$

Нехай проводиться незалежні випробування, в кожному з яких може відбутись подія A з ймовірністю $p = P(A)$. Дискретна випадкова величина X – кількість випробувань до першого настання події A матиме геометричний розподіл, який задається наступним чином:

X	1	2	3	…	n	...
P	p	pq	pq^2	…	pq^n	...

Означення. Випадкова величина X має *геометричний розподіл* з параметром p, ($0 < p < 1$), якщо:

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, k = 1,2,\dots .$$

Для даного розподілу $M(X) = \dfrac{1}{p}$, $D(X) = \dfrac{q}{p^2}$.

Приклад 2. Проводяться багатократні випробування деякого елемента на надійність доти, доки елемент не відмовить. Знайти математичне сподівання і дисперсію дискретної випадкової величини X – числа випробувань, які потрібно провести. Ймовірність відмови елемента в кожному випробуванні дорівнює 0,1.

Розв'язання. $p = 0,1$, $q = 1 - p = 0,9$

$M(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,1} = 10$ (це число означає, що в середньому необхідно провести 10 випробувань доки елемент не відмовить)

$D(X) = \frac{0,9}{0,1^2} = \frac{0,9}{0,01} = 90$

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Зауважимо, що функції $F(x)$ можуть бути різними, але кожній з них підпорядковується якийсь певний клас явищ, тому їх називають законами.

1. Рівномірний розподіл

Випадкова величина X має *рівномірний розподіл* з параметрами (a, b), якщо її щільність розподілу дорівнює:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, \text{ якщо } x \in (a;b]; \\ 0 \quad, \text{ якщо } x \notin (a;b]. \end{cases}$$

Функція розподілу рівномірно розподіленої випадкової величини X дорівнює:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad, \text{ якщо } x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, \text{ якщо } a < x \le b, \\ 1 \quad, \text{ якщо } x > b. \end{cases}$$

На рисунках 1 і 2 зображено графіки $f(x)$ і $F(x)$.

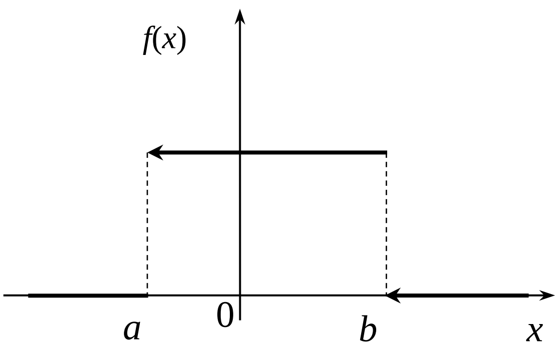


Рис. 1

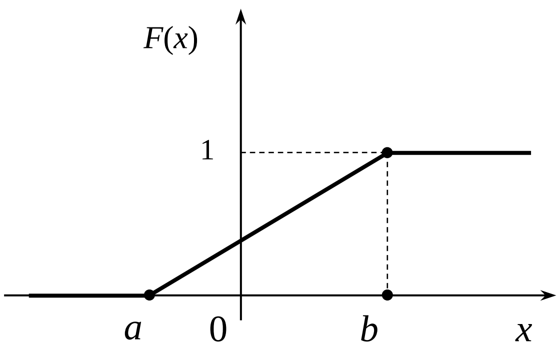


Рис. 2

3

ауважимо, що для рівномірного розподілу ймовірності попадання випадкової величини X в будь-які інтервали однакової довжини із відрізка $(a, b]$ рівні. Для даного розподілу $M(X) = \frac{a+b}{2}$, $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Рівномірний розподіл мають випадкові величини, які характеризують помилки вимірювань при допомозі приладів із крупними поділками, коли значення заокруглюються до найближчого цілого.

2. Показниковий (експоненційний) закон розподілу

Випадкова величина X має *показниковий розподіл* з параметром λ, ($\lambda > 0$), якщо її щільність розподілу дорівнює:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{ якщо } x \geq 0; \\ 0 \quad, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$$

Функція розподілу показниково розділеної випадкової величини X:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, \text{ якщо } x \geq 0; \\ 0 \quad, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$$

Графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$ зображено на рисунках 3 та 4.

Математичне сподівання: $MX = \frac{1}{\lambda}$. Дисперсія: $DX = \frac{1}{\lambda^2}$.

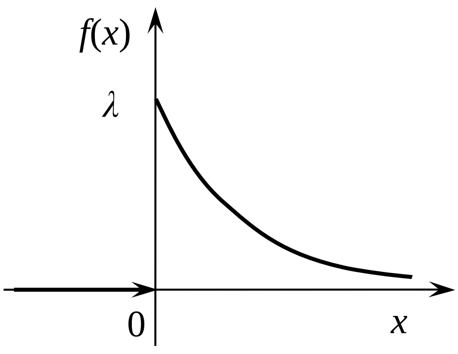


Рис. 3

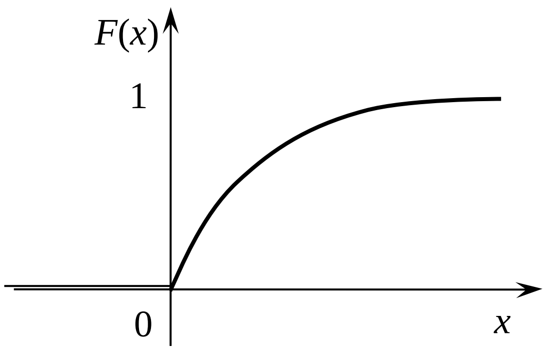


Рис. 4

Для даного розподілу $M(X) = \frac{1}{\lambda}$, $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Випадкові величини з таким законом розподілу широко застосовуються в задачах з теорії надійності та теорії масового обслуговування.

Прикладом неперервної випадкової величини, розподіленої за показниковим розподілом, є час між появами двох сусідніх подій найпростішого потоку, де λ – інтенсивність потоку.

Показниковий розподіл може використовуватися також в якості однієї із можливих математичних моделей в теорії надійності.

Характерною для експоненціального закону є властива лише для нього відсутність післядії, тобто минуле для цього закону не впливає на майбутнє.

3. Нормальний закон (закон Гауса), $X \sim \mathrm{N}(a,\ \sigma^2)$

Випадкова величина X має *нормальний розподіл* з параметрами (a, σ) (гаусів розподіл $N(a,\ \sigma)$), якщо її щільність дорівнює:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, де a – довільне дійсне число, $\sigma > 0$.

Функція розподілу нормально розподіленої випадкової величини X дорівнює:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$ зображено на рисунках 5 та 6.

Властивості функції $f(x)$:

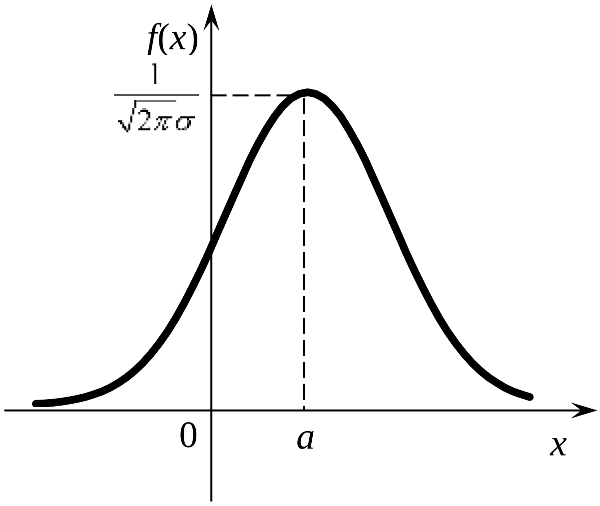


Рис. 5.

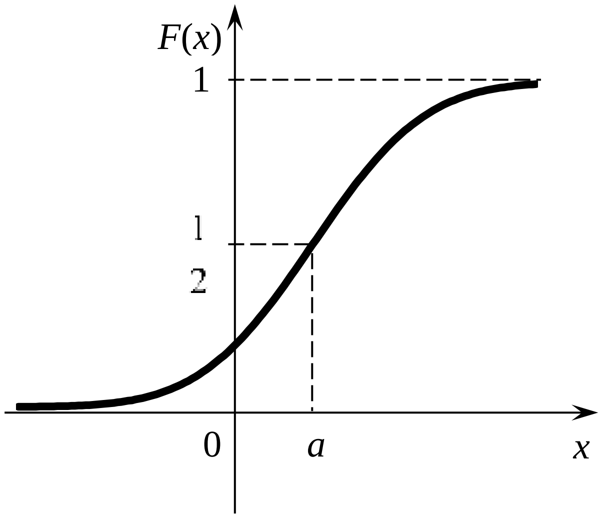


Рис. 6.

1) $D(f)=R,\ E(f)=(0;+\infty)$.

2) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=0$, тобто вісь Ox є горизонтальною асимптотою.

3) Нормальна крива симетрична відносно прямої $x=a$.

4) $max\, f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ при $x=a$.

5) В точках $x=a\pm\sigma$ графік має перегин.

Зміна параметра a приводить до пересування нормальної кривої. При зміні параметра σ відбувається “деформування” графіка: зменшення σ приводить до збільшення максимуму $f(x)$, а збільшення σ – до зменшення висоти.

Якщо a = 0, $\sigma=1$, то такий нормальний розподіл називається стандартним нормальним розподілом, а його щільність $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

Для даного розподілу $M(X)=a$, $D(X)=\sigma^2$, $\sigma(X)=\sigma$.

Для стандартного нормального розподілу: $MX=0$, $DX=1$.

Для виведення числових характеристик застосовують інтеграл Пуассона: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}dt=\sqrt{2\pi}$.

Ймовірність того, що випадкова величина X, розподілена за законом $N(a,\ \sigma^2)$, набере значення з інтервалу $(\alpha;\ \beta)$, визначається рівністю:

$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-u^2/2}du$ – функція Лапласа.

В багатьох практичних задачах виникає необхідність у знаходженні ймовірності того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від MX по модулю менше від додатного числа ε, тобто $P(|X - a| < \varepsilon)$. Випадкова подія $|X - a| < \varepsilon$ означає, що $a - \varepsilon < X < a + \varepsilon$. Тому шукану ймовірність знайдемо за формулою $P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$.

Закон нормального розподілу - один з найпоширеніших законів. Це фундаментальний закон у теорії ймовірностей і в її застосуванні.

Нормальний розподіл найчастіше зустрічається у вивченні природних і соціально-економічних явищ. Інакше кажучи, більшість статистичних сукупностей у природі і суспільстві підпорядковується закону нормального розподілу. Відповідно можна сказати, що сукупності значної частини великих за обсягом вибірок підпорядковуються закону нормального розподілу. Ті із сукупностей, які відхиляються від нормального розподілу в результаті спеціальних перетворень, можуть бути наближені до нормального. У зв'язку з цим слід пам'ятати, що принципова особливість цього закону стосовно до інших законів розподілу полягає в тому, що він є законом границі, до якої наближаються інші закони розподілу в певних (типових) умовах (**Сума великої кількості вип. величин завжди має нормальний розподіл!**).

Суть даного закону полягає в тому, що при вимірювання деякої характеристики певної сукупності елементів завжди спостерігають відхилення в обидва боки від норми через велику кількість неконтрольованих причин, причому що більші ці відхилення, то рідше вони зустрічаються.

Наприклад, підприємство випускає стержні довжиною 1 м. Тобто в середньому довжина – 1 м, але внаслідок неконтрольованих випадкових причин трапляються відхилення від норми, деякі стержні чуть довші чи коротші, але більшість стержнів істотно не відрізняються від норми. Великі відхилення трапляються надто рідко.

Ще один приклад, якщо потрібно оцінити розумові здібності деякої групи людей, то відомо, що більшість людей має приблизно однакові розумові здібності, тобто середні, що є нормою. Люди геніальні, так само як і бездарні зустрічаються приблизно однаково рідко.

Питання для самоперевірки

1. Назвіть основні закони розподілу дискретних випадкових величин.
2. Дайте означення біномного закону розподілу.
3. Дайте означення розподілу Пуассона.
4. Дайте означення геометричного розподілу.
5. Назвіть основні закони розподілу дискретних випадкових величин.
6. Дайте означення рівномірного закону розподілу.
7. Дайте означення показникового розподілу.
8. Дайте означення нормального розподілу.

2.6. Випадкові вектори (багатовимірні випадкові величини) та їх числові характеристики

Раніше розглянуто розподіли окремих випадкових величин. Однак на практиці приходиться мати справу з випробуваннями, що несуть вплив кількох випадкових явищ, кількох випадкових величин. Так, при стрільбі з гармати ми спостерігаємо відхилення від цілі як по відстані, так і по напрямку. Ці дві випадкові величини разом узяті утворюють випадковий вектор. При обробці деталей на верстаті-автоматі компонентами випадкових векторів є відхилення, обумовлені порізно варіацією напруги в мережі, твердості заготовки і різця, порушення жорсткості кріплення деталі і т.д. При виплавці чавуну підраховано, що хід процесу виплавки залежить від 120 факторів; кожний з них не залишається постійним протягом часу і можна вважати, що ми маємо справу із 120-вимірною випадковою величиною. Ймовірність одержання тієї чи іншої оцінки на іспиті залежить від цілого ряду випадкових факторів – пропусків занять протягом семестру і під час сесії, а також від здоров'я, психологічного стану, так що тут теж маємо справу із випадковими векторами.

Випадковим вектором або багатовимірною випадковою величиною називається упорядкований набір випадкових величин, $(X, Y, ..., W)$.

Наочним є геометричне представлення випадкових векторів. Якщо розглядається двовимірна випадкова величина (X, Y), то результат випробування можна представити як точку з координатами (x_i, y_i), трьохвимірна випадкова величина (X, Y, Z) визначає точку (x_i, y_i, z_i) в тривимірному просторі. Якість плавки чавуну є точкою в 120-вимірному просторі випадкових величин.

Як і для однієї випадкової величини, перелічити тільки значення, що можуть виникнути в багатовимірних випадкових величин, недостатньо. Для завдання випадкових векторів використовується закон розподілу.

Закон розподілу випадкових векторів може бути заданим в різних формах, зокрема у вигляді таблиці розподілу, функції розподілу або щільності розподілу вектора.

Функцією розподілу n-вимірної випадкової величини називається функція $F(x, y,...)$ n змінних, яка дорівнює ймовірності того, що випадкові величини $X, Y,...$ одночасно будуть задовольняти нерівності $X < x$, $Y < y,\ldots$

$F(x, y,...) = P(X < x, Y < y,...)$.

За аналогією з функцією розподілу одновимірної випадкової величини слушні наступні властивості функції $F(x, y,...)$.

Для двовимірної випадкової величини властивості мають вигляд:

1. $0 \le F(x, y) \le 1$

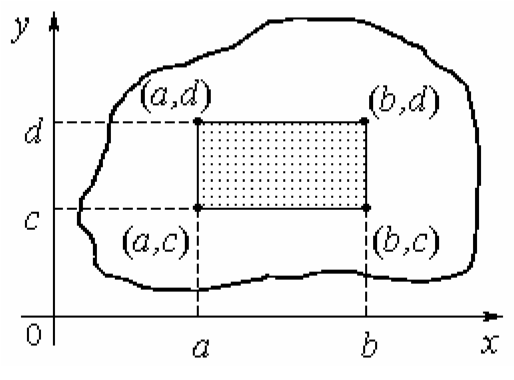
2. Функція розподілу $F(x, y)$ є неспадною функцією по кожному із своїх аргументів.

3. При прямуванні принаймні одного з аргументів до мінус нескінченності функція прямує до нуля, при прямуванні всіх аргументів одночасно до плюс нескінченності функція прямує до одиниці, тобто $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y)=0, \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y)=0, \lim\limits_{x,y\to-\infty} F(x,y)=0, \lim\limits_{x,y\to+\infty} F(x)=1.$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x,y)=F(y), \lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y)=F(x)$, де $F(x)$ - функція розподілу випадкової величини X, $F(y)$ - функція розподілу випадкової величини Y.

5. Ймовірність влучення точки випадкового вектора (X, Y) до довільного прямокутника зі сторонами, паралельними координатним осям, обчислюється за формулою

$P(a \le X < b, c \le Y < d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$.



Випадковий вектор називають дискретним, якщо кожна з його компонент є дискретною випадковою величиною.

Законом розподілу дискретного випадкового вектора називають відповідність між можливими значеннями випадкового вектора та їхніми ймовірностями.

Для дискретних випадкових величин зазвичай розподіл задають таблицею. Загальний вигляд таблиці розподілу для двовимірної випадкової величини наведений на рис. 1. При цьому $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$.

		X				
		x_1	x_2	…	x_m	Σ
Y	y_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{m1}	p_1^y
	y_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{m2}	p_2^y
	…	…	…	…	…	…
	y_n	p_{1n}	p_{2n}	…	p_{mn}	p_n^y
	Σ	p_1^x	p_2^x	…	p_m^x	

Рис. 1. Таблиця розподілу системи двох величин

Властивості таблиці розподілу випадкового вектора аналогічні властивостям ряду розподілу одновимірної випадкової величини, зокрема, має місце рівність $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Щільність розподілу неперервного багатовимірної випадкової величини визначається за аналогією зі щільністю розподілу одновимірної випадкової величини.

Якщо $f(x, y)$ - функція щільності для двовимірної випадкової величин (X, Y), то функцію розподілу можна подати у вигляді $F(x,y) = P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(t,u)\,du\,dt$.

Випадкові величини, що є компонентами випадкового вектора, називаються незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яких значень набули інші величини.

Дві випадкові величини X та Y називаються незалежними, якщо

$P\left(X < x, Y < y \right) = P\left(X < x \right) P\left(Y < y \right).$

Випадкові величини X, Y,..., W називаються незалежними в сукупності, якщо $F\left(x, y, ..., w\right) = P\left(X < x, Y < y, ..., W < w \right) = P\left(X < x \right) P\left(Y < y \right) ... P\left(W < w \right)$.

Необхідна і достатня умова незалежності випадкових величин: $F\left(x, y, ..., w\right) = F\left(x\right) F\left(y\right) ... F\left(w\right)$.

Числові характеристики багатовимірних випадкових величин

Для багатовимірних випадкових величин мають місце ті ж числові характеристики, що і для одновимірних. Математичні сподівання і дисперсії обчислюються за звичайними формулами через одновимірні закони розподілу випадкових величин. Зазначимо, що найважливішими характеристиками випадкових векторів є такі як центр розсіювання та коваріація.

Означення. Точка (MX, MY, ..., MW) називається центром розсіювання випадкового вектора (X, Y, ..., W).

Приклад 1. Двовимірна дискретна випадкова величина (X, Y) задана таблицею:

		X			
		1	**2**	**3**	**Σ**
Y	**1**	0,1	0,2	0,2	0,5
	2	0,2	0,2	0,1	0,5
	Σ	0,3	0,4	0,3	1

Знайти центр розсіювання випадкового вектора (X, Y) та числові характеристики компонент.

Розв'язання. Запишемо розподіл для X та Y окремо.

X	**1**	**2**	**3**
p	0,3	0,4	0,3

$M(X) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}3 = 2$

$M(X^2) = 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}4 + 3^2 \cdot 0{,}3 = 4{,}6$

$D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = 4{,}6 - 2^2 = 0{,}6$

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}77$

Y	**1**	**2**
p	0,5	0,5

$M(Y) = 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$

$M(Y^2) = 1^2 \cdot 0{,}5 + 2^2 \cdot 0{,}5\ 3 = 2{,}5$

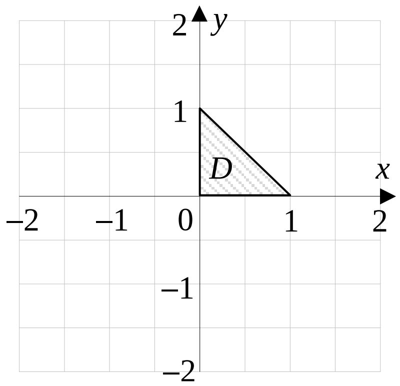
$D(Y) = M(Y^2) - M(Y)^2 = 2{,}5 - 1{,}5^2 = 0{,}25$

$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = 0{,}5$

Центром розсіювання випадкового вектора (X, Y) буде точка (2, 1,5).

Приклад 2. Неперервна двовимірна дискретна випадкова величина (X, Y) задана щільністю

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy, (x,y) \in D, \\ 0, (x,y) \notin D \end{cases}$$



Знайти центр розсіювання випадкового вектора (X, Y).

Розв'язання.

$$M(X) = \iint_D xf(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} x \cdot 24xydxdy = 24\int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} ydy = 24\int_0^1 x^2 \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= 12\int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = 12\int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)dx = 12\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{5}$$

$$M(Y) = \iint_D yf(x,y)dxdy = \frac{2}{5}$$

Центром розсіювання випадкового вектора (X, Y) буде точка $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

Означення. **Коваріацією (кореляційним моментом)** двох випадкових величин X та Y називають математичне сподівання добутку їхніх відхилень від відповідних математичних сподівань $cov(X, Y) = M((X - MX)(Y - MY))$.

Властивості коваріації

1) $cov(X, Y) = cov(Y, X)$;

2) $cov(X, X) = D(X)$;

3) Для довільних випадкових величин X та Y: $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2cov(X, Y)$;

4) $cov(X, Y) = M(X\,Y) - M(X)\,M(Y)$.

Означення. Коефіцієнтом кореляції випадкових величин X та Y називається відношення коваріації цих величин до добутку їхніх середніх квадратичних відхилень: $r(X,Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

Властивості коефіцієнта кореляції

1) $-1 \le r(X, Y) \le 1$;

2) Якщо X та Y — незалежні випадкові величини, то $r(X, Y) = 0$; у цьому випадку випадкові величини називають некорельованими;

3) Якщо X та Y — лінійно залежні випадкові величини, тобто $Y = aX + b$, де a і b — const, то $r(X, Y) = 1$ при $a > 0$ і $r(X, Y) = -1$ при $a < 0$.

Коефіцієнт кореляції служить для оцінки тісноти лінійного зв’язку випадкових величин X та Y: чим ближче модуль коефіцієнта до 1, тим зв’язок тісніший і чим ближче модуль коефіцієнта до 0, тим зв’язок слабший.

Приклад 3. Знайти коефіцієнт кореляції для випадкових величин заданих у Прикладі 1.

Розв’язання.

$cov(X, Y) = M(X\,Y) - M(X)\,M(Y)$

$M(X) = 2$, $M(Y) = 1{,}5$, $\sigma(X) = 0{,}77$, $\sigma(Y) = 0{,}5$

$M(X\,Y) = 1\cdot 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 1\cdot 0{,}2 + 3\cdot 1\cdot 0{,}2 + 1\cdot 2\cdot 0{,}2 + 2\cdot 2\cdot 0{,}2 + 3\cdot 2\cdot 0{,}1 = 2{,}9$

$cov(X, Y) = 2{,}9 - 2\cdot 1{,}5 = -0{,}1$

$$r(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{-0{,}1}{0{,}77\cdot 0{,}5} = -0{,}258\,.$$

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення випадкового вектора або багатовимірної випадкової величини.
2. Запишіть означення функції розподілу n-вимірної випадкової величини.
3. Запишіть властивості функції розподілу випадкового вектора.
4. Як задається закон розподілу дискретного випадкового вектора?
5. Як задається розподіл неперервного випадкового вектора?
6. Дайте означення незалежності двох випадкових величин.
7. Запишіть означення центра розсіювання випадкового вектора.
8. Дайте означення коваріації двох випадкових величин.
9. Дайте означення коефіцієнта кореляції двох випадкових величин.

