**Волинський національний університет імені Лесі Українки**
**Навчально-науковий фізико-технологічний інститут**

**О. В. Новосад**

# ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ

## КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

***Частина І. Електростатика. Постійний електричний струм***

**Луцьк**
**2024**

УДК 537
Н-72

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Волинського національного університету імені Лесі Українки.
(протокол № 2 від 16 жовтня 2024)

**Рецензент:**
Шигорін П. П. – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри теоретичної та комп'ютерної фізики імені А. В. Свідзинського Волинського національного університету імені Лесі Українки

**Н-72** Новосад О. В. **Електрика і магнетизм : конспект лекцій у 2 ч. - Ч. 1. Електростатика. Постійний електричний струм.** Луцьк : Волин. нац. ун-т ім. Лесі Українки, 2024. 114 с.

У навчально-методичному виданні поданий лекційний матеріал згідно з силабусом освітнього компонента «Електрика і магнетизм» для здобувачів освіти спеціальностей 105 «Прикладна фізика та наноматеріали», 104 «Фізика та астрономія», 014 «Середня освіта (Фізика та астрономія)». Представлені у видані лекції стосуються першого модуля «Електростатика. Постійний електричний струм».

Рекомендовано для здобувачів освіти технічних та природничих спеціальностей які вивчають електрику і магнетизм.

УДК 537

## Зміст

## ВСТУП

Світ що нас оточує, матеріальний. Матерія – це об’єктивна реальність, яка діє на органи відчуття безпосередньо чи опосередковано, існуючи незалежно від них. Матерія існує у вигляді речовини (елементарні частинки: електрон, протон, нейтрон і т. д.) та поля (електромагнітне, гравітаційне та інші). Матерія перебуває в неперервному русі, включаючи найпростіші механічні рухи, атомно-молекулярні, ядерні, електромагнітні та гравітаційні. Рух – невід’ємна та основна властивість матерії, матеріального світу, яка полягає в безперервній зміні у просторі і часі стану матеріальних об’єктів. Матерія не зникає і не виникає, а може перетворюватись з одного виду в інший.

Фізика – одна з природничих наук, яка займається вивченням неживої матерії у вигляді речовини, поля, антиречовини. Тут розглядаються механічна, молекулярно-теплова, електромагнітна, внутріатомна та внутріядерна форми руху матерії.

Метою фізичної науки є встановлення фізичних законів матеріального світу внаслідок обробки та узагальнення великої кількості експериментальних результатів та фактів. Отже, закони (правила, принципи) – це узагальнення дослідних фактів, які подаються у вигляді кількісних співвідношень фізичних величин. Фізичні величини є мірою тих чи інших фізичних властивостей матерії. За допомогою законів фізики пояснюються ті чи інші явища та, використовуючи фізичні моделі та математичні розрахунки, робляться нові прогнози та відкриття. Правильність законів перевіряється дослідом. Найчастіше в дослідах перевіряються не самі закони, а частинні випадки та висновки з них.

Сучасній науці відомі чотири типи взаємодії матеріальних об’єктів: гравітаційна, електромагнітна, сильна (ядерна) і слабка. Всі вони відіграють важливу роль в природі, а теорія, що описує кожну взаємодію, має основоположне значення в фізиці.

Гравітаційні сили є помітними, як правило, якщо хоча б одне з взаємодіючих тіл має астрономічний масштаб, тобто є, наприклад, зіркою або планетою. У гравітаційній взаємодії беруть участь всі тіла у природі, і сили тяжіння діють при будь-яких відстанях між тілами. Гравітаційна взаємодія забезпечує стійкість тіл на Земній кулі, пов'язує Сонце і планети в Сонячній системі і об'єднує зірки в галактиках.

Ядерні, або сильні, взаємодії проявляються при зближенні елементарних частинок на дуже малі відстані, порядку $10^{-15}$ м і менше. Сильна взаємодія пов'язує протони і нейтрони (нуклони) у ядрах всіх атомів.

Слабкі взаємодії значні, в основному, в мікросвіті і відіграють дуже важливу роль при взаємних перетвореннях елементарних частинок. Слабка взаємодія має дуже малий радіус дії, порядку $10^{-18}$ м, при віддаленні частинок слабка взаємодія стає несуттєвою. Слабка взаємодія, на відміну від інших взаємодій, не має здатності створювати стійкі стани речовини. Прикладом частки, яка володіє лише слабкою взаємодією, є нейтрино. Процеси слабкої взаємодії з випусканням нейтрино відіграють дуже важливу роль в еволюції зірок. Без слабкої взаємодії були б неможливими процеси перетворення елементарних частинок, які є основним джерелом енергії Сонця і більшості зірок.

У просторових масштабах, в яких проходить наше повсякденне життя, проявляється електромагнітна взаємодія. Використовуючи закон всесвітнього тяжіння і закон Кулона, можна порівняти гравітаційні і електростатичні сили. Для двох електронів відношення електростатичної сили до гравітаційної має порядок $10^{42}$, для двох протонів, які є більш важкими частинками за електрони, це відношення сил становить величину порядку $10^{36}$. Електромагнітна взаємодія забезпечує стабільне положення електронів в атомах і утримує в рівновазі атоми в молекулах і кристалах. Електромагнітні сили відіграють важливу роль у хімічних і біологічних процесах. Тому електромагнітні явища мають важливе практичне значення для життєдіяльності людини. Сонячне світло, яке являє собою електромагнітне випромінювання, є одним з необхідних умов існування життя на Землі. Сили пружності і тертя, що часто трапляються в побуті, мають, в кінцевому рахунку, електромагнітну природу. Електричний струм незамінний на даний час у виробництві, в транспорті і в побуті. Телебачення, радіо і телефонний зв'язок використовують електромагнітні хвилі для передачі сигналів. Робота персональних комп’ютерів, а також інших сучасних пристроїв для отримання, передачі, зберігання і обробки інформації, заснована на використанні широкого кола електромагнітних явищ.

Дивовижною властивістю електромагнітної теорії є те, що закони електромагнетизму виконуються як на дуже великих відстанях, в масштабах Всесвіту, так і в мікросвіті, коли відстані між частинками стають набагато меншими за розміри атома. У мікросвіті проявляються, з одного боку, хвильові властивості частинок і, з іншого боку, квантові властивості полів. Тому для опису електромагнітних явищ у мікросвіті використовується квантова електродинаміка.

Зі шкільного курсу фізики відомо, що речовина складається з молекул, атомів; атоми – з елементарних частинок, у тому числі таких, які мають електричний заряд: порівняно важких позитивно заряджених частинок – протонів, з яких складаються ядра, і легких негативно заряджених частинок - електронів. Заряд електрона є найменшою частинкою електрики в природі, а заряд ядер, до складу яких входять протони, завжди кратний зарядові електрона, але з додатнім зарядом. Заряджені частинки в атомах та молекулах перебувають у безперервному русі і взаємодіють між собою через електромагнітне поле. Електромагнітна взаємодія притаманна довільним зарядам та зарядженим тілам. Завдяки існуванню, взаємодії та руху заряджених частинок ми спостерігаємо та широко використовуємо в житті та сучасній техніці електромагнітні явища. Саме вони стануть предметом вивчення нашого курсу «Електрика і магнетизм».

## ЛЕКЦІЯ 1.

## Закон Кулона. Напруженість електростатичного поля. Принцип суперпозиції електричних полів

### 1.1. Електричний заряд і його властивості.

Усі тіла в природі складаються з атомів, у яких є позитивно заряджене ядро і негативно заряджені електрони. Якщо позитивний заряд ядра дорівнює сумарному негативному заряду електронів, то такий атом є електронейтральним. Якщо заряд ядра більший від сумарного заряду електронів, то такий атом має позитивний заряд, а якщо менший - то негативний. Поділ назв заряду на негативний і позитивний є умовним. Заряджені атоми називаються іонами.

Розглянемо основні властивості електричного заряду, які є наслідком багатьох експериментальних досліджень.

По-перше, ***існує два типи електричного заряду: позитивний та негативний***. Ще в давнину було відомо, що тіла можуть набувати електричні заряди в результаті тертя одного тіла об інше. Наприклад, якщо скло потерти шовком, то на склі з'являються електричні заряди, які назвали позитивними. Якщо ж ебоніт потерти хутром, то ебоніт набуває заряду, який назвали негативним. Однією із речовин, яка легко електризується тертям об бавовну, є бурштин. Саме від грецького слова «електрон», яке перекладається як бурштин, і походить термін «електрика», яким ми користуємося до сьогоднішніх днів.

Пізніше дослідники зрозуміли, що для електризації тіл необхідний їх тісний контакт, який досягається в результаті взаємного тертя. По-друге, існує мінімальне значення електричного заряду, так званий елементарний заряд. У міжнародній системі одиниць СІ елементарний електричний заряд має величину

$$e = 1{,}60218 \cdot 10^{-19}\, Кл. \tag{1.1}$$

Вперше елементарний заряд був виміряний Р. Міллекеном у 1909 році, а потім його значення було уточнено багатьма іншими експериментами. Сучасна теорія припускає, що електрон не має структури, однак протон і нейтрон складаються, в свою чергу, з більш дрібних частинок, так званих кварків, які мають дробовий елементарний заряд. Ми будемо розглядати значення $e$ як мінімально можливу порцію електричного заряду, що трапляється в природі. Електричний заряд у формулах позначається буквою $q$.

Звідси випливає, що ***електричний заряд будь-якого тіла повинен бути кратним елементарному заряду***:

$$q = n \cdot e, \tag{1.2}$$

де $n$=0,±1,±2,±3, ... .

Ця властивість називається дискретністю електричного заряду.

Третьою важливою властивістю електричного заряду є його збереження в будь-якій електроізольованій системі. ***У будь-якій електроізольованій замкнутій системі алгебраїчна сума електричних зарядів не змінюється з плином часу при будь-яких взаємоперетвореннях елементарних частинок***.

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + ... + q_n = \sum_{i=1}^{n} q_i = const \tag{1.3}$$

Закон збереження електричного заряду є одним з фундаментальних законів природи. Електричний заряд не може існувати окремо від свого носія - елементарної частинки.

По-четверте, величина електричного заряду не залежить від швидкості руху зарядженої частинки. Іншими словами, ***заряд частинки є релятивістською інваріантною величиною, тобто величина заряду однакова в усіх інерціальних системах відліку***. Незалежність величини заряду від швидкості руху його носія є експериментальним фактом і підтверджується, зокрема, електричною нейтральністю атомів. Зв'язаний стан електронів в атомі забезпечується завдяки кулонівській силі притягання електронів до ядра. У важких атомах, ядра яких мають великий електричний заряд, ця сила значно зростає. Отже, збільшується доцентрове прискорення і швидкість руху електронів в атомі. Як показують елементарні розрахунки, у важкому атомі, наприклад, атомі урану, швидкість електронів може досягати за величиною половині швидкості світла. У той же час протони є більш важкими та інертними частинками в порівнянні з електронами і рухаються всередині ядра з малими швидкостями навіть у важких атомах. Якби величина заряду частинки залежала від швидкості її руху, то сумарний заряд електронів у важкому атомі не був би скомпенсований зарядом ядра. Однак дослід показує, що як легкі, так і важкі атоми є електрично нейтральними. Цей факт підтверджує інваріантність електричного заряду, тобто незалежність величини заряду від швидкості руху частинки.

Під час електризації (процесу збільшення або зменшення електронів у тілі) тертям або електризації через вплив (перерозподіл позитивного та негативного заряду в об'ємі тіла) порушується електрична нейтральність тіла і воно одержує відповідно негативний або позитивний заряд. Навколо заряджених тіл виникає електромагнітне поле, через яке здійснюється силова взаємодія. ***Тіла з різнойменними зарядами притягуються, а з однойменними зарядами відштовхуються.***

У міжнародній системі одиниць СІ одиницею електричного заряду є кулон (Кл). ***1 Кл - це заряд, що проходить через поперечний переріз провідника за 1 секунду за умови, що у провіднику існує постійний електричний струм силою в 1 ампер.***

Неважко підрахувати, що 1 Кл=$6{,}29\cdot10^{18}$ зарядів електрона ($e\approx-1{,}6\cdot10^{-19}$ *Кл*), щоб уявити цю кількість електронів. Припустимо, що тіло має негативний заряд в 1 Кл і з нього знімають по 1 млн. електронів за секунду. Щоб тіло стало електронейтральним, знімати їх доведеться 200 тис. років.

### 1.2. Закон Кулона.

Вперше експериментально силову взаємодію заряджених тіл досліджував Шарль Огюстен де Кулон (1736-1806). Аналізуючи велику кількість експериментальних даних, він встановив закон, який пізніше назвали його іменем - законом Кулона. Цей закон був сформульований для точкових зарядів – заряджених тіл, розмірами яких можна знехтувати у порівнянні з відстанню між ними.

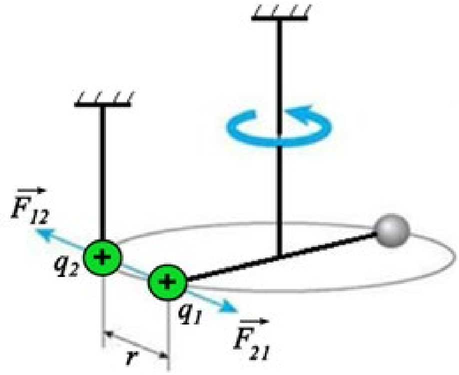


Рис. 1.1. Крутильні терези Кулона

Основою установки, за якою працював Кулон, були крутильні терези (рис. 1.1), що складались з тонкої скляної нитки, на яку підвішувалось непровідне коромисло з металевою зарядженою кулькою з однієї сторони та противагою – з іншої. Поряд поміщувалась інша заряджена кулька. Все це було у скляному циліндрі з метою захисту приладу від потоків повітря. Під дією електричної взаємодії заряджена кулька з противагою починала повертатись на певний кут, значення якого фіксувалось за кутовою шкалою. З часом система переходила в положення рівноваги. Знаючи кут повороту, коефіцієнт пружності скляної нитки, можна було розрахувати силу взаємодії між кульками. Заряд кульок та відстань між ними були відомі. Ш. Кулон дійшов до висновку, що ***сила взаємодії (F) двох точкових зарядів прямо пропорційна добутку величин цих зарядів ($q_1$ і $q_2$) та обернено пропорційна квадрату відстані (r) між ними і напрямлена вздовж прямої, яка сполучає ці заряди.*** Математично це формулювання запишеться так:

$$F \sim \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}. \tag{1.4}$$

Перейшовши в (1.4) від пропорційності до рівності, отримаємо

$$F = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}\ , \tag{1.5}$$

де $k$ - сталий коефіцієнт,

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{Н \cdot м^2}{Кл},$$

де $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \ \frac{Ф}{м}$ - електрична стала вакууму.

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}. \qquad (1.6)$$

При розв'язуванні практичних задач сили відштовхування вважають додатними, сили притягання – від'ємними. Також відомо, що сила є векторною величиною, відповідно, закон

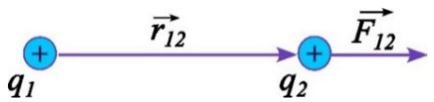


Рис. 1.2. Визначення напрямку сили Кулона

Кулона (1.6) можна записати й у векторній формі. Запишемо закон Кулона у векторній формі для двох додатних точкових зарядів (рис.1.2).

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^{\ 2}} \left( \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \right) \qquad (1.7)$$

$\vec{F}_{12}$- сила, з якою заряд $q_1$ діє на заряд $q_2$, $\vec{r}_{12}$- радіус-вектор, напрямлений від точкового заряду $q_1$ до точкового заряду $q_2$.

Проводячи аналогічні міркування, можна записати закон Кулона для визначення сили $\vec{F}_{21}$, з якою заряд $q_2$ діє на заряд $q_1$

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{21}^{\ 2}} \left( \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} \right), \qquad (1.8)$$

де $\vec{r}_{21}$ - радіус-вектор, напрямлений від точкового заряду $q_2$ до точкового заряду $q_1$. З формул 1.7 та 1.8, враховуючи, що $\left(\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}\right) = -\left(\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}\right)$, можна зробити висновок, що

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

**1.3. Напруженість електричного поля.**

Заряджені точкові тіла або тіла скінченних розмірів взаємодіють через електричне поле. Взаємодія між точковими зарядами описується законом Кулона. Електричним полем є особлива форма матерії, через яку відбувається взаємодія електричних зарядів. Електричне поле нерухомих заряджених тіл з незмінними у часі зарядами називається електростатичним полем.

На заряд, поміщений в електричне поле, зі сторони поля діє сила. Взаємодія через електричне поле відбувається зі скінченною швидкістю, не більшою за швидкість світла у вакуумі ($c$=3·10$^8$ м/с). ***Основними характеристиками електричного поля є потенціал (енергетична характеристика) та напруженість (силова характеристика).***

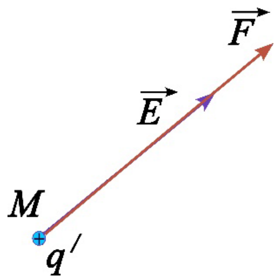


Рис. 1.3. Визначення напруженості електричного поля

Розглянемо більш детально силову характеристику електричного поля. ***Напруженість електричного поля у деякій точці простору визначається силою, що діє на одиничний позитивний заряд, поміщений в дану точку поля.*** Розглянемо середовище, у якому існує електричне поле. Визначимо напруженість електричного поля в деякій точці $M$ цього середовища. Для того, щоб визначити числове значення напруженості в даній точці, використаємо наведене вище означення, тобто помістимо в досліджувану точку $M$ одиничний позитивний заряд $q^{/}$. На заряд $q^{/}$ з боку електричного поля діятиме сила $\vec{F}$ . Для означеності задамо напрямок цієї сили (рис. 1.3). Знаючи силу, що діє на заряд $q^{/}$, запишемо вираз для напруженості електричного поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} . \tag{1.9}$$

Для графічного зображення полів використовують лінії напруженості електричного поля. ***Лінія напруженості - це така лінія, проведена в електричному полі, дотична до якої в кожній точці співпадає з напруженістю.*** Напрям ліній напруженості прийнято вибирати від позитивного заряду до негативного. Для того, щоб лінії напруженості визначали величину напруженості, їх домовились проводити так, щоб густина ліній в деякому місці електричного поля була рівна або пропорційна напруженості поля в цьому місці. Лінії напруженості електричного поля, створеного додатнім та від'ємним точковим зарядом, проводять так, як зображено на рис. 1.4.

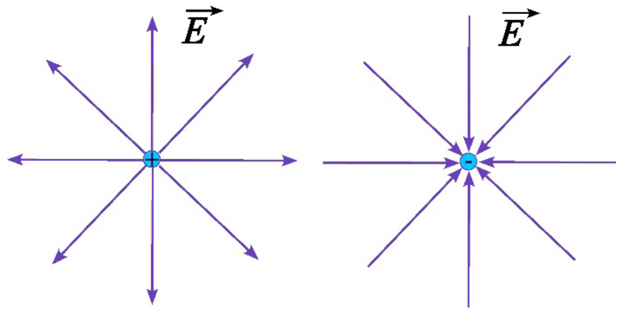


Рис. 1.4. Лінії напруженості електричного поля

Визначимо напруженість електричного поля, створеного точковим зарядом $q$ в точці $M$ на відстані $r$ від заряду. Для означеності припустимо, що заряд додатній (рис. 1.5). Помістимо в досліджувану точку одиничний позитивний точковий заряд $q'$, використаємо закон Кулона, який описує взаємодію між зарядами $q$ і $q'$ та формулу 1.9.

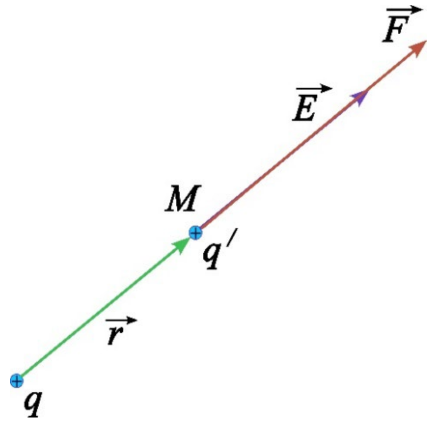


Рис. 1.5. Визначення напруженості електричного поля точкового заряду

Запишемо закон Кулона для нашої системи двох точкових зарядів

$$F = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (1.10)$$

Підставивши (1.10) в (1.9), отримаємо

$$E = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2 q'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

або у векторній формі:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\,. \qquad (1.11)$$

Крім напруженості, електричне поле у вакуумі можна характеризувати індукцією електричного поля. Зв'язок між індукцією та напруженістю електричного поля задається формулою

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}\,.$$

**1.4. Принцип суперпозиції електричних полів.**

Дослід показує, що сила, з якою система зарядів діє на деякий точковий заряд, що не входить в дану систему, визначається векторною сумою сил, що діють на даний заряд зі сторони кожного окремого точкового заряду системи. Враховуючи те, що напруженість електричного поля є його силовою характеристикою, сформулюємо принцип суперпозиції електричних полів. ***Якщо електричне поле створене системою точкових зарядів, то напруженість електричного поля в деякій точці простору визначається векторною сумою напруженостей електричних полів, створених в цій точці кожним окремим зарядом.***

Розглянемо систему, що складається з трьох точкових зарядів $q_1$, $q_2$, $q_3$, (рис. 1.6). $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_2$ - напружености електричних полів, створених зарядами $q_1$, $q_2$, $q_3$. Відповідно, у точці $M$ математичний вираз принципу суперпозиції в даному випадку матиме вигляд:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \sum_{i=1}^{3} \vec{E}_i ,$$

де $\vec{E}$ - сумарна напруженість в точці $M$.

