

DOI: <https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2024-55-30>

УДК: 004.4

Шваліковський Дмитро Миколайович, інженер

<https://orcid.org/0009-0009-8860-0329>

Волинський національний університет імені Лесі Українки, м. Луцьк, Україна

ДВІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У ДВОКОМПОНЕНТНИХ СИСТЕМАХ

Шваліковський Д.М. Дві задачі теплопровідності у двокомпонентних системах. Здійснено числовий розрахунок розподілу температурного поля у одновимірній системі із двох компонент з різними тепловими характеристиками. Розрахунок провадився способом розв'язання дискретизованого рівняння теплопровідності за методом скінченних різниць. Використано прямий двокроковий метод для вирішення відповідної задачі Коші у ДРЧП другого порядку. Розглянуто випадок охолодження такої системи із початкового стану з заданим температурним розподілом, та випадок нагрівання системи за наявності зовнішнього джерела тепла.

Ключові слова: рівняння теплопровідності, числовий розрахунок, задача Діріхле, задача Робіна, CAS Maxima.

Shvalikovskiy D. Two problems of heat equation in two-component systems. We have investigated a numerical calculation of the temperature field distribution in a one-dimensional system of two components with different thermal characteristic. The calculation involved solving the discretized heat conduction equation utilizing the finite difference method. We use a direct two-step method to solve the corresponding Cauchy problem in the second-order PDE. The case of system cooling from the initial state with a given temperature distribution, and the case of heating the system in the presence of an external heat source are considered.

Keywords: heat equation, numerical calculation, Dirichlet problem, Robin problem, CAS Maxima.

Вступні зауваги.

Загальне рівняння, котре описує процеси теплопровідності і дифузії, має вигляд

$$\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} = \operatorname{div}(a(\vec{r}) \cdot \operatorname{grad} u(\vec{r}, t)) + F(\vec{r}, t).$$

Для задачі теплопровідності $u(\vec{r}, t)$ – значення температури у даній точці тіла в заданий момент часу, $a(\vec{r})$ – величина, що має назву «тепературопровідність» (thermal diffusivity). В такому випадку $a = k/(C\rho)$, де C – питома теплоємність, k – коефіцієнт теплопровідності, ρ – густина тіла. Загалом a може залежати від точки простору (за умови неоднорідності структури матеріалу), однак фактично для практичних задач можна вважати її сталою для встановленого матеріалу. Ми розглянемо одновимірну задачу температурного розподілу та поширення тепла у тонкому стрижні довжини L , тому початкове рівняння спрощується та зводиться до вигляду [1]

$$u_t = a u_{xx}.$$

Для його однозначного вирішення необхідне задання початкових та крайових умов. Зазвичай розглядають два способи задання:

1) початковий розподіл температури та закон її зміни на краях відрізка (задача Діріхле) [2]:

$$u(x, 0) = A(x); \quad u(0, t) = B_1(t); \quad u(L, t) = B_2(t);$$

2) початковий розподіл температури, один кінець міняє свою температуру за певним законом, через інший кінець відбувається теплообмін із зовнішнім джерелом тепла (задача Робіна):

$$u(x, 0) = A(x); \quad u(0, t) = B(t); \quad u_x(L, t) = C(t).$$

При числовому розв'язанні цього рівняння будемо користуватись методом скінченних різниць, тому для його розгляду необхідно провести процедуру дискретизації [3]. За цим методом просторово-часові проміжки розгляду розбиваються на дискретну множину вузловими точками. Розіб'ємо довжину стрижня L на m частин, а проміжок часу S на n частин. Тоді вузлових точок буде відповідно $m + 1$ та $n + 1$, а довжина кожного відрізка $h = L/m$ та $s = S/n$. Нехай функція $u(x, t)$ приймає значення у відповідних вузлах $u(x_i, t_k)$, тоді вона в цих точках замінюється елементами дискретного набору $u_{i,k}$, а частинні похідні основного рівняння замінюються на різницеві відношення

$$u_t(x_i, t_k) = \frac{1}{s}(u_{i,k+1} - u_{i,k}); \quad u_{xx}(x_i, t_k) = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}).$$

Як видно, при підстановці цих співвідношень у основне рівняння можливо виразити значення функції у наступний момент часу $k + 1$ через її значення у попередній момент k в різних просторових вузлових точках. Ця обставина дозволяє застосувати прямий метод розрахунку відповідної задачі Коші, задавши початкові величини в граничних вузлах.