2.7. Лінійна регресія

Компоненти багатовимірної випадкової величини можуть бути залежними або незалежними між собою. Розглянемо двовимірну випадкову величину (X, Y), компоненти якої X та Y - залежні випадкові величини. Тоді цю залежність можна подати у вигляді $Y = f(X)$, де f - відома функція зв'язку. Розглянемо випадок, коли функція f є лінійною, тобто $Y = aX + b$, де a і b – const.

Для характеристики лінійного зв'язку між величинами використовують коваріацію або коефіцієнт кореляції r. Якщо X та Y – лінійно залежні випадкові величини, то $|r(X, Y)| \approx 1$ і в такому випадку говорять, що вони корелюють. Якщо випадкові величини незалежні, тобто коли $r(X, Y) = 0$, то їх називають некорельованими.

Зауваження. Коефіцієнт r, що служить для оцінки тісноти лінійного зв'язку, ще називають коефіцієнтом Пірсона.

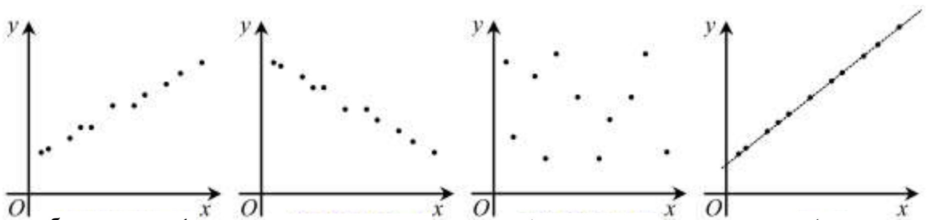


Рис. 1. Коефіцієнт r і залежність випадкових величин

У випадку функціональної залежності (коли $|r(X, Y)| = 1$) коефіцієнти лінійної функції легко знайти. Проте, строга функціональна залежність зустрічається рідко, бо обидві або одна випадкова величина може знаходиться під впливом випадкових факторів.

У випадку стохастичної залежності (коли $|r(X, Y)| \approx 1$) задача полягає в тому, щоб серед всіх можливих лінійних функцій знайти найкращу. Існує декілька методів відшукання коефіцієнтів лінійної функції.

Означення. Функцію $f(x) = ax + b$ називають «найкращим наближенням» Y в сенсі методу найменших квадратів, якщо математичне сподівання $M(Y - f(X))^2$

приймає найменше можливе значення; функцію $f(x)$ називають регресією Y на X.

Означення. Пряма $y = ax + b$ називається прямою регресії якщо коефіцієнти a та b підібрано так, що середнє квадратичне відхилення Y від $aX + b$ було мінімальним, тобто $M(Y - (aX + b))^2 \to \min$ або геометрично це означає, що $\sum_i d_i \to \min$.

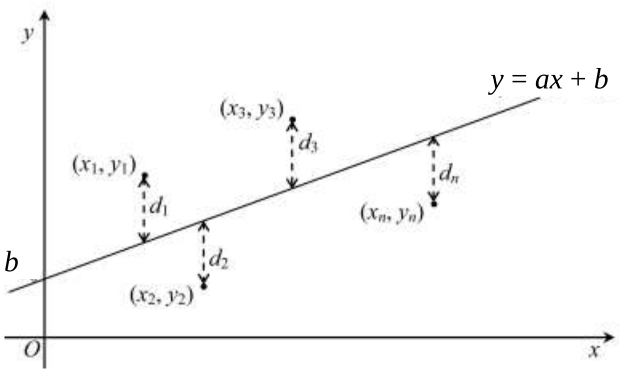


Рис. 2. Пряма регресії

Знайшовши коефіцієнти a та b, що задовольняють дану умову, ми знайдемо функцію $f(x) = ax + b$, яка називається функцією регресії, а графік функції регресії називають лінією регресії.

$$M(Y-(aX+b))^2 = M\left((Y-MY)-a(X-MX)+MY-aMX-b)\right)^2$$

$$= M(Y-MY)^2 - 2aM\left((X-MX)(Y-MY)\right) + a^2M(X-MX)^2 + \left(MY-aMX-b\right)^2$$

$$= D(Y) - 2a\operatorname{cov}\left(X,Y\right) + a^2D(X) + \left(MY-aMX-b\right)^2$$

$$= (r\sigma(Y) - a\sigma(X))^2 + (1-r^2)\sigma^2(Y) + \left(MY-aMX-b\right)^2$$

Звідси випливає, що умову $M(Y - (aX + b))^2 \to \min$ буде виконано, якщо $r\sigma(Y) - a\sigma(X) = 0$ та $MY - aMX - b = 0$. Звідки,

$$a = r\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)},\ b = MY - aMX.$$

Тоді рівняння прямої регресії має вигляд

$$y = r\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}x + MY - r\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\cdot MX \quad \text{або}$$

$$y = r\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\left(x - MX\right) + MY.$$

Іноді його записують у вигляді $y - MY = r\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\left(x - MX\right)$.

Аналогічно можна отримати пряму регресії X на Y:

$$x - MX = r\frac{\sigma(X)}{\sigma(Y)}\left(y - MY\right).$$

Зауваження. Обидві прямі регресії проходять через точку ($M(X)$, $M(Y)$) – центр розсіювання двовимірної величини.

Приклад. Двовимірна дискретна випадкова величина (X, Y) задана таблицею:

		X			
		1	**2**	**3**	**Σ**
Y	**1**	0,1	0,2	0,2	0,5
	2	0,2	0,2	0,1	0,5
	Σ	0,3	0,4	0,3	1

Знайти рівняння прямої регресії Y на X.

Розв'язання. Запишемо розподіл для X та Y окремо.

X	**1**	**2**	**3**
p	0,3	0,4	0,3

$M(X) = 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}4 + 3\cdot 0{,}3 = 2$

$M(X^2) = 1^2\cdot 0{,}3 + 2^2\cdot 0{,}4 + 3^2\cdot 0{,}3 = 4{,}6$

$D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = 4{,}6 - 2^2 = 0{,}6$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}77$$

Y	**1**	**2**
p	0,5	0,5

$M(Y) = 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$

$M(Y^2) = 1^2 \cdot 0{,}5 + 2^2 \cdot 0{,}5\ 3 = 2{,}5$

$D(Y) = M(Y^2) - M(Y)^2 = 2{,}5 - 1{,}5^2 = 0{,}25$

$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = 0{,}5$

$M(X\,Y) = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 1 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 1 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 2 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}1 = 2{,}9$

$cov(X, Y) = 2{,}9 - 2 \cdot 1{,}5 = -0{,}1$

$$r(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{-0{,}1}{0{,}77 \cdot 0{,}5} = -0{,}258.$$

$$y = -0{,}258 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}77}\left(x-2\right) + 1{,}5 = -0{,}17x + 1{,}84$$

Питання для самоперевірки

1. У чому полягає відмінність між функціональним і стохастичним зв’язком?

2. Що таке кореляційний зв'язок?

3. У чому полягає відмінність між прямим та оберненим зв’язком?

4. Дайте означення прямої регресії.

5. Запишіть рівняння прямої регресії *Y* на *X*.

6. Двовимірна дискретна випадкова величина (*X*, *Y*) задана таблицею:

		X			
		1	**2**	**3**	**Σ**
Y	**1**	0,3	0,2	0,1	0,6
	2	0,1	0,2	0,1	0,4
	Σ	0,4	0,4	0,2	1

Знайти рівняння прямої регресії *Y* на *X*.

2.8. Закон великих чисел. Центральна гранична теорема

Як вже відомо, не можна заздалегідь впевнено передбачити, яке з можливих значень прийме випадкова величина у результаті випробування; це залежить від багатьох випадкових причин, врахувати які неможливо. Здавалося б, оскільки про кожну випадкову величину ми маємо в цьому сенсі вельми скромні відомості, то навряд чи можна встановити закономірності поведінки і суми достатньо великого числа випадкових величин. Насправді це не так. Виявляється, що при певних порівняно широких умовах сумарна поведінка достатньо великого числа випадкових величин майже втрачає випадковий характер і стає закономірною.

Означення. Теореми, що з'ясовують умови, при яких середнє арифметичне багатьох випадкових величин практично перестає бути випадковим, носять загальну назву **законів великих чисел**.

Означення. Граничні теореми, що встановлюють граничні закони розподілу випадкових величин, об'єднують загальною назвою – центральна гранична теорема.

При доведенні різних граничних теорем, а також при розв'язанні різних задач важливу роль грає нерівність Чебишова, яка справедлива для дискретних та неперервних величин.

Нерівність Чебишова

Перша форма нерівності Чебишова

Для довільної випадкової величини *X*, яка приймає невід'ємні значення та має скінчене математичне сподівання виконується

$$P(X \geq 1) \leq M(X).$$

Якщо *X* – дискретна випадкова величина, то

$$P(X \geq 1) = \sum_i p(x_i) \leq \sum_i x_i p(x_i) = M(X)$$

Якщо *X* – неперервна випадкова величина, *f*(*x*) – щільність її імовірностей, то

$$P(X \geq 1) = \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \int_1^{\infty} x\, f(x)dx \leq \int_0^{\infty} x\, f(x)dx = M(X)$$

Наслідок. Якщо X приймає лише невід'ємні значення, $M(X) < \infty$, $\alpha > 0$, то

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{M(X)}{\alpha}$$

Дійсно,

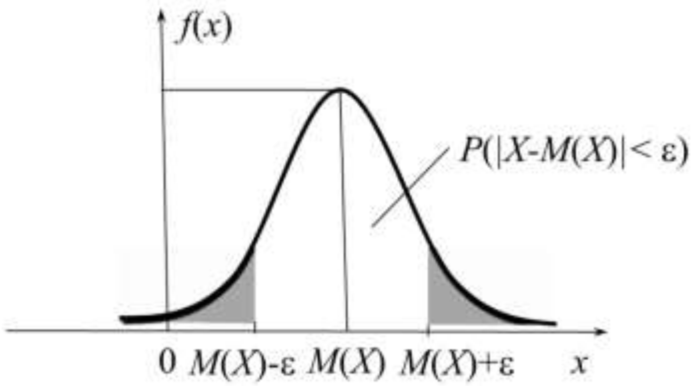
$$P(X \geq \alpha) = P\left(\frac{X}{\alpha} \geq 1\right) \leq M\left(\frac{X}{\alpha}\right) = \frac{M(X)}{\alpha}$$

Цю нерівність ще називають **нерівністю Маркова.**

Друга форма нерівності Чебишова

Якщо випадкова величина *X* має скінчені математичне сподівання та дисперсію, то для довільного $\varepsilon > 0$ має місце нерівність

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$



Нерівність Чебишова дає оцінку імовірності

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

а не її точне значення. Його треба шукати за інтегральною теоремою Лапласа.

$$P(|X - MX| < \varepsilon) = P(-\varepsilon < X - MX < \varepsilon) = P(MX - \varepsilon < X < MX + \varepsilon) =$$
$$= \Phi\left(\frac{(MX + \varepsilon) - MX}{\sigma_X}\right) - \Phi\left(\frac{(MX - \varepsilon) - MX}{\sigma_X}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_X}\right)$$

Приклад. Дисперсія випадкової величини X дорівнює 0.002. Оцініть імовірність того, що випадкова величина X відрізняється від її математичного сподівання $M(X)$ більше ніж на 0.1?

$$P(|X - M(X)| > 0.1) = ?$$

Розв'язок. За нерівністю Чебишова маємо

$$P(|X - M(X)| > 0.1) \leq \frac{D(X)}{0.1^2} = \frac{0.002}{0.01} = 0.2$$

Нерівності Чебишова дозволяють довести граничну теорему Чебишова, Бернуллі та інші важливі граничні теореми про стійкість середніх.

Означення. Послідовність випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ називається збіжною за ймовірністю до числа a, якщо для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - a| < \varepsilon\right) = 1 \text{ або } \quad X_n \xrightarrow{p} a, n \to \infty.$$

Теорема Чебишова. Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин, які задовольняють умовам $M(X_i) = a_i < \infty$ і $D(X_i) \leq c$, тоді

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1 \text{ або}$$

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \xrightarrow{p} 0, n \to \infty.$$

Зміст теореми Чебишова

Середнє арифметичне досить великого числа незалежних випадкових величин (дисперсії яких рівномірно обмежені) втрачає характер випадкової величини. Пояснюється це тим, що відхилення кожної з величин від своїх математичних сподівань можуть бути як позитивними, так і негативними, а в середньому арифметичному вони взаємно погашаються.

Наслідок. Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин з однаковим математичним сподіванням $M(X_i) = a$ і $D(X_i) \le c$, тоді $\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a \xrightarrow{p} 0, n \to \infty$.

Це твердження дає змогу обґрунтувати правило середнього арифметичного. Нехай потрібно виміряти деяку фізичну величину a. Здійснивши n незалежних вимірювань, ми отримаємо n значень цієї величини. Кожне значення є випадковою величиною, при цьому ми можемо вважати, що $M(X_i) = a$ (ця умова означає, що вимірювання позбавлені систематичних помилок. Якщо вважати, $D(X_i) \le c$ (це означає, що вимірювання проводяться з деякою гарантованою точністю). За цих умов при достатньо великому числі вимірювань з ймовірністю близькою до 1 середнє арифметичне результатів вимірювання буде мало відрізнятись від вимірюваної величини.

Теорема Бернуллі. Нехай m – число появ події A в n незалежних повторних випробуваннях, в кожному із *яких* імовірність появи події A стала і дорівнює p. Тоді $\frac{m}{n} \xrightarrow{p} p, n \to \infty$.

Центральні граничні теореми

Теорема Ляпунова. Якщо випадкова величина Y являє собою суму великої кількості взаємно незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ вплив кожної з яких на всю суму досить малий, то сума Y буде розподілена за законом, близьким до нормального:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} MX_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} DX_i}} < x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ або}$$

$$F\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} MX_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} DX_i}} \right) \to N(0,1), n \to \infty$$

Теорема Ліндеберга –Леві. Якщо X_1, $X_2,\ldots$, X_n – послідовність попарно незалежних однаково розподілених випадкових величин з однаковим математичним сподіванням $M(X_i) = a$ і дисперсіями $D(X_i) = \sigma^2$, то

$$F\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) \to N(0,1), n \to \infty$$

Наслідок. При $n \geq 30$ розподіл суми однаково розподілених випадкових величин мало відрізняється від нормального розподілу.

Питання для самоперевірки

1. Запишіть нерівність Чебишева.
2. Сформулюйте Теорему Чебишева (закон великих чисел).
3. В чому полягає зміст теореми Чебишова?
4. Сформулюйте Теорему Бернуллі.
5. Сформулюйте Центральну граничну теорему Теорему Ляпунова.

РОЗДІЛ 3. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

3.1. Вибірка та її основні характеристики

Термін «статистика» (лат. «status» - положення, стан явищ, сума знань про державу) використовують у кількох значеннях:

1) практична діяльність статистичних установ, які збирають, обробляють і аналізують дані про різні явища і процеси суспільного життя;

2) статистичні дані які характеризують масові суспільні явища;

3) це наука, яка має свій предмет і метод дослідження.

Статистика — самостійна суспільна наука, яка вивчає кількісний бік масових суспільних явищ у неперервному зв'язку з їх якісною стороною.

Основними джерелами інформації статистики є: 1) переписи населення; 2) статистична звітність; 3) одноразові або періодичні вибіркові обстеження.

У статистиці широко використовуються математичні методи, зокрема – методи математичної статистики. *Математична статистика* — це галузь математичних знань, яка розробляє раціональні прийоми (способи) систематизації, обробки і аналізу даних статистичних спостережень масових явищ з метою встановлення характерних для них статистичних закономірностей, використання для наукових і практичних висновків. Більшість методів обробки статистичних даних ґрунтується на імовірнісній природі цих даних.

Предметом математичної статистики є вивчення випадкових величин (або випадкових подій, процесів) за результатами спостережень, дослідів, повторних випробувань.

Завдання математичної статистики полягає у створенні методів збору та обробки статистичних даних для отримання практичних висновків.

Статистика оперує певними **категоріями** (поняттями), які ми розглянемо.

Сукупність – це множина одиниць, (об’єктів, явищ), об’єднаних єдиною закономірністю і таких, що варіюють (є відмінними) у межах загальної якості.

Одиниці сукупності – це ті її неподільні первинні елементи, що відображають її якісну однорідність, тобто є носіями ознак.

Ознака – це властивість, характерна риса об’єкта або явища. Кожний елемент сукупності характеризується багатьма ознаками, значення яких змінюється від елемента до елемента або від одного періоду до іншого. Ознака, яка набуває в межах сукупності різних значень називається варіюючою (змінною), а відмінність коливання ознаки – варіацією.

Ознаки поділяються на:

1) якісні (атрибутивні) – які не мають числового відображення і є смисловими поняттями категоріями (стать, професія, освіта);

2) кількісні – окремі значення яких виражаються числами (вік, стаж роботи).

За характером варіації кількісні ознаки поділяються на *дискретні* – такі які мають точне (ізольоване) значення та *неперервні* – ознаки, які мають будь-які значення в певних межах варіації.

Уся сукупність, що досліджується, називається **генеральною сукупністю**.

Генеральну сукупність можна вивчати шляхом суцільного вивчення всіх об’єктів або шляхом спостереження лише за частиною таких об’єктів.

Іноді проводять суцільне обстеження, тобто обстежують кожний з об’єктів сукупності щодо ознаки, якою цікавляться. На практиці, однак, суцільне обстеження застосовують порівняно рідко. Наприклад, якщо сукупність містить дуже велику кількість об’єктів, то провести суцільне обстеження фізично неможливо. Якщо обстеження об’єкта пов’язано з його знищенням або вимагає великих матеріальних витрат, то проводити суцільне обстеження практично не має сенсу. У таких випадках випадково відбирають із усієї сукупності обмежену кількість об’єктів і піддають їх дослідженню.

Частина об’єктів, які відбирають за певними правилами з генеральної сукупності, називається **вибіркою**, або **вибірковою сукупністю**. Залежно від правил відбору вибірка може бути випадковою, якщо з генеральної сукупності будь-який елемент можна брати навмання і кожен з них може потрапити до неї з однаковою імовірністю. Відбір об’єктів може бути повторним або безповторним. Повторним називається відбір, коли відібраний об’єкт повертають у генеральну сукупність до відбору наступного об’єкта. Безповторним називається відбір, коли відібраний об’єкт не повертають до генеральної сукупності. На практиці застосовуються такі види, схеми та способи відбору.

Види відбору одиниць з генеральної сукупності

1. Індивідуальний - коли за один прийом відбирається одна одиниця.
2. Груповий - коли за один прийом відбираються декілька одиниць, тобто партія або серія.
3. Комбінований - передбачає поєднання двох попередніх видів відбору.

Схеми відбору

1. Безповторний - при якому кожна відібрана одиниця не повертається до генеральної сукупності, тобто не може двічі потрапити до вибірки.
2. Повторний - при якому одна і та ж одиниця сукупності може потрапити до вибірки декілька разів.

Способи відбору одиниць (найбільш поширені)

1. *Власне випадковий* - коли спостереженням охоплюється частина сукупності, відібрана у випадковому порядку. При цьому для кожної одиниці заготовлюють жетон або білет з порядковим номером, а потім у випадковому порядку відбирають необхідну кількість жетонів. Може бути повторним і безповторним.
2. *Механічний* - коли вся генеральна сукупність розбивається на рівні за обсягом частини або групи за випадковою ознакою, що є нейтральною до досліджуваної. При цьому розмір інтервалу у генеральній сукупності дорівнює оберненій величині відносного обсягу вибірки (напр., обсяг вибірки дорівнює 2 %). Тому для визначення середньої помилки механічної вибірки використовують такі ж самі формули, як при власне випадковому відборі. Механічний відбір може бути тільки безповторним.
3. *Типовий* - застосовується тоді, коли сукупність є неоднорідною за досліджуваною ознакою. Спочатку виконують групування досліджуваної

сукупності на однорідні типові групи за суттєвою ознакою, від якої залежить досліджуваний показник. Потім з кожної групи власно-випадковим або механічним способом відбирають кількість одиниць, пропорційну питомій вазі кожної групи генеральної сукупності.

4. *Серійний* - коли відбору підлягають не окремі сукупності, а їхні серії, групи або гнізда, відібрані власне випадковим або механічним способом. Може бути безповторним і повторним.

Для того щоб за даними вибірки можна було упевнено робити висновки про ознаку генеральної сукупності, що нас цікавить, необхідно, щоб об'єкти вибірки правильно її представляли. Інакше кажучи, вибірка повинна правильно представляти пропорції генеральної сукупності. Цю вимогу коротко формулюють так: вибірка має бути репрезентативною (представницькою).

Тобто, якщо випадкова вибірка достатньо повно характеризує генеральну сукупність, то така вибірка називається репрезентативною.

У математичній статистиці нас цікавитимуть не самі об'єкти, а лише деяка їх характеристика (ознака) *X*, тому часто під **генеральною сукупністю** розуміють множину всіх можливих значень досліджуваної ознаки.

Нехай в результаті *n* незалежних експериментів отримали *n* значень ознаки *X:* $x_1, x_2, ..., x_n$. Дану послідовність називають **вибіркою** з генеральної сукупності ознаки *X*, а число вибіркових значень *n* називають **об'ємом** вибірки. Припустимо, що у вибірці є *k* різних значень; значення x_1 спостерігається n_1 разів, x_2- n_2 разів, …, x_k - n_k разів. Очевидно, що $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Послідовність з елементів вибірки розташованих у порядку зростання x_{i_1}, x_{i_2},…, x_{i_k} називають **варіаційним рядом**, члени послідовності – **варіантами**. Варіаційний ряд є початковою формою дослідження статистичних даних.

Варіаційний ряд називають **дискретним,** якщо довільні його варіанти відрізняються на сталу величину, і **неперервним (інтервальним)**, якщо варіанти можуть відрізнятися на як завгодно малу величину.

Статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант і відповідних їм частот (відносних частот). Статистичний розподіл вибірки у випадку дискретного варіаційного ряду зручно подавати у вигляді таблиці:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

де x_i - варіанти, а n_i - частоти; або

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
w_i	w_1	w_2	...	w_k

де x_i - варіанти, а w_i - відносні частоти варіант, тобто $w_i = \dfrac{n_i}{n}$, причому $\sum_{i=1}^{k} w_i = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{n_i}{n} = 1$.