Розглянемо та узагальнимо наведений випадок на систему, що складається з довільної кількості точкових зарядів.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \quad (1.12).$$

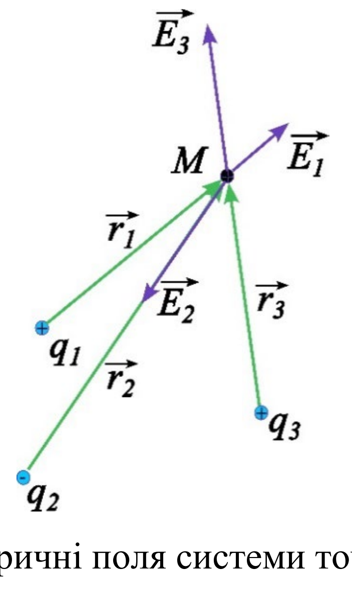


Рис. 1.6. Електричні поля системи точкових зарядів

З попереднього пункту лекції відомо, що напруженість електричного поля, створеного одним, наприклад, $i$-тим точковим зарядом, на відстані $\vec{r}_i$, визначається формулою

$$\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\frac{\vec{r}_i}{r_i}. \qquad (1.13)$$

Підставивши (1.13) в (1.12), отримаємо математичний вираз принципу суперпозиції електричних полів для системи із *n*-точкових зарядів

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^3}\vec{r}_\mathrm{i}. \qquad (1.14)$$

Розглянемо електричне поле, створене неперервним розподілом заряду, та визначимо напруженість електричного поля у деякій точці М (рис. 1.7). Будемо вважати, що розподіл заряду по об'єму тіла $V$, обмеженого поверхнею $S$, є нерівномірним, тобто є функцією координат $\rho=\rho(x,y,z)$. Умовно розділимо тіло на нескінченно малі частинки об'єму $dV$ так, щоб їх можна було вважати в даній задачі точковими. Позначимо $dq=\rho(x,y,z)dV$, $dq = \rho(x, y, z)dv = \rho(\vec{r})dv = \rho dv$ заряд об'єму $dV$. Напруженість електричного $d\vec{E}$ поля в т. $M$, створеного точковим зарядом $dq$, визначатиметься виразом

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} = \frac{\rho\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}dV \qquad (1.15).$$

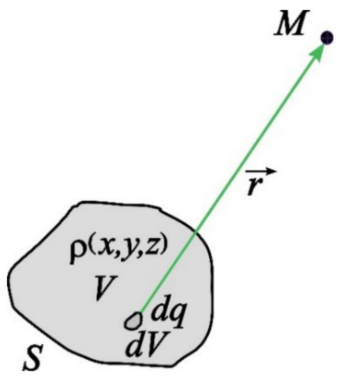


Рис. 1.7. Тіло скінченних розмірів з неперервним розподілом заряду по об'єму

Використовуючи принцип суперпозиції електричних полів, визначимо напруженість, створену цілим тілом. Для цього потрібно провести сумування за усіма елементами $dV$ , але, оскільки ми маємо неперервну множину таких елементів, сумування зручно замінити інтегруванням. Отримаємо

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r})\vec{r}}{r^3}dV \ . \tag{1.16}$$

На практиці важливим є випадок поверхневого розподілу заряду по поверхні S з поверхневою густиною заряду *σ=σ(x,y,z)*, заряд елемента площі *dS* *dq=σdS*. Для визначення електричного поля, створеного неперервним розподілом поверхні заряду в заданій точці, потрібно провести міркування, як і у випадку неперервного розподілу заряду. Результат використання принципу суперпозиції можна подати у вигляді

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\vec{r})\cdot\vec{r}}{r^3}dS \ . \tag{1.17}$$

Розглядаючи найбільш загальний випадок - тіло скінченних розмірів об’єму *V* з об’ємною густиною заряду *ρ=ρ(x,y,z)*, який обмежений поверхнею *S* з поверхневою густиною заряду *σ=σ(x,y,z)* - можна зробити висновок, що напруженість електричного поля в заданій точці простору визначатиметься формулою:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_V \frac{\rho(\vec{r})\vec{r}}{r^3}dV + \oint_S \frac{\sigma(\vec{r})\cdot\vec{r}}{r^3}dS\right) \tag{1.18}$$

## ЛЕКЦІЯ 2.

## Теорема Остроградського-Гаусса та її застосування. Диференціальна форма запису теореми Остроградського-Гаусса

### 2.1. Потік вектора напруженості електричного поля

Поняття потоку вектора є одним із найважливіших понять векторного аналізу та широко використовується у фізиці для формулювання найважливіших властивостей електричного та магнітного полів. Відомо, що електричне поле можна задати, вказавши для кожної точки простору модуль та напрямок вектора $\vec{E}$. Аналогічно електричне поле можна описати за допомогою ліній напруженості електричного поля. Як уже відмічалося, лінії напруженості проводять так, щоб дотичні до них в кожній точці співпадали з напрямком вектора напруженості електричного поля. Проводять їх з густиною, рівною або пропорційною модулю вектора напруженості. Розглянемо більш детально потік ліній напруженості електричного поля.

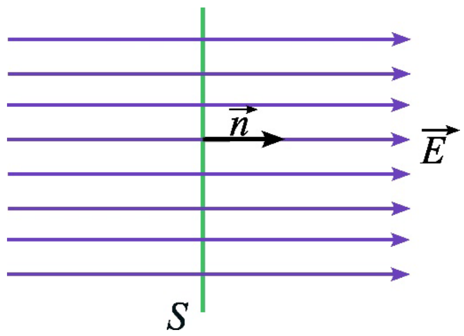


Рис. 2.1. Потік ліній напруженості однорідного електричного поля через плоску поверхню, розміщену перпендикулярно до ліній напруженості.

***а)*** Потік ліній напруженості однорідного електричного поля через плоску поверхню S, розміщену перпендикулярно до ліній напруженості електричного поля (рис. 2.1).

У даному випадку потік *N* ліній напруженості електричного поля буде визначатись як добуток площі *S* поверхні на напруженість електричного поля.

$$N = E \cdot S \tag{2.1}$$

або як скалярний добуток векторів $\vec{E}$ та $\vec{S}$:

$$N = \left(\vec{E} \cdot \vec{S}\right), \tag{2.2}$$

де $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$, $\vec{n}$ - одиничний вектор нормалі до площадки *S*.

***б)*** Потік ліній напруженості однорідного електричного поля через плоску поверхню *S*, розміщену під кутом *α* до ліній напруженості електричного поля (рис. 2.2).

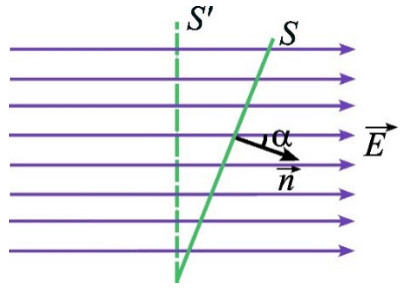


Рис. 2.2. Потік ліній напруженості однорідного електричного поля через плоску поверхню, розміщену під кутом до ліній напруженості

З малюнка видно, що $S' = S \cdot \cos\alpha$. Використовуючи такі ж міркування, як і в попередньому випадку та формулу 1, отримаємо:

$$N = E \cdot S' = E \cdot S \cdot \cos\alpha. \tag{2.3}$$

З урахуванням того, що проекція вектора напруженості електричного поля на поверхню *S* - $E_n = E \cdot \cos\alpha$, формулу (2.3) запишемо у вигляді

$$N = E_n \cdot S \tag{2.4}$$

$E_n$ - нормальна складова вектора напруженості.

У векторній формі потік ліній напруженості електричного поля в розглядуваному випадку запишеться так само, як і в попередньому випадку (2.2).

***в)*** Потік ліній напруженості неоднорідного електричного поля через поверхню *S* довільної форми (рис. 2.3).

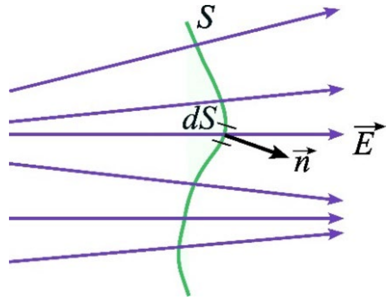


Рис. 2.3. Потік ліній напруженості неоднорідного електричного поля через поверхню довільної форми

Для того, щоб визначити потік ліній напруженості електричного поля, поверхню $S$ умовно розбиваємо на нескінченно малі елементи $dS$, які можна вважати плоскими. Визначимо потік через кожну з таких поверхонь $dN = E_n \cdot dS$. Для того, щоб визначити потік через всю поверхню, потрібно просумувати по всіх елементах площі, у нашому випадку потрібно проінтегрувати:

$$N = \int dN = \int_S E_n dS,$$

тобто,

$$N = \int_S E_n dS.$$

Коли поверхня незамкнена, то вибір додатного напрямку нормалі довільний. У випадку замкненої поверхні додатній напрямок нормалі вибирають на зовнішню сторону поверхні. Інтегрування проводитиметься по замкненій поверхні

$$N = \oint_S E_n dS. \tag{2.5}$$

**2.2. Теорема Остроградського-Гауса в інтегральній формі**

Теорема Остроградського-Гауса значно спрощує розрахунки електричних полів, створених зарядженими тілами чи системою тіл, яка володіє просторовою симетрією розподілу заряду.

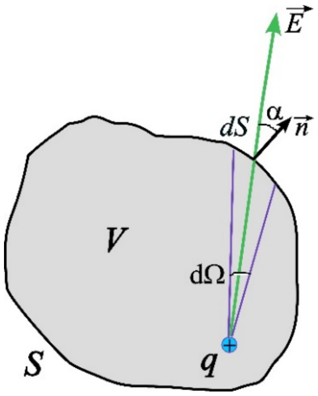


Рис. 2.4. Потік вектора напруженості електричного поля через замкнену поверхню.

Розглянемо деяку замкнену поверхню *S*. Всередині об'єму, що обмежується поверхнею, розмістимо точковий додатній заряд *q* (рис. 2.4.). Розрахуємо, в загальному випадку, потік ліній напруженості електричного поля, що створюється зарядом *q*, через поверхню *S*. Відомо, що в найбільш загальному випадку потік ліній напруженості визначається за формулою (2.5). Також відомо, що напруженість електричного поля, створеного точковим зарядом *q* на відстані *r*, визначається виразом

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{2.6}$$

Визначимо потік електричного поля через елемент площі *dS* (рис. 2.4)

$$dN = E_n dS = EdS \cdot \cos\alpha, \tag{2.7}$$

де α - кут між зовнішньою нормаллю до *dS* та вектором напруженості $\vec{E}$ у даній точці. Ввівши заміну $dS' = dS \cdot \cos\alpha$ та підставивши (2.6) в (2.7), отримаємо:

$$dN = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dS'.$$

З геометрії відомо, що $d\Omega = \dfrac{dS'}{r^2}$ - тілесний кут.

$$dN = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega , \qquad (2.9)$$

Для того, щоб визначити потік через поверхню S, проінтегруємо формулу (2.9) по всьому тілесному куту

$$N = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \Omega \Big|_0^{4\pi} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(4\pi - 0) = \frac{q}{\varepsilon_0} ,$$

тобто $N = \frac{q}{\varepsilon_0}$, або згідно з (2.5)

$$\oint_S E_n dS = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (2.10)$$

Формула (2.10) називається теоремою Остроградського-Гауса в інтегральній формі для точкового заряду.

Запишемо теорему Остроградського-Гауса для системи точкових зарядів. Використовуючи принцип суперпозиції, можна стверджувати, що загальний потік через замкнену поверхню буде визначатись алгебраїчною сумою потоків, створених кожним окремим зарядом через дану поверхню:

$$N = N_1 + N_2 + ... + N_n ,$$

або

$$N = \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + ... + \frac{q_n}{\varepsilon_0} ,$$

$$N = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i ,$$

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i . \qquad (2.11)$$

Формула (2.11) виражає теорему Остроградського-Гауса для системи точкових зарядів.

Розглянемо неперервний розподіл заряду густиною $\rho=\rho(x, y, z)$ , розташований в об'ємі $V$, та визначимо потік ліній напруженості електричного поля через поверхню $S$ (рис. 2.5).

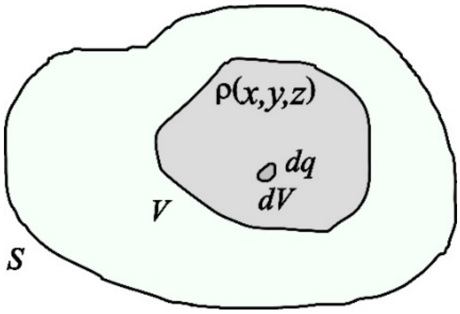


Рис. 2.5. Тіло з неперервним розподілом заряду та поверхня інтегрування $S$

Потік $dN$, створений зарядом $dq=\rho dV$ через елемент площі $dS$, буде дорівнювати

$$dN = \frac{1}{\varepsilon_0} dq = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho dV \ .$$

Використаємо означення потоку в загальному випадку та проінтегруємо ліву частину останньої рівності по об'єму:

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \ . \tag{2.12}$$

Формула (2.12) – найбільш загальний вираз теореми Остроградського-Гауса в інтегральній формі.

Згідно із наведеними міркуваннями, можна зробити висновок, що ***потік ліній напруженості електричного поля через будь-яку замкнену поверхню визначається повним зарядом, який знаходиться в об'ємі, обмеженому даною поверхнею.***

Використовуючи формулу для означення індукції електричного поля, теорема Остроградського-Гауса запишеться:

$$\oint_S D_n dS = \int_V \rho dV \qquad (2.13),$$

тобто ***потік ліній індукції через певну поверхню буде рівний повному заряду, що міститься в об'ємі, обмеженому даною поверхнею.*** Також з формули (2.13) випливає, що одиницею вимірювання потоку магнітної індукції є Кулон.

## 2.3. Теорема Остроградського-Гауса в диференціальній формі

Відомо, що математичний вираз теореми Остроградського-Гауса описує зв'язок та перехід між поверхневим подвійним інтегралом та потрійним об'ємним. У загальному випадку, коли маємо векторне поле деякого вектора $\vec{A}$ , теорема Остроградського-Гауса запишеться

$$\oint_s A_n dS = \int_v div\vec{A} dV .$$

Розглянемо даний вираз для векторного поля на прикладі напруженості електричного поля.

$$\oint_S E_n dS = \int_V div\vec{E} dV \qquad (2.14)$$

Із формули (2.12) та (2.14) отримаємо

$$\int_V div\vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

Оскільки ми маємо два інтеграли, інтегрування у яких проводиться по об'єму, і які рівні між собою, то підінтегральні вирази також будуть рівними.

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (2.15)$$

Співвідношення (2.15) виражає теорему Остроградського-Гауса в диференціальній формі. Використавши означення

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z},$$

вираз (2.15) можна записати, як

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

або

$$(\vec{\nabla}\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

тобто праву частину (2.15) подати як скалярний добуток вектора напруженості $\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$ та оператора $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$.

Провівши аналогічні міркування для індукції магнітного поля, отримаємо

$$div\vec{D} = \rho \text{ та } (\vec{\nabla}\vec{D}) = \rho .$$

### 2.4. Застосування теореми Остроградського-Гауса для розрахунку найпростіших електричних полів у вакуумі

На попередніх лекціях ми розглядали принцип суперпозиції електричних полів, який дає можливість знаходити поля, створені системою зарядів. Це правило дає можливість проводити порівняно прості розрахунки для системи точкових зарядів. Коли ж маємо неперервний розподіл заряду, виникають труднощі з операцією сумування. Для того, щоб обійти дану проблему, використовують теорему Остроградського-Гауса.

**Електричне поле нескінченної площини.** Розрахуємо електричне поле нескінченно великої плоскої рівномірно зарядженої поверхні, розміщеної у вакуумі. Для цього використаємо інтегральну форму теореми Остроградського-Гауса. Якщо густина поверхневого заряду (заряд, що припадає на одиницю площі) на площині σ і поверхня заряджена позитивно, тоді лінії напруженості будуть напрямлені так, як зображено на рис. 2.6.

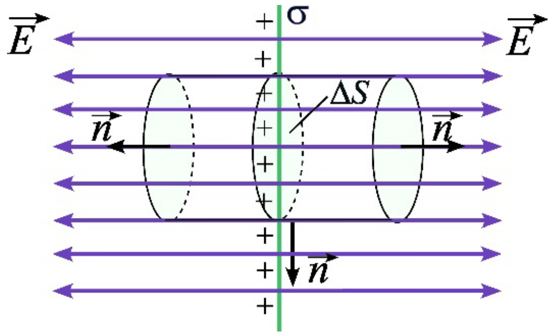


Рис. 2.6. Електричне поле нескінченно великої плоскої рівномірно зарядженої поверхні

Визначимо напруженість електричного поля на основі циліндра, який ми вибираємо як поверхню інтегрування. Площа $\Delta S$, яку обмежує поверхня циліндра, буде мати заряд $q=\sigma\Delta S$. З обраних умов інтегрування видно, що потік ліній напруженості електричного поля буде відмінний від нуля лише через основи циліндра і, згідно з означенням потоку, він буде дорівнювати

$$N = \oint_S E_n dS = 2E\Delta S .$$

Запишемо теорему Остроградського-Гауса,

$$2E\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV \qquad (2.16),$$

у нашому випадку

$$\int_V \rho dV = q = \sigma\Delta S \qquad (2.17).$$

Підставимо (2.17) в (2.16), отримаємо:

$$2E\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\Delta S ,$$

або

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (2.18)$$

З геометричних міркувань та симетрії системи не важко помітити, що лінії напруженості електричного поля перпендикулярні до зарядженої площини. Напруженість визначатиметься за формулою (2.18), у якій немає залежності від координати, тобто ***напруженість електричного поля зарядженої площини буде однакова на різних відстанях від площини***.

Індукція електричного поля, створеного площиною, визначатиметься формулою:

$$D = \frac{\sigma}{2}.$$

**Електричне поле двох паралельних площин.** Розглянемо дві паралельні нескінченні плоскі поверхні, заряджені зарядами протилежних знаків (рис. 2.7). Нехай густина поверхневого заряду на позитивно і негативно заряджених площинах за модулем однакова і становить $\sigma$. Простір відносно площин можна поділити на три області: одна між площинами (*I*), де поле від двох різних площин буде напрямлене однаково, та дві області (*II*), де поля напрямлені в протилежні сторони.

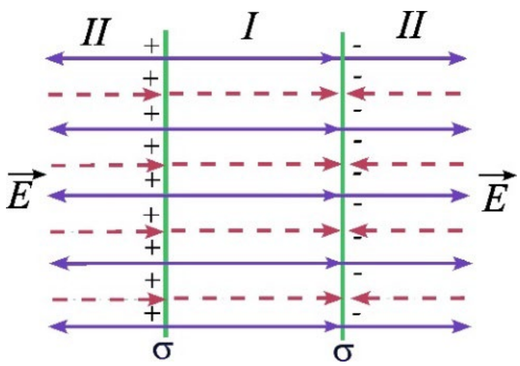


Рис. 2.7. Електричне поле двох паралельних площин

Оскільки площини мають заряд, однаковий за модулем, то в області (II), згідно з принципом суперпозиції, напруженість електричного поля дорівнюватиме нулю $E = 0$.

Напруженості, створені негативно зарядженою площиною $E^{-}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ та позитивно зарядженою $E^{+}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, в області (I) мають однаковий напрям, тому, згідно з принципом суперпозиції електричних полів, сумарна напруженість

$$E=E^{-}+E^{+}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{2.19}$$

Аналогічні міркування можна провести для індукції електричного поля. В області (*II*) $D=0$, в (*I*) $D=\sigma$. Попередня формула та формула (2.19) описують електричне поле, створене досліджуваною системою. Також потрібно звернути увагу на те, що поле існуватиме лише між площинами.

**Електричне поле сфери.** Розглянемо електричне поле рівномірно зарядженої сферичної поверхні радіусу *a* (рис. 2.8). Будемо вважати, що поверхня розміщена у вакуумі і заряджена рівномірно позитивним зарядом, сумарний заряд поверхні рівний *q*. Визначимо напруженість електричного поля в точці *M*.

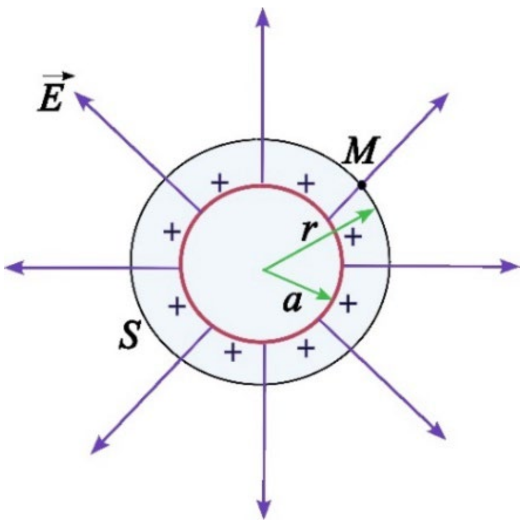


Рис. 2.8. Електричне поле сферичної поверхні

Для зручності та з міркувань симетрії поверхню інтегрування виберемо сферичною (на малюнку позначено *S*), радіус сфери інтегрування - *r*. Розглянемо праву частину теореми Остроградського-Гауса

$$\oint_S E_n dS = \oint_S E\ dS = E\oint_S dS = E4\pi r^2 .$$

При обчисленні інтеграла ми використовували те, що проекція вектора напруженості $\vec{E}_n$ на нормаль до поверхні $S$ в розглядуваному випадку співпадатиме з самим вектором напруженості $\vec{\mathrm{E}}$, а інтеграл по замкненій поверхні, яка є сферою, буде рівний площі сфери $\oint_{\mathrm{S}} \mathrm{dS} = \mathrm{S} = 4\pi \mathrm{r}^2$. Підставивши отримані результати в теорему Остроградського-Гауса, отримаємо

$$E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

або

$$E = \frac{q}{4\varepsilon_0 \pi r^2} . \qquad (2.20)$$

Формула (2.20) виражає напруженість електричного поля, створеного на відстані r>a від зарядженої сфери. Також, використовуючи результати, отримані в попередній лекції, можна сказати, що електричне поле сфери таке ж, як і поле точкового заряду $q$, поміщеного в центр сфери.

Очевидно, що в середині сфери напруженість електричного поля рівна нулю. Графічна залежність напруженості електричного поля сферичної поверхні матиме вигляд, як на рис. 2.9.

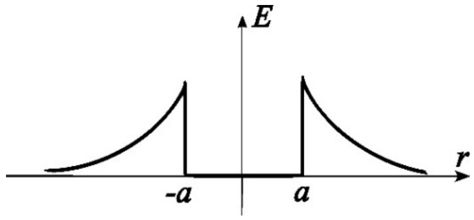


Рис. 2.9. Графік залежності напруженості електричного поля сферичної поверхні від відстані від центра сфери

**Електричне поле кулі.** Розглянемо електричне поле, створене рівномірно зарядженою кулею. Розглянемо кулю радіуса $a$ з об'ємною густиною заряду (заряд, що припадає на одиницю об'єму) $\rho$, заряд всередині позитивний та розподілений рівномірно. Використовуючи теорему Остроградського-Гауса, визначимо напруженість електричного поля, створеного кулею в точці $M$, яка розміщена на відстані $r$ від центра кулі (рис. 2.10). Для зручності поверхнею інтегрування оберемо сферу $S$ радіус якої $r$.