Постановка проблеми

Нехай маємо стрижень загальної довжини L , що складається з двох частин L_1 та L_2 з різними характеристиками. Це може бути система з двох спаяних металічних провідників, або деталь з різнорідних матеріалів, які щільно прилягають одна до одної. Кожна з частин має свої властивості, які загалом у нашій моделі можна звести до трьох величин: довжина (L_1 та L_2), температуропровідність (a_1 та a_2), коефіцієнт переносу тепла (c_1 та c_2).

Розіб'ємо першу частину на m_1 , а другу частину на m_2 проміжків, загальна їх кількість буде $m = m_1 + m_2$. Тоді довжина кожного проміжку $h_1 = L_1/m_1$, $h_2 = L_2/m_2$. Дискретизована просторова система першої частини нумерується послідовністю $0, 1, \dots, m_1$, другої частини послідовністю $m_1, m_1 + 1, \dots, m$. Точка m_1 вважається спільною для обох відрізків, вона міститься у місці спайки двох матеріалів. Часові проміжки розіб'ємо на відрізки $s = S/n$, тоді дискретизована часова система нумерується послідовністю $0, 1, \dots, n$.

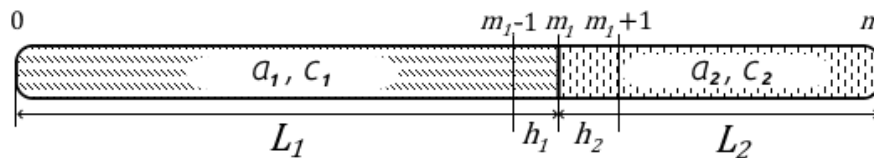


Рис. 1. Стрижень із двох різнорідних матеріалів.

Рівняння теплопровідності, записане для внутрішніх вузлів, приймає вигляд

$$\frac{1}{s}(u_{i,k+1} - u_{i,k}) = \frac{a}{h^2}(u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}).$$

Виразивши звідси величину $u_{i,k+1}$, маємо вираз для послідовного обрахунку температурної функції:

$$u_{i,k+1} = \frac{as}{h^2}(u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}) - u_{i,k}.$$

Отримана рівність повинна доповнюватись відповідними значеннями функції у початковий момент часу та умовами на краях системи. Ці додаткові умови накладаються на граничні вузли, і для кожної конкретної задачі вони будуть мати свій вигляд.

Множник біля дужок повинен задовольняти умову $\frac{as}{h^2} < 0.5$ для забезпечення збіжності розрахунку, в іншому випадку обраховані значення u швидко йдуть до нескінченності, тому за виконанням цієї умови потрібно уважно слідкувати при розбитті на вузлові точки.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів

Ми будемо провадити розрахунки у відкритій системі комп'ютерної алгебри **Maxima**, оскільки вона має зручний інтерактивний інтерфейс та дозволяє отримувати негайний відгук і відразу спостерігати обчислений результат [4].

Задача 1. Розрахувати еволюцію температури на стрижні довжиною $L = 1$ м, що складається з двох частин довжинами $L_1 = 0.5$ м та $L_2 = 0.5$ м, температуропровідностями $a_1 = 1$, $a_2 = 0.5$, на якому заданий початковий температурний розподіл $A(x) = 1000x(L - x)$. Кінці стрижня мають фіксовану температуру $B_1(t) = 0, B_2(t) = 0$.

Це стандартна задача Діріхле для ДРЧП, тобто задача із закріпленими кінцями. Сталість температури на кінцях стрижня може забезпечуватись поміщенням їх у теплові резервуари із нескінченною теплопровідністю та нескінченною теплоємністю, що звісно ж є модельною абстракцією. Ці резервуари мають свою власну температуру, котра змінюється у часі за законами $B_1(t)$ та $B_2(t)$. При вирішенні задачі Діріхле на дискретизовану функцію накладаються наступні початкові та крайові умови:

$$u_{i,0} = A_i = A(x_i); \quad u_{0,k} = B_{1;k} = B_1(t_k); \quad u_{m,k} = B_{2;k} = B_2(t_k).$$

Врахуємо, що швидкість зміни температури у початковий момент часу є нульовою, звідки

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{1}{s}(u_{i,1} - u_{i,0}) = 0; \quad u_{i,1} = u_{i,0}.$$

Різномірність структури стрижня забезпечимо заданням кускових функцій $a(x)$ та $h(x)$, які будуть приймати сталі значення на різних просторових відрізках L_1 та L_2 .