Якщо варіанти вибірки можуть відрізнятись одна від одної на як завгодно малу величину, тобто ознака набуває довільних значень у деякому інтервалі, або коли вибірка містить досить багато варіант, то на практиці в таких випадках дані групують. Для цього вибірку розбивають на інтервали і подають у вигляді інтервальної таблиці частот:

I	$(c_1, c_2]$	$(c_2, c_3]$	$\dots$	$(c_{k-1}, c_k]$
n_i	n_1	n_2	...	n_k

де I = (c_i, c_{i+1}) - інтервали, n_i - кількість вибіркових значень, які попали в інтервал (c_i, c_{i+1}).

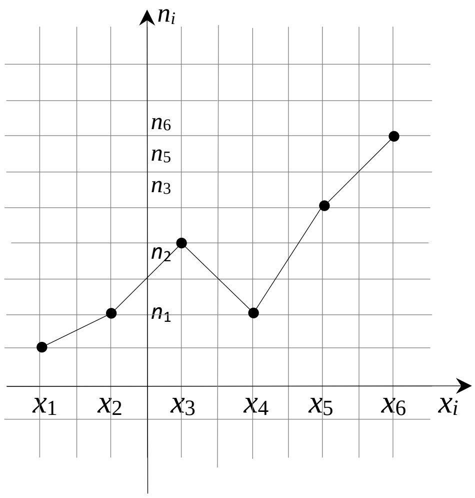
Як правило інтервали беруть однакової довжини $h = c_{i+1} - c_i$, величину h називають кроком таблиці. Для визначення оптимального інтервалу розбиття користуються формулою $h = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}322 \ln n}$, де $x_{\max}$ та $x_{\min}$ - відповідно максимальна й мінімальна варіанти. Якщо h – дробове число, то за крок таблиці беруть найближче ціле число або найближчий простий дріб. За початок першого інтервалу беруть величину $c_1 = x_{\min} - \dfrac{h}{2}$.

Розглядають також інтервальну таблицю відносних частот. Інтервальні таблиці частот та відносних частот зображають статистичний розподіл неперервної ознаки.

Графічне зображення розподілу вибірки

Для графічного зображення статистичних рядів найчастіше використовують полігон та гістограму.

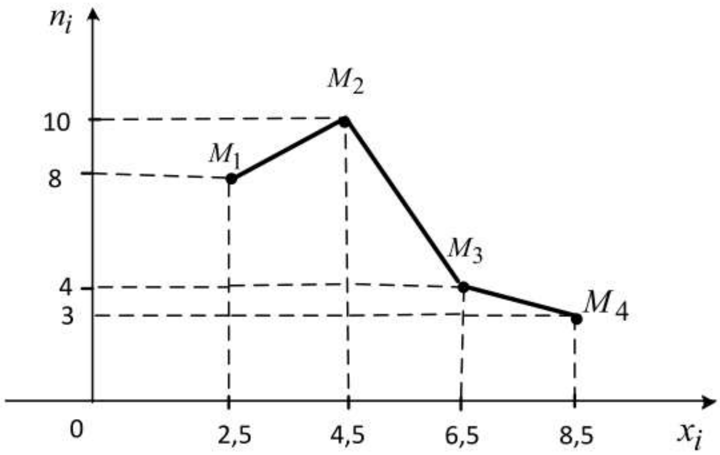
Полігон, як правило, використовують для зображення дискретного статистичного ряду, він являє собою ламану, для якої кінці відрізків мають координати (x_i, n_i).



Приклад 1. Побудувати полігон частот, полігон відносних частот за даним розподілом вибірки.

x_i	2,5	4,5	6,5	8,5
n_i	8	10	4	3

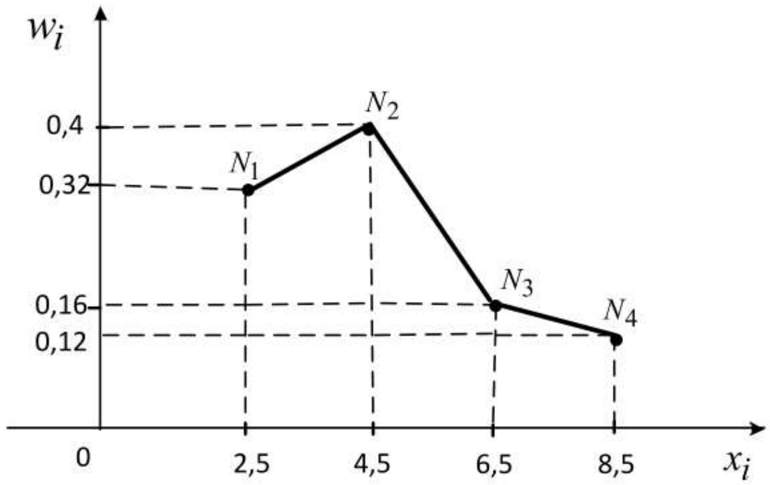
Розв'язання. Відкладаємо в системі координат точки $M_1(2,5;\ 8)$, $M_2(4,5;\ 10)$, $M_3(6,5;\ 4)$, $M_4(8,5;\ 3)$ та з'єднуємо їх відрізками прямих. Отримаємо полігон частот цієї вибірки.



Для побудови полігона відносних частот складаємо дискретний варіаційний ряд розподілу відносних частот.

x_i	2,5	4,5	6,5	8,5
w_i	0,32	0,4	0,16	0,12

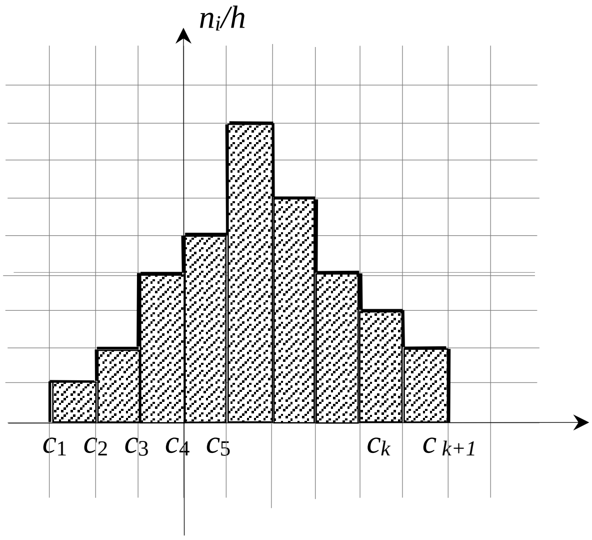
Відкладаємо в системі координат точки N_1(2,5; 0.32), N_2(4,5; 0.4), N_3(6,5; 0.16), N_4(8,5; 0.12) та з'єднуємо їх відрізками прямих. Отримаємо полігон відносних частот вибірки.



Для ілюстрації зображення неперервних статистичних рядів будують діаграми, які називають **гістограмами.**

Гістограму використовують для зображення лише неперервних статистичних рядів (вона являє собою ступінчасту фігуру із прямокутників з основами, що дорівнюють значенням ознаки $k_i = c_{i+1} - c_i$, та висотами, що дорівнюють частотам (відносним частотам), n_i (w_i) інтервалів). Якщо з’єднати середини верхніх сторін відрізками, то отримаємо полігон того ж самого розподілу.

Досить часто у практичних задачах, особливо якщо інтервали мають неоднакову довжину, то натомість будують гістограму з висотами $\frac{n_i}{h}$, або $\frac{w_i}{h}$ відповідно.



Зауваження. Вигляд гістограми відносних частот дає уявлення про щільність розподілу ймовірностей випадкової величини, яку досліджують. Гістограма відносних частот – це наближений графік щільності ймовірностей випадкової величини.

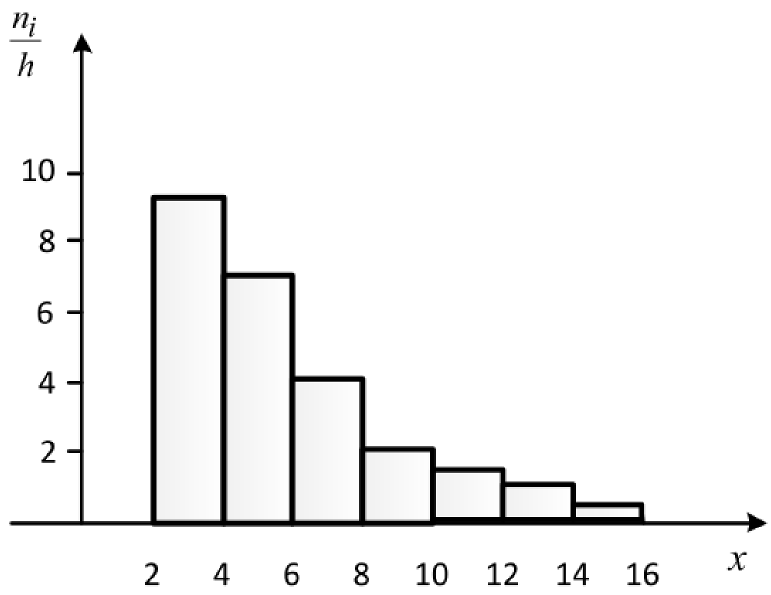
Якщо потрібно здійснити аналіз якісної ознаки вибірки (наприклад колір), то ряд називається атрибутивним. В цьому випадку для графічного представлення використовують стовпчикові та секторні діаграми. Хоча іноді ці ж діаграми використовують і для графічного представлення й кількісних ознак.

Приклад 2. За даним розподілом вибірки побудувати гістограми частот і відносних частот.

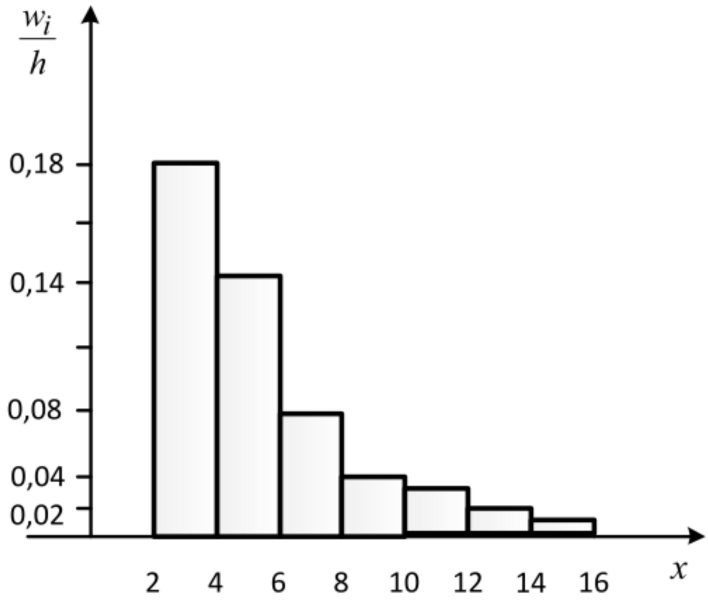
I	(2, 4]	(4, 6]	(6, 8]	(8, 10]	(10, 12]	(12, 14]	(14, 16]
n_i	18	14	8	4	3	2	1

Розв'язання. Довжина кожного часткового інтервалу дорівнює $h_i = x_{i+1} - x_i = 2$. Для кожного інтервалу обчислимо значення щільності частот $\frac{n_i}{h}$ та щільності відносних частот $\frac{w_i}{h}$. Отримаємо таблицю:

I	(2, 4]	(4, 6]	(6, 8]	(8, 10]	(10, 12]	(12, 14]	(14, 16]
n_i	18	14	8	4	3	2	1
$\frac{n_i}{h}$	9	7	4	2	1,5	1	0,5
w_i	0,36	0,28	0,16	0,08	0,06	0,04	0,02
$\frac{w_i}{h}$	0,18	0,14	0,08	0,04	0,03	0,02	0,01



Гістограма частот



Гістограма відносних частот

Числові характеристики вибіркової сукупності

Розглянутий варіаційний ряд дає вичерпну характеристику статистичних даних. Проте іноді цього не достатньо і потрібно знати ще деякі характеристики даного варіаційного ряду. Числа, які є кількісним виразом таких ознак, називаються числовими характеристиками вибірки.

До основних числових характеристик вибірки належать вибіркове середнє, вибіркова дисперсія та вибіркове середнє квадратичне відхилення. Ці числові характеристики ознаки *X* для вибірки є аналогами відповідно математичного сподівання, дисперсії та середнього квадратичного відхилення випадкової величини *X*.

Вибірковим середнім називається середнє арифметичне вибіркових значень: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

Вибіркове середнє для дискретного статистичного ряду знаходиться за формулою:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}, \text{ де } \sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

Вибіркове середнє для інтервального статистичного ряду знаходиться за формулою: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{s} z_i n_i}{n}$, де z_i - середина i-того інтервалу, $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$.

Вибірковою дисперсією називається середнє арифметичне квадратів відхилень вибіркових значень від вибіркового середнього: $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}$.

При обчисленні вибіркової дисперсії часто користуються формулою: $\sigma^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$.

Величина $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ називається **вибірковим середнім квадратичним відхиленням**.

Медіаною статистичного розподілу називають варіанту, яка ділить варіаційний ряд пополам, позначають Ме$_в$.

Для дискретних статистичних рядів: Ме$_в$ = $\begin{cases} x_m, & n = 2m-1 \\ \frac{x_m + x_{m+1}}{2}, & n = 2m \end{cases}$

Для інтервальних статистичних рядів: Ме$_в$ = $x_i + h_i \frac{\frac{n}{2} - \sum_{j=1}^{i-1} n_j}{n_i}$, де x_i - початок медіанного інтервалу, тобто такому, якому відповідає перша з нагромаджених частот, що перевищує половину всіх спостережень, h_i - довжина i-того інтервалу, n_i - частота медіанного інтервалу.

Модою статистичного розподілу називають варіанту, яка має найбільшу частоту, позначають Мо$_в$.

Для дискретних статистичних рядів: Мо$_в$ = x_j, якщо $n_j = \max_i n_i$.

Для інтервальних статистичних рядів: Мо$_в$ = $x_i + h_i \dfrac{n_i - n_{i-1}}{2n_i - n_{i-1} - n_{i+1}}$, де x_i - початок інтервалу з найбільшою частотою, n_i - частота i-того інтервалу.

Варіаційний розмах – різниця між крайніми (найбільшою і найменшою) варіантами: $R = x_{\max} - x_{\min}$.

Коефіцієнтом варіації називають величину $V = \dfrac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100\%$.

Приклад 3. Задано вибірку

73, 70, 68, 73, 70, 74, 65, 73, 71, 66, 69, 78, 70, 67, 67, 67, 76, 71, 72, 68, яка характеризує квартальний прибуток підприємства, у грошових одиницях.

Скласти дискретний варіаційний ряд розподілу частот.

Обчислити числові характеристики вибірки.

Розв'язання. Складаємо дискретний варіаційний ряд розподілу частот:

x_i	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	76	78
n_i	1	1	3	2	1	3	2	1	3	1	1	1

Об'єм вибірки n = 20, тоді

$$\overline{x} = \frac{1}{20} \cdot (65 \cdot 1 + 66 \cdot 1 + 67 \cdot 3 + 68 \cdot 2 + 69 \cdot 1 + 70 \cdot 3 + 71 \cdot 2 + 72 \cdot 1 +$$
$$+ 73 \cdot 3 + 74 \cdot 1 + 76 \cdot 1 + 78 \cdot 1) = 70{,}4.$$

$\sigma^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 =$

$$= \frac{1}{20} \cdot (65^2 \cdot 1 + 66^2 \cdot 1 + 67^2 \cdot 3 + 68^2 \cdot 2 + 69^2 \cdot 1 + 70^2 \cdot 3 + 71^2 \cdot 2 +$$

$$+ 72^2 \cdot 1 + 73^2 \cdot 3 + 74^2 \cdot 1 + 76^2 \cdot 1 + 78^2 \cdot 1) - (70{,}4)^2 = 11{,}14$$

$$\sigma_в = \sqrt{11{,}14} \approx 3{,}338.$$

Мо$_в$ = 67, 70, 73

Ме$_в$ $= \frac{1}{2}(x_{10} + x_{11}) = \frac{1}{2}(70 + 70) = 70$

Коефіцієнт варіації $V = \frac{3,338}{70,4} \cdot 100\% \approx 4,741\%$

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення статистичного розподілу вибірки.
2. Що таке варіаційний ряд та варіанта?
3. Дайте визначення частоти та відносної частоти.
4. Що таке полігон?
5. Що називається гістограмою вибірки?
6. Дайте визначення вибіркового середнього та дисперсії.
7. Дайте визначення моди та медіани
8. Знайдіть вибіркове середнє, середньоквадратичне відхилення, моду, медіану та коефіцієнт кореляції для вибірки: 10, 12, 14, 17, 14, 16, 13, 15, 12, 14.

3.2. Статистичні оцінки параметрів розподілу

Числові характеристики, що описують генеральну сукупність називають **параметрами**, які зазвичай невідомі. Тому на практиці доводиться знаходити їх наближені значення – оцінки, які обчислюються на основі вибіркових даних.

Означення. Наближене значення будь-якого параметра статистичної вибірки називається оцінкою параметра.

У практиці вибіркових спостережень використовують два типи вибіркових оцінок – точкові та інтервальні.

Точкова оцінка – це оцінка невідомого параметра одним числом за даними вибірки, тобто наближеним значенням. Але, оскільки, наближене значення може значно відрізнятись від оцінюваного параметра, то точкові оцінки не завжди дають бажаний результат. Крім цього, неможливо оцінити похибку. Тому іноді доцільніше використовувати інтервальні оцінки.

Під ***інтервальною оцінкою*** невідомого параметра розуміють оцінку цього параметра двома числами – кінцями інтервалу, який із заданою ймовірністю (близькою до 1) містить невідомий параметр.

Варто враховувати, що будь-яка кількісна характеристика, обчислена на основі обмеженої вибірки, містить елемент випадковості і змінюється від вибірки до вибірки, тобто використання наближеного значення параметра замість точного значення призводить до похибок.

Оскільки для кожного параметра існує безліч оцінок, то серед усіх оцінок потрібно вибрати найкращі, щоб похибки були мінімальні.

Саме тому до числових характеристик вибірки висуваються певні вимоги: незміщеність, ефективність і обґрунтованість (консистентність).

Незміщеною оцінкою називають оцінку, математичне сподівання якої дорівнює оцінюваному параметру за будь-якого об’єму вибірки. Це гарантує відсутність систематичних помилок у більшу або меншу сторону.

Зміщеною оцінкою називають оцінку, математичне сподівання якої не дорівнює оцінюваному параметру.

Ефективна оцінка – це така оцінка, що за конкретного об'єму вибірки має найменшу можливу дисперсію. Цим виключається можливість припуститися більшої помилки.

Обґрунтована (консистентна) оцінка – це така оцінка, яка при необмеженому зростанні об'єму вибірки $n \to \infty$ прямує за ймовірністю до оцінюваного параметра. Якщо дисперсія незміщеної оцінки при $n \to \infty$ прямує до нуля, то така оцінка є обґрунтованою.

Для того, щоб оцінити параметри розподілу використовуються різні методи, зокрема метод моментів, запропонований К. Пірсоном, і метод найбільшої вірогідності, розроблений Р. Фішером. Метод моментів полягає в прирівнюванні початкових або центральних моментів (математичного сподівання, дисперсії тощо) теоретичного розподілу, що є функціями параметрів розподілу, до відповідних моментів, обчислених по вибірці, і розв'язання одного або декількох рівнянь щодо параметрів розподілу.

Доведено, що, вибіркове середнє $\overline{x}$ є незміщеною та консистентною оцінкою середнього генеральної сукупності. Аналогічно, величина $\frac{n}{n-1}\sigma_{в}^{2}$ є незміщеною та консистентною оцінкою дисперсії генеральної сукупності.

Інтервальне оцінювання часто називають надійним оцінюванням, а відповідний інтервал надійним (або довірчим).

Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ - вибірка з генеральної сукупності ознаки *X,* для якої потрібно оцінити параметр θ.

Означення. Інтервал (a, b) називають **надійним**, якщо $P(a < \theta < b) = \beta$, де a та b – числа, обчислені за певними правилами на основі вибіркових даних, а ймовірність β вибирають заздалегідь, причому її беруть близькою до 1, як правило, найчастіше β = 0.9; 0.95; 0.99, при цьому β називають довірчою ймовірністю або рівнем надійності.

З центральної граничної теореми при досить великих n маємо

$$F\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) \to N(0,1), n \to \infty \text{ або}$$

$$P\left(\left|\overline{x} - a\right| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t\right) \approx 2\Phi(t),\ \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ – функція Лапласа.}$$

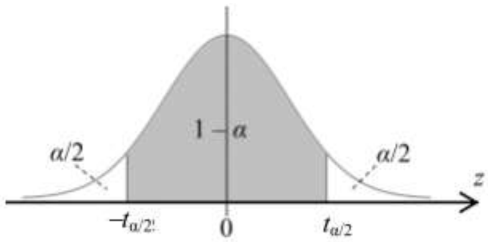
При заданому рівні надійності β значення t знаходиться з рівності $\Phi(t) = \frac{\beta}{2}$.

Отже, для середнього значення надійний інтервал має вигляд:

$$\left(\overline{x} - \frac{t\sigma_{ген}}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + \frac{t\sigma_{ген}}{\sqrt{n}}\right),$$

де t шукають з допомогою таблиці функції Лапласа.

β	0.8	0.85	0.90	0.95	0.975	0.98	0.99
α = 1 - β	0.2	0.15	0.1	0.05	0.025	0.02	0.01
$t_{\alpha/2}$	1.282	1.44	1.645	1.96	2.241	2.326	2.576



Величина $t_{\alpha/2}$ називається критичним значенням, а величина $\frac{\sigma_{ген}}{\sqrt{n}}t$ - граничною похибкою.

Якщо дисперсія генеральної сукупності є невідомою, її заміняють незміщеною оцінкою, $\frac{n}{n-1}\sigma_в^2$: $\left(\overline{x} - \frac{t\sigma_в}{\sqrt{n-1}},\ \overline{x} + \frac{t\sigma_в}{\sqrt{n-1}}\right)$.

Даний довірчий інтервал заслуговує довіри тоді, коли $n \geq 30$ для ознаки з довільним розподілом; якщо ж випадкова величина має нормальний розподіл, то довірчий інтервал застосовують для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Для того, що побудувати довірчий інтервал у випадку $n < 30$ додатково потрібно вимагати щоб ознака X мала нормальний розподіл. При цьому, величина t шукається за таблицею розподілу Стьюдента. Якщо $n \geq 30$, то розподіл Стьюдента практично не відрізняється від нормального розподілу.

Довжина надійного інтервалу тісно пов'язана із n (об'ємом вибірки) та β (довірчою ймовірністю). Зокрема, чим більшою є кількість спостережень, тим вужчим є інтервал. Тобто велика вибірка дає кращу оцінку. І чим більшою є ймовірність β, тим ширшим є інтервал. Тобто ширші інтервали містять невідомий параметр з більшою ймовірністю, вони більш надійні.