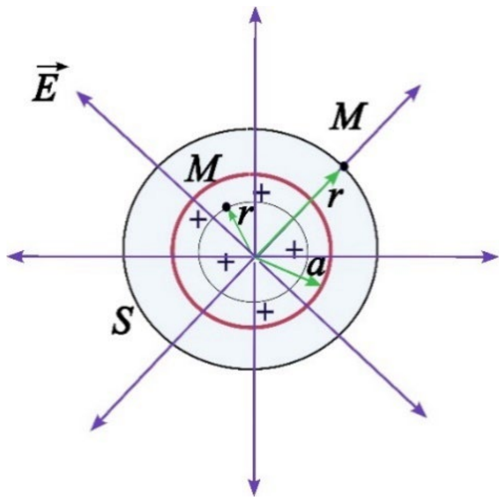


Рис. 2.10. Електричне поле кулі

**Випадок 1. Точка *M* розташовується на відстані *r>a*.** Проінтегрувавши праву частину теореми Остроградського-Гауса, як і в попередньому пункті, отримаємо:

$$E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

або

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \tag{2.21}$$

де $q$ – заряд ,обмежений поверхнею, $S$ площа якої рівна $4\pi r^2$.

$$q = \rho\frac{4}{3}\pi a^3, \tag{2.22}$$

Підставивши формулу (2.22) в (2.21) та провівши математичні спрощення, отримуємо:

$$E = \frac{a^3\rho}{3\varepsilon_0 r^2} \tag{2.23}$$

Формула (2.23) описує поле, створене зарядженою кулею поза межами кулі. Формула (2.23) однакова як для сферичної поверхні, так і для точкового заряду.

**Випадок 2. Точка М знаходиться на відстані r≤a.** Повний заряд частини кулі, що обмежується поверхнею $S$ радіусу $r$, буде визначатись формулою

$$q = \rho\frac{4}{3}\pi r^3,$$

провівши аналогічні міркування, як і в попередньому пункті, отримаємо

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3,$$

або

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r. \tag{2.24}$$

Остання формула виражає залежність напруженості електричного поля від відстані всередині кулі. Враховуючи (2.23) та (2.24), побудуємо графік залежності *E=E(r)* (рис. 2.11).

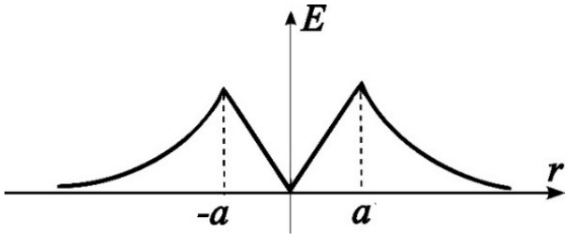


Рис. 2.11. Графік залежності напруженості електричного поля зарядженої кулі від відстані від центра кулі

**Електричне поле циліндричної поверхні.** Будемо вважати, що поверхня заряджена рівномірно з лінійною густиною заряду $\eta$ (заряд одиниці довжини циліндра), радіус циліндра $a$, поверхня заряджена позитивно. Лінії напруженості електричного поля будуть напрямлені по радіусу основ циліндричної поверхні так, як це зображено на рис. 2.12. Поверхню інтегрування для зручності виберемо циліндричною з радіусом r. Визначимо напруженість електричного поля в точці $M$, розміщеній на відстані $r$ ($r \geq a$) від осі циліндра.

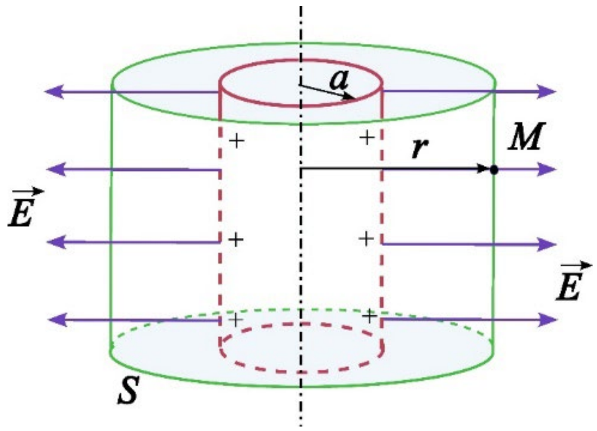


Рис. 2.12. Електричне поле циліндра

Розглянемо потік ліній напруженості електричного поля, створеного зарядженою поверхнею через поверхню інтегрування $S$.

$$\oint_S E_n dS = E \oint_S dS = E 2\pi r l \,, \qquad (2.25)$$

тут використовувались такі міркування: у нашому випадку $E_n = E$; вектор напруженості та проекція вектора напруженості на нормаль до $S$ співпадають; $\oint\limits_S dS = 2\pi rl$ - площа циліндричної поверхні інтегрування, де $l$ - висота. Повний заряд циліндра висоти $l$:

$$q = \eta l \tag{2.26}$$

Використовуючи формули (2.25), та (2.26) та теорему Остроградського-Гауса, отримаємо

$$E 2\pi rl = \frac{1}{\varepsilon_0}\eta l,$$

або

$$E = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}. \tag{2.27}$$

Вираз (2.27) дає змогу визначити напруженість електричного поля, створеного циліндричною рівномірно зарядженою поверхнею з лінійною густиною $\eta$ на відстані $r$ від осі циліндра у випадку, коли $r \geq a$. Якщо розглянути область всередині циліндра ($r \leq a$), то напруженість буде рівна нулю $E = 0$.

## ЛЕКЦІЯ 3.

## Потенціальний характер електростатичного поля. Потенціал, різниця потенціалів. Зв'язок між напруженістю електричного поля та потенціалом

### 3.1. Робота по переміщенню точкового заряду в електричному полі.

Визначимо роботу, яка виконується при переміщенні позитивного точкового заряду $q$ із точки *1* в точку *2* в електричному полі, створеному довільним позитивним зарядом $q_0$. Спочатку визначимо роботу по переміщенню на нескінченно малому шляху $dl$ (рис. 3.1)

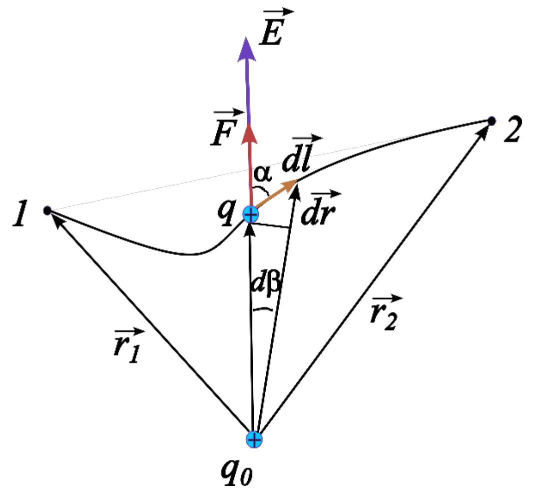


Рис. 3.1. Переміщення заряду $q$ в електричному поля заряду $q_0$

Як відомо, у загальному випадку елементарна робота буде визначатись формулою

$$dA = F \cdot dl \cdot \cos\alpha\,, \tag{3.1}$$

де α - кут між $\vec{dl}$ та $\vec{F}$, або як скалярний добуток $\vec{dl}$ та $\vec{F}$

$$dA = \left(\vec{F} \cdot \vec{dl}\right) \tag{3.1$^{/}$}$$

$F$ - сила, що діє на заряд з боку поля

$$F = qE \tag{3.2}$$

Підставимо (3.2) в (3.1), отримаємо

$$dA = qEdl \cdot \cos\alpha \qquad (3.3)$$

$$dA = q\left(\vec{E} \cdot d\vec{l}\right) \qquad (3.1^{/})$$

Провівши нескладні геометричні міркування, можна помітити, що $dl\cos\alpha = dr$, $dr$ - зміна модуля $\vec{r}$ при переході із початку до кінця вектора $d\vec{l}$. Формула (3.3) перепишеться як $dA = qEdr$. Відомо, що напруженість електричного поля, створеного точковим зарядом $q_{0,}$ визначається як $E = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Підставивши цей вираз у формулу для роботи, отримаємо

$$dA = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr\ . \qquad (3.4)$$

Для того, щоб визначити роботу, виконану по всьому шляху з точки 1 в точку 2, потрібно вираз (3.4) проінтегрувати по відповідних змінних.

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

або

$$A_{12} = q\left(\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_2}\right). \qquad (3.5)$$

Аналізуючи формулу (3.5), можна зробити висновок, що ***робота із переміщення заряду в електричному полі визначається лише координатами точок, між якими здійснюється переміщення, і не залежить від форми шляху, по якому рухається заряд***.

### 3.2. Потенціальний характер електростатичних полів.

Використовуючи результати, отримані в попередньому пункті лекції, визначимо роботу, що виконується при переміщенні заряду в електричному полі по замкненому шляху (точки 1 та 2 співпадають рис. 3.1). Для цього використаємо формулу (3.5), врахувавши, що $r_2 = r_1$. У результаті бачимо, що робота по замкнутому шляху $(A_0)$ дорівнює нулю. З формули (3.3/) випливає, що у такому випадку

$$A_o = q\oint\limits_{\gamma}\left(\vec{E}\cdot d\vec{l}\right) = 0, \tag{3.6}$$

де γ-замкнутий контур, по якому проводиться інтегрування.

***Поля, для яких робота не залежить від форми шляху або по замкненому шляху рівна нулю, називають потенціальними***. Отже, можна стверджувати, що ***електростатичне поле є потенціальним***.

У формулі (3.6) $\oint\limits_{\gamma}\left(\vec{E}\cdot d\vec{l}\right)$- циркуляція вектора напруженості електричного поля по замкнутому контуру γ. ***Рівність нулю циркуляції вектора по замкненому контуру будь-якого векторного поля є інтегральною ознакою потенціальності цього поля.*** Отже, якщо поле потенціальне, то циркуляція його вектора дорівнює нулю. Математично інтегральна ознака потенціальності запишеться

$$\oint\limits_{\gamma}\left(\vec{E}\cdot d\vec{l}\right) = 0. \tag{3.7}$$

Співвідношення (3.7) називають теоремою про циркуляцію вектора $\vec{E}$ або умовою потенціальності електростатичного поля в інтегральній формі.

Добре відомим прикладом потенціального поля є гравітаційне поле, яке, як і електростатичне поле, зменшується обернено пропорційно квадрату відстані від тіла, яке створює це поле.

Циркуляцію деякого вектора по замкнутому контуру можна перетворити за допомогою теореми Стокса

$$\oint\limits_{\gamma}\vec{A}d\vec{l} = \int\limits_{S} rot\vec{A}d\vec{S}, \tag{3.8}$$

де $rot\vec{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}=\left[\vec{\nabla}\vec{A}\right]$ - ротор вектора $\vec{A}$, який можна представити у вигляді векторного добутку оператора «Набла» на вектор $\vec{A}$; $S$ - поверхня довільної форми, межею якої є контур $\gamma$, позитивна нормаль до поверхні утворює з напрямком обходу контуру правогвинтову систему.

Для виконання теореми Стокса (3.8) необхідно, щоб на всій поверхні $S$ компоненти $A_x, A_y, A_z$ векторного поля $\vec{A}(x, y, z)$ мали неперервні частинні похідні по координатах. Ми припускаємо, що реальні фізичні поля відповідають цій вимозі, і тому для них, в тому числі і для вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$, теорема Стокса є справедливою.

Використовуючи теорему Стокса для вектора $\vec{E}$, умову потенціальності електростатичного поля можна записати в диференціальної формі:

$$rot\vec{E}=0. \tag{3.9}$$

З умов (3.8) і (3.9) випливає, що оскільки електростатичне поле є потенціальним, то його силові лінії не можуть бути замкнутими. Доведемо це методом від протилежного і припустимо, що існує хоча б одна замкнута силова лінія електростатичного поля. Виберемо цю лінію в якості траєкторії переміщення точкового заряду. Оскільки для всіх елементів такої траєкторії вектори $\vec{E}$ і $d\vec{l}$ збігаються за напрямком, то і з формули (3.6) випливає, що електростатичне поле здійснило б позитивну або нерівну нулю роботу при переміщенні зарядженої частинки по замкнутій траєкторії. Але такий висновок суперечив би умові потенціальності електростатичного поля (3.7).

### 3.3. Різниця потенціалів

Пригадаємо, що напруженість електричного поля – це його силова характеристика. Крім того, напруженість визначають і як векторну характеристику. У багатьох випадках електричне поле зручно описувати скалярною функцією, що визначається в деякій точці координатами цієї точки.

Така функція називається скалярним потенціалом або потенціалом. Скалярним потенціалом електричного поля називають функцію

$$\varphi_A = -\int_B^A \left(\vec{E} d\vec{l}\right),$$

$$\varphi_A = \int_A^B \left(\vec{E} d\vec{l}\right), \tag{3.10}$$

де $\varphi_A$ - потенціал електричного поля напруженістю $\vec{E}$ в точці $A$, точка $B$ - початок відліку потенціалу.

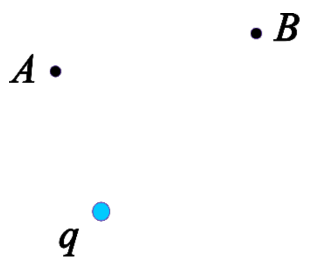


Рис. 3. 2.

Використовуючи це означення, визначимо потенціал, створений точковим зарядом $q$ в точці $A$. За початок відліку потенціалу виберемо точку $B$, рис. 3.2. Використаємо, як і в пункті 3.1, те, що $dl\cos\alpha = dr$, напруженість електричного поля, створеного точковим зарядом - $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$\varphi_A = \int_A^B \left(\vec{E} d\vec{l}\right) = \int_A^B E dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right),$$

де $r_A$ та $r_B$ - радіус-вектори точок $A$ та $B$ – відповідно.

Розкривши дужки, отримаємо

$$\varphi_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}. \tag{3.11}$$

Оскільки точка В вибрана як початок відліку потенціалу, то очевидно, що її координати відомі, відповідно, другий доданок у формулі (3.11) буде сталим числом

$$-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} = c = const\,.$$

Таким чином, потенціал точки А визначатиметься виразом

$$\varphi_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} + c\,. \tag{3.12}$$

Тобто потенціал визначатиметься з точністю до деякої константи *c*, яка, в свою чергу, визначатиметься координатами початку відліку потенціалу. У багатьох теоретичних задачах зручно, щоб стала *c* була рівна нулю. Для цього початок відліку потенціалу зручно вибирати на нескінченності $r_B \to \infty$. Вважають, що потенціал на нескінченності рівний нулю. На практиці часто за початок відліку потенціалу беруть потенціал Землі. Згідно з таким вибором початку потенціалу, потенціал точки *A* буде визначатись як

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}\,.$$

Відомо, що робота з переміщення заряду *q* в електричному полі, що створюється зарядом $q_0$, визначається формулою (3.5), у якій, зробивши заміну

$$\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = \varphi_1\,, \text{ та } \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \varphi_2\,,$$

де $\varphi_1$ - потенціал електричного поля, створеного зарядом $q_0$, точки простору, з якої здійснюється переміщення точкового заряду *q*; $\varphi_2$ - потенціал електричного поля, створеного зарядом $q_0$, точки простору, у яку здійснюється переміщення точкового заряду *q*, отримаємо формулу для роботи

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU\ , \tag{3.13}$$

де $U = (\varphi_1 - \varphi_2)$ - різниця потенціалів між точкою, з якої переноситься заряд, та точкою, у яку переноситься заряд.

Використовуючи (3.13), визначимо фізичний зміст різниці потенціалу. Для цього поділимо ліву і праву частину (3.13) на $q$

$$U = (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{A}{q}\ .$$

***Різниця потенціалів між двома точками простору – це фізична величина, яка чисельно рівна роботі, яка виконується полем при перенесенні одиничного позитивного заряду між цими точками поля. Одиницею вимірювання різниці потенціалів є вольт (В)***.

Визначимо фізичний зміст потенціалу. Для цього точку з потенціалом $\varphi_2$ виберемо на нескінченості, тобто $\varphi_2 = 0$. Тоді, згідно з формулою (3.13), робота при переміщені заряду з нескінченості $A_\infty = q\varphi$ , або, поділивши на q, отримаємо

$$\frac{A_\infty}{q} = \varphi\ .$$

***Потенціал деякої точки визначається роботою електричного поля із перенесення одиничного позитивного заряду з даної точки в нескінченість і не залежить від форми шляху. Як і різниця потенціалів, потенціал вимірюється у вольтах.***

Оскільки при означенні потенціалу використовується поняття роботи, то можна сказати, що ***потенціал електричного поля є його енергетичною характеристикою***.

### 3.4. Принцип суперпозиції для потенціалу електричного поля

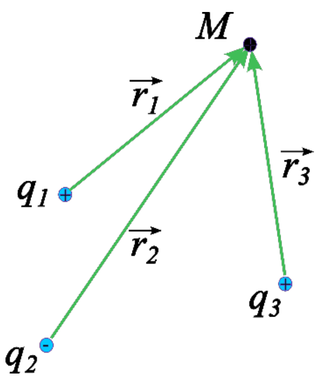


Рис. 3.3. Потенціал створений системою точкових зарядів

Визначимо потенціал, створений у деякій точці *M*, системою точкових зарядів $q_1$, $q_2$, $q_3$, $q_n$ (рис. 3.3). Наслідком принципу суперпозиції напруженості електричних полів є такий вираз

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q} = \frac{A_{1\infty}}{q_1} + \frac{A_{2\infty}}{q_2} + \frac{A_{3\infty}}{q_3} + \ldots + \frac{A_{n\infty}}{q_n},$$

звідси випливає, що

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_n .$$

***Потенціал, створений системою точкових зарядів, визначається алгебраїчною сумою потенціалів, створених у даній точці кожним окремим зарядом системи.***

Для систем із n точкових зарядів потенціал буде визначатись формулою

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i} . \qquad (3.14)$$

Визначимо потенціал електричного поля, створеного неперервним розподілом заряду (рис. 3.4). $V$ - об’єм тіла, $\rho=\rho(x,y,z)$ - об’ємна густина заряду. Розіб’ємо умовно тіло на нескінченно малі частинки об’ємом $dV\to 0$, заряд однієї такої частинки буде $dq=\rho dV$.

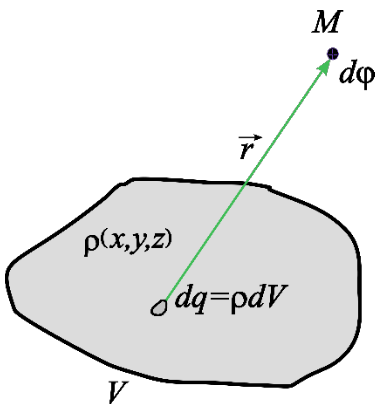


Рис. 3.4. Потенціал електричного поля створеного неперервним розподілом заряду

Потенціал електричного поля $d\varphi$, створений зарядом $dq$ в точці $M$ на відстані $r$, буде визначатись формулою

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Для того, щоб визначити потенціал в точці $M$, створений усім тілом об'єму $V$, потрібно використати міркування такі ж, як і при розгляді потенціалу системи точкових зарядів, тобто повести сумування, але оскільки ми розглядаємо неперервний розподіл заряду, то, замінивши сумування інтегруванням, отримаємо:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho}{r} dV .$$

### 3.5. Зв'язок між напруженістю і потенціалом електричного поля

Очевидно, що між потенціалом електричного поля в даній точці та його напруженістю існує зв'язок

$$\vec{E} = -grad\varphi . \tag{3.15}$$

де $grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$, враховуючи, що

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

формула (3.7) матиме вигляд:

$$\vec{E} = -\varphi\vec{\nabla}\ .$$

Еквіпотенціальними поверхнями є поверхні з однаковим потенціалом. Рівняння еквіпотенціальної поверхні, згідно з означенням, *φ(x,y,z)=const*.

З курсу вищої математики відомо, що градієнт функції в даній точці завжди напрямлений перпендикулярно до поверхні, у нашому випадку - до еквіпотенціальної поверхні. Іншими словами, вектор $\vec{E}$ у кожній точці еквіпотенціальної поверхні спрямований по нормалі до неї. Ще однією важливою особливістю еквіпотенціальних поверхонь є те, що робота при переміщенні заряду по еквіпотенціальній поверхні дорівнює нулю. Щоб переконатись у правильності твердження, використаємо формулу $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ та те, що на еквіпотенціальній поверхні $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, тобто *A=0*. Еквіпотенціальні поверхні при розрахунках домовились відображати з густиною, яка пропорційна потенціалу в цьому місці.

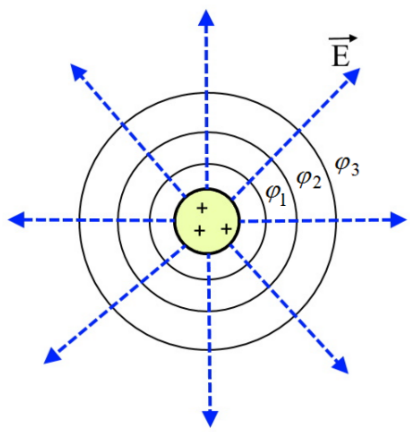


Рис. 3.4. Зв’язок між напруженістю і потенціалом електростатичного поля

Розглянемо еквіпотенціальні поверхні, створені додатнім точковим зарядом (рис.3.4). У просторі еквіпотенціальними поверхнями будуть концентричні сфери. Потенціал точкового заряду визначатиметься формулою

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

напруженість $\vec{E} = -grad\varphi$. Крім того, варто зазначити, що в даному випадку $\varphi_1 > \varphi_2$.

Аналогічний результат можна отримати, коли розглянути негативний точковий заряд.

Маючи картину силових ліній електростатичного поля, можна побудувати еквіпотенціальні поверхні, і навпаки, за відомою картиною еквіпотенціальних поверхонь можна побудувати силові лінії поля. У даній роботі силові лінії поля будуються на основі відомих з експерименту еквіпотенціальних лініях.

## ЛЕКЦІЯ 4.

## Провідники в електростатичному полі. Знаходження розподілу потенціалу методами електричних зображень

### 4.1. Провідник в електричному полі.

Провідники - це речовини, що містять вільні заряджені частинки. У провідникових тілах електричні заряди можуть вільно переміщатися. До провідників відносяться в першу чергу метали. Крім того, електропровідними властивостями володіють електроліти, а також плазма. Ми розглянемо властивості провідників на прикладі їх найтиповіших представників - металів.