Переведемо задачу на мову **Maxima**, обравши часовий відрізок розгляду $S = 0.3$ с. Кількість точок розбиття виберемо $n = 3000, m_1 = 35, m_2 = 35$.

Вносимо початкові дані у систему.

```
(%i6) L:1$ L1:0.5$ L2:L-L1$ S:0.3$ a1:1$ a2:0.5$
```

```
(%i14) n:3000$ m1:35$ m2:35$ h1:L1/m1$ h2:L2/m2$ s:S/n$ m:m1+m2$ A0:1000$
```

Записуємо кускові функції для $a(x)$ та $h(x)$.

```
(%i15) a(x):= if x<=L1 then a1 else a2 $
```

```
(%i16) h(x):= if x<=L1 then h1 else h2 $
```

Перевіряємо умову стійкості.

```
(%i18) a1*s/h1^2, numer; a2*s/h2^2, numer;
```

```
(%o17) 0.49 (%o18) 0.245
```

На обох частинах умова виконується. Як видно, ми могли б обрати більшу кількість вузлових точок на правій частині (що пов'язано з меншим значення коефіцієнта a_2), однак пізніше це б призвело до нерівномірності графічного представлення початкового розподілу.

Тепер записуємо вирази для початкових та крайових умов. Застосуємо до функцій команду `float`, щоб їх значення одразу перетворювались на числа з плаваючою точкоюю.

```
(%i21) A(x):=float(A0*x*(L-x))$ B1(t):=float(0)$ B2(t):=float(0)$
```

Створюємо масиви X та T , які заповнюємо просторовими та часовими вузловими точками.

```
(%i22) for i:1 thru m1 do
(arraymake(X, [i]), X[0]:0,
X[i]:X[i-1]+h1);
```

```
(%o22) done
```

```
(%i23) for i:m1+1 thru m do
X[i]:X[i-1]+h2;
```

```
(%o23) done
```

```
(%i24) for k:1 thru n do
(arraymake(T, [k]), T[0]:0,
T[k]:T[k-1]+s);
```

```
(%o24) done
```

Тепер у шуканий масив u (він буде двоіндексним, перший індекс i відповідає за просторову змінну, другий k за часову) вносимо початкові та крайові умови.

```
(%i25) for i:0 thru m do
(u[i,0]:A(X[i]), u[i,1]:A(X[i]));
```

```
(%o25) done
```

```
(%i26) for k:0 thru n do
(u[0,k]:B1(T[k]), u[m,k]:B2(T[k]));
```

```
(%o26) done
```

Записуємо вираз для базового рівняння, створивши цикл для його обрахування.

```
(%i27) for k:1 thru n do
for i:1 thru m-1 do
(u[i,k+1]:((a(X[i]))^2*s/(h(X[i]))^2)*(u[i+1,k]-2*u[i,k]+u[i-1,k])+u[i,k]));
```

```
(%o27) done
```

Розрахунок розподілу температури здійснений. Він знаходиться у вигляді масиву значень чисел $u[i, k]$, котрі залежать від координат дискретної просторово-часової сітки. Ці координати є цілими числами, тому, щоб побудувати температурну поверхню, запровадимо функцію, яка залежить від округлених значень x і t до найближчого цілого, та побудуємо її тривимірний графік (Рис. 2).