Приклад. Знайти надійний інтервал для оцінки математичного сподівання a нормального розподілу з надійністю $\beta = 0.95$, якщо $n = 101$, $\bar{x} = 75.13$ і $\sigma_в = 10$.

Розв'язання. По таблиці для $\beta = 0.95$ маємо $t = 1.96$.

Гранична похибка $\frac{\sigma_в}{\sqrt{n-1}} t = \frac{10}{\sqrt{101-1}} \cdot 1.96 = 1.96$.

Тоді надійний інтервал матиме вигляд

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma_в}{\sqrt{n-1}} t,\ \bar{x} + \frac{\sigma_в}{\sqrt{n-1}} t\right) = (75.13 - 1.96,\ 75.13 + 1.96) \text{ або } (73.17,\ 77.09).$$

Питання для самоперевірки

1. В чому полягає суть оцінювання невідомих параметрів генеральної сукупності?
2. Дайте визначення точкової оцінки. Які умови вона повинна задовольняти?
3. Що розуміють під інтервальною оцінкою невідомого параметра?
4. У деякій великій компанії було проведено вибіркове спостереження для оцінки середньої заробітної плати працівників. Дані 12 (у тис. грн.) опитаних є наступними:

2,2	2,5	3,4	5,1	2,8	4,3
2,9	3,2	3,3	4,5	5,0	4,1

Знайти надійний інтервал для середньої заробітної плати працівників компанії з ймовірністю 0,95.

3.3. Перевірка статистичних гіпотез. Критерії згоди

Статистична гіпотеза – це певне припущення щодо властивостей генеральної сукупності, яке можна перевірити, спираючись на результати вибіркового спостереження. Суть перевірки гіпотез полягає в тому, щоб визначити, узгоджуються чи ні результати вибірки з гіпотезою, випадковими чи невипадковими є розбіжності між гіпотезою і даними вибірки.

Найчастіше гіпотеза, яку належить перевірити, формулюється як відсутність розбіжності (нульова розбіжність) між невідомим параметром генеральної сукупності θ і заданою величиною θ_0, а тому її позначають H_0. Зміст гіпотези записують після двокрапки, наприклад H_0: $\theta = \theta_0$.

Кожній нульовій гіпотезі протиставляють альтернативну H_a. При формулюванні H_a враховується вагомість відхилень $(\theta - \theta_0)$: для додатних відхилень H_a: $\theta > \theta_0$, для від'ємних — H_a: $\theta < \theta_0$, для тих і інших – H_a: $\theta \neq \theta_0$.

Наприклад, гіпотези щодо математичного сподівання нормально розподіленої випадкової величини мають вигляд H_0: $a = 10$ та H_a: $a \neq 10$.

Якщо вибіркові дані суперечать гіпотезі H_0, вона відхиляється, коли ці дані узгоджуються з гіпотезею H_0, вона приймається (не відхиляється).

Правило, за яким гіпотеза H_0 відхиляється або не відхиляється (приймається), називається ***статистичним критерієм***.

Висунута гіпотеза може бути правильною або неправильною, тому виникає необхідність перевірити її. При перевірці гіпотези за одним з критеріїв (або відхиляється, або не *відхиляється) можливі* два помилкових рішення*:*

1) неправильне відхилення нульової гіпотези (помилка або ризик 1-го роду);

2) неправильне прийняття нульової гіпотези (помилка або ризик 2-го роду).

Ці ризики конкуруючі, і зменшення ймовірності α одного зумовлює збільшення ймовірності β іншого.

Означення. Імовірність припуститися помилки першого роду прийнято позначати через α; її називають **рівнем значущості** (істотності).

Правильна гіпотеза	Прийнята гіпотеза	
	H_0	H_a
H_0	$1-\alpha$	α
H_a	β	$1-\beta$

Здебільшого приймають рівні значущості такі: 0,1; 0,05; 0,01 або 0,001. Оскільки уникнути ризиків неможливо, а наслідки їх, як правило, різноватомі, то в кожному конкретному дослідженні прагнуть мінімізувати той ризик, який пов'язаний з більшими втратами.

Наприклад, якщо відкинуто правильне рішення «продовжувати будівництво моста через річку», то ця помилка першого роду заподіє матеріальну шкоду; якщо ж прийнято неправильне рішення «продовжувати будівництво» незважаючи на небезпеку обвалу моста, то ця помилка другого роду може спричинити загибель людей та техніки. Можна навести приклади, коли помилка першого роду призводить до більш важких наслідків порівняно з помилкою другого роду.

Для перевірки нульової гіпотези використовують спеціально підібрану числову характеристику, яку обчислюють на основі вибірки і на підставі якої вирішують: прийняти основну гіпотезу чи альтернативну. Зрозуміло, що вибрана числова характеристика для різних вибірок матиме, загалом кажучи, різні значення, і тому вона є випадковою величиною, точний або наближений розподіл якої відомий. Цю величину позначають через Z, якщо вона розподілена нормально, F – за законом Фішера-Снедекора, T – за законом Стьюдента, χ^2 – згідно з законом «хі–квадрат» тощо. В загальному випадку позначимо цю величину через K.

Після вибору певного критерію, множину всіх його можливих значень розбивають на дві непересічні підмножини: одна з них містить значення критерію, за яких нульова гіпотеза відкидається, а інша – за яких вона приймається.

Критичною областю називають сукупність значень критерію, за яких нульову гіпотезу відкидають.

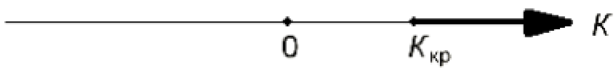
Областю прийняття гіпотези (областю припустимих значень) називають сукупність значень критерію, за яких гіпотезу приймають.

Головний принцип перевірки статистичних гіпотез можна сформулювати так: якщо спостережуване значення критерію (розраховане на основі вибірки) належить критичній області – гіпотезу відкидають, якщо спостережуване значення критерію належить області прийняття гіпотези – гіпотезу приймають.

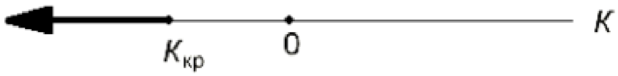
Оскільки критерій K – одномірна випадкова величина, усі її можливі значення належать до деякого інтервалу. Отже, критична область і область прийняття гіпотези також є інтервалами, тому існують точки, які їх розділяють.

Критичними точками $k_{кр}$ називають точки, що відокремлюють критичну область від області прийняття гіпотези. Розрізняють однобічну (права однобічна або ліва однобічна) та двобічну критичні області.

Правою однобічною називають критичну область, яка визначається нерівністю $K > k_{кр}$, де $k_{кр}$ – додатне число.



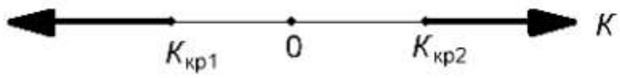
Лівобічною називають критичну область, яка визначається нерівністю $K < k_{кр}$, де $k_{кр}$ – від'ємне число.



Однобічною називають правобічну або лівобічну критичну область.

Двобічною називають критичну область, яка визначається нерівностями

$K < k_{кр1}$, $K > k_{кр2}$, де $k_{кр1}$, $k_{кр2}$ – критичні точки.



Знаходження критичної області розглянемо на прикладі використання правобічної критичної області. Насамперед задають достатньо малу ймовірністю – рівень значущості. Потім шукають критичну точку $k_{кр}$, виходячи з вимоги, що за умови справедливості нульової гіпотези ймовірність того, що критерій K набуде значення більше за $k_{кр}$, буде дорівнювати прийнятому рівню значущості, тобто $P\left(K > k_{кр}\right) = \alpha$.

Для кожного критерію складено відповідні таблиці, за якими знаходять критичну точку, яка задовольняє цій вимозі.

Коли критична точка вже знайдена, за даними вибірки обчислюють спостережуване значення критерію $K_в$, і, якщо виявиться, що $K_в > k_{кр}$, нульову гіпотезу відкидають; якщо ж $K_в < k_{кр}$, підстав для відкидання нульової гіпотези немає.

Відшукання лівобічної і двобічної критичних областей зводиться (як і для правобічної) до знаходження відповідних критичних точок і перевірки, у якій області розташовується $K_в$.

Отже, статистична гіпотеза перевіряється в такій послідовності:

а) формулюють нульову H_0 та альтернативну H_a гіпотези;

б) вибирають статистичну характеристику K, за значеннями якої перевіряють правильність гіпотези H_0;

в) визначають рівень істотності α і відповідне йому критичне значення $k_{кр}$;

г) за результатами вибірки розраховують фактичне (вибіркове) значення статистичної характеристики $K_в$, яке порівнюють з критичним $k_{кр}$; тобто перевіряють в якій області знаходиться $K_в$, критичній чи області прийняття гіпотези, на основі чого приймається відповідне рішення щодо гіпотези (відхиляється чи приймається).

Перевірка гіпотези про закон розподілу. Критерій згоди Пірсона

Критерієм згоди називають статистичний критерій перевірки гіпотези про закон розподілу ймовірностей випадкової величини (ознаки генеральної сукупності). Критерії, в яких необхідно перевірити чи статистичні дані узгоджуються з гіпотезою, називають критерієм згоди. Є кілька критеріїв згоди: критерій Колмогорова, критерій Смірнова, критерій Пірсона та ін. Розглянемо критерій згоди Пірсона (критерій χ^2), який ґрунтується на порівнянні вибіркових (емпіричних) і теоретичних частот.

Нехай висунуто гіпотезу H_0 про те, що випадкова величина X розподілена за певним законом.

Здійснивши вибірку обсягу n, знаходять і записують інтервальний статистичний розподіл частот:

$[z_{i-1}, z_i)$	$[z_0, z_1)$	$[z_1, z_2)$	$\ldots$	$[z_{m-1}, z_m)$
n_i	n_1	n_2	$\ldots$	n_m

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = n.$$

$[z_{i-1}, z_i)$	$[z_0, z_1)$	$[z_1, z_2)$	$\ldots$	$[z_{m-1}, z_m)$
n_i	n_1	n_2	$\ldots$	n_m
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_m
$n_i' = np_i$	n_1'	n_2'	$\ldots$	n_m'

Згідно з критерієм Пірсона для перевірки гіпотези H_0 вводиться випадкова величина (статистика) K:

$$K = \chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'},$$

де m – кількість груп у статистичному розподілі вибірки; n_i – емпірична частота ознаки X в i-тій групі; $n_i' = np_i$ – теоретична частота; p_i – імовірність того, що значення X належить i-тій групі.

Відомо, що при $n \to \infty$ закон розподілу статистики K прямує до закону розподілу χ^2 з $k = m - r - 1$ ступенями вільності, де m – кількість груп у статистичному розподілі вибірки; r – кількість параметрів гіпотетичного розподілу A (наприклад, $r = 2$ для нормального розподілу, $r = 1$ для розподілу Пуассона, $r = 0$ для рівномірного розподілу).

Для критерію χ^2 будують правосторонню критичну область за правилом:

$$P\{\chi^2 > \chi^2_{кр}\} = \alpha.$$

За заданим рівнем значущості α і кількістю ступенів вільності k із таблиці розподілу χ^2 знаходять критичну точку $k_{кр} = \chi^2_{кр}$.

На підставі даних вибірки, записаних у таблиці, обчислюють вибіркове значення критерію Пірсона, $K_в$.

Якщо $K_в > k_{кр}$, нульову гіпотезу відкидають; якщо ж $K_в < k_{кр}$, підстав для відкидання нульової гіпотези немає.

Перевірка гіпотези про порівняння середнього значення (математичного сподівання) ознаки генеральної сукупності зі стандартом

У критеріях для перевірки гіпотези H_0 про те, що значення математичного сподівання досліджуваної ознаки X генеральної сукупності $a = M(X)$ збігається зі стандартом a_0 (H_0: $a = a_0$), використовують вибіркове середнє.

Нехай випадкова величина $X \sim N(a, \sigma^2)$. Розглянемо гіпотезу H_0: $a = a_0$.

Вибіркове середнє $\overline{x}$ для вибірки з нормального розподілу з параметрами (a, σ^2) має нормальний розподіл з параметрами $(a, \sigma^2/n)$. Тому в якості критерію беруть величину $K = \dfrac{\overline{x} - a_0}{\sigma / \sqrt{n}}$.

Така величина має стандартний нормальнй розподіл, тому для відшукання критичних значень користуються таблицею нормального закону розподілу.

Перевірка гіпотези про рівність двох математичних сподівань

Нехай X та Y – дві незалежні випадкові величини, кожна з яких має нормальний закон розподілу, $X \sim N(a_x, \sigma^2{}_x)$, $Y \sim N(a_y, \sigma^2{}_y)$.

В результаті спостережень отримано дві вибірки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ та $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Необхідно перевірити гіпотезу H_0: $a_x = a_y$.

Тоді H_a: $a_x \neq a_y$ і зазначимо, що σ_x та σ_y – відомі.

За критерій перевірки гіпотези беруть випадкову величину $K = Z = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n} + \dfrac{\sigma_y^2}{m}}}$.

Така величина має стандартний нормальнй розподіл, $Z \sim N(0, 1)$, тому для відшукання критичних значень користуються таблицею нормального закону розподілу. Якщо $|Z_в| < z_{кр}$, нульова гіпотеза приймається; якщо ж $|Z_в| > z_{кр}$, то приймається гіпотеза H_a.

Якщо σ_x та σ_y – невідомі, їх замінюють вибірковими середньоквадратичними відхиленнями в даному критерії, та в цьому випадку використовують таблицю розподілу Стьюдента.

Приклад Для перевірки ефективності нової технології виробництва відібрано дві групи робітників: перша працювала за новою технологією, а друга – за старою. Результати виробітку продукції на одного робітника наведено у вигляді розподілів:

x_i	53	56	59	62	65
n_{x_i}	4	6	10	12	4

y_j	48	50	52	54	56
n_{y_j}	2	5	14	6	3

Ознаки X і Y (виробіток продукції на одного працівника) є незалежними нормально розподіленими випадковими величинами зі значеннями $\sigma_x = 72$ та $\sigma_y = 50$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити гіпотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$, якщо альтернативна гіпотеза $H_1 : M(X) > M(Y)$.

<u>Розв'язання.</u> Оскільки ознаки X та Y мають нормальний закон розподілу і відомі їхні дисперсії, то скористаємося критерієм

$$Z = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n} + \dfrac{\sigma_y^2}{m}}}$$

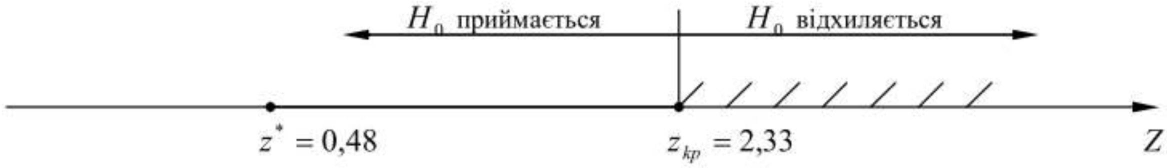
За рівнянням $\Phi(z_{kp}) = \dfrac{1 - 2 \cdot 0{,}01}{2} = 0{,}49$ із таблиці знаходимо критичну точку $z_{kp} = 2{,}33$ і будуємо правобічну критичну область.

Обчислюємо: $n = 4+6+10+12+4 = 36$, $m = 2+5+14+6+3 = 30$;

$$\bar{x}_b = \frac{53\cdot 4 + 56\cdot 6 + 59\cdot 10 + 62\cdot 12 + 65\cdot 4}{36} = \frac{212+336+590+744+260}{36} = 59{,}5;$$

$$\bar{y}_b = \frac{48\cdot 2 + 50\cdot 5 + 52\cdot 14 + 54\cdot 6 + 56\cdot 3}{30} = \frac{96+250+728+324+168}{30} = 52{,}2;$$

спостережуване значення критерію $z^* = \dfrac{59{,}5-52{,}2}{\sqrt{\dfrac{5184}{36}+\dfrac{2500}{30}}} \approx 0{,}48$.



Оскільки $z^* < z_{kp}$, то основна гіпотеза приймається; нова технологія не привела до підвищення середнього виробітку робітників.

Питання для самоперевірки

1. Що таке гіпотеза? Нульова гіпотеза? Альтернативна?

2. Як перевірити справджуваність нульової гіпотези? Який рівень істотності доцільно використати?

3. Вивчається ефективність нової методики вивчення іноземних мов порівняно з традиційною. Сформулюйте нульову й альтернативну гіпотези.

4. Що таке критична область? Який висновок ви зробите, якщо статистична характеристика критерію потрапить у критичну область?

3.4. Елементи регресійного та кореляційного аналізу

Усі явища суспільного життя існують не ізольовано, вони органічно зв'язані між собою, залежать одні від одних і знаходяться в постійному русі і розвитку. Явища або окремі їх ознаки, які впливають на інші і обумовлюють їх зміну називаються **факторними**, а явища або окремі їх ознаки, які змінюються під впливом факторних, називаються **результативними**.

Зв'язок між явищами та їхніми ознаками класифікують:

- За характером.
- За напрямком.
- За аналітичним вираженням (за формою).
- За кількістю факторів, що взаємодіють.
- За ступенем щільності зв'язку.

За характером:

•*Функціональний* – зв'язок, при якому певному значенню факторної ознаки X завжди відповідає одне значення результативної ознаки Y. Функціональні зв'язки характеризуються певною відповідністю між причиною і наслідком: $Y = f(X)$, де f відома функція зв'язку.

•*Стохастичний* – зв'язок, при якому кожному значенню факторної ознаки, відповідає декілька значень результативної ознаки, $Y = f(X) + \varepsilon$, де ε - величина помилки (відхилення). Окремим випадком стохастичного зв'язку є *кореляційний зв'язок*, за якого кожному значенню X відповідає середнє значення Y.

За напрямом розрізняють зв'язки прямі і обернені. *Прямий* зв'язок – це такий зв'язок, коли із зростанням факторної ознаки, результативна також зростає. При о*берненому* зв'язку із збільшенням факторної ознаки результативна зменшується або, навпаки, із зменшенням факторної ознаки, результативна зростає.

За формою зв'язок ділиться на прямолінійний і криволінійний. При *прямолінійній (лінійний)* кореляційній залежності рівним змінним середніх значень факторної ознаки відповідають приблизно рівні зміни середніх значень результативної ознаки. При *криволінійній* кореляційній залежності рівним змінним середніх значень факторної ознаки відповідають нерівні зміни середніх значень результативної ознаки.

За кількістю факторів, що взаємодіють:

а) *однофакторні* (прості) - зазвичай називаються парними, оскільки розглядається пара ознак, тобто *Y* завжди пов'язана з однією *X* (напр, зв'язок між прибутком і продуктивністю праці);

б) *багатофакторні* (множинні) - коли ознака *Y* пов'язана з двома і більше ознаками *X* (напр., зв'язок між продуктивністю праці і рівнем організації праці, автоматизації виробництва, кваліфікації робітників, виробничим стажем й іншими факторними ознаками).

За ступенем щільності зв'язку

Значення емпіричного кореляційного	Сила
0,1-0,3	Слабка
0,3-0,5	Помірна
0,5-0,7	Помітна
0,7-0,9	Щільна
0,9-0,99	надто

Якщо значення емпіричного кореляційного співвідношення є рівним 0 - зв'язок між ознаками відсутній; рівний 1 - зв'язок між ознаками є функціональним.

Найпростіші методи вивчення стохастичних зв'язків:

- Метод зіставлення двох паралельних рядів.
- Метод аналітичних групувань.
- Кореляційний аналіз.
- Регресійний аналіз.
- Непараметричні методи.

Метод зіставлення двох паралельних рядів - фактори, що характеризують результативну ознаку, розташовують у порядку збільшення або зменшення, а потім простежують зміну величини результативної ознаки, що дозволяє встановити наявність зв'язку і його напрямок.

Метод аналітичних групувань - виконують групування одиниць сукупності за факторною ознакою і для кожної групи обчислюють середнє значення результативної ознаки. Потім зіставляють зміни результативної ознаки по мірі зміни факторної ознаки і виявляють напрямок, характер та щільність зв'язку за допомогою так званого емпіричного кореляційного відношення.

Кореляційний аналіз - його завдання полягає у вимірюванні щільності зв'язку і оцінюванні факторів, що впливають на результативну ознаку.

Регресійний аналіз - вибір форми моделі (рівняння регресії), встановлення ступеня впливу незалежних змінних на залежну змінну і визначення розрахункових значень залежної змінної (функції регресії).

Для вимірювання тісноти зв'язку і визначення його напрямку при лінійній залежності використовують лінійний коефіцієнт кореляції (Пірсона), який визначається за формулою:

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

При цьому рівняння вибіркових прямих регресії визначаються:

прямої регресії *X* на *Y*: $x - \overline{x} = r_{xy} \dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \overline{y})$;

прямої регресії *Y* на *X*: $y - \overline{y} = r_{xy} \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$.

Непараметричні методи. Поряд з використанням параметричних методів, коли всі ознаки кількісно виміряні (ці методи розглянуто вище), у статистиці також застосовуються непараметричні методи, за допомогою яких встановлюється зв'язок між якісними (атрибутивними) ознаками. Тут не ставиться задача представлення зв'язку через рівняння, а тільки йдеться про його наявність і щільність. Аналіз виконується за допомогою *таблиць взаємного сполучення.*

Якщо необхідно провести дослідження зв'язку між альтернативними ознаками, представленими тільки групами з протилежними (взаємовиключними) характеристиками, то щільність зв’язку можна оцінити, обчисливши коефіцієнт асоціації або коефіцієнт контингенції.

Питання для самоперевірки

1. У чому полягає відмінність між функціональним і стохастичним зв’язком?

2. Що таке кореляційний зв'язок?

3. У чому полягає відмінність між прямим та оберненим зв’язком?

4. Дайте визначення прямолінійного та криволінійного зв’язків.

5. Як класифікують зв’язки за ступенем щільності?

6. Якими статистичними методами досліджуються функціональні та кореляційні зв’язки?

7. Було обстежено 1000 жінок з метою дослідження залежності між кольором очей матерів і дочок, і отримано такі дані.

Колір очей матері	Колір очей дочки		
	1	2	Усього
1	471	148	619
2	151	230	381
Усього	622	378	1000

Визначити щільність зв’язку між ознаками (за допомогою лінійного коефіцієнта кореляції Пірсона).

3.5. Елементи дисперсійного аналізу

Дисперсійний аналіз є сукупністю статистичних методів, призначених для перевірки гіпотез про зв'язок між певною ознакою та досліджуваними факторами, які не мають кількісного опису, а також для встановлення ступеня впливу факторів та їх взаємодії.

Факторами називають контрольовані чинники, що впливають на кінцевий результат. Рівнем фактора, або способом обробки, називають значення, що характеризують конкретний прояв цього фактора. Значення вимірюваної ознаки називають відгуком.