Електричні властивості металів обумовлені наявністю в них дуже великої кількості електронів провідності або вільних електронів. Це електрони, які внаслідок хаотичного теплового руху отримали достатню енергію і втратили зв'язок з окремими атомами металу. Такі електрони можуть вільно переміщатися у металі під дією електричного поля. Ці процеси є можливими, оскільки в металах енергія зв'язку електронів з ядром мала.

При поміщенні провідника в зовнішнє електричне поле електрони провідності починають упорядковано рухатися, але потім досягають рівноважного положення. Воно стає можливим, коли на електрони провідності перестає діяти електрична сила. Це означає, що напруженість електричного поля всередині металу стає рівною нулю.

Механізм зникнення електричного поля всередині металу полягає в наступному. При поміщенні провідника в електростатичне поле напруженістю $\vec{E}_0$, створене зовнішніми зарядами, електрони провідності перерозподіляються і створюють всередині провідника власне електричне поле $\vec{E}'$. Це поле повністю компенсує поле $\vec{E}_0$, створене зовнішнім джерелом. У результаті сумарна напруженість поля всередині провідника перетворюється в нуль

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0. \tag{4.1}$$

Слід зазначити, що співвідношення (4.1) виконується для провідника довільної форми, хоча на рис. 4.1 для зручності зображений сферичний провідник. Об'ємна густина заряду всередині провідника також дорівнює нулю:

$$\rho = 0. \tag{4.2}$$

Це означає, що електричні заряди можуть концентруватися тільки на поверхні провідника довільної форми у прошарку атомарної товщини. Усередині об'єму провідника також існують заряджені частинки (ядра атомів і електрони), проте їх заряди взаємно компенсуються, і сумарна об'ємна густина електричного заряду перетворюється в нуль.

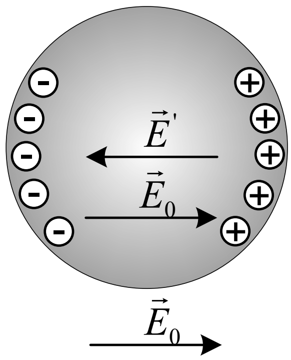


Рис. 4.1. Перерозподіл електричного заряду на поверхні металу і зникнення електричного поля всередині металу

Співвідношення (4.1) та (4.2) виражають дві основні властивості металів в електричному полі. За допомогою ефекту Холла можна експериментальним методом визначити об'ємну концентрацію N електронів провідності в металах. Вимірювання показують, що величина $N$ є дуже великою і має порядок

$$N \sim 10^{28}\, м^{-3}, \tag{4.3}$$

тобто на кожен атом металу припадає в середньому близько одного електрона провідності. Дуже висока концентрація електронів провідності забезпечує виконання співвідношень (4.1) та (4.2) при будь-яких, навіть найбільш сильних, зовнішніх електричних полях.

За наявності провідника поле, створене зовнішніми джерелами, спотворюється, оскільки вільні заряди провідника перерозподіляються, і провідник створює власне електричне поле. Для характеристики електростатичного поля у присутності провідників зручно ввести поверхневу густину електричного заряду. Можна показати, що поблизу поверхні провідника напруженість електричного поля пропорційна поверхневій густині заряду і спрямована ортогонально до поверхні:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}\,, \tag{4.3}$$

де $\vec{n}$ - одиничний вектор нормалі до поверхні провідника, спрямований назовні від металу.

Густина заряду збільшується зі збільшенням кривизни поверхні, якщо поверхня опукла, і зменшується зі збільшенням кривизни, якщо поверхня увігнута. Інакше кажучи, електричні заряди мають властивість накопичуватися на гострих опуклих ділянках поверхні провідника. Таке зосередження заряду призводить до зростання електричного поля поблизу вістря, виникає можливість іонізації навколишнього повітря. У сильному електричному полі іони й електрони інтенсивно рухаються, і частина їх кінетичної енергії переходить в енергію світла. Виникає світіння газу поблизу гострої ділянки провідника, яке називається коронним розрядом і за формою нагадує корону. Це явище служить експериментальним підтвердженням залежності густини електричного заряду від кривизни поверхні.

***Перерозподіл зарядів у провіднику під впливом зовнішнього електричного поля називається явищем електростатичної індукції; інша назва цього явища — електризація тіла через вплив.*** Заряди, що виникають при цьому, називаються *індукованими*, або наведеними.

**4.2. Екранування.**

Як показують співвідношення (4.1) та (4.2), всередині металу електричне поле і об'ємна густина електричних зарядів відсутні. Отже, речовина всередині розглянутого металевого зразка є електрично нейтральною. Припустимо, що цю речовину з внутрішньої області можна вилучити. При цьому ні розподіл електричних зарядів на поверхні металу, ні розподіл поля всередині провідника не зміниться. Отримаємо, що електричне поле всередині тіла буде відсутнім, хоча зовнішнє поле не дорівнює нулю. Така поведінка металу в зовнішньому електричному полі дозволяє здійснювати електростатичний захист об'єктів за допомогою металевих екранів. Металевим екраном називається замкнута металева оболонка, така оболонка екранує внутрішній простір від зовнішнього електричного поля (рис. 4.2).

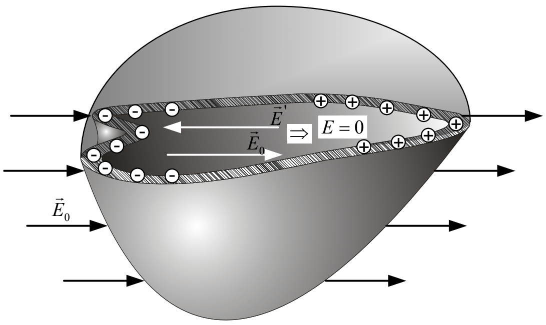


Рис. 4.2. Принцип дії металевого екрану. Екранування внутрішньої порожнини від зовнішніх електричних полів.

Одночасно виникає питання, чи проникає в зовнішній простір електростатичне поле зарядів, розташованих усередині порожнини? Так, в загальному випадку проникає. Можна довести, що зовнішній простір екранується замкнутою провідною оболонкою від зарядів, що знаходяться всередині порожнини, тільки в тому випадку, якщо оболонка заземлена (рис. 4.3).

Заземлення оболонки означає, що вона з'єднана провідником з масивним металевим предметом, наприклад, листом, який закопаний в землю. Зазвичай такий предмет закопують на глибині ґрунтових вод, де провідність ґрунту велика унаслідок розчинення солей, що містяться в землі. При цьому всі заряди із зовнішньої поверхні оболонки переходять до Землі, залишаються тільки початкові заряди всередині порожнини й індуковані заряди протилежного знаку на внутрішній поверхні оболонки. Тоді електричне поле в зовнішньому просторі зникає.

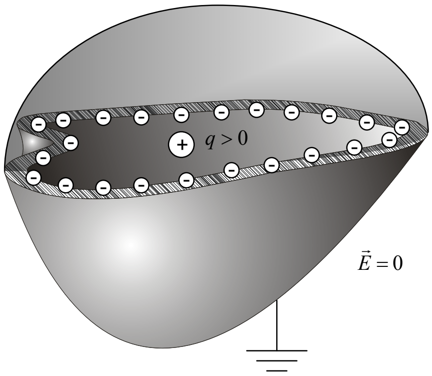


Рис. 4.3. Екранування зовнішнього простору від зарядів, що знаходяться у внутрішній порожнині

Екрануюча поверхня не обов'язково повинна бути суцільною, можна використовувати сітку з дрібними комірками.

Сформулюємо викладене у формі висновку. Якщо провідник помістити у електростатичне поле, то

1. Напруженість поля всередині провідника дорівнює нулю.

2. Наданий провіднику заряд (провідник отримує або втрачає електрони) розподіляється по поверхні провідника.

3. Провідник представляє собою еквіпотенціальну область і його поверхня є еквіпотенціальною. Наслідок з цього: напруженість поля на поверхні провідника в кожній точці спрямована по нормалі до поверхні провідника.

**5. Людина в електричному полі Землі.**

Відомо, що навколо Земної поверхні існує електричне поле, напруженість цього поля біля поверхні Землі складає в середньому 130 В/м, а заряд Землі є від'ємним. Використовуючи формулу, яка пов'язує напруженість і різницю потенціалів $E \approx \dfrac{\Delta\varphi}{d}$, видно, що різниця потенціалів між головою людини і ногами становить приблизно 200 В (рис. 4.4).

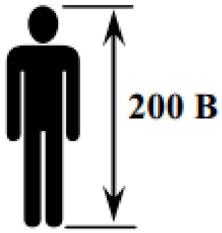


Рис. 4.4.

Виникає питання: чому людина не відчуває цієї різниці потенціалів? Інше цікаве питання, пов'язане з поставленим: чи не можна використати потужне поле Землі для енергетичних цілей? Відповідь полягає в тому, що наше тіло – хороший провідник. Тому людина є еквіпотенціальним тілом; це означає, що різниця потенціалів між головою людини і ступнями ніг близька до нуля. Саме через це (нульова різниця потенціалів!) людина і не відчуває цієї різниці потенціалів. Негативна відповідь на друге питання ґрунтується на тому, що для протікання електричного струму (як, наприклад, у кишеньковому ліхтарику) необхідні, крім електростатичних сил, і так звані сторонні сили.

## ЛЕКЦІЯ 5.
## Електроємність. Конденсатори

### 5.1. Електроємність.

Оскільки всередині провідника електричне поле відсутнє, то потенціал у всіх точках провідника є однаковим. Розглянемо відокремлений провідник, на великій відстані від якого створюване ним електричне поле наближається до нуля. Тоді потенціал відокремленого провідника можна обчислити таким чином

$$\varphi = \int_1^{\infty} \vec{E} d\vec{l} \ , \qquad (5.1)$$

де точка 1 - будь-яка точка провідника, траєкторія інтегрування також є довільною через потенціальність електростатичного поля.

Потенціал відокремленого провідника прямо пропорційний його заряду, тому можна ввести коефіцієнт пропорційності між цими величинами - електроємність. ***Електроємністю (ємністю) відокремленого провідника називається відношення заряду провідника до його потенціалу***:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \tag{5.2}$$

Електроємність провідника визначається його формою і розмірами, але не залежить від заряду і потенціалу провідника. З формули (5.2) можна знайти, яким чином залежить зміна потенціалу провідника від його заряду:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta q}{C}. \tag{5.3}$$

Таким чином, ємність показує, наскільки зростає потенціал провідника при збільшенні його заряду. Ємність, згідно з формулою 5.2, чисельно рівна заряду, який потрібно надати провіднику, щоб збільшити його потенціал на одиницю. ***Ємність вимірюється в Фарадах*** (1 Ф=1 Кл/1 В). ***Один фарад - це ємність такого відокремленого провідника, потенціал якого змінюється на 1В при наданні йому заряду 1Кл.***

Один Фарад є дуже великим значенням, оцінити яке можна, обчисливши електроємність планети Земля. Для цього в якості наближеної моделі Землі розглянемо відокремлену провідну кулю радіусом $R = 6400$ км. Будемо вважати електричне поле Землі сферично симетричним і застосуємо електростатичну теорему Остроградського-Гауса. Для цього необхідно ввести в розгляд допоміжну поверхню $S$ у вигляді сфери радіуса $r$, що задовольняє нерівності $r > R$. Обчислюючи потік вектора $\vec{E}$ крізь сферу радіуса $r$, знаходимо модуль напруженості електростатичного поля кулі в зовнішньому просторі

$$E = \pm\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}, \tag{5.4}$$

де $q$ - заряд сфери; $r$ - відстань від центру кулі до точки простору, у якій розглядається електричне поле; знак «плюс» вибирається за умови $q > 0$, знак «мінус» - в протилежному випадку.

Потенціал електростатичного поля кулі в зовнішньому просторі можна обчислити за допомогою формули:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}. \tag{5.5}$$

Використовуючи формули (5.2) і (5.5) і вважаючи $r = R$, можна знайти ємність відокремленої провідної кулі радіуса $R$:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R. \tag{5.6}$$

У результаті отримуємо значення електроємності Землі $C_{Зем.} = 0{,}7 \cdot 10^{-3}\,Ф$.

На практиці зазвичай зустрічаються ємності, менші на кілька порядків. Тому в електротехніці для вимірювання ємності використовуються мікрофарад і пікофаради.

Вимірювання показують, що середня напруженість електростатичного поля на поверхні Землі дорівнює $E_{Зем} = 130\ \frac{В}{м}$, при цьому Земля заряджена негативно. Отже, згідно з формулою (5.4), сумарний електричний заряд Землі приблизно дорівнює $q_{Зем} = -6 \cdot 10^5\,Кл$.

Використовуючи формулу (5.5), можна обчислити потенціал Землі:

$$\varphi_{Зем} = -8{,}3 \cdot 10^8\,В. \tag{5.7}$$

Отримане значення потенціалу використовується при розгляді електричних полів на великих відстанях від поверхні Землі. У той же час потрібно пам'ятати, що фізичний зміст має не сам потенціал, а різниця потенціалів. Оскільки електричний потенціал є неоднозначною функцією, то можна використовувати умову нормування, аналогічну (5.7):

$$\varphi_{Зем} = 0. \tag{5.8}$$

На відміну від (5.7), умова нормування (5.8) застосовується при вивченні електричних полів безпосередньо поблизу поверхні Землі.

Велика ємність і хороша електропровідність Землі дозволяють здійснювати захист людини від електричного розряду шляхом заземлення корпусів електроустаткування. При цьому корпуси приладів з'єднуються провідником з масивним металевим предметом, закопаним в землю. Тоді електричні заряди, що виникли на корпусі приладу в результаті несправності, перерозподіляються між корпусом і Землею. Оскільки електроємність Землі дуже велика, то заряди переходять від корпусу приладу до Землі, у результаті, згідно з (5.6), корпуси всіх електричних приладів і пристроїв при заземленні також матимуть нульовий потенціал.

**5.2. Конденсатори.**

Якщо до зарядженого провідника наблизити інший провідник, який несе заряд протилежного знаку, то потенціал кожного провідника зменшиться, оскільки провідники впливають один на одного. Відповідно до формули (5.2), ємність зросте в порівнянні з випадком відокремленого провідника. Ємність буде максимальною, якщо два провідники мають однакові за величиною, але протилежні за знаком заряди. Така система провідників називається конденсатором, а самі провідники - обкладками конденсатора. Підбираючи форму обкладинок, можна домогтися того, щоб електричне поле було в основному зосереджене у просторі між обкладками, так як лінії напруженості електростатичного поля починаються на позитивних і закінчуються на негативних зарядах.

Аналогічно до формули (5.2), можна ввести в розгляд електроємність (ємність) конденсатора:

$$C = \frac{q}{U}, \tag{5.9}$$

де $q$ - заряд однієї обкладинки; $U$ - напруга на конденсаторі (різниця потенціалів між обкладинками).

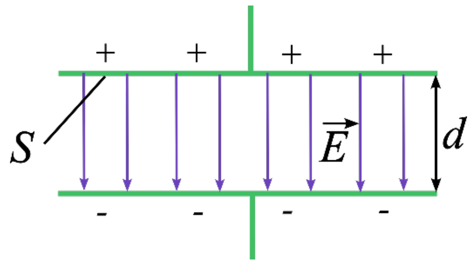


Рис. 5.1. Плоский конденсатор

Формула (5.9) означає, що напруга між обкладками завжди пропорційна заряду обкладинок. Якщо обкладки конденсатора мають форму площин, то конденсатор називається плоским (рис. 5.1). Електричне поле всередині плоского конденсатора можна вважати приблизно однорідним, якщо не враховувати ослаблення поля поблизу країв обкладок. Точність такого наближення зростає в міру збільшення площі обкладок і в міру зменшення відстані між обкладинками. Напруженість електричного поля всередині плоского конденсатора можна розрахувати за допомогою теореми Остроградського-Гауса (див. Лекція 2, п. 2.4.). Згідно з принципом суперпозиції, поля, створювані позитивно зарядженою і негативно зарядженою обкладинками, додаються. З огляду на напрямок цих полів, отримуємо, що зовні плоского конденсатора сумарне електростатичне поле перетворюється в нуль. У той же час всередині плоского конденсатора поле посилюється в два рази в порівнянні з полем однієї зарядженої площини. Тому, використовуючи формулу (2.19. див. Лекція 2), напруженість поля всередині плоского конденсатора можна записати у вигляді

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \tag{5.10}$$

де $\sigma$ - поверхнева густина заряду на обкладинках конденсатора.

Різниця потенціалів між пластинками плоского конденсатора буде визначатись формулою

$$U = Ed \tag{5.11}$$

Підставивши (5.10) в (5. 11) отримаємо

$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d\,. \tag{5.12}$$

Враховуючи, що заряд пластинки конденсатора $q = \sigma \cdot S$ та формули (5.12) (5.9), отримаємо

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma \cdot S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}\,,$$

Тобто формула для ємності плоского конденсатора матиме вигляд

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}\,, \tag{5.13}$$

де $S$ - площа обкладки конденсатора; $d$ - відстань між обкладками конденсатора.

З формули (5.13) випливає, що електрична стала вакууму має розмірність Ф/м.

Якщо в область між пластинками конденсатора помістити діелектрик, то його ємність зростає в $\varepsilon$ разів.

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{S}{d}\,,$$

ε - діелектрична проникність середовища. Однією з особливостей такого конденсатора є те, що його ємність не залежить від оточуючих тіл, оскільки майже все електричне поле знаходиться між пластинками конденсатора, так, як це зображено на малюнку. Звернемо увагу на те, що ємність залежить від відстані між пластинками та площі пластинок, тобто, змінюючи ці параметри, можна змінювати ємність.

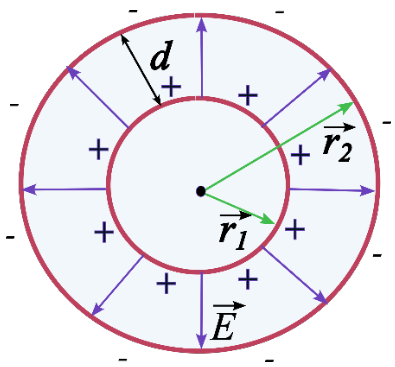

Рис. 5.2. Сферичний конденсатор.

***Сферичний конденсатор*** складається з двох концентричних сфер радіусами $r_1$ та $r_2$ (рис. 5.2.). Нехай заряд внутрішньої сфери додатній і рівний $q$, заряд зовнішньої сфери також дорівнює $q$, але від'ємний. Визначимо різницю потенціалів між зовнішньою та внутрішньою сферами. З попереднього матеріалу відомо, що напруженість електричного поля сферичної поверхні визначається виразом:

$$E = \frac{q}{4\varepsilon_0 \pi r^2}\,. \tag{5.14}$$

Використаємо зв'язок між напруженістю електричного поля та потенціалом

$$\vec{E} = -grad\varphi \tag{5.15}$$

Для випадку сферичної симетрії (5.15) можна записати

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}\,, \tag{5.16}$$

відповідно $d\varphi = -Edr$. Підставимо (5.14) в попередню формулу

$$d\varphi = -\frac{q}{4\varepsilon_0 \pi r^2}dr \tag{5.17}$$

Проінтегруємо рівність (5.17)

$$\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_2}^{r_1}\frac{dr}{r^2}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_2}^{r_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Використавши формулу (5.9) та попередню, отримаємо вираз для електричної ємності сферичного конденсатора

$$C = \frac{q}{U} = 4\pi\varepsilon_0\frac{r_1 r_2}{d},$$

де $d = r_2 - r_1$ - відстань між сферами.

Розглянемо випадок, коли відстань між сферами дуже мала $d = r_2 - r_1 \approx 0$, або $r_2 \approx r_1 = r$, отримаємо

$$C = \varepsilon_0\frac{4\pi r^2}{d} = \varepsilon_0\frac{S}{d},$$

де $S = 4\pi r^2$ - площа сферичної поверхні радіуса *r*. Тобто, якщо сфери розташовані на малій відстані одна від одної, то сферичний конденсатор з певним наближенням можна вважати плоским конденсатором. Якщо помістити діелектрик між сферами, то електрична ємність збільшиться в $\varepsilon$ разів

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0\frac{r_1 r_2}{d}.$$

Розглянемо ***циліндричний конденсатор***, який складається з двох циліндричних поверхонь різного радіуса зі спільною віссю. Радіус зовнішнього негативно зарядженого циліндра позначимо $r_2$, меншого, позитивно зарядженого - $r_1$ (рис. 5.3).

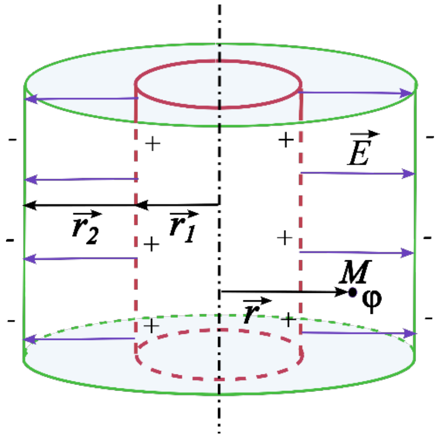


Рис. 5.3. Циліндричний конденсатор.

Як і у випадку сферичного конденсатора, для знаходження різниці потенціалів між циліндричними поверхнями використаємо формулу $d\varphi = -Edr$. З попереднього матеріалу відомо, що напруженість електричного поля циліндричної поверхні визначається формулою

$$E = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}. \tag{5.18}$$

$$d\varphi = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}dr \tag{5.19}$$

Проінтегруємо рівняння (5.19)

$$\int_{\varphi}^{\varphi_1} d\varphi = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r}^{r_1}\frac{dr}{r},$$

де $\varphi$ – потенціал точки $M$ (рис. 5.3).

$$\varphi_1 - \varphi = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r)\Big|_r^{r_1} = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_1},$$

Відповідно, різниця потенціалів між поверхнями циліндрів визначатиметься формулою

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1} \qquad (5.20)$$

Якщо $\eta$ - заряд одиниці довжини однієї з поверхонь циліндра, то в загальному випадку ємність, яка припадає на одиницю довжини циліндричного конденсатора, $C = \frac{\eta}{U}$. З врахуванням (5.20) отримаємо

$$C = \frac{\eta}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

### 5.3. Послідовне та паралельне з'єднання конденсаторів.

На практиці часто виникає потреба сполучати конденсатори в батарею конденсаторів: паралельно, послідовно, мішано (комбіновано). Розглянемо паралельне і послідовне сполучення конденсаторів.