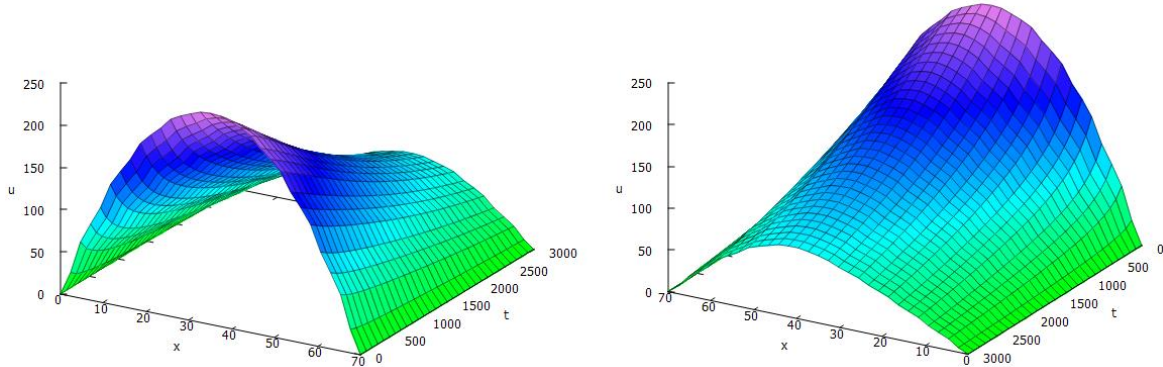
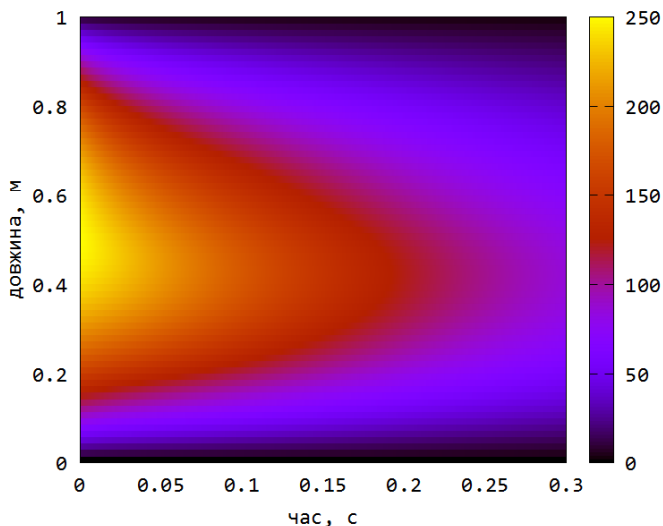


Рис. 2. Обрахована температурно-часова поверхня двокомпонентного стрижня.

```
(%i28) H(x,t):=float(u[round(x),round(t)])$
(%i29) plot3d(H(x,t),[x,0,m],[t,0,n]);
(%t29) (Graphics)
```

Побудований графік можна оглядати, обертаючи мишкою. Із поверхні чітко видно, що часова еволюція розв'язку викривлює на пізніших етапах початковий симетричний розподіл. Більший температурний «горб» буде знаходитись на правій частині поверхні, оскільки друга компонента стрижня має меншу температуропровідність, а отже повільніше втрачає тепло.

Для більшої наочності скористаємось можливістю розфарбовування елементів матриці згідно з її числовим значенням у комірці. Таке представлення здійснюється командою `image` із пакету `draw`. Для цього створимо нульову матрицю розмірності $m \times n$ та заповнюємо її елементами масиву $u[i, k]$. Компоненти матриці запишемо таким чином, щоб їх значення узгоджувались із геометрією задачі.



```
(%i30) load(draw)$
(%i31) U:zeromatrix(m,n)$
(%i32) for i:1 thru m do
for k:1 thru n do
U[i,k]:u[i,k];
(%o32) done
(%i33) wxdraw2d(image(U,0,0,0.3,1),
font = "Consolas",
font_size = 18,
xlabel = "час, с",
ylabel = "довжина, м");
(%t33) (Graphics)
```

Рис. 3. Температурно-часова діаграма двокомпонентного стрижня.

Бачимо, що розподіл температури з часом зміщується вправо, і тут знову ж таки проявляється залежність від величини a .

Наостанок, зробимо два зауваження. По-перше, реальні значення коефіцієнта теплопровідності a становлять $\sim 10^{-5}$ м²/с. Обрані нами модельні величини 1 та 0.5 є надзвичайно великими, і це пояснює, чому температура так швидко спадає фактично до нуля за 0.3 с. По-друге, запропоновану схему розв'язку можна легко масштабувати на більшу кількість частин стрижня: для цього потрібно лише модифікувати кількість та величину вузлових точок у масиві X та запровадити нові кускові функції для виразів $a(x)$ та $h(x)$, які і будуть описувати ці нові додаткові складові.