Основною метою однофакторного аналізу зазвичай є оцінка величини впливу конкретного фактора на досліджуваний відгук. Іншою метою може бути порівняння двох або декількох факторів один з одним з метою визначення різниці їх впливу на відгук, яку часто називають контрастом факторів. Попереднім етапом є перевірка нульової гіпотези про відсутність будь-якого впливу досліджуваного фактора (факторів), тобто гіпотези про те, що зміни значень ознаки в порівнюваних вибірках є випадковими, і всі дані належать до однієї генеральної сукупності.

Якщо нульову гіпотезу відкидають, то наступним етапом є кількісне оцінювання впливу досліджуваного фактора і побудова довірчих інтервалів для отриманих характеристик. У випадку, коли нульова гіпотеза не може бути відкинутою, зазвичай її приймають і роблять висновок про відсутність впливу. Але, якщо є підстави вважати, що такий вплив має бути присутнім (наприклад, це може випливати з теоретичних уявлень про об'єкт дослідження), то необхідно перевірити наявність інших факторів, що можуть його маскувати.

При однофакторному дисперсійному аналізі вихідні дані подають у вигляді таблиць, у яких кількість стовпчиків дорівнює кількості рівнів фактора, а кількість значень у кожному стовпчику – кількості спостережень при відповідному рівні фактора. Завданням аналізу є перевірка нульової гіпотези про рівність середніх значень сукупностей, що розглядаються.

Нехай потрібно установити, чи має суттєвий вплив якісний фактор F, що має m рівнів F_1, F_2, …, F_m, на кількісну нормально розподілену ознаку X. Наприклад, якщо потрібно вияснити залежність ціни квартири від району міста, в якому вона знаходиться, то фактор F – район, а його рівні – райони міста.

Нехай на рівні F_i проведено n_i спостережень (i = 1, 2, …, m). Результати спостережень наведено в таблиці:

	F_1	F_2	…	F_m
	x_{11}	x_{12}	…	x_{1m}
	x_{21}	x_{22}	…	x_{2m}
	…	…	…	…
	$x_{n_1 1}$	$x_{n_2 2}$	…	$x_{n_m m}$
Групове середнє	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	…	$\overline{x}_m$

При рівні значущості α потрібно перевірити нульову гіпотезу про рівність групових середніх, припускаючи, що групові генеральні дисперсії хоча і невідомі, але однакові, тобто фактор не впливає на результати спостережень.

Нехай $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_i} x_{ij}$ - загальне середнє, $\overline{x}_j = \frac{1}{n_i}\sum_{i=1}^{n_i} x_{ij}$ - групове середнє, а

$Q = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_i}(x_{ij} - \overline{x})^2$ - сума квадратів відхилень спостережень від загального середнього,

$Q = Q_1 + Q_2$

$Q_1 = \sum_{j=1}^{m} n_j (\overline{x}_j - \overline{x})^2$ - сума квадратів відхилень між групами, яка характеризує розсіяння між групами;

$Q = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_i}(x_{ij} - \overline{x_j})^2$ - сума квадратів відхилень всередині групи, яка характеризує розсіяння всередині груп.

Позначимо $s_1^2 = \frac{Q_1}{m-1}$, $s_2^2 = \frac{Q_2}{n-m}$, а $s^2 = \frac{Q_1}{n-1}$ - незміщена оцінка σ^2.

За критерій нульової гіпотези H_0 про рівність групових середніх беруть випадкову величину

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}.$$

Якщо $F \geq F(\alpha, k_1, k_2)$, то гіпотеза H_0 відхиляється, а при $F < F(\alpha, k_1, k_2)$ приймається. Величина $F(\alpha, k_1, k_2)$ знаходиться за таблицею розподілу Фішера-Снедокера, де $k_1 = m - 1$, $k_2 = n - m$.

Питання для самоперевірки

1. У чому полягає ідея дисперсійного аналізу?
2. Які завдання вирішують за допомогою дисперсійного аналізу?
3. Що називають факторами й відгуками у дисперсійному аналізі?
4. Наведіть приклади.
5. Що називають рівнем фактора? Наведіть приклади.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

РОЗДІЛ 1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

Завдання 1. Обчислення ймовірності події за класичною формулою

1. Із вибірки, що складається з 10 чоловіків та 24 жінки навмання вибрали 4 людей для інтерв'ю. Знайти ймовірність того, що:

а) серед них 2 жінки;

б) хоча б один чоловік.

2. Протягом дня в центр соціальної служби за допомогою звернулось 20 людей, серед яких 15 пенсіонерів. Працівник соціальної служби навмання вибрав 4 заяви. Яка ймовірність того, що:

а) 3 з них від пенсіонерів?

б) хоча б одна заява від пенсіонера?

3. Дев'ять із 20 опитаних респондентів палять. Яка ймовірність того, що із 3 навмання відібраних респондентів:

а) 1 палить?

б) принаймні 1 палить?

4. Студент прийшов на залік, знаючи 25 запитань із 30. Яка ймовірність скласти залік (відповісти на всі запитання), якщо викладач задає три запитання?

5. В коробці 7 кульок, серед яких 4 білі. Навмання взято 3 кульки. Яка ймовірність того, що:

а) одна з них біла?

б) хоча б одна біла?

6. У групі 15 дівчат і 10 юнаків. За списком навмання відібрали трьох осіб. Знайти ймовірність того, що:

а) серед них 2 дівчини;

б) хоча б один юнак.

7. У ящику 10 білих і 6 чорних куль. Навмання витягають дві кулі. Яка ймовірність того, що кулі будуть одного кольору?

8. Знайти ймовірність того, що навмання вибране двозначне число є кратним 3, або 5, або тому і іншому одночасно.

9. Групу 20 студентів випадковим чином розподіляють для проходження практики у три фірми: A – 7, B – 8, C – 5 осіб. Яка ймовірність того, що два конкретні студенти проходитимуть практику на одній фірмі?

10. У партії з 30 автомобілів 6 мають дефекти. Яка ймовірність того, що серед 3 навмання вибраних автомобілів буде:

а) тільки 2 автомобілі без дефектів?

б) не більше одного автомобіля з дефектом?

11. В урні 9 кульок з номерами від 1 до 9. Навмання по одній виймають три кульки без повернення. Знайти ймовірність того, що серед них:

а) нема кульок з парними номерами,

б) хоча б одна кулька з парним номером.

12. З 30 чисел 1, 2, ..., 30 навмання відбирається 10 різних чисел. Знайти ймовірність того, що серед них:

а) рівно 6 чисел ділиться на 3,

б) хоча б одне число ділиться на 3.

13. Серед 20 працівників фірми випадковим чином розподіляють путівки до двох міст: A – 12, B – 8 путівок. Яка ймовірність того, що дві конкретні особи поїдуть до одного міста?

14. В одній урні 5 білих і 10 чорних кульок, в другій - відповідно 8 і 4. З кожної урни навмання вибрано по одній кульці. Знайти ймовірність того, що:

а) обидві кульки одного кольору,

б) хоча б одна з них біла.

15. Із групи, що складається з 6 жінок та 4 чоловіків навмання відбирають 4 людей. Яка ймовірність того, що серед відібраних людей

а) одна жінка?

б) дві жінки?

16. Із партії у 20 деталей, серед яких 17 стандартних, навмання вийняли 3 деталі. Знайти ймовірність того, що серед них будуть:

а) всі стандартні;

б) одна деталь стандартна, а дві не стандартні.

17. На полиці розміщено 10 підручників, 15 томів з художніми творами і 3 довідники. Яка ймовірність того, що із 3 навмання взятих книжок:

а) 1 довідник?

б) 1 довідник і 2 підручники?

18. Яка ймовірність того, що навмання вибране тризначне число ділиться на 5?

19. Яка ймовірність того, що двозначне число складене випадковим чином із чисел 3, 5, 7 ділиться на 5?

20. Кинуто два гральних кубики. Яка ймовірність того, що сума очок, що випали, дорівнює 5?

Завдання 2. Геометричні ймовірності

1. У прямокутному трикутнику з катетами довжиною 6 м та 8 м навмання вибрали точку. Знайти ймовірність того, що вона потрапить в круг вписаний в трикутник.

2. У колі радіусом 8 см розташовано прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см. Яка ймовірність того, що навмання вибрана в середині кола точка лежить в прямокутнику?

3. У крузі $x^2 + y^2 \leq 9$, навмання вибрано точку. Знайти ймовірність того, що точка знаходиться в квадраті обмеженому осями координат і прямими $x = 1$, $y = 1$.

4. У колі радіусом 5 см розміщено ромб з діагоналями 2 і 3 см. Яка ймовірність того, що навмання вибрана в середині кола точка буде лежати в ромбі?

5. В рівносторонній трикутник із стороною 6 см завдовжки вписано коло. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана точка трикутника лежить в крузі.

6. В крузі радіусом 4 см навмання вибрано точку. Яка ймовірність того, що вона потрапить в квадрат вписаний в коло?

7. У крузі $x^2 + y^2 \leq 9$, навмання вибрано точку. Знайти ймовірність того, що точка знаходиться в крузі $x^2 + y^2 \leq 1$.

8. У крузі $x^2 + y^2 \leq 4$, навмання вибрано точку. Знайти ймовірність того, що точка знаходиться в крузі $x^2 + y^2 \leq 1$.

9. В крузі радіусом 4 см навмання вибрано точку. Яка ймовірність того, що вона потрапить в правильний шестикутник вписаний в коло?

10. У колі радіусом 8 см розміщено прямокутний трикутник з катетами 3 і 4 см. Яка ймовірність того, що навмання вибрана в крузі точка лежатиме в трикутнику?

11. У рівнобедреному трикутнику з основою 6 см і бічною стороною 5 см розміщено круг радіусом 1 см. Яка ймовірність того, що навмання вибрана точка трикутника попаде в круг?

12. В крузі радіусом 4 см навмання вибрано точку. Яка ймовірність того, що вона потрапить в правильний трикутник вписаний в коло?

13. Всередині квадрата, обмеженого осями координат і прямими $x = 1$, $y = 1$, навмання вибрано точку. Знайти ймовірність того, що точка знаходиться у вписаному в квадрат крузі.

14. У прямокутному трикутнику з катетами довжиною 4 м та 9 м навмання вибрали точку. Яка ймовірність того, що вона потрапить в коло радіусом 1 м, розташоване в трикутнику?

15. В крузі радіусом 5 мм розташовано прямокутник зі сторонами 4 мм та 6 мм. Знайдіть ймовірність того, що навмання вибрана в крузі точка лежатиме в прямокутнику.

16. У ромбі з бічною стороною 5 см і діагоналлю 6 см лежить прямокутник зі сторонами 2 см та 3 см. Знайдіть ймовірність того, що навмання вибрана у ромбі точка лежатиме і в прямокутнику.

17. У рівнобедреному трикутнику із бічною стороною 8 см і основою 12 см довільно розташовано круг радіуса 2 см. Знайдіть ймовірність того, що навмання вибрана точка трикутника буде лежати в крузі.

18. В середині круга радіуса 8 см розташовано ромб зі стороною 4 см і діагоналлю 5 см. Знайдіть ймовірність того, що навмання вибрана в крузі точка лежатиме також і у ромбі.

19. У прямокутному трикутнику з катетами довжиною 3 см та 4 см навмання вибрали точку. Знайти ймовірність того, що вона потрапить в круг вписаний в трикутник.

20. У колі радіусом 10 см розташовано прямокутник зі сторонами 7 см і 9 см. Яка ймовірність того, що навмання вибрана в крузі точка лежить в прямокутнику?

Завдання 3. Формула повної ймовірності. Формули Байєса

1. За статистичними даними в певному районі траси польоту літака ймовірність розвитку грозових фронтів на великих висотах дорівнює 0.4, на середніх – 0.6, на малих – 0.8. В цьому районі 10% польотів виконується на великих висотах, 30% – на середніх і 60% – на малих.

а) Знайдіть ймовірність того, що літак, який виконує рейс в цьому районі, не зустріне грозового фронту.

б) В умовах даної задачі літак не зустрів грозового фронту. На яких висотах імовірніше за все він виконував політ?

2. Авіакомпанія виконує протягом доби 8 рейсів до аеропорту M, 5 – до аеропорту N і 2 – до аеропорту P. Імовірність затримки рейсу за метеоумовами аеропорту M рівна 0.05, аеропорту N – 0.1, аеропорту P – 0.2.

а) Знайдіть імовірність затримки навмання вибраного рейсу.

б) В умовах даної задачі навмання вибраний рейс був затриманий. До якого аеропорту ймовірніше за все він виконувався?

3. До продажу надходять телевізори з трьох заводів: перший завод постачає 30% всіх телевізорів, другий – 20% і третій – 50%. Продукція першого заводу містить 5% виробів з прихованим дефектом, другого – 10% і третього – 20%.

а) Знайдіть ймовірність того, що придбаний телевізор буде без дефектів.

б) В умовах даної задачі придбаний телевізор виявився бездефектним. Яким заводом імовірніше за все він виготовлений?

4. В контейнер, у якому знаходяться 3 вироби невідомої якості (стандартні або нестандартні), покладено один стандартний виріб, після чого з контейнера навмання відібрали один виріб.

а) Знайдіть ймовірність того, що відібраний виріб буде стандартний, якщо рівноможливі всі припущення щодо початкового якісного складу виробів у контейнері.

б) В умовах даної задачі відібраний виріб виявився стандартним. Який був найімовірніший початковий якісний склад виробів у контейнері?

5. Авіакомпанія виконує протягом доби 6 рейсів до аеропорту M, 10 – до аеропорту N і 4 – до аеропорту P. Імовірність неповного комерційного завантаження рейсу до аеропортів M, N і P відповідно дорівнюють: 0.3; 0.2 і 0.4.

а) Знайдіть ймовірність неповного комерційного завантаження навмання взятого рейсу.

б) В умовах даної задачі виконаний рейс виявився з неповним комерційним завантаженням. До якого аеропорту найімовірніше він виконувався?

6. Для безпечного обходу грозового фронту екіпаж літака з рівною ймовірністю може вибрати три напрями: ліворуч, праворуч і зверху. Імовірність благополучного перетину літаком грозового фронту ліворуч дорівнює 0.8, праворуч – 0.9, зверху – 0.5.

а) Знайдіть ймовірність вдалого перетину грозового фронту.

б) В умовах даної задачі літак вдало перетнув грозовий фронт. Який напрям ймовірніше за все був вибраний екіпажем?

7. Вся продукція цеху перевіряється двома контролерами. Перший перевіряє 55% всіх виробів, другий 45%. Ймовірність того, що перший контролер присвоїть марку “стандарт” нестандартному виробу, дорівнює 0.01, для другого контролера ця ймовірність дорівнює 0.05.

а) Знайдіть ймовірність того, що взятий навмання виріб з маркою “стандарт” виявився нестандартним.

б) В умовах даної задачі взятий навмання виріб з маркою “стандарт” виявився нестандартним. Яким контролером імовірніше за все перевірявся цей виріб?

8. Прилад, встановлений на борту літака, може працювати в двох режимах: в умовах нормального крейсерського польоту і в умовах перевантаження при зльоті і посадці. Крейсерський режим польоту займає 80% всього льотного часу, умови перевантаження – 20%. Ймовірність відмови приладу під час крейсерського польоту дорівнює 0.1, в умовах перевантаження – 0.4.

а) Знайдіть надійність (ймовірність безвідмовної роботи) приладу під час польоту.

б) В умовах даної задачі під час польоту прилад відмовив. Знайдіть ймовірність того, що політ проходив: 1) в крейсерському режимі; 2) в умовах перевантаження.

9. Для складання іспиту студентам необхідно підготувати 30 питань програми. З 25 студентів 10 підготували всі питання, 8 студентів – 25 питань, 5 студентів – 20 питань, 2 студента – 15 питань.

а) Знайдіть імовірність того, що викликаний навмання студент відповість на задане питання.

б) Якщо викликаний навмання студент відповів на задане питання, знайдіть ймовірність того, що він підготував: 1) всі питання; 2) лише половину питань.

10. Ймовірності того, що під час роботи системи, яка складається з трьох елементів, відмовлять елементи з номерами 1, 2 і 3, відносяться як 3:2:5. Ймовірності виявлення відмов цих елементів дорівнюють відповідно 0.95; 0.9 і 0.6.

а) Знайдіть ймовірність виявлення відмови в роботі системи.

б) В умовах даної задачі під час роботи системи виявлена відмова. Який з елементів імовірніше за все відмовив?

11. До контейнера, який містить 3 деталі невідомої якості (стандартні або нестандартні), покладено одну стандартну деталь. Після того з контейнера навмання відібрана одна деталь.

а) Знайдіть ймовірність того, що вона стандартна, якщо рівноможливі всі припущення про число стандартних деталей, які були в контейнері.

б) В умовах даної задачі відібрана деталь виявилася стандартною. Знайдіть ймовірність того, що в контейнері залишилися: 1) тільки стандартні; 2) тільки нестандартні.

12. В спортивній олімпіаді приймають участь 4 студенти з першого курсу, з другого – 6, з третього – 5. Імовірності того, що студент з першого, другого, третього курсу переможе на олімпіаді, дорівнюють відповідно: 0.9; 0.7 і 0.8.

а) Знайдіть ймовірність перемоги навмання вибраним її учасником.

б) В умовах даної задачі один студент переміг на олімпіаді. До якої групи він імовірніше за все належить?

13. На складальний конвеєр агрегатів з першого верстата-автомата надходить 40% деталей, з другого – 30%, з третього – 20% і з четвертого – 10%. Якщо при складанні буде використано деталь з першого верстата, то ймовірність одержання високоякісного агрегату дорівнює 0.98, для деталей з другого третього та четвертого верстатів ця ймовірність становить відповідно: 0.99; 0.995 і 0.998.

а) Знайдіть ймовірність сходження з конвеєра високоякісного агрегату.

б) В умовах даної задачі з конвеєра зійшов високоякісний агрегат. Деталь з якого верстата імовірніше за все використана в ньому?

14. Кількість вантажних машин, які проїздять трасою з бензозаправкою, відносяться до кількості легкових, як 3:2. Ймовірність того, що буде заправлятися вантажна машина, дорівнює 0.1, легкова – 0.2.

15. а) Знайдіть ймовірність того, що машина стане на заправку.

б) В умовах даної задачі на заправку стала машина. Знайдіть ймовірність того, що вона: 1) вантажна; 2) легкова.

16. На фабриці перший верстат виробляє – 40% всієї продукції, а другий – 60%. В середньому з 1 тисячі виробів першого верстата бракується 9, а з 500 виробів другого – 2.

а) Знайдіть ймовірність випуску браку на фабриці.

б) В умовах даної задачі навмання вибраний виріб виявився бракованим. Яким верстатом більш імовірно він виготовлений?

17. З комплекту, який містить 3 стандартні і 2 нестандартні вироби, навмання відбирають 2 вироби і перекладають до другого комплекту, в якому знаходилися 4 стандартні і 4 нестандартні вироби. Після того з другого комплекту навмання відбирають один виріб.

а) Знайдіть ймовірність того, що він стандартний.

б) В умовах даної задачі відібраний виріб виявився стандартним. Знайдіть ймовірність того, що з першого комплекту до другого були перекладені: 1) стандартні; 2) нестандартні вироби.

18. Три робітники виготовили однакову кількість деталей і склали їх в один контейнер. Брак в продукції першого робітника складає 5%, другого – 4.5%, третього – 4%.

а) Знайдіть ймовірність того, що взята навмання з контейнера деталь виявилась бракованою.

б) В умовах даної задачі відділ технічного контролю виявив браковану деталь. Знайдіть ймовірність того, що її виготовив другий робітник.

19. Ймовірність виходу літака на заданий пункт на великих висотах дорівнює 0.8, на середніх – 0.9, на малих – 0.6. На великих висотах виконується 20% польотів, на середніх – 10%, на малих – 7 %.

а) Знайдіть ймовірність виходу літака на заданий пункт.

б) В умовах даної задачі літак вийшов на заданий пункт. На яких висотах імовірніше за все виконувався політ?

20. Авіатехнічний склад одержує з першого заводу в 4 рази більше агрегатів, ніж з другого. Брак в продукції першого заводу складає 0.4%, другого – 1%.

а) Знайдіть ймовірність того, що взятий навмання агрегат виявиться бракованим.

б) В умовах даної задачі випадково вибраний агрегат виявився бракованим. Яким заводом більш імовірно він виготовлений?

21. В контейнер, який містить 3 стандартні і 2 нестандартні вироби, добавлено ще 2 вироби, для яких рівноможливі всі припущення про стандартність. Потім з контейнера навмання відібраний один виріб.

а) Знайдіть ймовірність того, що він стандартний.

б) В умовах даної задачі відібраний виріб виявився стандартним. Які вироби імовірніше за все були додані в контейнер?

Завдання 4. Повторення незалежних випробувань. Формула Бернуллі

1. За статистичними даними в середньому 62% студентів, що поступили на перший курс по закінченню навчання отримують диплом магістра. Знайти ймовірність того, що із 5 навмання відібраних студентів один отримає диплом магістра.

2. Ймовірність хоча б одного влучення в мішень з трьох пострілів дорівнює 0.992. Знайти ймовірність двох влучень в мішень з трьох пострілів.

3. Імпортер постачає жалюзі для вікон, причому 70% з них - горизонтальні. Яка ймовірність того, що серед 5 відібраних жалюзі буде рівно 3 горизонтальних?

4. Ймовірність того, що електрична лампа залишиться справною після 100 год роботи, дорівнює 0.2. Знайти ймовірність того, що дві із чотирьох ламп залишаться справними після 100 год роботи.

5. При транспортуванні 3% виробів зі скла пошкоджуються. Яка ймовірність того, що серед 6 відібраних для перевірки виробів лише 2 будуть пошкоджені?

6. Із чотирьох гармат зробили залп по цілі. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі з кожної гармати дорівнює 0.8. Знайти ймовірність того, що тільки два снаряди влучать в ціль.

7. Партія з 100 деталей, серед яких 5 бракованих, перевіряється контролером, котрий навмання вибирає 10 деталей і визначає їх якість. Якщо серед вибраних деталей нема жодної бракованої, то вся партія приймається. Яка ймовірність того, що партія деталей приймається?

8. Ймовірність своєчасної доставки газет у кожне з шести поштових відділень міста дорівнює 0.9. Знайти ймовірність того, що якогось дня лише 4 поштові відділення одержать газети вчасно.

9. Пристрій складається з трьох елементів, які працюють незалежно. Ймовірність безвідмовної роботи кожного з цих елементів за час t дорівнює 0.8. Знайти ймовірність того, що за час t безвідмовно будуть працювати два елементи.

10. Імовірність нічиєї в чемпіонаті України з футболу дорівнює 0.3. Яка ймовірність того, що нічиїх буде не більше у трьох із 8 матчів?

11. Додаткового оснащення нового автомобіля вимагають 20% покупців автосалону. Яка ймовірність того, що серед 5 навмання відібраних покупців авто двоє вимагатиме додаткового оснащення?

12. У партії з 1000 деталей є 10 дефектних. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих з цієї партії 10 деталей рівно 2 будуть дефектними.