При паралельному сполученні конденсаторів (рис. 5.4) однаковою для всіх конденсаторів є напруга $U$, тому:

$$q_1 = C_1 U\ ,\ q_2 = C_2 U\ ,\ \ldots\ q_n = C_n U\ .$$

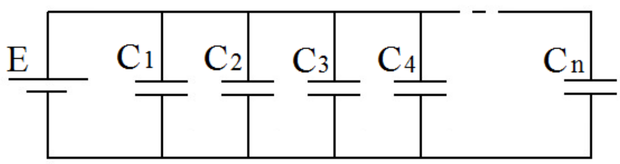


Рис. 5.4. Паралельне з’єднання конденсаторів

На основі закону збереження заряду сумарний заряд батареї конденсаторів буде визначатись формулою:

$$q = \sum_{i=1}^{n} q_i = U \sum_{i=1}^{n} C_i\ ,$$

тому ***ємність батареї конденсаторів при паралельному сполученні буде рівна сумі ємностей усіх конденсаторів, що входять до складу батареї***:

$$C = \frac{q}{U} = \sum_{i=1}^{n} C_i \ .$$

При паралельному сполученні конденсаторів однакової ємності $C_1$ загальну ємність батареї можна розрахувати, використовуючи формулу:

$$C = nC_1 ,$$

де $n$ - кількість конденсаторів, сполучених у батарею.

При послідовному сполученні конденсаторів (рис. 5.5) внаслідок явища електростатичної індукції однаковим для всіх конденсаторів буде заряд, що дорівнює повному заряду батареї. Тому:

$$U_1 = \frac{q}{C_1} ,\ U_2 = \frac{q}{C_2} ,\ \dots\ U_n = \frac{q}{C_n} .$$

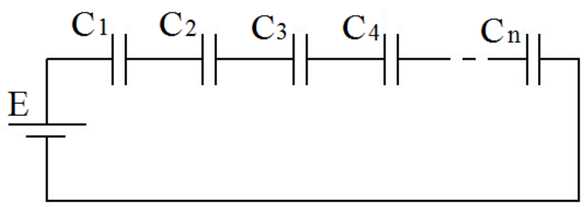


Рис. 5.5. Послідовне з'єднання конденсаторів

Напруга батареї визначається сумою напруг на окремих конденсаторах:

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i = q \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} .$$

Тому для всієї батареї буде справедливим співвідношення:

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} .$$

Отже, ***при послідовному сполученні конденсаторів обернена загальна ємність батареї конденсаторів дорівнює сумі обернених ємностей окремих конденсаторів***. Якщо послідовно сполучити окремі конденсатори однакової ємності, то:

$$C = \frac{C_1}{n},$$

тобто ємність батареї зменшується у стільки разів, скільки взято конденсаторів. Послідовне сполучення використовують для збільшення робочої напруги.

### 5.4. Енергія електростатичного поля.

**Енергія електричного поля створеного точковими зарядами.** Потенціальна енергія електричного поля, створеного системою точкових зарядів, чисельно рівна роботі, яку необхідно виконати, щоб створити дану систему зарядів. Розглянемо систему, створену двома точковими зарядами $q_1$ та $q_2$, які знаходяться в точках *1* та *2*. Для її створення потрібно із нескінченості перенести точкові заряди в задані точки.

Визначимо роботу із переміщення першого заряду із нескінченності в точку 1.

$$A = qU = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q(\varphi_1 - \varphi_\infty)$$

$$A_1 = 0$$

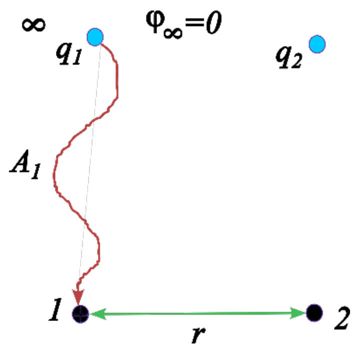


Рис. 5.6. Переміщення заряду із нескінченності в точку 1

Потенціал, який створюється зарядом $q_1$ в точці 2 (рис.5.7.)

$$\varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$$

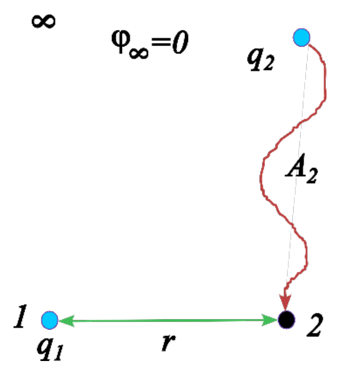


Рис. 5.7. Переміщенню заряду із нескінченності в точку 2

Робота із переміщення заряду $q_2$ із нескінченості в точку 2 в електричному полі заряду $q_1$ буде визначатись формулою

$$A_2 = q_2\varphi_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$$

Визначимо повну роботу, вона буде рівна енергії розглядуваної системи

$$A = W = A_1 + A_2 = 0 + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r},$$

або

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2} q_1 \frac{q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} + \frac{1}{2} q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

Враховуючи, що $\varphi_1 = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$ та $\varphi_2 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$ отримаємо

$$W = \frac{1}{2} q_1\varphi_1 + \frac{1}{2} q_2\varphi_2$$

де, $\varphi_1$ – потенціал в точці 1, створений зарядом $q_2$, $\varphi_2$ – потенціал в точці 2, створений зарядом $q_1$.

Екстраполюючи дану формули на систему із $n$ точкових зарядів, отримаємо

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i$$

$\varphi_i$ – потенціал, створений в $i$-й точці всіма зарядами системи крім $i$-го.

Можна показати, що енергія статичної системи зарядів не має мінімуму. Це означає, що статична система не може мати рівноваги.

**Енергія зарядженого відокремленого тіла.** Визначимо енергію зарядженого відокремленого тіла. Вона рівна роботі, яку потрібно виконати, щоб зарядити дане тіло, тобто перенести заряд із нескінченості на дане тіло.

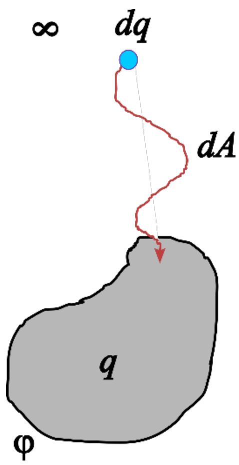


Рис. 5.8. Переміщення заряду із нескінченності в точку 2

Елементарна робота із перенесення заряду $dq$ (рис. 5.8) буде рівна.

$$dA = \varphi \cdot dq$$

Враховуючи, що для відокремленого тіла $\varphi = \dfrac{q}{C}$, отримаємо, що робота

$$dA = \frac{q}{C} dq$$

$$W = A = \frac{1}{C}\int_0^q q dq = \frac{1}{2}\frac{1}{C} q^2 \Big|_0^q = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

Тобто енергію зарядженого тіла можна визначити за формулою

$$W = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \qquad (5.21)$$

Підставивши $C = \frac{q}{\varphi}$ в (5.21), отримаємо

$$W = \frac{1}{2} q\varphi \tag{5.22}$$

Враховуючи, що $q = C\varphi$ з (5.22), отримаємо

$$W = \frac{1}{2} C\varphi^2$$

**5.5. Енергія зарядженого конденсатора.**

Покажемо, що заряджений конденсатор має енергію. Енергія конденсатора рівна роботі, що виконується при розрядці конденсатора. Визначимо елементарну роботу *dA* із перенесення елементарного заряду *dq* по колу розряду конденсатора (рис. 5.9).

$$dA = Udq$$

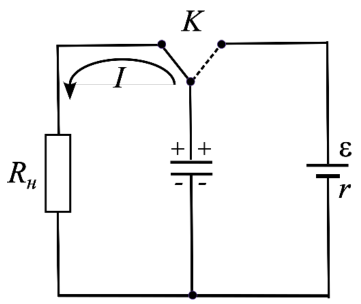


Рис. 5.9. Схема кола зарядки та розрядки конденсатора

З формули

$$C = \frac{q}{U} \tag{5.23}$$

отримаємо

$$U = \frac{q}{C},$$

відповідно, елементарна робота

$$dA = \frac{1}{C} q dq$$

Визначимо повну роботу або повну енергію системи.

$$W = -A = -\frac{1}{C}\int_{q}^{0} q dq = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C},$$

Тобто енергію зарядженого конденсатора можна визначити за формулою

$$W = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \qquad (5.24)$$

Підставивши (5.23) в (5.24), отримаємо

$$W = \frac{1}{2} qU \qquad (5.25)$$

Враховуючи, що $q=CU$ з (5.25), отримаємо

$$W = \frac{1}{2} CU^2 \qquad (5.26)$$

Очевидно, що енергія зарядженого конденсатора знаходиться в самому електричному полі. Електричне поле матеріальне і, як будь-який матеріальний об'єкт, повинне мати масу, енергію, імпульс. Звідси виходить, що енергія електричного поля зв'язана з параметрами, які визначають електричне поле. Знайдемо цей зв'язок. Найпростіше таку закономірність знайти для однорідного електричного поля, яке існує між пластинками плоского конденсатора.

Підставивши у (5.26) формулу для ємності плоского конденсатора (5.13), отримаємо

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 \frac{S}{d} U^2 \tag{5.27}$$

У формулі (5.27) помножимо чисельник і знаменник на $d$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 (Sd)\left(\frac{U}{d}\right)^2 \tag{5.28}$$

У (5.28) врахуємо $S{\cdot}d{=}V$ - об’єм конденсатора та $\frac{U}{d} = E$ - напруженість електричного поля між пластинками конденсатора.

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 V$$

Під густиною енергії електричного поля розуміють енергію поля одиниці об’єму. У випадку, коли поле однорідне, густина енергії електричного поля буде скрізь однакова

$$\omega = \frac{W}{V}.$$

$$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 \qquad (5.29).$$

З формули (5.29) можна зробити висновок, що густина енергії електричного поля залежить від напруженості електричного поля.

Розглянемо неоднорідне електричне поле і визначимо його енергію. Для цього умовно розділимо простір, де знаходиться поле, на елементарні об’єми, в межах яких електричне поле можна вважати однорідним.

$$dW = \omega \cdot dV = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 dV$$

Проінтегруємо останнє рівняння

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 \int_V E^2 dV \tag{5.30}$$

Формула (5.30) справедлива для однорідного діелектрика ($\varepsilon = const$), для неоднорідного діелектрика ($\varepsilon \neq const$)

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V \varepsilon E^2 dV$$

## ЛЕКЦІЯ 6.

## Діелектрики в електростатичному полі

### 6.1. Електричний диполь та його характеристики.

При розгляді поведінки атомів і молекул речовини в електричному полі зручно використовувати поняття електричного дипольного моменту. Дипольним моментом системи, що складається з двох частинок, які мають рівні за величиною, але протилежні за знаком заряди, називається вектор

$$\vec{p} = q\vec{l}\ , \tag{6.1}$$

де $q$ - величина позитивного заряду в цій системі, $\vec{l}$ - плече диполя (вектор, проведений від негативного заряду до позитивного) (рис.6.1).

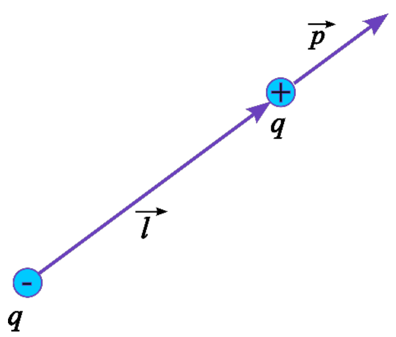


Рис. 6.1. Схематичне зображення електричного диполя

Така система з двох заряджених частинок називається електричним диполем.

***Дипольний момент вимірюється в*** $\text{Кл}\cdot\text{м}$. Використовується також позасистемна одиниця електричного дипольного моменту **дебай (Д)**: $1\,\text{Д} = 3{,}33564\cdot 10^{-30}\,\text{Кл}\cdot\text{м}$.

Якщо заряд розподілений неперервно, то для електрично нейтральної системи дипольний момент дорівнює:

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}\rho dV\ , \qquad (6.2)$$

де $\rho$ - об'ємна густина заряду, $\vec{r}$ - радіус-вектор, проведений з початку координат у точку розташування елементарного заряду $dq = \rho dV$ .

Дипольний момент електрично нейтральної системи не залежить від вибору початку координат. Він є важливою характеристикою електрично нейтральної системи, оскільки характеризує силу, що діє на систему з боку зовнішнього електричного поля, а також напруженість поля, створюваного самою системою.

Діелектрики - це речовини, що не містять вільних заряджених частинок. Тому в діелектричному тілі електричні заряди не можуть вільно переміщатися між різними частинами тіла. Заряди, що належать атомам і молекулам діелектрика, прийнято називати зв'язаними зарядами. Під дією електричного поля зв'язані заряди в діелектрику зміщуються (але не можуть переміщатися на великі відстані), і діелектрик набуває дипольного моменту, тобто поляризується. ***Вектором поляризації (поляризованістю)*** $\vec{P}$ ***називається дипольний момент одиниці обєму діелектрика***

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_i \vec{p}_i . \qquad (6.3)$$

Тут сумування проводиться по всіх дипольних моментах $\vec{p}_i$ , які існують всередині фізично малого об'єму $\Delta V$. ***Вектор поляризації дорівнює відношенню сумарного дипольного моменту всіх атомів і молекул у деякому фізично***

***малому об'ємі діелектрика до величини цього об'єму.*** Поляризація речовини вимірюється в одиницях $Кл/м^2$.

**6.2. Електричні властивості діелектриків.**

***Розрізняють два основні класи діелектриків: неполярні і полярні.***

Молекули неполярного діелектрика не мають дипольного моменту за відсутності електричного поля. Можна сказати, що заряди в неполярній молекулі розподілені рівномірно, і тому в молекулі негативні заряди в цілому не зміщені щодо позитивних. Наприклад, неполярними є атом гелію, двохатомні молекули водню, азоту, кисню, багатоатомні молекули $CO_2$, $CH_4$, та ін.

При поміщенні неполярного діелектрика в зовнішнє поле заряди всередині його молекул зміщуються, і кожна молекула набуває дипольного моменту, паралельного напруженості електричного поля (рис. 6.2). Поляризації неполярного діелектрика протидіють внутрішні молекулярні сили, завдяки яким зберігається симетрична форма молекули в рівноважному стані. Ці внутрішньомолекулярні сили перешкоджають зсуву зарядів щодо положення рівноваги. Отже, для збільшення дипольного моменту кожної молекули і вектора поляризації речовини в цілому необхідне збільшення напруженості електричного поля.

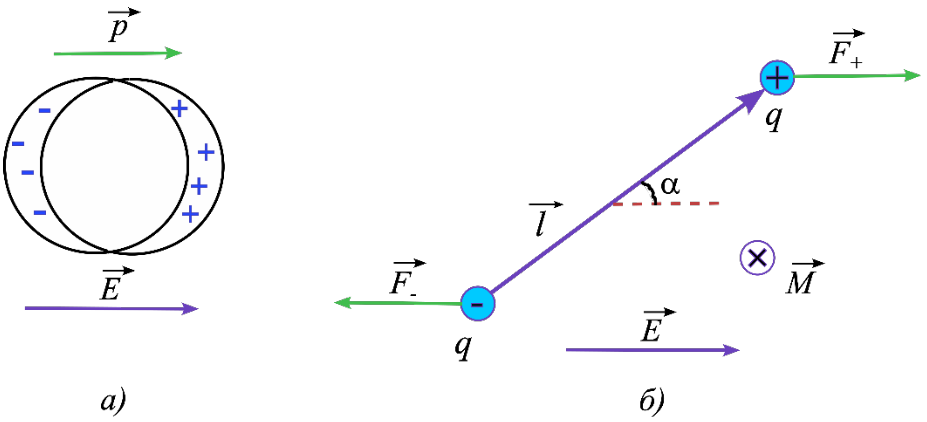


Рис. 6.2. Схематичне зображення двох механізмів поляризації діелектриків: а) виникнення дипольного моменту в неполярної молекули; б) поворот полярної молекули в просторі

За поміщення неполярного діелектрика в зовнішнє поле заряди всередині його молекул зміщуються, і кожна молекула набуває дипольного моменту, паралельного напруженості електричного поля (рис. 6.2). Поляризації неполярного діелектрика протидіють внутрішні молекулярні сили, завдяки яким зберігається симетрична форма молекули в рівноважному стані. Ці внутрішньо-молекулярні сили перешкоджають зсуву зарядів щодо положення рівноваги. Отже, для збільшення дипольного моменту кожної молекули і вектора поляризації речовини в цілому необхідне збільшення напруженості електричного поля.

Молекули полярних діелектриків володіють власними дипольними моментами навіть під час відсутності зовнішнього електричного поля. Це означає, що в силу будови молекули заряди протилежного знаку взаємно зміщені в просторі. Прикладами полярних молекул є молекули $CO$, $N_2O$, $SO_2$ та ін.

Якщо зовнішнє електричне поле дорівнює нулю, то внаслідок теплового руху моменти різних молекул орієнтовані хаотично, і тому вектор поляризації дорівнює нулю. При увімкненні зовнішнього електричного поля на кожну молекулу діє обертальний момент сил

$$\vec{M} = \left[\vec{p} \times \vec{E}\right], \tag{6.4}$$

який намагається орієнтувати її дипольний момент паралельно до напруженості зовнішнього електричного поля (див. рис. 6.2.). Тут квадратні дужки означають векторний добуток. Величина вектора обертального моменту може бути представлена у вигляді

$$M = pE\sin\alpha, \tag{6.5}$$

де $\alpha$ - кут, утворений векторами $\vec{p}$ і $\vec{E}$ .

Зі співвідношення (6.5) випливає, що обертальний момент перетворюється на нуль у двох випадках: а) $\alpha=0$, що відповідає положенню стійкої рівноваги диполя у зовнішньому полі; б) $\alpha=\pi$, що відповідає положенню нестійкої рівноваги полярної молекули в зовнішньому полі.

Поляризації полярного діелектрика перешкоджає хаотичний тепловий рух атомів і молекул речовини. Він протидіє вибудовуванню дипольних моментів всіх атомів і молекул вздовж напрямку, що задається вектором напруженості електричного поля $\vec{E}$. Тому для збільшення модуля вектора поляризації речовини необхідно прикласти більш сильне електричне поле. У сильних електричних полях і за відносно низьких температур речовини можливий стан насичення поляризації, при якому дипольні моменти всіх атомів і молекул вже досягли орієнтації вздовж напрямку, що задається вектором $\vec{E}$.

Таким чином, і для неполярних, і для полярних діелектриків вектор поляризації, що характеризує їх, збігається за напрямком з вектором напруженості електричного поля і пропорційний прикладеному полю

$$\vec{P} = \kappa\varepsilon_0\vec{E}, \tag{6.6}$$

де $\kappa$ - діелектрична сприйнятливість.

Діелектрична сприйнятливість показує, наскільки добре діелектрик поляризується в електричному полі. Слід зазначити, що співвідношення (6.6) є наближеним, воно виконується для відносно слабких електричних полів, які значно менші за внутрішньоатомні поля. При цьому виконується нерівність

$$\kappa > 0. \tag{6.7}$$

Слід зазначити, що співвідношення (6.7) є справедливим лише для електростатичних полів. У разі використання змінних полів існує область частот, у якій діелектрична сприйнятливість приймає від’ємні значення. Це можливо для високих частот, що перевищують власну частоту коливань зв'язаних зарядів у молекулі. У цьому випадку зв'язані електрони не встигають зміщуватися слідом за високочастотним полем, і діелектрична сприйнятливість є негативною.

Зазвичай полярні діелектрики мають більшу діелектричну сприйнятливість, ніж неполярні, тобто виконується нерівність

$$\kappa_{неполярн.} < \kappa_{полярн.}. \qquad (6.8)$$

Оскільки $\kappa > 0$, то зовнішнє електричне поле всередині діелектрика послаблюється полем дипольних моментів молекул. Картину послаблення електричного поля всередині діелектрика можна схематично представити так, як зображено на рис. 6.3.

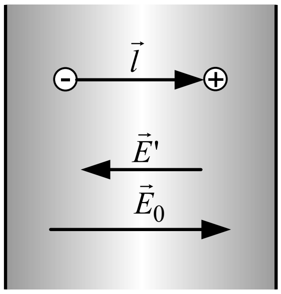


Рис. 6.3. Схематична картина послаблення електричного поля всередині діелектрика

Електричні диполі, орієнтовані вздовж напруженості зовнішнього електричного поля $\vec{E}_0$, створюють власне поле $\vec{E}'$. Оскільки поле $\vec{E}'$ напрямлене протилежно до зовнішнього електричного поля, то сумарне електричне поле всередині діелектрика послаблюється в порівнянні із зовнішнім:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'; \quad E = E_0 - E', \qquad (6.9)$$

$$E < E_0. \qquad (6.10)$$

Таким чином, можна порівняти екранування поля всередині провідника і ослаблення поля всередині діелектрика. Поле всередині металу повністю зникає завдяки перерозподілу електронів провідності по поверхні металу. Зв'язані заряди всередині діелектрика не можуть переміщатися на великі відстані, а здатні лише зміщуватися щодо положення рівноваги у своїх атомах. Тому поле всередині діелектрика лише послаблюється, але не перетворюється на нуль. Як ми побачимо пізніше, коефіцієнт послаблення поля визначається діелектричною сприйнятливістю речовини.

Вище ми ввели поняття про зв'язані заряди як про заряди, що входять до складу атомів і молекул речовини. Їх прийнято називати також власними зарядами. Для кожного атома і кожної молекули речовини зв'язані заряди протилежного знаку взаємно скомпенсовані. Однак під дією електричного поля в результаті зсуву зв'язаних заряджених частинок у діелектрику можуть виникати області, у яких переважає позитивний або негативний зв'язаний заряд. Такий заряд прийнято називати нескомпенсованим (надлишковим) зв'язаним зарядом.

Задаючи вектор поляризації у кожній точці простору, можна визначити поле вектора і побудувати лінії вектора поляризації, аналогічно до того, як це було зроблено раніше для вектора напруженості електростатичного поля. Через поле вектора поляризації виражається об'ємна густина надлишкових зв'язаних зарядів (власних зарядів) діелектрика:

$$\rho_{зв'яз.} = -div\vec{P}. \tag{6.11}$$

Для більш наочного представлення властивостей поля вектора поляризації проінтегруємо обидві частини рівняння (6.11) у деякій області і потім застосуємо теорему Остроградського-Гауса. У результаті отримаємо співвідношення

$$\oint_S \vec{P}d\vec{S} = -q_{зв'яз.}, \tag{6.12}$$

де $S$ - поверхня, яка обмежує об’єм $V$,

$$q_{зв'яз.} = \int_{(V} \rho_{зв'яз.} dV \tag{6.13}$$

- сумарний зв'язаний заряд всередині об’єму.

Таким чином, згідно з формулою (6.12), потік вектора поляризації через довільну замкнуту поверхню $S$ дорівнює взятому з протилежним знаком повному зв'язаному заряду діелектрика, зосередженому всередині об'єму, який обмежується цією поверхнею.

Як було показано раніше, дивергенція характеризує розбіжність ліній вектора у просторі. Тому зі співвідношень (6.11), (6.13) випливає, що лінії вектора поляризації починаються на надлишкових негативних пов'язаних зарядах і закінчуються на надлишкових позитивних пов'язаних зарядах. Співвідношення (6.11) також показує, що некомпенсовані (надлишкові) пов'язані заряди виникають лише в тих областях, де вектор поляризації змінюється в просторі. Зокрема, зміна вектора поляризації відбувається на межі розділу двох діелектриків, у результаті чого на цій межі можуть виникати некомпенсовані зв'язані заряди.

Поверхнева густина зв'язаних зарядів дорівнює

$$\sigma_{звяз.} = P_{1n} - P_{2n}, \tag{6.14}$$

де $P_{1n}$ та $P_{2n}$ - компоненти векторів поляризації в першому і другому середовищі, ортогональні до поверхні розподілу, одиничний вектор нормалі направлений від першого середовища до другого.

Всередині металу електричне поле і поляризація речовини відсутні, тому на поверхні розділу діелектрика і металу виконується гранична умова

$$\sigma_{звяз.} = P_n, \tag{6.15}$$

де $P_n$ - складова вектора поляризації діелектрика, ортогональна до поверхні розділу, одиничний вектор нормалі направлений назовні відносно діелектрика.

Умова (6.15) є справедливою також для межі діелектрика і вакууму.

В об'ємі однорідного діелектрика, що знаходиться в постійному електричному полі, густина зв'язаних зарядів дорівнює нулю. Так відбувається тому, що на місце зміщених зарядів надходять заряди з сусідніх областей діелектрика. У результаті не компенсовані зв'язані заряди можуть перебувати тільки на межі однорідного діелектрика в постійному електричному полі (рис.6.4).

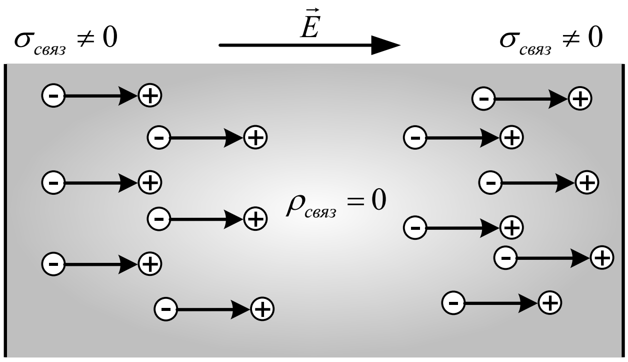


Рис. 6.4. Поляризація діелектрика і виникнення на його поверхні нескомпенсованих (надлишкових) зв'язаних зарядів

Загальний вплив електричного поля як на провідник, так і на діелектрик полягає в тому, що під дією зовнішнього електричного поля речовина сама стає джерелом електричного поля, в результаті чого зовнішнє поле змінюється. Електричне поле можуть створювати як вільні заряди в провіднику, так і зв'язані заряди в діелектрику. Рис. 6.3 і та рис. 6.4 показують, що електричне поле, створюване зовнішніми джерелами, послаблюється всередині діелектрика. Причиною цього послаблення є поляризація діелектрика і виникнення на його межі нескомпенсованих (надлишкових) зв'язаних зарядів.

**6.3. Електрична індукція (зміщення).**

Для характеристики електричного поля в діелектричному середовищі зручно ввести в розгляд вектор електричної індукції (зміщення):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \qquad (6.16)$$

який враховує не тільки електричне поле, а й поляризацію середовища. Нагадаємо, що напруженість є силовою характеристикою електричного поля. У свою чергу вектор поляризації характеризує властивості діелектрика в полі. Вектор зміщення залежить від обох цих векторів і характеризує як властивості поля, так і властивості діелектричного середовища.

Так само, як і поляризація, ***електрична індукція вимірюється в Кл/м$^2$***.

Вектор індукції можна записати також у вигляді

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}\ , \tag{6.17}$$

де

$$\varepsilon = 1 + \kappa \tag{6.18}$$

- відносна діелектрична проникність середовища. Оскільки виконується нерівність (6.7), у випадку електростатичного поля отримуємо співвідношення

$$\varepsilon > 1\,. \tag{6.19}$$

У деяких простих, але важливих випадках, величина $\varepsilon$ показує, у скільки разів електричне поле послаблюється в однорідному діелектрику порівняно з вакуумом через поляризацію діелектрика. Зокрема, напруженість поля точкового заряду $q$ і сила взаємодії двох точкових зарядів $q_1$ і $q_2$ в однорідному безмежному діелектрику мають вигляд:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}\vec{r}, \tag{6.20}$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_{12}^{\ 3}}\vec{r}. \tag{6.21}$$

Наявність множника $\varepsilon$ у знаменнику у виразах (6.20), (6.21) описує ослаблення поля усередині однорідного безмежного діелектрика.

Електричне поле у діелектрику може створюватися не тільки зв'язаними (власними зарядами), але і вільними (сторонніми) зарядами. Це заряди, які не належать атомам і молекулам діелектрика. Вільні заряди можуть бути розташовані як усередині, так і зовні діелектрика. Тому об'ємну густина заряду у діелектрику можна записати у вигляді

$$\rho = \rho_{зв'яз.} + \rho_{вільн.}. \tag{6.22}$$

де $\rho_{вільн.}$ - об'ємна густина вільних (сторонніх) зарядів.

Підставляючи співвідношення (6.22) і (6.11) в закон Кулона в диференціальної формі, отримуємо рівняння для вектора зміщення $\vec{D}$:

$$div\vec{D} = \rho_{вільн.} \tag{6.23}$$

Це співвідношення є узагальненим записом закону Кулона в диференціальної формі, придатній для діелектриків. Зі співвідношення (6.23) випливає, що лінії вектора індукції електричного поля починаються на позитивних вільних зарядах і закінчуються на негативних вільних зарядах. Іншими словами, саме сторонні заряди є джерелами і стоками поля вектора $\vec{D}$.

Відповідно теорема Гауса для діелектриків має вигляд:

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q_{вільн.}, \tag{6.24}$$

де

$$q_{вільн.} = \int_V \rho_{вільн.} dV \tag{6.25}$$

- сумарний вільний заряд, що знаходиться всередині об'єму *V*, обмеженому поверхнею *S*.

Згідно зі співвідношенням (6.24), потік вектора зміщення через довільну замкнуту поверхню *S* дорівнює повному вільному заряду, розташованому у межах об'єму, який обмежується цією поверхнею.

Використовуючи співвідношення (6.17), можна перетворити формулу (6.23) за умови $\varepsilon = const$ та записати закон Кулона в диференціальної формі для однорідних діелектриків:

$$div\vec{E} = \frac{\rho_{вільн.}}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \tag{6.26}$$

Наявність множника $\varepsilon$ в знаменнику в (6.26) описує послаблення електричного поля точкових вільних зарядів всередині однорідного безмежного діелектрика в $\varepsilon$ раз порівняно з полем, яке створювали б ці заряди у вакуумі.

Відзначимо, що співвідношення (6.26) має більш вузьку область застосування порівняно з (6.23), воно є справедливим лише для однорідних безмежних діелектриків, властивості яких не залежать від просторових координат. У той же час формула (6.23) справедлива як для однорідних, так і для неоднорідних діелектриків.

Повернемося до питання про необхідність введення вектора електричної індукції $\vec{D}$ (вектора зміщення). Цей вектор у багатьох випадках значно спрощує вивчення електричного поля в діелектрику. Відповідно до формул (6.23) і (6.24), джерелами поля вектора зміщення є тільки вільні (сторонні) заряди. Такі заряди не входять до складу атомів і молекул діелектрика, тому в більшості випадків врахувати розташування вільних зарядів відносно просто. Потім, використовуючи співвідношення (6.23) і (6.24), можна обчислити вектор електричної індукції $\vec{D}$ і далі за допомогою формули (6.17) можна знайти напруженість електричного поля $\vec{E}$, тобто силову характеристику поля. Таким чином, завдання визначення поля всередині діелектрика буде вирішеним. У той же час пряме обчислення напруженості поля є більш складним завданням, оскільки напруженість поля $\vec{E}$, відповідно до формули (6.22), створюється не тільки вільними, але і зв'язаними зарядами.

Наведений вище алгоритм обчислення напруженості поля, як і весь матеріал даного параграфа, стосується електричного поля, усередненого по фізично малій області діелектрика. Така область має малі геометричні розміри, але в той же час містить велику кількість атомів і молекул речовини. Потрібно пам'ятати, що реальне поле може сильно змінюватися в межах молекул і в просторі між ними. Це поле прийнято називати мікрополем. Однак для вирішення багатьох практично важливих задач зміни мікрополя можна не враховувати і розглядати як перше наближення макрополе, тобто електричне поле, усереднене по фізично малому обсягу. Таке усереднення враховує плавні зміни електричного поля на великих відстанях, але згладжує всі зміни поля на відстанях порядку атомних.

Тому у всіх формулах під напруженістю електричного поля $\vec{E}$ розуміється саме макрополе.

У той же час існують випадки, коли необхідно розрізняти усереднене поле і мікрополе, яке діє безпосередньо на молекулу. Відмінність діючого поля від середнього важливо врахувати для густих діелектриків, у яких відносна діелектрична проникність значно відрізняється від одиниці. У цьому випадку справедливі формули Лоренц-Лоренца:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}, \tag{6.27}$$

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{N\beta}{3}, \tag{6.28}$$

де $\vec{P}$ - вектор поляризації кристала, $N$ - концентрація молекул речовини, $\beta$ - поляризованість молекули, що зв'язує дипольний момент молекули і напруженість поля, що діє на молекулу:

$$\vec{p} = \beta\varepsilon_0\vec{E}'. \tag{6.29}$$

Співвідношення (6.28) називають також формулою Клаузіуса-Моссотті. Виключаючи вектор $\vec{P}$, за допомогою формул (6.27) - (6.29) можна отримати співвідношення

$$\vec{E}' = \frac{\varepsilon_r + 2}{3}\vec{E}. \tag{6.30}$$

З формули (6.30) випливає, що якщо діелектрик не є густим і для нього $\varepsilon \to 1$, то $\vec{E}' \to \vec{E}$, і діюче поле перестає відрізнятися від середнього.

## ЛЕКЦІЯ 7.

## Постійний електричний струм. Сила та густина струму. Рівняння неперервності

### 7.1. Постійний електричний струм.

***Електричним струмом називається впорядкований рух електрично заряджених частинок.*** Зарядженими частинками в різних середовищах можуть бути різні частинки: у металах - електрони, у напівпровідниках - електрони і дірки, в електролітах - іони.

***Умови виникнення струму.***

***1. Наявність вільних носіїв заряду.***

***2. Присутність електричного поля в провіднику або різниці потенціалів між кінцями провідника.***

Речовини, що проводять електричний струм, називають провідниками. Як було сказано, основним методом збудження струму провідності є створення в провіднику електричного поля. Під дією сил електричного поля виникає упорядкований рух носіїв заряду: позитивні мікроскопічні заряди рухаються в напрямі вектора напруженості поля, а негативні - у протилежному напрямі. ***За напрям електричного струму прийнято вважати напрям руху позитивно заряджених частинок.*** У металах за напрям струму вибирають напрям, протилежний до напрямку руху електронів, хоча струм обумовлений рухом електронів.

Опишемо в загальних рисах модель електричного струму. Відомо, що при температурах, відмінних від 0 К, електрони в металі перебувають у безперервному хаотичному русі, але, враховуючи хаотичність руху, можна стверджувати, що сумарний заряд, який переноситься через будь-який поперечний переріз провідника, рівний нулю. Коли у провіднику створити електричне поле, електрони набуватимуть деякої додаткової (напрямленої) швидкості. Ця швидкість називається дрейфовою. Перенесення заряду може відбуватись лише за рахунок дрейфової швидкості, вона і визначає струм у провіднику.

Вивчаючи струм провідності, рух заряджених частинок у речовині зображають неперервними кривими – лініями струму. ***Лінія струму – це лінія, дотична в кожній точці якої співпадає із напрямком дрейфової швидкості носія заряду в цій точці. За напрям ліній струму в кожній точці речовини прийнято напрям впорядкованого руху позитивних носіїв заряду.*** Лінії струму утворюють замкнені циліндричні поверхні, які називають трубками струму, тобто ***трубка струму – це частина середовища, по якому протікає струм, обмежена лініями струму.*** При цьому носії заряду під час руху не перетинають бокових поверхонь трубок струму. Поверхню провідника в багатьох задачах можна вважати трубкою струму.

**7.2. Сила та густина струму.**

***Силою струму називають скалярну фізичну величину, яка чисельно дорівнює заряду, що переноситься через поперечний переріз провідника за одиницю часу.***

$$I = \frac{dq}{dt}, \tag{7.1}$$

де $dt$ - нескінченно малий проміжок часу, $dq$ - заряд, що проходить через поперечний переріз провідника протягом цього часу.

Якщо за однакові проміжки часу $\Delta t$ через поперечний переріз провідника проходять однаковий заряд $\Delta q$ і напрям струму при цьому не змінюється, такий струм називають стаціонарним або постійним. Сила постійного струму визначатиметься співвідношенням

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \tag{7.2}$$

***Одиницею вимірювання сили струму є Ампер (А)***. 16 листопада 2018 року на XXVI Генеральній конференції мір і ваг було ухвалене нове визначення ампера, що ґрунтується на використанні чисельного значення елементарного електричного заряду. До цього означення одного ампера давалось через електромагнітну взаємодію двох провідників. Вимірюється сила струму за допомогою приладів, які називаються амперметрами.

Дуже часто зручно використовувати поняття густини струму, яка також є характеристикою струму, але векторною. ***Густина струму - це вектор, що за напрямком співпадає з дрейфовою швидкістю в даному місці, і за модулем рівний величині заряду, що переноситься за одиницю часу через одиницю площі, розміщеної нормально до дрейфової швидкості.*** Або по-іншому: густина струму чисельно дорівнює відношенню сили струму *dI*, що проходить крізь перпендикулярну до напряму руху носіїв поверхню *dS*, до площі цієї поверхні.

Згідно з цим означенням густини струму, можемо записати зв'язок між силою струму та густиною струму.

$$J = \frac{dI}{dS} \tag{7.3.}$$

Визначимо густину струму як векторну величину і через характеристики носіїв заряду.

$$\vec{J} = en\vec{v}\,, \tag{7.4.}$$

де $e \approx -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *Кл* – заряд електрона, $n$ - концентрація електронів, для металів $n = 10^{22} - 10^{23}$ см$^{-3}$, $\vec{v}$ - дрейфова швидкість електронів. З (7.4) видно, що густина струму напрямлена протилежно до напрямку руху електронів.

Провівши більш детальний аналіз та розглянувши випадок, коли струм обумовлений рухом як негативно, так і позитивно заряджених частинок, отримаємо таку формулу:

$$\vec{J} = e^{-}n^{-}\vec{v}^{\,-} + e^{+}n^{+}\vec{v}^{\,+}\,, \tag{7.5}$$

де $e^{-}n^{-}\vec{v}^{-}$ та $e^{+}n^{+}\vec{v}^{+}$ - заряд, концентрація, дрейфова швидкість негативно та позитивно заряджених вільних носіїв заряду відповідно.

Вектор густини струму $\vec{J}$ визначає електричний струм у даній точці провідника, де заряджені частинки рухаються зі дрейфовою швидкістю $\vec{v}$. Знаючи густину струму в кожній точці провідника, можна розрахувати силу струму в цьому провіднику за формулою

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = \int_S J_n \cdot dS, \tag{7.6}$$

де $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$, $\vec{n}$ — вектор нормалі до елемента площі *dS;* $J_n = \vec{J} \cdot \vec{n} = J \cdot \cos\alpha$ — проекція вектора $\vec{J}$ на напрям нормалі $\vec{n}$; $\alpha$ - кут між векторами $\vec{J}$ і $\vec{n}$. Інтегрування проводиться по площі поперечного перерізу провідника. З іншого боку, використовуючи матеріал, викладений у лекції 2 п.1., та проводячи аналогічні міркування, можна сказати, що сила струму в провіднику визначається потоком вектора густини струму через поперечний переріз провідника.

У випадку рівномірного розподілу струму по площі *S* поперечного перерізу провідника, перпендикулярній до напряму струму, сила постійного струму визначатиметься формулою

$$I = env = J \cdot S. \tag{7.7}$$

### 7.3. Рівняння неперервності.

Закон збереження електричного заряду - один із фундаментальних законів природи, він випливає із експериментальних фактів. По-перше, заряд будь-якої частинки - інваріант, тобто не залежить від швидкості руху частинки. Доказом інваріантності заряду є електрична нейтральність атомів. По-друге, сумарний електричний заряд системи частинок не змінюється при будь-яких взаємоперетвореннях частинок. Отже, електричний заряд замкнутої системи частинок залишається сталим. Електричний заряд є властивістю частинки і окремо від своїх носіїв існувати не може. У той же час електричний заряд є в деякому сенсі самостійною величиною, оскільки не змінюється при взаємоперетвореннях частинок. Відповідно до закону збереження електричного заряду, зміна заряду в деякому об'ємі $V$ може статися тільки в результаті руху заряджених частинок через замкнуту поверхню $S$, яка обмежує об'єм. Зміну сумарного заряду $q$ в об'ємі $V$ можна характеризувати похідною

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV \,, \tag{7.8}$$

де $\rho$ - об'ємна густина електричного заряду.

Оскільки заряд переноситься через поверхню $S$, що обмежує об'єм $V$, ми можемо характеризувати цей рух частинок силою струму

$$I = \oint_S \vec{j} d\vec{S} \,, \tag{7.9}$$

при цьому додатна нормаль, як і раніше, спрямована назовні об'єму $V$.

Використовуючи співвідношення (7.1), (7.8) і (7.9), отримуємо

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\oint_S \vec{j} d\vec{S} \,. \tag{7.10}$$

Тут знак «мінус» враховує, що при русі позитивно заряджених частинок назовні сила струму є додатною величиною, в той час як заряд всередині обєму зменшується.

Співвідношення (7.10) представляє собою закон збереження електричного заряду в інтегральній формі. Використовуючи теорему Остроградського-Гаусса, цей закон можна записати також в диференціальній формі

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0 \,. \tag{7.11}$$

Рівняння (7.11) називається також рівнянням неперервності.

У залежності (7.11) використовується символ частинної похідної за часом, оскільки область $V$ і її границя $S$ не змінюються з плином часу.

## ЛЕКЦІЯ 8.

## Сторонні сили. Електрорушійна сила. Закон Ома для неоднорідної ділянки і повного кола

### 8.1. Сторонні сили. Електрорушійна сила.

Постійний струм проходить в провіднику доти, доки в ньому існує стаціонарне електричне поле. Припустимо, що в цьому полі на носіїв наряду діють одні тільки кулонівські сили, які переносять позитивні заряди в напрямі поля від вищого потенціалу до нижчого. Оскільки кулонівські сили потенціальні й роботу із переміщення зарядів виконують завдяки енергії електричного поля, то переміщення носіїв заряду дуже швидко приведе до того, що поле всередині провідника зрівноважиться, провідник стане еквіпотенціальним, і впорядкований рух заряджених частинок припиниться. Отже, постійний струм у провіднику неможливо підтримувати за допомогою одних лише кулонівських сил. Для цього разом з кулонівськими силами потрібна дія інших сил неелектричної природи, внаслідок роботи яких можна протягом тривалого часу підтримувати незмінною напруженість електричного поля всередині провідника. Інакше кажучи, за допомогою додаткового процесу потрібно до кінця провідника з меншим потенціалом безперервно відводити принесені струмом позитивні заряди, а від кінця провідника з більшим потенціалом безперервно їх підводити.

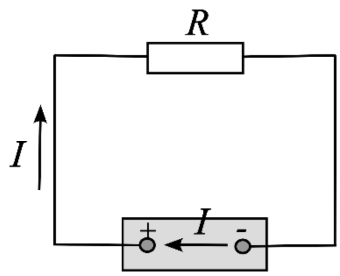


Рис. 8.1. Напрямок струму в усьому замкнутому електричному колі

Такий рух зарядів можна здійснити по замкненому контуру (рис. 8.1), утвореному резистивним елементом $R$ і джерелом електрорушійної сили або кількома такими джерелами, у яких позитивні заряди переносяться проти напряму сил електричного поля (від нижчого потенціалу $\varphi_2$ до вищого $\varphi_1$). Переміщення носіїв позитивного заряду на цих ділянках проти напряму вектора напруженості можливе тільки за допомогою сил неелектростатичного походження. Будь-які сили неелектростатичної природи, які діють на заряджені частинки, називають сторонніми силами. Сторонні сили можуть діяти як на окремих ділянках, так і по всій довжині замкненого кола. Вони можуть бути зумовлені механічними або хімічними процесами, дифузією носіїв заряду в неоднорідному середовищі, змінними магнітними полями, освітленням поверхні деяких речовин короткохвильовим випромінюванням тощо. Пристрій, у якому виникають сторонні сили, називають джерелом струму (наприклад, гальванічний елемент, генератор електричного струму, термопара, сонячна батарея). Джерелом електричної енергії називають пристрій, який перетворює енергію будь-якого виду в електричну.

Отже, постійні струми проходять тільки в провідниках, приєднаних до джерел струму. При цьому на кінцях провідника підтримується стала різниця потенціалів внаслідок роботи, яку виконують сторонні сили завдяки енергії джерела струму. Параметром поля сторонніх сил є напруженість поля сторонніх сил, яка вводиться за формальною аналогією з напруженістю електричного поля:

$$\vec{E}^* = \frac{\vec{F}^*}{q}. \qquad (8.1)$$

Використовуючи (8.1), можна визначити силу, що діє на одиничний позитивний заряд $q$ в джерелі струму.

$$\vec{F}^* = \vec{E}^* q. \qquad (8.2)$$

Слід відмітити, що ***поле сторонніх сил не є потенціальним***, відповідно до означення потенціальності поля, робота по замкненому шляху не дорівнюватиме нулю.