13. Ймовірність того, що студент складе залік з першого разу дорівнює 0.9. Яка ймовірність того, що серед 6 студентів залік складуть 4 студенти?

14. Чотири стрільці зробили залп по мішені. Ймовірність влучення в мішень для кожного із них дорівнює 0.7. Знайти ймовірність того, що тільки два стрільці влучать в мішень.

15. Хлібопекарня випікає 70% продукції з борошна вищого сорту і 30% - з борошна першого сорту. Яка ймовірність того, що серед п'ятих навмання обраних виробів буде тільки один з борошна вищого сорту?

16. Ймовірність влучення в мішень дорівнює 0.8. Знайти ймовірність чотирьох влучень при 6 пострілах.

17. П'ять стрільців – початківців в однакових і незалежних умовах зробили по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучення в мішень для кожного із них дорівнює 0.4. Знайти ймовірність того, що влучить лише один стрілець.

18. Серед 500 коробок взуття нової колекції в 400 лежить взуття чорного кольору. Яка ймовірність, що у 4 навмання вибраних коробках буде дві із взуттям чорного кольору?

19. Кинуто 4 гральні кубики. Знайти ймовірність того, що випала одна трійка.

20. Із п'яти урн, що містять по 2 чорних і 8 білих куль кожна, виймають по одній кулі. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих куль є рівно 2 чорних.

Завдання 5. Формули Муавра-Лапласа

1 – 30. Проведено n = 500 незалежних випробувань, в кожному з яких може відбутися подія A з ймовірністю 0.8. Знайти ймовірність того, що подія A настане:

а) 300 + N разів, де N – номер варіанта роботи;

б) від 300 до 320 + N разів.

РОЗДІЛ 2. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Завдання 1. Дискретні випадкові величини. Ряд розподілу. Числові характеристики.

Для даної випадкової величини X

1) складіть ряд розподілу;

2) знайдіть моду, математичне сподівання і дисперсію.

1. Соціологами проведено опитування стосовно мовної проблеми в Україні. Виявлено, що 60% респондентів рідною вважають українську мову. Навмання відібрано 4 українці. Випадкова величина X – кількість українців що вважають рідною українську мову.

2. Вибірка соціологічного дослідження містить 20% працівників освіти. Навмання з вибірки одночасно відбирається 3 респонденти. Випадкова величина X – кількість працівників освіти серед відібраних респондентів.

3. Імовірність правильної відповіді студентом на кожне питання викладача дорівнює 0.8. Викладач задає питання до одержання першої неправильної відповіді, але не більше трьох питань. Випадкова величина X – кількість одержаних правильних відповідей.

4. Імовірність затримки рейсу за метеоумовами аеропорту дорівнює 0.2. Випадкова величина X – кількість затриманих рейсів з чотирьох, які виконуються з аеропорту.

5. Радіостанція надсилає 3 повідомлення для екіпажа, який виконує рейс. Імовірності прийому першого, другого, третього повідомлень відповідно дорівнюють 0.9, 0.8, і 0.7. Випадкова величина X – кількість прийнятих повідомлень.

6. Згідно даних соціологічного опитування ймовірність відповіді ‘так’ на запитання ‘Чи задоволені Ви своїм становищем у суспільстві?’ дорівнює 0.3.

Випадкова величина X – кількість задоволених своїм становищем у суспільстві респондентів із 3 навмання опитаних.

7. Комплект складається з п‘яти деталей 1-го ґатунку, двох деталей 2-го ґатунку і трьох бракованих деталей. Навмання з комплекту відбирається одночасно 3 деталі. Випадкова величина X – кількість бракованих деталей серед відібраних.

8. Згідно статистичної звітності, 10% нових малих підприємств, які тільки відкрились, припиняють свою діяльність в середньому через два роки. Навмання відібрано 3 нові малі підприємства. Випадкова величина X – кількість підприємств серед відібраних, що припинять свою діяльність через 2 роки.

9. Авіакомпанія 30% всіх рейсів виконує власним літаковим парком. Навмання вибирається чотири рейси. Випадкова величина X – кількість рейсів на власному літаковому парку серед вибраних.

10. Ймовірність за результатами аналізів вірно розпізнати певну хворобу у пацієнта в середньому дорівнює 0.8. Лікар провів дослідження аналізів чотирьох пацієнтів. Випадкова величина X – кількість пацієнтів, у яких він вірно розпізнав дану хворобу.

11. В партії з 20 виробів 90% мають вищу якість. Навмання з партії одночасно відібрано 3 вироби. Випадкова величина X – число виробів вищої якості серед відібраних.

12. При обставинах, що склалися, ймовірність точного вимірювання штурманом кута знесення дорівнює 0.8. Штурман 4 рази виміряв кут. Випадкова величина X – число точних вимірювань кута.

13. Авіафірма протягом дня виконує 3 рейси. Ймовірності затримки першого, другого, третього рейсів за метеоумовами дорівнює відповідно 0.1; 0.3 і 0.5. Випадкова величина X – число затриманих за метеоумовами рейсів.

14. Брак в продукції цеху складає 5%. З денного виробітку контролер навмання відбирає по одному виробу до виявлення першого бракованого, але не більше 4-х виробів. Випадкова величина X – число відібраних придатних виробів.

15. За даними метеослужби аеропорту в лютому кількість нельотних днів складає в середньому 20%. Випадкова величина X – число нельотних днів серед 4-х наступних.

16. Ймовірність того, що стрілець влучить у мішень при одному пострілі, дорівнює 0.9. Стрільцеві видають патрони доти, доки він не зробить промах але не більше 6. Випадкова величина X - кількість патронів, що були видані стрільцеві.

17. Ймовірність виготовлення підприємством нестандартного виробу дорівнює 0.1. Із партії виробів контролер навмання по одному відбирає до п'яти виробів, припиняючи відбір після одержання першого нестандартного виробу. Випадкова величина X - число відібраних стандартних виробів.

18. Ймовірність прольоту кожним із чотирьох літаків в призначений час пункту обов'язкового повідомлення дорівнює 0.9. Випадкова величина X – кількість літаків, які пролетіли пункт обов'язкового повідомлення в призначений час.

19. За статистичними даними в середньому 60% студентів, що поступили на перший курс по закінченню навчання отримують диплом магістра. Навмання вибрано чотирьох студентів. Випадкова величина X – кількість серед відібраних студентів, що отримають диплом магістра.

20. За статистичними даними в середньому 75% студентів, що отримують диплом за спеціальністю 'кібербезпека' по закінченню навчання працюють по спеціальності. Навмання вибрано чотирьох випускників спеціальності 'кібербезпека'. Випадкова величина X – кількість серед відібраних випускників, що працюватимуть по спеціальності.

Завдання 2. Неперервні випадкові величини.

Випадкова величина X задана функцією розподілу. Знайти:

а) щільність розподілу;

б) ймовірність попадання X в інтервал $(a; b)$.

1. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \dfrac{x^2-x}{2}, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

$a = 1$, $b = 1.5$

2. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \dfrac{x-2}{2}, & 2<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$

$a = 2$, $b = 3$

3. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$

$a = 0$, $b = 0.5$

4. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \dfrac{x+1}{4}, & -1<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$

$a = 0$, $b = 2$

5. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \dfrac{x^2-1}{8}, & 1<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$

$a = 2$, $b = 3$

6. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -3\\ \dfrac{x+3}{6}, & -3<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$

$a = -1$, $b = 2$

7. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ \dfrac{3x+6}{15}, & -2<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$

$a = -1$, $b = 2$

8. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \dfrac{x^2-4}{12}, & 2<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$

$a = 3$, $b = 4$

9. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ 2x-2, & 1<x\le 1.5\\ 1, & x>1.5\end{cases}$

$a = 1$, $b = 2$

10. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ \dfrac{x+2}{5}, & -2<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$

$a = -1$, $b = 2$

11. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ x-1, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

$a = 1$, $b = 1.5$

12. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2+x}{12}, & 0<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$

$a = 0$, $b = 2$

13. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

$a = 1$, $b = 2$

14. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^3}{8}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

$a = 1$, $b = 2$

15. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2+2x}{8}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

$a = 0$, $b = 1$

16. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3\\ x-3, & 3<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$

$a = 2$, $b = 3.5$

17. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2+x}{6}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

$a = 1$, $b = 2$

18. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \dfrac{x^2-1}{3}, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

$a = 1$, $b = 1.5$

19. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ \dfrac{x+2}{4}, & -2<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

$a = 0$, $b = 1$

20. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \dfrac{2x+2}{6}, & -1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

$a = 0$, $b = 2$

Завдання 3. Числові характеристики неперервної випадкової величини

Знайти функцію розподілу, математичне сподівання і дисперсію вип. величини X, що задана щільністю розподілу.

1. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{2x+1}{12}, & 0<x\le 3 \\ 0, & x>3 \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ 2(x-1), & 1<x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 3x^2, & 0<x\le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ \dfrac{x}{4}, & 1<x\le 3 \\ 0, & x>3 \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{2x}{9}, & 0<x\le 3 \\ 0, & x>3 \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ \dfrac{2x-1}{2}, & 1<x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 3 \\ 2(x-3), & 3<x\le 4 \\ 1, & x>4 \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{x}{8}, & 0<x\le 4 \\ 0, & x>4 \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ \dfrac{2x}{3}, & 1<x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1 \\ 3x^2, & -1<x\le 0 \\ 0, & x>0 \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2 \\ 2(x-2), & 2<x\le 3 \\ 0, & x>3 \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{x+1}{6}, & 0<x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{2x+1}{6}, & 0<x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1 \\ \dfrac{2x}{7}, & -1<x\le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ \dfrac{x}{4}, & 1<x\le 3 \\ 0, & x>3 \end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{2x+3}{10}, & 0<x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{3x^2}{8}, & 0<x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{2x+1}{12}, & 0<x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ \dfrac{x-1}{8}, & 1<x\le 5 \\ 0, & x>5 \end{cases}$

Завдання 4. Нормальний закон розподілу

1. Зріст дорослих чоловіків є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Якщо середньостатистичний чоловік має зріст 175 см, а стандартна похибка – 6 см, знайти ймовірність того, що навмання вибраний чоловік буде мати зріст від 170 до 180 см.

2. Хлібозавод випікає паляниці номінальної маси (математичне сподівання) 1 кг. За статистичними даними 99.9% всієї продукції має масу від 0.96 до 1.04 кг. Знайдіть імовірність того, що взята на контроль паляниця відповідає стандарту, якщо для цього її маса не повинна відхилятися від номіналу більше ніж на 0.02 кг.

3. Кількість пасажирів, які запізнюються на рейс, - нормально розподілена випадкова величина X з параметрами a = 5 і σ = 2. Знайдіть ймовірність того, що на наступний рейс запізниться від трьох до семи пасажирів.

4. Підприємство випускає вироби, довжина яких розподілена нормально з математичним сподіванням (проектна довжина), рівним 50 см. Фактична довжина знаходиться в межах 45 − 55 см. Знайти ймовірність того, що довжина навмання взятого виробу менша 48 см.

5. Кількість студентів, які відраховуються з курсу протягом навчального року, - нормально розподілена випадкова величина X з параметрами $a = 5$ і $\sigma = 2$. Знайдіть ймовірність того, що наступного навчального року буде відраховано від трьох до семи студентів з курсу.

6. Діаметр виготовлених заводом виробів – нормально розподілена випадкова величина з параметрами $a = 10$ см і $\sigma = 0.5$ см. Знайдіть симетричний відносно a інтервал, у якому з імовірністю 0.95 знаходяться діаметри виготовлених виробів.

7. Довжина деталі, яку виготовляє верстат-автомат, є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з параметрами $a = 15$ см і $\sigma = 0.2$ см. Знайдіть відсоток браку, якщо допустимі розміри деталей дорівнюють 15 ± 0.4 см.

8. Вимірювана випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $a = 10$ і $\sigma = 5$. Знайдіть симетричний відносно a інтервал, у який з ймовірністю 0.5 потрапить значення цієї величини, одержане при вимірюванні.

9. Річна виручка авіафірми – нормально розподілена випадкова величина X з середнім значенням 250 млн. гривень і стандартним відхиленням 4.5 млн. Знайдіть симетричний відносно середнього значення інтервал, в якому з імовірністю 0.9 можна очікувати виручку в наступному році.

10. Деталь, виготовлена автоматом, вважається придатною, якщо відхилення контрольованого розміру X від номіналу (математичного сподівання) не перевищує 10 мм. Точність виготовлення визначається стандартним відхиленням σ. Для прийнятої технології $\sigma = 5$ мм і X - нормально розподілене. Визначте який відсоток придатних деталей виготовляє автомат.

11. Коробки з цукерками упаковуються автоматично, їх середня маса дорівнює 1.06 кг. Знайдіть стандартне відхилення σ, якщо 5% коробок має масу, меншу 1 кг.

12. Розмір виробів, які виготовляє фабрика, – випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами a = 5 см і σ = 0.9 см. Знайти ймовірність того, що розмір навмання взятого виробу відхиляється від номіналу (математичного сподівання) не більше, ніж на 0.2 см.

13. Довжина деталі, яку виготовляє верстат-автомат, є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з параметрами a = 15 см і σ = 0.2 см. Знайдіть точність довжини виготовленої деталі, яку можна гарантувати з імовірністю 0.97.

14. Підприємство випускає вироби, довжина яких X розподілена нормально з математичним сподіванням (проектна довжина), рівним 50 см. Фактична довжина знаходиться в межах від 45 до 55 см. Знайдіть ймовірність того, що довжина навмання взятого виробу більша 52 см.

15. Випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами a = 1.6 і σ = 1. Знайдіть ймовірність того, що при певному випробуванні ця випадкова величина прийме значення з інтервалу (1.5; 2).

16. Розмір виробів, які виготовляє фабрика, – випадкова величина X підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами a = 5 см і σ = 0.9 см. В яких межах з імовірністю 0.95 знаходиться розмір навмання взятого виробу?

17. Фірма виготовляє вироби номінальної маси 1 кг (математичне сподівання) із стандартним відхиленням 5%. Знайдіть ймовірність того, що навмання відібраний виріб буде мати масу, більшу 1.05 кг.

18. Процент зайнятості крісел на рейсах авіакомпанії – випадкова величина X розподілена за нормальним законом з середнім значенням 90% і стандартним відхиленням σ = 5%. Знайдіть імовірності того, що на навмання вибраному рейсі відсоток зайнятості крісел відхилиться від середнього значення за абсолютною величиною не більше, ніж на 2%.

19. Процент зайнятості крісел на рейсах авіакомпанії – випадкова величина X розподілена за нормальним законом з середнім значенням 90% і стандартним відхиленням σ = 5%. Знайдіть імовірності того, що процент зайнятості крісел на цьому рейсі буде знаходитись в межах від 85% до 91%.

20. Швидкість вітру в районі аеропорту – нормально розподілена випадкова величина X з середнім значенням 16 км/год і стандартним відхиленням 5 км/год. Знайдіть ймовірності того, що в випадковий момент часу швидкість вітру буде в межах від 14 до 20 км/год.

Завдання 5. Лінійна регресія

Дано закон розподілу дискретної двовимірної випадкової величини (X, Y). Знайти коефіцієнт кореляції між X і Y та рівняння прямої регресії Y на X.

1.

Y	X		
	−1	0	1
1	0.10	0.15	0.20
2	0.15	0.25	0.15

2.

Y	X		
	−1	0	1
1	0.15	0.10	0.20
2	0.15	0.25	0.15

3.

Y	X		
	−1	0	1
1	0.15	0.25	0.15
2	0.10	0.20	0.15

4.

Y	X		
	−1	0	1
1	0.20	0.10	0.15
2	0.15	0.25	0.15

5.

Y	X		
	−1	0	1
1	0.20	0.25	0.10
2	0.20	0.15	0.10

6.

Y	X		
	−1	0	1
1	0.10	0.20	0.25
2	0.10	0.15	0.20

7.

Y	X		
	−1	0	1
1	0.10	0.15	0.20
2	0.15	0.25	0.15

8.

Y	X		
	−1	0	1
1	0.15	0.15	0.25
2	0.10	0.15	0.20

9.

Y	X		
	−1	0	1
1	0.15	0.25	0.15
2	0.10	0.15	0.20

10.

Y	X		
	−1	0	1
1	0.25	0.15	0.15
2	0.10	0.15	0.20

11.

Y	X		
	−1	0	1
0	0.10	0.15	0.20
1	0.15	0.25	0.15

12.

Y	X		
	−1	0	1
0	0.15	0.10	0.20
1	0.15	0.25	0.15

13.

Y	X		
	−1	0	1
0	0.15	0.25	0.15
1	0.10	0.20	0.15

14.

Y	X		
	−1	0	1
0	0.20	0.10	0.15
1	0.15	0.25	0.15

15.

Y	X		
	−1	0	1
0	0.20	0.25	0.10
1	0.20	0.15	0.10

16.

Y	X		
	−1	0	1
0	0.10	0.20	0.25
1	0.10	0.15	0.20

17.

Y	X		
	−1	0	1
0	0.10	0.15	0.20
1	0.15	0.25	0.15

18.

Y	X		
	−1	0	1
−1	0.15	0.15	0.25
1	0.10	0.15	0.20

19.

Y	X		
	−1	0	1
−1	0.15	0.25	0.15
1	0.10	0.15	0.20

20.

Y	X		
	−1	0	1
−1	0.25	0.15	0.15
1	0.10	0.15	0.20

РОЗДІЛ 3.ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Завдання 1. Вибірка та її основні характеристики

В таблиці наведено дані про відсоток вільних місць у готелі, що спостерігався протягом 100 днів. Використовуючи ці дані:

1) побудуйте інтервальний варіаційний ряд з довжиною інтервалу $h = 4$ та гістограму;

2) знайдіть вибіркову середню, вибіркову дисперсію та середньоквадратичне відхилення;

3) знайдіть моду і медіану вибірки;

4) якщо вибірка має нормальний розподіл, знайдіть надійний інтервал, що з надійністю β = 0,95 містить середнє.

1.

22,54	17,52	22,51	14,62	21,57	19,74	22,17	38,07	21,35	17,78
31,32	34,52	8,80	33,59	11,51	9,40	17,36	20,39	27,77	20,13
7,82	21,79	25,31	29,03	36,55	16,51	23,25	11,29	0,00	35,61
17,91	5,77	7,27	24,05	26,64	13,77	36,76	27,36	33,67	26,35
10,59	30,94	11,47	21,75	19,08	13,32	6,78	25,13	27,79	20,06
30,31	21,53	18,67	4,07	13,43	31,73	20,45	19,47	32,09	24,08
22,30	16,97	25,71	15,96	13,27	28,64	7,53	17,92	16,75	19,43
27,78	28,00	14,70	11,09	16,41	12,17	28,34	22,70	26,64	31,62
21,66	26,98	35,71	7,17	17,71	23,97	19,82	23,85	28,07	24,08
18,11	18,31	34,25	13,14	18,64	10,99	18,41	3,60	32,99	12,69

2.

27,75	22,74	25,18	30,79	22,69	12,67	0,00	15,40	13,24	5,14
20,89	24,62	14,47	13,29	29,64	24,27	19,42	21,25	22,64	29,90
32,75	22,82	17,72	23,23	12,55	27,55	20,52	15,88	30,89	22,62
17,42	27,04	36,16	22,43	30,91	11,56	30,48	24,25	22,17	21,97
2,77	25,83	19,07	6,35	7,83	20,57	29,94	10,80	34,50	24,30
23,01	38,90	18,87	23,44	13,97	21,61	16,95	22,15	20,18	39,10
22,98	24,42	8,52	23,05	24,43	10,06	17,78	38,48	24,98	29,53
19,84	37,17	24,45	28,59	17,77	21,55	22,60	13,27	26,29	23,60
7,20	16,19	23,43	26,81	14,18	19,91	29,21	24,97	8,04	24,68
27,47	13,14	25,41	13,60	33,75	3,72	16,39	28,45	0,00	32,56

3.

9,80	8,70	22,28	12,08	19,15	25,75	14,81	3,52	17,59	14,20
29,04	4,19	21,39	13,45	8,04	3,37	7,30	13,09	7,67	15,19
5,49	0,00	22,13	32,54	13,39	11,93	13,76	13,55	16,33	15,82
26,32	13,54	15,70	5,83	34,12	13,73	38,28	8,31	30,93	10,57
19,08	29,35	22,74	19,02	5,80	7,08	23,77	31,20	16,46	11,16
25,41	16,95	6,43	9,82	23,46	24,08	16,65	12,92	14,99	18,78
34,57	10,71	37,04	14,56	27,33	6,78	9,16	30,23	26,87	23,98
31,66	23,47	16,83	23,00	12,03	25,71	23,97	25,42	33,47	10,41
19,47	13,59	11,13	3,42	11,37	10,03	20,80	11,44	22,69	4,37
9,67	12,42	36,13	19,00	2,32	16,21	23,52	9,65	18,83	31,22

4.

2,39	24,62	9,00	22,12	19,21	35,91	20,23	16,06	26,29	10,49
28,45	4,00	18,79	12,43	21,40	10,64	7,08	39,35	13,72	17,52
37,27	13,83	26,85	10,42	23,75	15,99	29,82	36,84	19,58	16,57
23,43	32,27	21,46	4,91	11,71	25,93	23,42	16,16	18,15	25,04
10,02	24,69	23,17	29,69	27,36	18,42	23,43	25,25	16,79	5,29
22,46	19,68	18,46	15,66	34,02	9,22	26,90	17,89	13,08	9,14
13,64	25,72	14,99	24,67	14,59	12,16	24,20	22,65	25,73	20,46
27,22	2,72	17,13	0,53	30,21	28,17	25,86	17,26	12,00	29,07
17,73	17,70	15,21	19,37	8,12	22,28	11,39	6,49	11,29	21,75
16,80	27,21	32,87	0,00	32,67	30,00	7,92	20,03	12,48	34,06

5.

8,21	14,66	9,70	37,37	25,81	16,89	8,44	24,39	2,77	15,93
33,05	11,47	3,41	33,32	37,17	28,06	26,19	24,06	23,69	11,43
23,16	37,29	34,41	10,02	8,44	1,37	9,07	26,19	34,96	19,40
12,46	30,40	38,40	37,43	21,40	37,18	9,59	13,71	38,22	9,52
18,87	1,07	26,39	0,50	9,56	21,68	29,96	7,14	25,67	18,77
17,73	4,01	4,06	14,07	38,60	9,58	10,84	16,27	17,08	38,03
18,00	0,00	19,46	2,21	34,22	24,68	8,88	6,23	37,92	6,74
11,14	8,49	31,80	15,32	20,54	31,50	36,35	16,14	0,54	7,57
16,08	2,32	0,43	26,21	34,02	13,61	31,63	0,44	33,74	0,93
6,06	0,52	0,29	28,82	22,10	35,15	24,51	7,68	7,88	30,83

6.