Джерело електрорушійної сили характеризується електрорушійною силою (ЕРС). ***Електрорушійна сила виникає лише в непотенціальних полях і***

***чисельно рівна роботі із перенесення одиничного позитивного заряду по всьому замкнутому електричному колі.***

$$\varepsilon = \frac{A_0}{q}, \tag{8.3}$$

де $\varepsilon$ - електрорушійна сила, $A_0$ - робота із переміщення заряду $q$ по всьому колі.

***ЕРС вимірюється у вольтах***. Електрорушійна сила, незважаючи на цю назву, є енергетичною характеристикою самого джерела струму.

Оскільки сторонні сили діють тільки всередині джерела струму і не діють на ділянках кола, зовнішніх відносно до джерела, то можна зробити висновок, що ЕРС джерела чисельно дорівнює роботі, яку здійснюють сторонні сили при переміщенні одиничного позитивного заряду між полюсами всередині джерела струму:

$$\varepsilon = \int_1^2 \left(\vec{E}^* \, d\vec{l}\right), \tag{8.4}$$

де точка 1 знаходиться на негативному полюсі, а точка 2 - на позитивному полюсі джерела струму.

Формулу (8.4) можна узагальнити на випадок замкненого кола (наприклад, якщо коло містить кілька джерел струму):

$$\varepsilon = \oint \left(\vec{E}^* \, d\vec{l}\right). \tag{8.5}$$

Крім сторонніх сил на заряд діють сили електростатичного поля, що мають напруженість $\vec{E}$. Отже, результуюча сила $\vec{F}$, що діє на заряд $q$ в будь-якій точці кола, може бути записана у вигляді

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{E}^*). \tag{8.6}$$

### 8.2. Закон Ома для неоднорідної ділянки.

Ділянка кола, що містить джерело струму, називається неоднорідною (рис. 8.2).

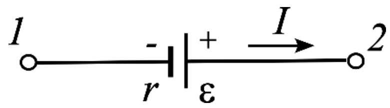


Рис. 8.2. Неоднорідна ділянка кола, що містить джерело струму

Робота, що здійснюється сумарною силою $\vec{F}$ над зарядом $q$ на ділянці кола *1-2* з урахуванням співвідношень (8.3) і (8.6), дорівнює

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon , \qquad (8.7)$$

де $\varphi_1$ і $\varphi_2$ - значення скалярного потенціалу електростатичного поля на кінцях ділянки.

***Величина, що чисельно дорівнює сумарній роботі, що здійснюється електростатичними і сторонніми силами при переміщенні одиничного позитивного заряду, називається падінням напруги або просто напругою на даній ділянці кола.***

Використовуючи (8.7), отримуємо, що напруга на неоднорідній ділянці кола визначається виразом

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon \, . \qquad (8.8)$$

Таким чином, для неоднорідної ділянки кола електрична напруга не дорівнює різниці потенціалів. Це результат дії на даній ділянці кола сторонньої сили, яка має неелектростатичну природу.

Дослід показує, що закон Ома виконується також для неоднорідної ділянки кола, що містить джерело струму, якщо використовувати узагальнене поняття напруги (8.8). При цьому саме джерело струму представляє для струму певний опір, який прийнято називати внутрішнім опором джерела. Тому закон Ома для неоднорідної ділянки кола має такий вигляд

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon}{r}, \tag{8.9}$$

де $I$ - сила струму; $r$ - внутрішній опір джерела струму. Або в найбільш загальному випадку, коли ділянка кола містить $n$ джерел струму,

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i}{r}.$$

При використанні співвідношення (8.9) мається на увазі наступне правило вибору знаків: ***струм вважається додатнім, якщо він спрямований від точки 1 до точки 2 (рис. 8.2.); ЕРС береться зі знаком «плюс», якщо, рухаючись від точки 1 до точки 2, ми проходимо джерело струму від негативного полюса до позитивного.***

Якщо неоднорідна ділянка кола *1-2* буде додатково містити деякий резистор $R$, то необхідно врахувати повний опір ділянки, тобто в знаменник співвідношення (8.9) слід додати доданок $R$.

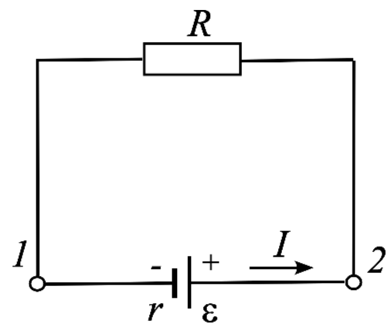

Рис. 8.3. Повне електричне коло

Застосовуючи співвідношення (8.9) до всього кола, показаного на рис.8.3, і вважаючи $\varphi_1 = \varphi_2$, отримуємо закон Ома для повного кола:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}, \tag{8.10}$$

де $R$ - опір зовнішньої ділянки кола.

Використовуючи закон Ома для замкнутого кола (8.10), можна обчислити напругу на полюсах джерела струму

$$U = \varepsilon - Ir. \tag{8.11}$$

Згідно зі співвідношенням (8.11), при постійній ЕРС напруга на полюсах джерела струму тим вища, чим менше його внутрішній опір.

Розглянувши частину кола, зображену на рис. 8.3 між точками 2 та 1, отримаємо, що виконується нерівність $\varphi_2 > \varphi_1$. Це означає, що на неоднорідній ділянці кола струм проходить від точки з меншим потенціалом до точки з великим потенціалом. Такий напрям струму пояснюється тим, що вільні носії заряду рухаються під дією сторонніх, тобто неелектростатичних сил.

У граничному випадку, коли коло, показане на рис. 8.3, розімкнуте, $R \to \infty$. Тоді з формули (8.10) випливає $I \to 0$, і зі співвідношення (8.9) отримуємо $\varepsilon = \varphi_2 - \varphi_1$. Значить, електрорушійну силу джерела можна визначити як різницю потенціалів між полюсами джерела струму в розімкненого кола.

**8.3. Хімічні джерела струму.**

Акумулятор – це гальванічний елемент, у якому при роботі відбувається хімічна реакція із речовинами на електродах, що попередньо були накопичені на них шляхом електролізу при зарядці. Основними характеристиками акумуляторів є ЕРС (*E)*, внутрішній опір ($r_i$), максимальна потужність ($P_{мax}$) та максимальний струм ($I_{мax}$). Для практики важливою властивістю акумуляторів є те, що їхня ЕРС може бути стабільною протягом тривалого часу.

Джерело струму розвиває повну потужність *P=EI*. Корисна потужність, яка витрачається у зовнішньому колі, обчислюється наступним чином:

$$P_k = IU = I^2R = I(E - Ir_i). \tag{8.12}$$

Коефіцієнт корисної дії виражається формулою:

$$\eta = \frac{P_k}{P} = \frac{I(E - Ir_i)}{IE} = \frac{(E - Ir_i)}{E} = \frac{U}{E}, \tag{8.13}$$

$$\eta = \frac{I^2 R}{I^2 (R + r_i)} = \frac{R}{(R + r_i)}. \tag{8.14}$$

Потужність і ККД акумулятора значною мірою залежать від навантаження, тобто від струму *I*, що проходить у колі. На рис. 8.3 показано цю залежність. Графік $P_к=f(I)$ виражається відрізком параболи, вісь якої паралельна осі координат $P_к$, тому існує екстремальна точка М на кривій $P_к=f(I)$, координати якої можна визначити із формули (8.12):

$$I_m = \frac{E}{2r_i} \tag{8.15.а}$$

і

$$P_{km} = \frac{EI_m}{2}. \tag{8.15.б}$$

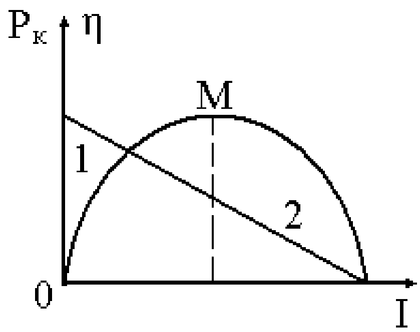


Рис. 8.3. Графік залежності корисної потужності та ККД акумулятора

Графік $\eta=f(I)$ є спадною лінійною функцією струму.

З формул (8.12-8.15) випливає, що джерело віддаватиме максимальну потужність, коли зовнішній опір дорівнюватиме внутрішньому:

$$R=r_i.$$

У цьому випадку, як видно з формули (8.14), $\eta$=50 %. Крім того, $\eta$=1, коли $r_i$=0. При збільшенні сили струму величина $\eta$ зменшується і стає такою, що дорівнює нулю, коли зовнішній опір $R=0$, тобто при короткому замиканні.

На практиці найбільш поширені свинцеві акумулятори, які називають також кислотними. Кислотний акумулятор складається із заряджених позитивно і негативно пластин, які містяться в спеціальному корпусі з електролітом.

Для заряджання акумулятора через нього пропускають електричний струм. Іони водню під дією електричного поля рухаються до катода, відбувається реакція:

$$PbSO_4+2H^+=Pb^{2+}+H_2SO_4,$$

$$Pb^{2+}+2e=Pb.$$

У результаті сульфур свинцю на катоді перетворюється на губчастий металічний свинець сірого кольору. Одночасно іони рухаються до анода, втрачають заряд і вступають у реакцію:

$$PbSO_4+SO_4^{2-}-2e=Pb(SO_4)_2.$$

Далі відбувається зворотна реакція:

$$Pb(SO_4)_2+2H_2O=2PbO_2+2H_2SO_4.$$

При цьому на аноді утворюється оксиген свинцю (*IV*) темно-коричневого кольору. В електроліт виділяється сірчана кислота, а кількість води у ньому зменшується. Густина електроліту зростає, отже, вона є характеристикою ступеня розряджання акумулятора.

У розімкненому стані заряд акумулятора може зберігатись досить довго.

Широкого поширення набули лужні акумулятори. Залежно від хімічного складу електродів, лужні акумулятори поділяються на залізно-нікелеві, кадмієво-нікелеві, цинково-нікелеві тощо. Активна маса позитивно заряджених пластин (анодів) таких акумуляторів однакова: до заряджання – це гідроксид нікелю (II) $Ni(OH)_2$.

Схематично реакції заряджання – розряджання можна записати так:

$$\mathrm{Fe}+2\mathrm{Ni(OH)_2} \underset{\textit{розряджання}}{\overset{\textit{заряджання}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Fe(OH)_2}+2\mathrm{Ni(OH)_2},$$

$$Cd + 2Ni(OH)_2 \underset{розряджання}{\overset{заряджання}{\rightleftarrows}} Cd(OH)_2 + 2Ni(OH)_2 .$$

Коли акумулятор заряджається, активна маса пластин на аноді перетворюється на гідроксид нікелю, а активна маса на катоді - на губчасте залізо і кадмій. При розряджанні акумуляторів відбувається зворотній процес.

Характерною перевагою лужних акумуляторів над кислотними є те, що при однаковій масі їх ємність більша, більша механічна міцність.

Залежно від умов експлуатації в одних випадках вигідніше застосовувати лужні акумулятори, в інших – кислотні.

Будову свинцево-кислотної акумуляторної батареї в найбільш загальному випадку показано на рис. 8.4.

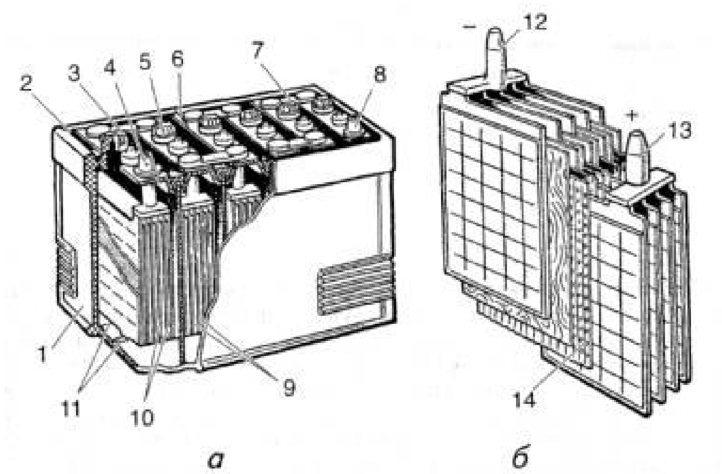


Рис. 8.4. Будова свинцево-кислотної акумуляторної батареї: *а* - загальний вигляд; *б* - блок пластин. 1 - бак; 2 - мастика; 3 - заливний отвір; 4, 8, 12, 13 - полюсні штирі; 5 - пробка заливного отвору; 6 - кришка; 7 - перемичка; 9, 10 - відповідно негативні й позитивні пластини; 11 - ребра; 14 – сепаратори.

**ЛЕКЦІЯ 9.**

# Закон Ома для ділянки кола. Закон Ома в диференціальній формі. Правила Кірхгофа

## 1. Закон Ома для однорідної ділянки кола.

Один із найважливіших законів про електричні явища, що пов'язує між собою силу струму, напругу і опір для ділянки кола, встановив німецький учитель фізики і вчений Георг Сімон Ом (1787—1854). У 1826 р. Георг Сімон Ом експериментально встановив закон, що об'єднав такі фізичні величини, як сила струму, напруга, опір. У 1827 р. теоретично обґрунтував закони (Ома) для ділянки та повного кола. Цей закон і був названий його іменем. Частина схеми установки, за якою працював вчений, зображена на рис. 9.1.

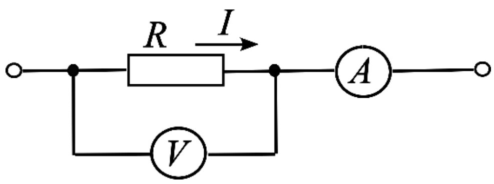


Рис. 9.1. Частина схеми установки Ома

Вимірюючи спад напруги - $U$ за допомогою вольтметра на ділянці кола з сталим опором $R$ та силу струму $I$, використовуючи амперметр, провів велику кількість дослідів. У результатах цих дослідів спостерігались закономірності, а саме, було помічено, що

$$I \sim U. \tag{9.1}$$

Перейшовши від пропорційності до рівності, отримаємо

$$I = \lambda U\ , \tag{9.2}$$

$\lambda$ - називається провідністю провідника, крім того ця величина стала.

Величина, обернена до провідності, називається опором

$$\lambda = \frac{1}{R}. \tag{9.3}$$

Використовуючи (9.3), формула (9.2) набуде вигляду

$$I = \frac{U}{R}. \tag{9.4}$$

Як джерело струму Ом використовував у дослідах термоелемент, що складався з мідного і вісмутового провідників. Виконавши дуже ретельні та точні вимірювання та провівши вище описаний математичний аналіз, Ом встановив: ***сила струму в однорідній ділянці кола прямо пропорційна напрузі на кінцях цієї ділянки та обернено пропорційна її опору.***

Формули (9.2) та (9.4) - математичний запис в інтегральній формі вище сформульованого закону Ома для однорідної ділянки кола.

**2. Закон Ома в диференціальній формі.**

У середовищі, в якому проходить електричний струм, виділимо трубку струму (рис. 9.2) та розглянемо її частину нескінченно малої довжини $dl$ та об’єму $dV$.

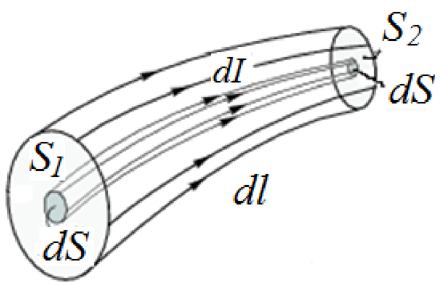


Рис. 9.2. Трубка струму

Оскільки $dl$ є нескінченно мала величина, то будемо вважати, що $dS_1 = dS_2 = dS$. Густина струму $\vec{J} = \vec{J}_1 = \vec{J}_2$. Закон Ома в інтегральній формі для розглядуваного випадку можна подати у вигляді

$$dI = \frac{dU}{dR}, \tag{9.5}$$

де $dU = \varphi_1 - \varphi_2$.

Опір трубки струму $dR = \frac{1}{\sigma}\frac{dl}{dS}$.

Підставивши $dR$ в (9.5), отримаємо:

$$dI = \frac{\sigma(\varphi_1 - \varphi_2)dS}{dl} = \frac{\sigma d\varphi dS}{dl}. \qquad (9.6)$$

Врахувавши, що $J = \frac{dI}{dS}$ та $E = -\frac{d\varphi}{dl}$, та перейшовши до векторної форми з рівності (9.6), отримаємо закон Ома в диференціальній формі

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}, \qquad (9.7)$$

або

$$\vec{J} = \frac{\vec{E}}{\rho} \qquad (9.8)$$

Формула (9.7) та (9.8) виражає ***закон Ома в диференціальній формі: густина електричного струму в будь-якій точці фізично однорідного провідника пропорційна напруженості електричного поля.*** Коефіцієнт пропорційності - питома електропровідність - залежить тільки від хімічної природи матеріалу провідника, а його форма та розміри значення не мають.

Закон Ома з високою точністю виконується в широкому діапазоні значень напруженості електричного поля для численних однорідних речовин (металів, сплавів, електролітів). Рівняння (9.7) та (9.8) одержали обґрунтування як у класичній, так і в квантовій теорії провідності металів при звичайних і високих температурах, і є одним із найважливіших рівнянь електродинаміки.

**3. Опір провідників. Провідність. Паралельне та послідовне з'єднання провідників.**

Опір однорідного провідника при не дуже великих струмах не залежить від сили струму, а визначається геометричними розмірами провідника, хімічною природою матеріалу та його фізичним станом (температура, тиск). Електричний опір металів зумовлений розсіянням електронів провідності на структурних неоднорідностях і теплових коливаннях кристалічної ґратки.

Опір провідника в СІ вимірюють в омах (Ом), а провідність — у сименсах (См). Одиницю опору визначають з формули $R = \frac{U}{I}$, тобто ***1 Ом - це опір такого провідника, у якому при напрузі 1 В, проходить струм силою 1А.***

*[R]=В/А=1Ом.*

Опір однорідного провідника можна виразити формулою

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

де $l$ - довжина провідника; $S$ - площа його поперечного перерізу, (рис. 9.3); $\rho$ - коефіцієнт пропорційності, який залежить від властивостей матеріалу та фізичного стану провідника. Його називають питомим опором матеріалу. Одиницею питомого опору в СІ є ом-метр: [$\rho$]=1 Ом·м.

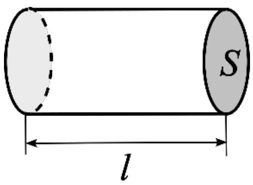


Рис. 9.3. Геометричні розміри провідника

За одиницю питомого опору в СІ взято опір куба з ребром 1 м, у якому струм проходить паралельно до ребер цього куба, (рис. 9.4).

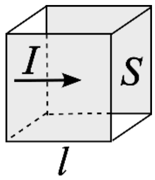


Рис.9.4. Провідник кубічної форми

В електротехніці часто довжину провідника вимірюють у метрах, а площу поперечного перерізу у квадратних міліметрах. Тоді питомий опір визначають в Ом-міліметрах у квадраті на метр.

Найменший питомий опір мають чисті метали: срібло, мідь, золото, алюміній. Тому для передавання електричної енергії від генераторів до споживачів використовують дроти з міді або алюмінію. Питомий опір провідників значною мірою залежить від домішок, а також від способу їх виготовлення. Сплави з великим питомим опором використовують для виготовлення нагрівачів (ніхром), еталонних резисторів (константан, нікелін) тощо.

Величина σ, обернена до питомого опору провідника, називається питомою провідністю або питомою електропровідністю.

Питому електропровідність речовини в системі СІ вимірюють у сименсах на метр: [σ]=1См/м.

Залежність питомого опору однорідної речовини від температури характеризують температурним коефіцієнтом опору

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}. \qquad (9.9)$$

***Температурний коефіцієнт опору α чисельно дорівнює відносній зміні опору провідника при зміні його температури на один кельвін.*** Для різних речовин температурний коефіцієнт опору має різне значення і може мати різні знаки: для металевих провідників $\alpha>0$, а для електролітів $\alpha<0$. Як показують досліди, для більшості хімічно чистих металевих провідників існує певний інтервал температур поблизу 0 °С, у якому температурний коефіцієнт опору приблизно дорівнює 1/273 $К^{-1}$. У кожному з таких температурних інтервалів питомий опір металу збільшується з підвищенням температури за лінійним законом:

$$\rho = \rho_0(1+\alpha t), \qquad (9.10)$$

або

$$\rho = \rho_0 \alpha T \qquad (9.11)$$

де $\rho_0$ - питомий опір при 0 °С; $t$ - температура за шкалою Цельсія; $T$ - абсолютна температура.

Деякі сплави мають досить малі значення температурного коефіцієнта опору. Наприклад, в інтервалі температур 0 - 100 °С для константану $\alpha = 1 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$, для нікеліну $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$, тому дріт із таких сплавів використовують для виготовлення еталонів опору. Залежність опору металів від температури покладено в основу роботи приладів для вимірювання температури (термометри опору) та її регулювання (термостати), вимірювання енергії випромінювання (болометри) та інших.

У загальному випадку температурний коефіцієнт опору речовини змінюється зі зміною температури і залежність його від температури має нелінійний характер.

Розглянемо основні методи з’єднання опорів - послідовний та паралельний (рис. 9.5) та (рис. 9.6) відповідно.

**Послідовне з’єднання провідників (рис. 9.5).** Оскільки ми маємо одну вітку електричного кола, розгалужень електричного струму не спостерігається, то очевидно, що через будь-який переріз провідника проходитиме за однакові проміжки часу однаковий заряд, тобто струм скрізь буде однаковий.

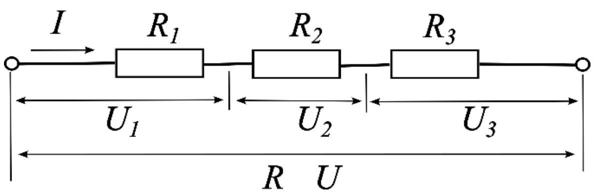

Рис. 9.5. Послідовне з’єднання опорів

$$I = I_1 = I_2 = I_3 \qquad (9.12)$$

Спад напруги на всій ділянці кола буде визначатись сумою спадів напруг на кожному з опорів.