19,15	19,08	15,25	33,81	15,08	38,59	26,86	6,79	25,50	26,68
25,89	26,61	18,59	8,44	22,65	11,17	14,77	15,56	19,08	22,42
10,42	22,90	28,64	26,14	20,65	21,44	25,48	29,55	14,96	18,13
23,52	24,35	18,02	21,08	14,33	21,83	16,38	19,35	13,73	19,07
26,39	24,61	15,94	23,64	33,23	10,79	27,87	12,12	30,24	19,34
23,88	17,58	8,19	20,99	14,21	20,37	3,63	19,92	24,78	18,72
32,05	16,48	19,68	38,55	33,44	6,90	22,32	15,07	26,95	16,39
22,42	12,55	18,82	12,62	20,68	34,30	15,40	9,27	17,61	20,71
22,89	24,92	31,61	23,05	12,44	28,23	27,69	26,96	20,59	22,97
18,71	0,00	29,96	24,30	20,89	14,73	19,40	19,59	12,12	20,87

7.

39,12	23,12	32,06	35,74	24,23	5,19	16,92	16,00	21,55	17,11
24,28	31,87	19,80	12,84	17,01	19,68	22,85	14,61	20,17	17,50
16,56	24,96	21,83	39,84	18,39	20,83	12,64	14,04	11,82	15,30
15,28	31,94	11,88	16,78	10,26	19,05	25,81	32,81	18,55	28,04
23,78	15,99	5,83	8,89	5,47	3,34	16,06	20,18	16,12	24,63
11,37	16,10	5,45	19,71	7,22	18,66	17,71	17,76	29,46	15,88
17,29	26,38	25,90	18,86	2,64	11,32	9,87	18,73	21,52	15,19
34,16	11,26	7,17	20,55	24,71	18,60	25,48	22,35	27,84	12,78
15,89	20,43	17,49	13,09	27,09	0,00	26,80	6,20	18,91	16,55
14,68	4,35	15,93	39,37	29,01	7,46	21,77	19,84	21,29	15,97

8.

24,27	15,15	28,56	24,31	16,91	18,70	23,96	24,78	19,67	18,58
33,54	23,24	21,29	23,28	20,24	26,77	13,76	19,24	18,68	22,68
25,97	17,04	24,83	26,60	31,84	10,79	21,20	35,05	21,07	21,92
27,47	24,37	22,39	24,23	20,90	20,12	24,98	16,63	29,52	18,92
21,58	17,20	21,30	23,41	27,67	33,89	15,78	18,33	8,06	22,21
16,68	26,54	25,66	25,38	18,28	23,58	27,31	20,58	20,75	16,61
25,37	21,81	30,87	15,34	27,18	26,42	13,31	5,15	31,81	29,70
29,04	34,91	16,57	20,23	15,86	28,62	20,84	22,74	0,00	19,74
21,47	19,37	30,91	14,65	18,97	11,97	39,05	36,20	14,04	24,27
16,22	20,68	17,67	20,51	20,47	16,74	32,83	25,11	14,98	19,05

9.

24,36	16,15	38,67	18,57	11,78	21,04	13,41	26,11	24,33	30,30
14,37	19,18	30,61	7,96	15,79	33,10	34,22	8,01	14,01	11,95
29,25	24,57	16,35	17,79	21,86	23,24	19,61	19,03	4,29	30,48
3,89	15,65	31,86	10,23	23,94	24,53	10,80	11,63	36,10	13,24
25,25	21,02	20,13	29,48	15,93	27,38	19,74	23,86	13,03	21,78
19,65	18,72	25,17	14,18	12,48	11,72	27,06	10,38	31,61	20,74
10,67	18,75	31,96	17,18	19,41	19,35	14,94	7,04	14,81	23,22
12,36	9,00	17,35	34,86	27,08	11,37	25,96	21,65	5,03	24,93
23,73	25,28	23,85	31,12	25,98	24,24	37,52	34,02	25,12	32,42
17,25	22,87	37,04	0,00	17,48	29,16	15,34	21,81	29,95	19,00

10.

31,11	24,86	38,73	10,27	14,83	27,11	28,19	36,40	21,10	12,97
35,83	33,34	4,85	12,89	32,10	34,49	10,92	22,07	15,87	20,26
14,01	34,19	25,50	5,77	26,46	25,22	9,82	3,12	30,37	20,95
14,13	19,73	37,42	6,84	7,63	35,38	25,80	18,17	39,51	6,71
7,51	20,15	2,60	26,04	12,77	27,90	37,45	4,80	25,22	30,35
35,33	26,33	19,75	8,34	27,14	34,23	1,12	14,32	29,32	35,54
20,80	27,73	8,66	24,91	22,65	21,32	17,93	13,20	30,46	30,00
28,00	31,52	0,89	8,04	3,11	38,66	17,43	19,41	38,04	13,80
26,00	6,40	25,36	22,03	31,59	12,03	29,54	26,45	26,09	14,99
38,90	6,98	14,72	25,03	0,00	17,39	22,42	35,01	9,85	13,30

11.

23,35	9,97	38,17	15,42	27,75	15,50	29,87	10,44	15,37	11,13
13,34	17,54	24,14	19,70	9,35	31,82	5,68	22,36	1,92	8,76
20,55	11,46	23,65	25,47	14,03	9,62	15,91	28,28	15,56	26,61
30,34	0,00	22,28	9,04	17,96	27,09	12,48	4,15	15,62	20,61
17,07	14,66	30,83	37,08	11,05	11,11	19,86	17,80	7,94	22,29
16,62	9,21	13,17	16,34	13,64	21,06	26,25	24,38	20,75	22,82
28,58	15,03	23,64	18,16	6,01	32,40	18,65	18,42	22,66	21,51
27,48	24,09	18,70	7,72	20,16	19,79	20,78	25,31	13,09	18,22
21,26	20,11	21,22	3,32	23,44	30,42	18,79	8,94	16,49	20,83
21,22	18,96	20,89	6,55	21,12	20,01	8,67	16,16	28,34	20,22

12.

19,78	24,22	13,35	18,12	20,98	19,56	20,95	22,94	17,97	31,40
13,76	23,97	12,42	16,93	13,85	29,04	17,24	12,47	13,23	20,41
17,71	23,68	18,34	21,56	19,76	38,44	12,95	21,06	30,71	26,70
22,76	18,41	5,50	16,62	19,35	17,31	25,27	14,45	20,54	20,93
22,36	17,73	15,92	23,63	15,38	17,28	18,86	18,38	25,28	14,69
25,28	17,32	11,01	20,86	36,36	24,46	21,44	27,90	20,43	22,45
15,64	12,74	17,89	27,84	8,97	0,00	11,07	24,50	21,98	23,28
11,44	25,69	22,20	23,80	21,19	17,84	15,72	21,93	24,30	15,78
8,62	15,05	23,24	29,31	13,66	13,19	29,54	27,60	24,67	33,40
7,53	8,10	9,99	24,94	27,03	27,50	18,85	15,11	33,32	30,17

13.

30,23	35,79	13,49	17,96	29,78	13,49	6,23	17,57	18,95	21,45
25,00	31,12	11,22	18,86	21,29	12,82	28,15	20,58	32,16	20,39
12,31	18,78	18,32	16,06	17,41	34,23	15,46	25,75	12,48	20,04
5,01	22,18	10,86	23,03	27,78	21,01	11,34	2,59	9,70	20,90
23,84	9,25	17,29	8,71	11,70	19,54	28,70	22,68	5,52	26,02
24,89	28,36	10,91	13,85	23,82	13,34	17,00	25,44	12,44	21,79
21,92	11,88	22,62	14,60	25,11	13,20	0,00	12,69	7,73	29,77
10,27	14,46	22,74	31,54	25,75	39,36	23,13	5,33	13,78	23,18
21,93	24,76	23,73	19,97	6,99	8,38	18,60	11,17	7,55	19,82
5,33	31,43	23,00	27,89	11,52	28,32	17,65	26,82	21,11	23,59

14.

14,60	6,55	12,99	21,51	13,30	7,43	26,46	7,62	5,49	19,65
18,40	32,41	15,06	23,20	17,37	24,86	14,01	30,49	11,77	9,69
13,21	14,23	4,63	7,52	7,93	17,17	20,07	18,05	23,47	9,12
15,55	22,49	11,87	12,81	11,12	0,00	8,63	4,76	4,47	4,40
9,38	21,45	15,39	10,80	17,03	16,00	12,69	16,21	17,32	22,78
19,14	20,82	13,37	0,36	13,22	14,49	19,74	20,46	21,33	17,11
16,79	15,09	20,57	17,64	13,12	22,38	21,97	8,83	21,60	30,09
8,34	4,75	26,28	0,75	14,64	17,12	8,59	9,75	13,69	1,85
28,60	26,17	13,48	16,47	16,03	10,95	15,00	18,14	8,97	14,20
9,79	21,90	16,96	20,53	10,96	14,33	17,39	22,30	14,00	39,11

15.

13,79	22,14	20,91	16,98	29,13	27,75	25,65	23,12	14,01	7,21
20,33	17,20	21,06	20,35	18,38	18,96	24,15	7,33	23,12	20,46
22,37	8,04	18,81	11,05	18,51	23,19	29,71	38,93	21,79	17,11
22,89	22,94	33,76	19,98	28,21	22,48	6,77	22,01	16,72	21,77
17,56	26,42	25,58	33,68	21,80	32,17	21,38	20,61	21,66	20,79
27,52	25,00	20,55	18,71	8,01	27,04	6,64	4,76	12,75	24,85
23,97	13,37	27,22	24,07	18,55	7,39	22,71	7,65	21,60	18,66
28,14	25,86	30,15	13,93	11,13	17,44	21,46	18,82	24,74	20,24
22,25	20,88	20,43	14,79	22,72	23,31	19,78	17,17	14,69	26,79
22,40	18,16	27,98	0,00	21,96	20,93	17,75	20,45	18,19	17,91

16.

14,66	13,43	8,69	17,06	5,79	35,81	23,98	15,17	21,58	16,07
17,84	19,31	17,13	25,56	19,92	15,47	12,17	17,45	8,65	11,36
31,12	16,85	28,70	23,18	17,37	21,97	20,44	23,96	2,88	16,96
16,64	7,68	18,41	22,46	13,44	24,80	16,32	10,68	5,37	22,95
22,99	24,58	7,52	5,31	15,74	24,23	2,28	23,71	24,88	19,99
19,35	3,90	26,44	10,73	27,99	14,43	30,11	12,28	19,74	21,71
15,50	14,71	24,35	21,11	20,11	15,56	15,41	20,71	0,00	21,08
15,59	21,43	15,35	33,66	15,26	6,89	28,60	8,30	14,67	29,29
1,83	19,31	37,61	28,74	17,87	12,67	16,50	15,73	38,92	22,08
14,33	10,75	13,93	24,59	8,76	21,90	31,87	16,63	19,25	33,06

17.

24,68	33,48	30,68	29,70	20,83	38,44	5,72	25,39	23,01	18,53
18,16	19,71	23,70	13,68	22,06	21,61	22,65	20,80	22,44	8,84
10,53	24,82	7,52	30,07	15,11	2,32	13,70	17,33	11,09	3,05
15,07	31,39	28,37	20,59	18,05	16,59	30,10	8,20	25,88	30,77
20,88	22,79	10,77	17,49	8,41	15,53	8,03	17,79	26,27	13,24
26,61	27,31	20,70	33,95	20,07	23,90	26,84	9,38	9,13	16,36
17,01	36,01	22,45	4,83	16,17	27,80	18,01	13,98	27,78	17,37
35,13	10,85	10,97	21,95	22,31	25,66	25,43	14,30	8,70	18,21
8,51	37,20	18,64	35,61	18,81	19,71	20,19	18,82	29,60	23,80
6,06	0,00	15,01	25,85	26,49	3,19	35,78	15,21	5,81	23,87

18.

18,92	14,14	5,66	24,90	22,64	2,06	20,71	10,20	7,35	29,18
8,75	8,70	12,99	17,96	15,24	21,42	12,05	24,07	15,83	19,57
15,66	13,94	12,75	9,94	13,51	26,87	14,82	10,27	21,44	16,92
22,35	17,87	23,27	23,62	13,38	0,00	14,03	21,42	18,31	4,78
19,69	10,37	26,21	18,47	2,36	15,58	25,96	17,46	15,50	38,23
9,25	15,37	27,35	10,71	12,65	10,22	11,34	12,60	24,68	21,22
29,33	29,37	24,08	17,96	5,46	16,22	17,76	13,82	25,33	17,87
22,90	12,92	14,79	6,55	22,33	13,94	0,72	10,39	9,04	25,32
16,38	11,33	22,07	6,64	35,76	9,09	11,44	6,23	11,99	7,83
7,40	14,06	18,45	22,34	11,32	8,91	10,44	11,42	15,19	2,39

19.

25,27	12,93	18,17	24,72	24,32	23,29	16,01	25,11	18,00	19,85
6,14	22,25	30,07	23,03	4,40	37,63	24,76	12,52	22,76	10,90
28,70	21,42	21,50	22,29	16,10	26,90	8,88	24,33	0,60	26,23
12,42	21,56	12,77	15,14	13,99	18,30	13,62	11,01	7,28	32,28
23,25	16,49	11,81	32,59	17,85	17,22	32,18	16,19	22,03	16,97
15,92	27,26	16,16	22,10	31,04	21,33	12,43	15,34	22,69	19,30
14,12	26,51	18,30	4,44	23,39	15,14	31,75	20,38	39,82	20,55
23,95	28,30	30,91	11,59	16,77	32,12	30,52	0,00	16,28	25,02
10,31	30,52	21,43	21,49	10,79	20,14	16,80	24,07	16,57	17,17
30,07	30,68	21,29	15,18	34,89	21,39	13,78	26,68	10,14	29,53

20.

10,70	15,97	20,57	13,57	18,54	12,89	22,64	18,00	21,29	11,28
11,51	23,08	21,32	17,77	17,16	23,68	24,13	11,53	15,95	1,38
15,92	12,33	9,52	4,62	13,67	36,90	11,30	7,58	10,35	10,86
15,35	15,81	10,12	17,98	7,77	5,11	11,51	31,14	21,79	7,67
28,35	9,83	21,14	19,62	17,21	10,45	14,24	5,55	20,71	39,44
18,74	25,31	17,47	7,93	20,68	20,95	24,25	14,24	14,82	12,38
14,67	22,45	30,93	14,33	4,99	11,39	9,39	20,76	6,69	9,09
14,59	9,88	18,94	4,72	7,92	14,47	18,27	15,56	0,00	5,83
10,85	11,61	16,80	14,45	9,16	20,49	8,45	7,00	6,21	13,73
12,05	20,15	9,11	18,66	19,89	23,18	21,64	11,99	9,80	32,43

Завдання 2. Вибіркові характеристики зв'язку

В таблиці вміщено результати спостережень за парою величин X та Y, де X – кількість кредитів виданих фізичним особам відділенням деякого банку протягом дня, а Y – кількість договорів страхування укладених в той же день регіональним відділенням однойменної страхової компанії. Тривалість спостереження 50 днів. За даною двовимірною вибіркою:

1) побудуйте кореляційну таблицю;
2) знайдіть вибірковий коефіцієнт кореляції;
3) запишіть вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X.

№1.

X	Y
2	7
4	9
2	7
3	8
3	8
3	8
2	7
2	7
3	8
4	8
4	8
4	8
3	7
3	7
4	7
2	7
3	7
3	7
4	8
4	8
2	8
3	7
3	7
2	8
3	8
3	8
4	8
1	6
4	8
3	8
4	8
2	8
2	6
2	8
4	7
4	8
2	7
3	8
3	8
2	7
2	6
3	8
3	8
2	8
4	8
2	7
3	7
3	7
4	7
4	7

№2.

X	Y
5	7
6	5
7	5
4	7
4	8
5	7
7	5
6	6
6	6
4	7
6	6
6	7
6	6
5	7
7	5
6	6
6	6
4	8
5	6
5	8
6	5
5	7
5	6
5	7
4	7
4	7
5	6
6	6
6	5
5	7
4	7
7	5
6	6
7	6
5	6
5	5
6	5
6	5
4	6
6	7
5	6
6	5
5	7
6	6
5	7
7	5
6	6
6	6
6	6
5	6

№3.

X	Y
1	15
2	15
2	15
1	14
3	16
2	14
2	13
2	14
1	13
1	14
1	14
2	14
3	15
2	14
2	14
1	14
3	15
1	15
3	15
2	14
2	13
2	15
1	14
2	15
1	14
3	16
1	14
0	14
2	14
1	15
1	15
3	15
2	16
2	15
1	15
3	15
2	15
3	16
3	14
3	16
2	15
1	15
2	15
3	15
1	15
2	14
2	15
1	14
3	15
1	14

№4.

X	Y
8	23
10	26
8	24
10	25
9	24
8	24
8	23
8	23
8	23
8	23
11	26
10	25
10	25
9	24
9	24
9	24
8	22
8	22
10	26
10	26
9	23
9	25
10	25
8	22
9	24
8	23
8	22
8	24
10	25
9	24
10	25
8	23
9	24
9	24
9	24
9	24
8	23
8	23
10	25
9	25
9	24
10	25
8	23
8	23
9	25
10	25
9	24
9	24
8	22
9	23

№5.

X	Y
9	16
10	16
10	17
9	15
9	15
10	17
9	16
11	17
10	17
9	17
9	15
9	16
9	16
9	15
10	16
10	16
12	18
10	17
10	16
10	17
12	18
11	17
10	17
9	16
10	16
10	16
10	17
10	17
9	17
9	16
9	16
11	17
9	16
9	15
11	18
10	16
10	16
10	17
10	16
11	18
12	18
10	16
11	17
9	15
9	16
10	16
9	16
10	17
9	16
11	18

№6.

X	Y
5	9
5	9
5	10
5	9
5	9
4	11
4	10
3	9
5	10
5	10
6	9
6	10
5	11
4	10
4	11
6	10
4	10
4	10
6	9
4	10
5	10
3	10
5	9
4	10
4	9
3	9
4	9
5	10
5	10
4	9
5	10
4	10
4	10
4	9
5	9
5	11
4	10
3	10
3	10
4	11
5	11
5	10
5	9
5	10
4	10
6	10
4	11
6	10
3	10
5	9

№7.

X	Y
3	13
1	15
2	13
1	14
3	12
3	13
3	14
3	13
3	13
1	14
2	14
3	13
4	12
2	14
2	13
3	12
2	13
3	13
3	13
1	13
2	13
3	13
3	13
1	14
2	13
2	14
3	13
3	13
2	15
1	15
4	12
3	13
1	14
2	13
2	13
3	13
3	13
3	14
2	13
2	13
3	13
2	14
2	14
2	13
1	13
3	13
4	12
2	14
3	14
2	13

№8.

X	Y
9	15
8	15
7	13
10	16
10	15
9	16
9	15
9	16
8	14
7	14
8	15
9	15
8	15
9	15
7	15
8	15
9	14
8	15
9	15
8	15
7	14
9	16
8	15
7	14
9	15
8	14
8	14
9	15
8	15
9	15
8	15
9	15
9	14
7	14
9	14
7	14
7	14
9	15
9	15
8	15
9	15
8	14
9	16
8	14
8	15
8	14
9	16
10	15
9	15
7	13

№9.

X	Y
3	14
3	14
2	13
2	13
2	13
4	15
3	15
3	13
3	14
4	14
2	13
2	14
3	14
2	15
1	13
2	13
1	13
4	15
3	13
2	14
3	15
4	15
2	14
4	14
3	15
1	13
3	15
2	14
3	14
4	15
4	14
4	14
1	13
3	15
1	13
2	13
3	14
1	13
3	13
3	13
2	13
4	14
3	14
4	14
2	14
4	16
1	14
3	14
2	13
4	14

№10.

X	Y
10	17
9	17
9	17
9	16
10	18
9	17
9	17
9	16
10	17
9	18
11	18
9	16
9	17
8	15
9	17
9	17
9	15
10	18
10	18
10	17
8	16
10	18
9	17
9	16
9	17
8	16
9	16
9	17
9	18
8	16
9	16
8	15
10	18
9	17
9	17
8	16
8	16
8	16
9	17
10	18
9	16
8	16
9	16
10	18
10	18
10	17
8	16
10	17
9	16
9	17

№11.

X	Y
2	8
2	8
2	7
1	7
2	7
1	8
2	8
2	7
3	9
1	8
2	8
1	8
4	8
1	7
3	8
1	8
4	7
3	7
2	8
3	7
4	7
1	9
3	8
3	8
3	8
4	8
3	7
3	8
3	8
3	8
1	8
4	8
4	8
4	8
3	8
3	8
2	7
4	7
2	9
3	8
2	8
2	9
2	8
4	7
2	7
2	8
4	7
4	7
2	8
3	8

№12.

X	Y
9	13
11	13
10	12
10	13
9	12
10	12
9	12
9	12
9	12
11	13
8	11
9	12
9	12
11	14
9	12
9	13
9	12
10	13
9	12
11	13
9	12
9	12
10	13
9	12
10	12
8	11
10	13
10	13
11	13
10	12
9	12
10	13
8	11
9	12
11	14
10	13
11	13
10	12
11	14
9	11
8	11
8	12
11	12
11	13
8	11
9	12
10	12
9	12
10	13
9	13

№13.

X	Y
7	18
8	19
7	18
8	18
8	19
7	18
7	18
9	19
8	18
9	19
7	18
8	19
7	18
8	18
7	18
8	18
8	19
8	18
7	18
8	19
8	19
8	19
7	18
8	19
8	19
8	18
8	19
8	18
8	19
9	19
9	20
7	18
7	18
8	18
7	17
6	17
9	19
8	18
7	18
8	18
8	19
7	18
8	18
9	19
7	18
8	19
7	18
9	18
9	19
7	17

№14.

X	Y
8	15
8	16
5	13
5	13
7	15
7	15
8	15
7	15
7	15
6	14
6	14
6	14
7	15
5	13
8	15
6	14
7	15
8	15
7	15
6	14
6	14
7	15
5	14
6	14
6	14
5	13
7	15
5	14
7	15
6	14
5	13
5	13
5	14
6	14
6	14
8	16
7	15
7	14
5	14
6	13
7	15
6	14
5	13
7	14
6	14
6	14
8	17
6	14
7	14
6	14

№15.

X	Y
3	8
4	9
3	9
2	8
3	10
3	8
4	9
3	9
5	10
5	10
4	9
5	10
4	10
4	10
4	9
4	9
3	9
3	8
3	8
4	10
5	11
5	10
4	9
4	10
5	10
4	9
5	9
4	9
3	9
3	9
4	9
5	11
4	9
3	8
3	9
5	10
5	10
4	9
2	8
5	10
4	9
5	9
3	8
2	8
3	8
4	9
4	10
3	8
4	10
3	9

№16.

X	Y
7	14
9	14
9	15
8	14
8	13
9	14
7	13
9	15
9	14
8	13
10	13
7	14
8	14
8	14
9	14
10	13
8	14
8	14
10	13
10	14
8	14
8	14
8	13
10	14
9	13
9	14
9	14
7	13
8	13
8	14
8	13
7	14
9	15
9	13
8	14
8	13
10	14
9	14
8	13
7	14
7	14
7	13
7	14
8	14
9	14
7	13
8	15
10	13
8	13
8	13

№17.

X	Y
7	10
8	11
9	9
8	10
9	11
9	10
9	11
8	9
9	11
8	10
8	10
9	12
8	12
8	10
8	11
9	11
8	11
8	11
9	10
8	10
7	10
10	10
7	11
10	10
9	11
7	10
7	11
8	10
8	10
8	11
7	10
8	10
7	11
8	11
7	10
9	11
9	11
8	11
9	10
8	11
9	10
9	10
9	11
8	10
9	10
9	11
9	11
8	10
7	10
7	11

№18.

X	Y
2	7
1	6
1	7
3	9
0	5
0	6
1	7
1	7
1	7
1	7
3	9
2	8
2	7
3	8
1	6
0	6
1	8
1	7
1	6
2	8
0	6
1	7
1	7
2	7
1	6
2	8
1	6
3	8
3	7
1	6
3	8
0	6
3	8
1	7
1	7
3	8
2	7
1	7
1	7
1	7
1	7
0	6
2	7
3	8
2	7
1	7
2	7
3	8
1	7
1	6

№19.

X	Y
2	7
0	6
1	7
2	8
3	8
3	8
3	8
3	8
1	7
2	8
1	7
2	8
2	7
2	8
2	8
3	9
2	7
2	7
2	6
3	7
2	7
1	8
2	8
2	7
1	7
3	8
1	8
3	8
2	7
3	9
2	7
1	8
2	6
1	7
2	7
2	7
2	6
2	7
1	6
2	6
2	7
3	8
3	8
3	7
2	8
2	7
1	8
0	7
2	7
3	8

№20.

X	Y
2	10
4	10
4	10
2	9
3	10
3	10
4	8
2	9
4	11
3	9
3	9
2	10
3	9
3	9
3	10
2	10
5	10
3	9
4	11
2	9
3	10
3	11
3	9
3	9
4	10
4	10
3	10
2	9
4	10
3	10
3	9
2	9
3	10
2	10
4	10
4	10
2	10
4	9
2	9
5	9
2	9
4	10
2	9
2	9
4	9
4	10
2	10
3	10
3	10
2	9

№21.

X	Y
4	9
5	10
5	10
6	10
6	10
6	10
5	10
6	11
7	12
7	11
5	9
7	11
5	10
5	10
4	9
7	11
6	10
7	12
7	11
5	10
7	12
6	11
5	10
5	9
6	11
6	10
4	9
4	9
5	11
4	9
7	12
7	12
7	12
5	9
5	10
6	10
7	12
6	10
7	12
5	10
6	12
5	10
5	9
5	10
5	10
6	11
7	11
6	11
4	9
7	11

№22.

X	Y
9	7
10	6
9	5
9	7
11	8
9	7
10	7
10	6
10	7
9	7
9	7
9	7
10	7
9	7
8	8
10	7
9	7
10	7
9	7
11	8
11	7
10	8
9	7
11	7
9	7
8	7
10	7
10	7
9	6
10	8
11	7
10	7
9	6
10	6
10	7
9	7
11	7
9	7
11	6
10	7
10	6
10	6
9	7
9	7
10	6
8	7
11	7
10	7
10	8
10	7

№23.

X	Y
9	14
10	14
9	12
9	15
11	15
9	13
10	14
11	15
9	13
9	14
9	14
10	14
11	14
10	15
10	14
11	14
9	13
10	14
11	15
12	15
8	13
10	14
11	15
11	14
12	15
11	15
10	13
9	14
10	14
10	14
11	15
9	13
9	13
9	14
11	15
10	15
9	14
10	15
11	15
9	13
8	13
11	14
9	14
12	15
9	14
10	14
11	15
10	14
11	15
11	14

№24.

X	Y
6	13
8	15
9	15
8	14
7	14
8	15
8	16
7	15
8	15
7	14
8	15
8	14
9	15
9	15
8	14
6	13
7	14
9	16
7	15
8	15
8	15
8	15
9	15
6	14
8	15
7	14
9	15
7	15
9	15
8	14
8	15
9	14
8	15
9	15
9	16
8	14
8	15
7	14
8	15
9	16
7	14
7	14
9	15
8	14
9	15
7	14
8	15
8	14
8	15
8	15

ДОДАТКИ

Таблиця 1. Значення функції Гауса $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

x	**Соті долі *x***									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17300
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3,1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3,2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3,3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3,4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3,5	00087	00084	00081	00079]	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3,6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3,7	00042	00041	00039	00038	0037	00035	00034	00033	00031	00030
3,8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3,9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014

x	**Десяті долі *x***				
	0	**2**	**4**	**6**	**8**
4,	0,0001338	0000589	0000249	0000101	0000040
5,	0000015				

Таблиця 2. Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

x	**Соті долі *x***									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37285	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	44352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	4952
2.6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	4964
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49835	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	4992!	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	4997
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	48881	49982	49983	49983
3,6	49984	49985	40085	49986	49986	49987	49987	49988	49988	4998
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	4999
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997

x	**Десяті долі x**				
	0	**2**	**4**	**6**	**8**
4,	0,4999683	4999867	4999946	4999979	4999992
5,	4999997				

Таблиця 3. Значення функції $P(m,\lambda)=\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$.

m\ λ	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,496585	0,449329	0,406570
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,347610	0,359463	0,365913
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,121663	0,143785	0,164661
3	0,000151	0,001092	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,028388	0,038343	0,049398
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,004968	0,007669	0,011115
5	0,000000	0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,000696	0,001227	0,002001
6		0,000000	0,000001	0,000004	0,000013	0,000036	0,000081	0,000164	0,000300
7			0,000000	0,000000	0,000001	0,000003	0,000008	0,000019	0,000039
8					0,000000	0,000000	0,000001	0,000002	0,000004
9							0,000000	0,000000	0,000000

m\λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,367879	0,135335	0,049787	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,367879	0,270671	0,149361	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111
2	0,183940	0,270671	0,224042	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998
3	0,061313	0,180447	0,224042	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994
4	0,015328	0,090224	0,168031	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737
5	0,003066	0,036089	0,100819	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727
6	0,000511	0,012030	0,050409	0,104196	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090
7	0,000073	0,003437	0,021604	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116
8	0,000009	0,000859	0,008102	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756
9	0,000001	0,000191	0,002701	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756
10	0,000000	0,000038	0,000810	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580
11		0,000007	0,000221	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020
12		0,000001	0,000055	0,000642	0,003434	0,011264	0,026350	0,048127	0,072765
13		0,000000	0,000013	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376
14			0,000003	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384
15			0,000001	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431
16			0,000000	0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930
17				0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786
18				0,000000	0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893
19					0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370
20					0,000000	0,000004	0,000030	0,000159	0,000617
21						0,000001	0,000010	0,000061	0,000264
22						0,000000	0,000003	0,000022	0,000108
23							0,000001	0,000008	0,000042
24							0,000000	0,000003	0,000016
25								0,000001	0,000006
26								0,000000	0,000002
27									0,000001
28									0,000000

Таблиця 4. Значення функції $\sum_{m=0}^{k} P(m,\lambda) = \sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$.

k\\λ	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**
0	0,90483	0,81873	0,74081	0,67032	0,60653	0,54881	0,49658	0,44932	0,40657
1	0,99532	0,98247	0,96306	0,93844	0,90979	0,87809	0,84419	0,80879	0,77248
2	0,99984	0,99885	0,99640	0,99207	0,98561	0,97688	0,96585	0,95257	0,93714
3	0,99999	0,99994	0,99973	0,99922	0,99824	0,99664	0,99424	0,99092	0,98654
4	1,00000	0,99999	0,99998	0,99993	0,99982	0,99960	0,99921	0,99858	0,99765
5		1,00000	0,99999	0,99999	0,99998	0,99996	0,99991	0,99981	0,99965
6			1,00000	1,00000	0,99999	0,99999	0,99999	0,99997	0,99995
7					1,00000	1,00000	0,99999	0,99999	0,99999
8							1,00000	1,00000	1,00000

k\ λ	**1,0**	**2,0**	**3,0**	**4,0**	**5,0**	**6,0**	**7,0**	**8,0**	**9,0**
0	0,36787	0,13533	0,04978	0,01831	0,00673	0,00247	0,00091	0,00033	0,00012
1	0,73575	0,40600	0,19914	0,09157	0,04042	0,01735	0,00729	0,00301	0,00123
2	0,91969	0,67667	0,42319	0,23810	0,12465	0,06196	0,02963	0,01375	0,00623
3	0,98101	0,85712	0,64723	0,43347	0,26502	0,15120	0,08176	0,04238	0,02122
4	0,99634	0,94734	0,81526	0,62883	0,44049	0,28505	0,17299	0,09963	0,05496
5	0,99940	0,98343	0,91608	0,78513	0,61596	0,44568	0,30070	0,19123	0,11569
6	0,99991	0,99546	0,96649	0,88932	0,76218	0,60630	0,44971	0,31337	0,20678
7	0,99999	0,99890	0,98809	0,94886	0,86662	0,74398	0,59871	0,45296	0,32389
8	0,99999	0,99976	0,99619	0,97863	0,93190	0,84723	0,72909	0,59254	0,45565
9	1,00000	0,99995	0,99889	0,99186	0,96817	0,91607	0,83049	0,71662	0,58740
10		O,99999	0,99970	0,99716	0,98630	0,95737	0,90147	0,81588	0,70598
11		0,99999	0,99992	0,99908	0,99454	0,97990	0,94665	0,88807	0,80300
12		1,00000	0,99998	0,99972	0,99798	0,99117	0,97300	0,93620	0,87577
13			0,99999	0,99992	0,99930	0,99637	0,98718	0,96581	0,92614
14			0,99999	0,99998	0,99977	0,99860	0,99428	0,98274	0,95853
15			1,00000	0,99999	0,99993	0,99949	0,99759	0,99176	0,97796
16				0,99999	0,99998	0,99982	0,99904	0,99628	0,98889
17				1,00000	0,99999	0,99994	0,99963	0,99840	0,99468
18					0,99999	0,99998	0,99987	0,99935	0,99757
19					1,00000	0,99999	0,99995	0,99974	0,99894
20						0,99999	0,99998	0,99990	0,99956
21						1,00000	0,99999	0,99996	0,99982
22							0,99999	0,99998	0,99993
23							1,00000	0,99999	0,99997
24								0,99999	0,99999
25								1,00000	0,99999
26									0,99999
27									1,00000

Таблиця 5. Значення $t = t(\beta, r)$, що задовольняють рівнянню $P(|T| < t) = 2\int_0^t S_r(x)dx = \beta$, де $S_r(x)$ - щільність розподілу Стьюдента з r ступенями вільності.

r \ β	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,98**	**0,99**	**0,999**
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,08	6,31	12,71	31,8	63,7	636,6
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,336	1,886	2,92	4,3	6,96	9,92	31,6
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,13	2,77	3,75	4,6	8,61
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,44	1,943	2,45	3,14	3,71	5,96
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,36	3,00	3,5	5,4
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,86	2,31	2,9	3,36	5,04
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,26	2,82	3,25	4,78
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,23	2,76	3,17	4,59
11	0,129	0,259	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,2	2,72	3,11	4,49
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,18	2,68	3,06	4,32
13	0,128	0,258	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,35	1,771	2,16	2,65	3,01	4,22
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,14	2,62	2,98	4,14
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,13	2,6	2,95	4,07
16	0,128	0,257	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,12	2,58	2,92	4,02
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,74	2,11	2,57	2,9	3,96
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,33	1,734	21	2,55	2,88	3,92
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,09	2,54	2,86,	3,88
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,09	2,53	2,84	3,85
21	0,127	0,256	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,08	2,52	2,83	3,82
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,07	2,51	2,82	3,79
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,07	2,5	2,81	3,77
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,06	2,49	2,8	3,74
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,06	2,48	2,79	3,72
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,06	2,48	2,78	3,71
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,05	2,47	2,77	3,69
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,05	2,47	2,76	3,67
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,04	2,46	2,76	3,66
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,31	1,697	2,04	2,46	2,75	3,65
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,05	1,303	1,684	2,02	2,42	2,7	3,55
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,,296	1,671	2	2,39	2,66	3,46
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,98	2,36	2,62	3,37
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,96	2,33	2,58	3,29

Таблиця 6. Значення $\chi^2_{r,p}$, що задовольняють рівнянню $P(\chi_r^2 \geq \chi^2_{r,p}) = p$, де r - число ступенів вільності.

r\p	**0,99**	**0,98**	**0,95**	**0,90**	**0,80**	**0,70**	**0,50**	**0,30**	**0,20**	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,001**
1	0	0,001	0,00	0,016	0,06	0,148	0,45	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	0,02	0,04	0,103	0,211	0,44	0,713	1,386	2,41	3,22	4,6	5,99	7,82	9,21	13,82
3	0,115	0,185	0,35	0,58	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	0,29	0,42	0,711	1,064	1,649	2,2	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,57	13,28	18,46
5	0,55	0,75	1,145	1,61	2,34	3	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	0,87	1,134	1,635	2,2	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5
7	1,239	1,564	217	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,8	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1	26,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,86	618	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	129	1463	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	3,57	4,18	5,23	6,3	7,81	9,03	11,34	1401	15,81	18,55	21	24,1	26,2	32,9
13	411	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	361
15	5,23	5,98	7,26	8,53	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,3	25	28,3	30,6	37,7
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	1262	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32	39,3
17	641	7,26	8,67	10,08	12	13,53	16,34	19,51	21,6	24,8	27,6	31	33,4	40,8
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34	20,6	22,8	26	28,9	32,3	34,8	42,3
19	7,63	8,57	10,11	11,55	13,72	15,35	18,34	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	22,8	25	28,4	31,4	35	37,6	45,3
21	8,9	9,92	11,59	13,24	15,44	17,18	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	9,54	10,6	1234	14,04	1631	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3
23	10,2	11,29	13,09	14,85	17,19	19,02	22,3	26	28,4	32	35,2	39	41,5	49,7
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06	19,94	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43	51,2
25	11,52	12,7	14,61	16,47	18,94	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3	52,6
26	12,2	13,41	15,38	17,29	19,82	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	64,1
27	12,88	14,12	16,15	18,11	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47	55,5
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,5	23,6	27,3	31,4	34	37,9	41,3	45,4	48,3	56,9
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	58,3
30	14,95	16,31	18,49	20,6	23,4	26,5	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	48	50,9	59,7

Таблиця 7. Значення $F(\alpha,n,m)$, що задовольняють рівнянню $P(F_{n,m} \geq F_{\alpha,n,m}) = \alpha$, де випадкова величина $F_{n,m}$ має розподіл Фішера-Снедокора з n і m ступенями вільності

α = 0,01

m\n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**12**	**24**	∞
1	4052,1	4999,0	5403,5	5625,1	5764,1	5889,4	5981,3	6105,8	6234,2	6366,5
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,42	99,46	99,50
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,49	27,05	26,60	26,12
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	13,93	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,27	9,89	9,47	9,02
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,31	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,47	6,07	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,28	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,11	4,73	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,33	3,91
11	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,74	4,40	4,02	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	3,78	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,30	3,96	3,59	3,16
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,14	3,80	3,43	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,29	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,55	3,18	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,79	3,45	3,08	2,65
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,71	3,37	3,01	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,63	3,30	2,92	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	2,86	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,51	3,17	2,80	2,36
22	7,94	5,72	4,81	4,31	3,99	3,75	3,45	3,12	2,75	2,30
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,41	3,07	2,70	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4:22	3,90	3,67	3,36	3,03	2,66	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,32	2,99	2,62	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,29	2,96	2,58	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,26	2,93	2,55	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,23	2,90	2,52	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,20	2,87	2,49	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84	2,48	2,01
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,07	2,74	2,37	1,90
40	7,31	5,18	4,31	3,38	3,51	3,29	2,99	2,66	2,29	1,82
45	7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	2,94	2,61	2,23	1,75
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	2,89	2,56	2,18	1,68
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,12	1,60
∞	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,18	1,79	1,00

α = 0,05

m\n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**12**	**24**	∞
1	61,45	99,50	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04	254,32
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,5
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,21
8	5,32	4,46	4,07	3,48	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,91
9	5,12	4,26	3,63	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,79
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,48	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,72	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,25	2,96	2,73	2,57	2,45	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62 I
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,52
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
∞	3,48	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

Таблиця 8. Значення $\lambda_{\alpha,n}$, що задовільняють рівнянню $P(\sup\limits_{-\infty<x<\infty}\left|F(x)-F_n^*(x)\right|\geq\lambda_{\alpha,n})=\alpha$.

n	**α**				**n**	**α**			
	0,10	**0,05**	**0,02**	**0,01**		**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**
1	0,950	0,975	0,990	0,995	**51**	0,168	0,187	0,208	0,224
2	776	842	900	929	**52**	166	185	207	222
3	636	708	789	829	**53**	165	183	205	220
4	565	624	689	734	**54**	163	181	203	218
5	510	563	627	669	**55**	162	180	201	216
6	468	519	577	617	**56**	160	178	199	214
7	436	483	538	576	**57**	159	177	198	212
8	410	454	507	542	**58**	158	175	196	210
9	388	430	480	513	**59**	156	174	194	208
10	369	409	457	489	**60**	155	172	193	207
11	352	391	437	468	**61**	154	171	191	205
12	338	375	419	449	**62**	153	170	190	203
13	326	361	404	433	**63**	151	168	188	202
14	314	349	390	418	**64**	150	167	187	200
15	304	338	377	404	**65**	149	166	185	199
16	295	327	366	392	**66**	148	164	184	197
17	286	318	355	381	**67**	147	163	183	196
18	279	309	346	371	**68**	146	162	180	194
19	271	301	337	361	**69**	145	161	181	193
20	265	294	329	352	**70**	144	160	179	192
21	259	287	321	344	**71**	143	159	177	190
22	253	281	314	337	**72**	142	158	176	189
23	248	275	307	330	**73**	141	157	175	188
24	242	269	301	323	**74**	140	155	174	187
25	238	264	295	317	**75**	139	154	173	185
26	233	259	290	311	**76**	138	153	172	184
27	229	254	284	305	**77**	137	152	171	183
28	225	250	279	300	**78**	136	152	169	182
29	221	246	275	295	**79**	136	151	168	181
30	218	242	270	290	**80**	135	150	167	180
31	215	238	266	285	**81**	134	149	166	178
32	211	234	262	281	**82**	133	148	165	177
33	208	231	258	277	**83**	132	147	164	176
34	205	227	254	273	**84**	132	146	163	175
35	202	224	251	269	**85**	131	145	162	174
36	199	221	247	265	**86**	130	144	161	173
37	196	218	244	262	**87**	129	144	161	172
38	194	215	241	258	**88**	129	143	160	171
39	192	213	238	255	**89**	128	142	159	170
40	189	210	235	252	**90**	127	141	158	169
41	187	208	232	249	**91**	126	140	157	169
42	185	205	229	246	**92**	126	140	156	168
43	183	203	227	243	**93**	125	139	155	167
44	181	201	224	241	**94**	124	138	155	166
45	179	198	222	238	**95**	124	138	154	165
46	177	196	219	235	**96**	123	137	153	164
47	175	194	217	233	**97**	123	136	152	163
48	173	192	215	231	**98**	122	135	151	162
49	171	190	213	228	**99**	121	135	151	162
50	170	188	211	226	**100**	121	134	150	161

При $n > 100$ слід користуватись асимптотичними значеннями:

α	**0,05**	**0,01**	**0,02**	**0,1**
$\lambda_{\alpha,n}$	$\frac{1,36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,63}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,22}{\sqrt{n}}$

Рекомендована література та інтернет-ресурси

Методичне забезпечення

1. Maria Khomyak STATISTICS: Course Description. Lutsk : Lesia Ukrainka VNU, 2022. 26 p.
2. Хомяк М.Я. Комп’ютерно-орієнтовані засоби навчання теорії ймовірностей та математичної статистики майбутніх вчителів інформатики. *Науковий вісник Кременецької обласної гуманітарно-педагогічної академії ім. Тараса Шевченка.* №14. С. 66 – 73.
3. Хомяк М.Я. Мова програмування R як засіб навчання математичної статистики майбутніх ІТ-фахівців та вчителів інформатики. *Математика. Інформаційні технології. Освіта* : тези доп. XI Міжнар. наук.-практ. конф. Луцьк, 2022. С. 171-173.
4. Хомяк М. Я. Основні дискретні і неперервні розподіли теорії ймовірностей та статистики: методичний посібник. Луцьк: СНУ ім. Лесі Українки, 2020. 26 с.
5. Хомяк М.Я. Особливості застосування поліноміальної моделі регресії з похибками вимірювання в прогнозуванні соціально-економічних процесів. *Комп’ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво.* №41, ЛНТУ, 2020. С. 114 – 118.
6. Хомяк М. Я. Теорія ймовірностей: Збірник завдань для модульних контрольних робіт. Луцьк: СНУ ім. Лесі Українки, 2020. 22 с.
7. Хомяк М. Я. Теорія ймовірностей : збірник завдань для самостійної роботи для здобувачів освіти спеціальностей 014 Середня освіта (Інформатика) та 122 Комп'ютерні науки першого (бакалаврського) рівня. Луцьк: СНУ ім. Лесі Українки, 2023. 30 с.
8. Яцюк С.М., Хомяк М.Я., Юнчик В.Л., Чепрасова Т.І. Методика використання цифрових освітніх ресурсів у процесі підготовки майбутніх учителів інформатики. *Професіоналізм педагога: теоретичні й методичні аспекти*. 2021. №16. С.15-25.

Рекомендована література

1. Васильків І.М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2020. 184 с.
2. Майборода Р. Є. *Комп'ютерна статистика : підручник*. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2019. 589 с
3. Мішура Ю. С., Ральченко К. В., Сахно Л. М., Шевченко Г.М. «Випадкові процеси. Теорія. Статистика. Застосування». Видавничо-редакційний центр Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2019. 496 с.
4. Найко Д.А. Шевчук О. Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. Вінниця: ВНАУ, 2020. 382 с.
5. Тичинська Л.М., Черепащук А.А. Теорія ймовірностей // Електронний ресурс. Режим доступу: https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fitki/4tichinska_teoriya_jmovirnostej/v.htm.

Інтернет-джерела

1. http://www.math-pr.com/stst_1v_1.php
2. https://www.mathworks.com
3. https://www.rstudio.com
4. http://www.ams.org
5. http://www.euro-math-soc.eu
6. https://www.khanacademy.org/math/statistics-probability/probability-library
7. http://www.nbuv.gov.ua/ – сайт «Національна бібліотека України імені В.І. Вернадського».
8. https://www.britannica.com/science/probability-theory/An-alternativeinterpretation-of-probability

Навчальне видання

Марія Хомяк

Теорія ймовірностей та математична статистика:
навчальний посібник

для здобувачів спеціальності 014 Середня освіта (Інформатика)
освітньо-професійної програми «Середня освіта. Інформатика»

Друкується в авторській редакції