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \tag{9.13}$$

Спад напруги на кожному з елементів можна визначити, використовуючи закон Ома для однорідної ділянки кола.

$$U_1 = IR_1 \tag{9.14.а}$$

$$U_2 = IR_2 \tag{9.14.б}$$

$$U_3 = IR_3 \tag{9.14.в}$$

Аналогічно для всієї ділянки кола:

$$U = IR, \tag{9.15}$$

де $R$- повний опір ділянки кола.

Підставивши формули (9.14.а), (9.14.б), (9.14.в), (9.15) в (9.13) та провівши математичні скорочення струму, отримаємо формулу для розрахунку опорів у випадку їх послідовного з'єднання.

$$R = R_1 + R_2 + R_3 \tag{9.16}$$

Визначивши з формул (9.14) струми та використовуючи (9.12), отримаємо:

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_3}{R_3}. \tag{9.17}$$

Формула (9.17) широко використовується при розв'язуванні практичних завдань.

У загальному випадку для довільної кількості (n) послідовно з'єднаних опорів можна записати таку систему рівнянь:

$$I_i = const;$$

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i;$$

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i \ .$$

**Паралельне з’єднання провідників (рис.9.6).** Очевидно, що в такому випадку ми маємо частину електричного кола із розгалуженням. Основний струм I (потік електронів) ділитиметься на три $I_1, I_2, I_3$.

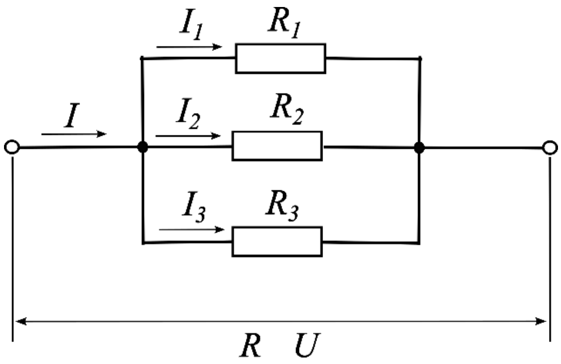


Рис. 9.6. Паралельне з’єднання опорів

Сумарний струм визначатиметься формулою

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \tag{9.18}$$

Спад напруги на кожному з елементів буде такий самий, як і на всій ділянці кола, це випливає з топології електричного кола. Тут присутні лише два потенціальні вузли електричного кола, кожен з яких складається з чотирьох геометричних.

$$U = U_1 = U_2 = U_3 \tag{9.19}$$

Струм через кожен резистивний елемент електричного кола та сумарний струм визначатиметься формулами

$$I_1 = \frac{U}{R_1} ,$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} \ , \tag{9.20}$$

$$I_3 = \frac{U}{R_3}.$$

Підставивши (9.20) в (9.18) та провівши прості математичні спрощення, отримаємо формулу для визначення опору для трьох паралельно з'єднаних резистивних елементів.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \tag{9.21}$$

У загальному випадку для системи з довільної кількості паралельно з'єднаних опорів отримаємо такі співвідношення :

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i ;$$

$$U = const ;$$

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}.$$

Розглянувши більш детально формулу (9.19), можна отримати

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_3 R_3 \tag{9.22}$$

дане співвідношення є важливим при розв'язуванні практичних задач.

**9.4. Закони Кірхгофа.**

При аналізі роботи багатьох електротехнічних приладів доводиться мати справу зі складними електричними колами та їх схематичними зображеннями, схеми заміщення яких містять як пасивні, так і активні елементи. Основними топологічними поняттями теорії електричних кіл є вітка, вузол, контур, двополюсник, чотириполюсник, граф схеми електричного кола, дерево і зв'язок графа схеми.

***Віткою електричного кола*** називається ділянка електричного кола з одним і тим же струмом. Вітка може складатися з одного пасивного або активного елемента, а також може бути послідовним з’єднанням кількох елементів.

***Вузлом електричного кола*** називають місце з’єднання трьох і більше віток. Розрізняють потенціальні та геометричні вузли.

***Контуром в електричному колі*** називають замкнений шлях, що проходить через кілька віток і вузлів.

***Двополюсником*** називають частину електричного кола з двома виділеними затискачами-полюсами.

***Чотириполюсником*** називають частину електричного кола, яка має дві пари затискачів, що можуть бути вхідними та вихідними.

**Перший закон Кірхгофа.** Розрахунок складних електричних кіл з розгалуженнями значно спрощується, коли використовувати закони Кірхгофа. Перший закон Кірхгофа стосується вузлів електричного кола. Користуються таким правилом знаків: ***струми, які входять у вузол електричного кола, вважаються більшими від нуля, ті, що виходять, вважають від’ємними.*** На рис.9.7 зображено вузол електричного кола та вказані напрямки струмів. Згідно із вище наведеним правилом знаків, струми $I_1$, $I_2$ вважаються більшими від нуля, струми $I_3$, $I_4$ матимуть від’ємне значення. Перший закон Кірхгофа виражає закон збереження заряду для лінійних віток електричного кола.

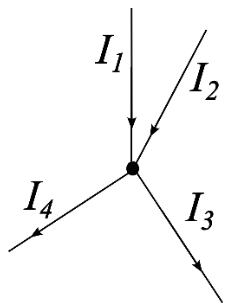


Рис. 9.7. Вузол електричного кола

Перше правило Кірхгофа. ***У кожному вузлі електричного кола алгебраїчна сума значень сил струмів, що сходяться у даному вузлі, дорівнює нулю або алгебраїчна сума сил струмів, що входять у вузол електричного кола, дорівнює алгебраїчній сумі значень сил струмів, що виходять з вузла***

***електричного поля.*** Для вузла електричного кола, зображеного на малюнку, перший закон Кірхгофа запишеться:

$$I_1 + I_2 + (-I_3) + (-I_4) = 0,$$

або

$$I_1 + I_2 + = I_3 + I_4$$

У загальному випадку для вузла електричного кола, який є спільним для $n$ віток електричного кола, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0, i = 1,2,3...n. \quad (9.23)$$

Справедливість рівності (9.23) випливає із таких міркувань: якби вона не виконувалась, то у досліджуваному вузлі електричного кола відбувалось би накопичення чи зменшення електричного заряду, внаслідок чого змінювався б потенціал вузла або напруженість електричного поля, тому струми з часом не могли б залишатися постійними. Таким чином, щоб струм в колі залишався постійним, рівність (9.23) повинна виконуватись.

**Другий закон Кірхгофа.** Друге правило Кірхгофа є наслідком закону Ома і стосується будь-якого замкнутого контуру в складному електричному колі.

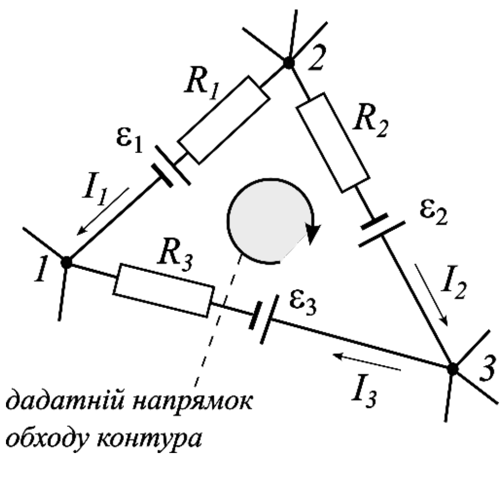


Рис. 9.8. Замкнутий контур електричного кола

Для використання другого закону Кірхгофа потрібно задати додатній напрям обходу контуру, який найчастіше вибирають так, щоб він співпадав з напрямком руху стрілки годинника. Струми, які співпадають з напрямком обходу контуру, вважаються додатними, у протилежному випадку - від'ємними. Часто напрям струму у вітках електричного кола невідомий, тому при розрахунках цей напрям можна вибирати довільно і якщо в результаті обчислень отримаємо силу струму з від'ємним значенням, то напрям буде протилежний до раніше вибраного. ЕРС при обчисленнях вважається більшою від нуля, якщо в напрямку додатного обходу контуру потенціал у джерелі ЕРС зростає. Сформулюємо другий закон Кірхгофа: ***алгебраїчна сума добутків сил струму на окремих вітках замкнутого контура на опір кожної вітки дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС, діючих в даному контурі:***

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i, i = 1,2,3...n \,. \qquad (9.24)$$

Для доведення справедливості записаного рівняння достатньо розглянути довільний замкнутий контур, який складається, наприклад, із трьох віток (рис.9.8). Запишемо закон Ома для кожної з віток електричного кола, схема якого зображена на рис.9.8.

$$(-I_1)R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_1 \qquad (9.24)$$

$$I_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \varepsilon_2 \qquad (9.25)$$

$$I_3 R_3 = \varphi_3 - \varphi_1 + (-\varepsilon_3), \qquad (9.26)$$

де $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ - потенціали вузлів 1, 2, 3 відповідно.

Додамо рівняння (9.24),(9.25), (9.26).

$$(-I_1)R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_3 - \varphi_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (-\varepsilon_3), \qquad (9.27)$$

провівши спрощення потенціалів, отримаємо

$$\left(-I_1\right)R_1 + I_2R_2 + I_3R_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \left(-\varepsilon_3\right).$$

Отримали формулу (4.1) для нашого випадку, тобто друге правило Кірхгофа. Також із проведених міркувань видно, що друге правило Кірхгофа є наслідком закону Ома для неоднорідної ділянки кола.

З рівності (9.27) бачимо, що алгебраїчна сума напруг вздовж будь якого замкнутого контура дорівнює нулю

$$\sum U_{ij} = 0 .$$

Останню рівність для розглянутої схеми електричного кола можна записати

$$U_{12} + U_{23} + U_{31} = 0 ,$$

або через потенціали,

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_3 - \varphi_1 = 0 .$$

Правила Кірхгофа у кожному конкретному випадку дозволяють записати повну систему лінійних рівнянь, із якої можуть бути знайдені всі невідомі струми. У таку систему не входять невідомі різниці потенціалів. У відсутності потенціалів у рівняннях зі струмами й полягає спрощення, що дається правилами Кірхгофа порівняно з законом Ома.

## ЛЕКЦІЯ 10.

## Робота і потужність постійного струму. Закон Джоуля-Ленца.

### 10.1. Робота електричного струму.

При проходженні електричного струму через електричне коло можуть відбуватися різні явища. Крім нагрівання провідників, можуть мати місце хімічні зміни в них (провідники другого роду). Теплову дію струму у провіднику вперше дослідили та описали Емілій Християнович Ленс (1804-1865 рр.) (у 1842р. встановив закон теплової дії електричного струму) та, незалежно від нього, англійський фізик Джоуль Джеймс-Прескотт (1818-1889 рр.) (встановив залежність кількості теплоти, що виділяється в провіднику при проходженні струму від інших фізичних величин).

При проходженні електричного струму через будь-яке тіло, електрична енергія перетворюється в теплову (провідник нагрівається), механічну (електродвигун приводить у рух машини і механізми), хімічну (заряджається акумулятор) тощо, а будь-яке перетворення енергії з одного виду в інший характеризується виконанням роботи.

У дослідах Джоуля і Ленца струм проходив через нерухомі металеві провідники. Тому єдиним результатом проходження струму було нагрівання цих провідників і, відповідно, за законом збереження енергії, вся робота, виконана струмом, перетворювалась у теплову енергію. Роботу електричних сил у цьому випадку легко підрахувати. Відомо, що напруга на кінцях ділянки кола дорівнює роботі, яка виконується при перенесенні зарядженими частинками в цій ділянці заряду в 1Кл:

$$U = \frac{A}{q} \qquad (10.1)$$

де $U$ - напруга [В], $A$ - робота [Дж], $q$ - електричний заряд[Кл].

З формули (10.2) отримаємо

$$A = U \cdot q \; . \qquad (10.2)$$

Електричний заряд $q$, що переноситься при проходженні струму, можна визначити, якщо відомі сила струму та час, протягом якого проходив струм.

$$q = I \cdot t .$$

Підставивши останню формулу в (10.2), отримаємо вираз, який визначає роботу, виконану струмом

$$A = U \cdot I \cdot t . \qquad (10.3)$$

***Одиницею вимірювання роботи електричного струму, як і будь-якого іншого виду роботи, є джоуль. 1 Дж дорівнює роботі, що виконується електричним струмом силою в 1 А при напрузі в 1 В протягом 1с.***

$$1 Дж = 1 В \cdot А \cdot с .$$

У розглянутому випадку вся робота перетворюється в теплоту, тобто $A = Q$, $Q$ - кількість теплоти, відповідно

$$Q = U \cdot I \cdot t .$$

Слід звернути увагу на те, що робота струму повністю переходить в теплову енергію лише у випадку нерухомих провідників першого роду. Якщо струм, крім нагрівання, виконує механічну роботу (двигун), то робота, виконана струмом, лише частково перетворюється в теплоту, інша частина іде на виконання зовнішньої роботи (двигун). У такому випадку $A > Q$, тобто використання формули (10.3) при теоретичних розрахунках для оцінки кількості теплоти, що виділяється, можливе лише у випадках, коли вся ця робота перетворюється у теплоту, тобто коли на досліджуваній ділянці електричного кола відсутні процеси, що супроводжуються виконанням роботи іншого виду.

**2. Потужність струму.**

Для вимірювання роботи електричного струму потрібно мати прилад, який би враховував напругу, силу струму і час його проходження. Прикладами таких приладів є лічильники електричної енергії, які, як відомо, найчастіше бувають індукційної системи. В основі принципу дії приладів індукційної системи використовується дія змінних магнітних полів, створюваних електромагнітами, на вихрові струми, які індукуються цими полями в алюмінієвому диску. На диск діє обертаючий момент. Знаючи роботу, що виконується струмом за деякий проміжок часу, можна розрахувати і потужність струму, під якою розуміють роботу, що виконується за одиницю часу. У загальному випадку:

$$P = \frac{A}{t},$$

де $P$ - потужність. Використовуючи (10.3), отримаємо формулу для потужності струму

$$P = \frac{A}{t} = UI \;. \qquad (10.4)$$

Потужність постійного струму на будь-якій ділянці кола визначається добутком сили струму на напругу між кінцями ділянки струму. Якщо в попередній формулі напруга виражається у вольтах, струм - в амперах, то одиницею вимірювання потужності буде джоуль за секунду (Дж/с) або ват.

1Вт=1Дж/с звідки 1Дж=1Вт·с

Для означення одного вату використовується формула (10.4), згідно з якою, ***1 ват - це потужність, яка виділяється у провіднику, між кінцями якого прикладена напруга один вольт і через який протікає струм в один ампер.*** В енергетиці та на практиці часто використовується при вимірюванні потужності кВт (1 кВт=1000 Вт).

Також зручно використовувати позасистемну одиницю вимірювання роботи електричного струму - кВт-год,

$$1 \text{кВт-год} = 10^3 \text{ Вт} \cdot 3600 \text{ с} = 3{,}6 \cdot 10^6 \text{ Вт с} = 3{,}6 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

**10.3. Закон Джоуля-Ленца в диференціальній та інтегральній формах.**

У середовищі, в якому протікає електричний струм, виділимо трубку струму (рис.10.1), розглянемо її частину нескінченно малої довжини *dl* та об'єму *dV*. Оскільки *dl* є нескінченно малою величиною, то будемо вважати, що $dS_1 = dS_2 = dS$.

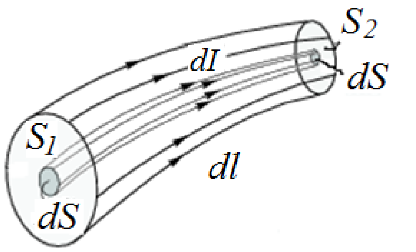


Рис. 10.1. Трубка струму

Введемо поняття густини теплової енергії ($\omega$) - кількість теплової енергії, яка виділяється в одиниці об'єму середовища, по якому протікає струм за одиницю часу. Згідно з означенням,

$$\omega = \frac{dQ}{dV \cdot dt}, \tag{10.5}$$

*dQ* - кількість теплоти, що виділяється в середовищі об'єму *dV*, у якому протікає струм протягом часу *dt*. Використовуючи закон Джоуля-Ленца в інтегральній формі та враховуючи, що сила струму, який проходить по виділеній трубці струму - *dI*, можемо записати

$$dQ = (dI)^2 dRdt. \tag{10.6}$$

Підставимо (10.6) в (10.5) та, врахувавши, що опір можна подати через геометричні параметри трубки струму (*dI, dS*), та питомий опір середовища, у якому протікає струм,

$$dR = \rho \frac{dl}{dS},$$

отримаємо

$$\omega = \frac{(dI)^2 dt}{dV \cdot dt} \rho \frac{dl}{dS}, \qquad (10.7)$$

провівши спрощення та враховуючи, що $dV = dS \cdot dl$ та $dI = J \cdot dS$, з формули (10.7) отримаємо

$$\omega = J^2 \rho, \qquad (10.8)$$

або

$$\omega = \frac{J^2}{\sigma}. \qquad (10.9)$$

Часто виникає потреба, щоб у формули (10.8) та (10.9) входила напруженість електричного поля. Врахувавши закон Ома в диференціальній формі, запишемо:

$$\omega = \sigma \cdot E^2, \qquad (10.10)$$

$$\omega = J \cdot E. \qquad (10.11)$$

Оскільки напруженість електричного поля та густина струму векторні величини, то формулу (10.11) запишемо у векторній формі

$$\omega = \left(\vec{J} \cdot \vec{E}\right), \qquad (10.12)$$

Формули (10.8) - (10.12) виражають закон Джоуля-Ленца в інтегральній формі. Густина теплової потужності визначатиметься як скалярний добуток вектора густини струму $\vec{J}$ на напруженість електричного поля $\vec{E}$.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА ТА ІНТЕРНЕТ РЕСУРСИ

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Електрика і магнетизм. К.: Техніка, 2006. 452 с.

2. Понеділок Г.В. Курс загальної фізики. Електрика і магнетизм. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2010. 516 с.

3. Дмитрієва В.Ф. Фізика. К.: Техніка, 2008. 648 с.

4. Воловик П.М. Фізика. К.: Ірпінь: Перун, 2005. 864с.

5. Горбачук І.Т. Загальна фізика. Лабораторний практикум. К.: Вища школа, 1992. 509 с.

6. Гаркуша І.П., Горбачук І.Т., Курінний В.П. Загальний курс фізики: Збірник задач. К.: Техніка, 2004. 560 с.

7. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик Т.П. Загальний курс фізики. К.: Техніка, 2001. 320 с.

8. Кучерук І.М., Горбачук І.Т. Загальна фізика. Електрика і магнетизм. К.: 1996. 368 с.

9. Лопатинський І.Є., Зачек І.Р., Середа В.М., Крушельницька Т.Д., Українець Н.А. Збірник задач з фізики: навч посібник. Львів: Видавництво національного університету «Львівська політехніка», 2003. 124 с.

10. Лопатинський І.Є., Зачек І.Р., Середа В.М., Крушельницька Т.Д., Українець Н.А. Збірник задач з фізики. Львів: Львівська політехніка, 2016. 244 с.

11. Гуменюк А.Ф. Електрика та магнетизм. Навчальний посібник. К.: Четверта хвиля, 2008. 506 с.

12. Дідух Л. Д. Електрика та магнетизм : підручник. Тернопіль: Підручники і посібники, 2020. 464 с.

13. Лахін Б.Ф., Максимов С. Л., Поліщук А.П., Чернега П. І. Фізика. Електрика і магнетизм. К.: НАУ, 2006. 336 с.

14. Edward M. Purcell, David J. Morin. Electricity and magnetism. Harvard University, Massachusetts. - Third edition. New York: Published in the United States of America by Cambridge University Press, 2013. 840 p.

15. Г.Ф. Бушок, Є.Ф. Венгер. Курс фізики. Книга 2. Електрика і магнетизм.

К.: Вища школа, 2003. 279 с. URL: http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Byshok_P2_2003_278.pdf (дата звернення: 30.09.2024)

16. Новосад О. В., Федосов С. А., Кевшин А. Г. Лабораторний практикум з електрики і магнетизму : навч. посіб. Луцьк, 2023. 165 с. URL: https://evnuir.vnu.edu.ua/handle/123456789/23304 (дата звернення: 30.09.2024)

17. Новосад О. В., Кевшин А. Г., Федосов С. А., Третяк А. П., Хмарук Г. П. Фізика : метод. рек. до лаб. роб. Луцьк : Вежа-Друк, 2021. Ч.2. 88 с. URL: https://evnuir.vnu.edu.ua/handle/123456789/19597 (дата звернення: 30.09.2024)

18. Кевшин А. Г., Новосад О. В., Федосов С. А. Електротехніка : навч. посіб. Луцьк, 2021. 127 с. URL: https://evnuir.vnu.edu.ua/handle/123456789/19575 (дата звернення: 30.09.2024)

19. Демків Т. М., Конопельник О. І., Шопа Я. І. Основи теорії похибок фізичних величин. Методичні матеріали для загального фізичного практикуму. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2008. 20 с. URL: https://physics.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/pohybky.pdf (дата звернення: 30.09.2024)

20. Tatum J. B. Electricity and Magnetism. URL: https://www.astro.uvic.ca/~tatum/elmag.html (дата звернення: 30.09.2024)

21. Електрика і магнетизм. Електронний курс. URL: https://moodle.vnu.edu.ua/course/view.php?id=1612 (дата звернення: 02.05.2023)

22. Фізика. Конспект лекцій. Частина 1. URL: https://tphysics.sumdu.edu.ua/images/downloads/books/lysenko_physics_lek_1.pdf (дата звернення: 30.09.2024)

23. Фізика. Конспект лекцій. Частина 2. URL: https://tphysics.sumdu.edu.ua/images/downloads/books/lysenko_physics_lek_2.pdf (дата звернення: 30.09.2024)

24. Libretexts physics. Electric Fields. URL: https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Electricity_and_Magnetism/Electricity_and_Magnetism_(Tatum)/01%3A_Electric_Fields (дата звернення: 30.09.2024)

25. Libretexts physics. Book: Electromagnetics II (Ellingson). URL: https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Electricity_and_Magnetism/Book%3A_Electromagnetics_II_(Ellingson) (дата звернення: 30.09.2024)

Навчально-методичне видання

Новосад Олексій Володимирович

# Електрика і магнетизм

***Курс лекцій***

**Частина I. Електростатика. Постійний електричний струм**

Друкується в авторській редакції