Задача 2. Розрахувати еволюцію температури на стрижні довжиною $L = 1$ м, що складається з двох частин довжинами $L_1 = 0.5$ м та $L_2 = 0.5$ м, теплопровідностями $a_1 = 1$, $a_2 = 0.7$, коефіцієнтами теплового переносу $c_1 = 0.95$, $c_2 = 0.85$, та на якому заданий початковий температурний розподіл виду $A(x) = \sin \pi x$. Кінці стрижня мають фіксовану температуру $B_1(t) = 0$, $B_2(t) = 0$. У місці з'єднання на стрижень діє джерело тепла з потужністю $g(t) = 8t$.

Це різновид задачі Робіна для ДРЧП, тобто задачі із фіксованою умовою на функцію на одному краю відрізка, та заданим значенням похідної на другому краю. Загалом для широкого класу явищ потік тепла між двома з'єднаними тілами при різних температурах є прямо пропорційним до різниці цих температур (закон Фур'є). Нехай до кінця стрижня довжини L приєднане зовнішнє джерело з температурою, яка міняється за законом $g(t)$. Тоді можна записати

$$u_x(x, t)|_{x=L} = c(g(t) - u(L, t))$$

де u_x – зміна температури на кінці стрижня, c – коефіцієнт теплового переносу (визначає частку енергії, що йде від нагрівника на нагрівання). Запишемо це рівняння в дискретизованому вигляді:

$$\frac{1}{h}(u_{m,k} - u_{m-1,k}) = c(g_k - u_{m,k}),$$

звідки можна визначити температуру на кінці стрижня

$$u_{m,k} = \frac{u_{m-1,k} + chg_k}{1 + ch}.$$

У нашому випадку «кінцем» для обох компонент буде точка з'єднання m_1 . Інші початкові та крайові умови будуть аналогічними до попередньої задачі:

$$u_{i,0} = A_i = A(x_i); \quad u_{0,k} = B_{1,k} = B_1(t_k); \quad u_{m,k} = B_{2,k} = B_2(t_k).$$

Ми будемо вирішувати поставлене завдання як дві задачі Робіна для двох компонент стрижня, вважаючи початком першої частини точку 0, її кінцем точку m_1 , а початком другої частини останню точку m , її кінцем точку m_1 , тобто для другої компоненти розрахунок буде вестись у зворотному просторовому порядку. Це необхідна обставина, оскільки цикл повинен розпочинатись із заданого значення функції. Умова для крайової точки m_1 буде дописуватись до основного рівняння в обох випадках як окремий вираз, що пов'язує її з попередньою.

Запрограмуємо задачу на мові **Maxima**, обравши часовий відрізок розгляду $S = 0.3$ с. Кількість точок розбиття виберемо $n = 3000$, $m_1 = 35$, $m_2 = 35$.

Вносимо початкові характеристики стрижня.

```
(%i6) L:1$ L1:0.5$ L2:L-L1$ S:0.3$ a1:1$ a2:0.7$
```

```
(%i16) n:3000$ m1:35$ m2:35$ h1:L1/m1$ h2:L2/m2$ s:S/n$ m:m1+m2$ c1:0.95$ c2:0.85$
```

Тепер запроваджуємо кускові функції, які описують неоднорідність системи.

```
(%i19) a(x):= if x<=L1 then a1 else a2$
```

```
h(x):= if x<=L1 then h1 else h2$
```

```
c(x):= if x<=L1 then c1 else c2$
```

Перевіряємо умову стійкості.

```
(%i21) a1*s/h1^2, numer; a2*s/h2^2, numer;
```

```
(%o20) 0.49
```

```
(%o21) 0.343
```

Записуємо функціональні залежності початкових, крайових умов, функцію джерела.

```
(%i25) A(x):=float(sin(%pi*x))$ B1(t):=float(0)$ B2(t):=float(0)$ g(t):=float(8*t);
```

Створюємо масиви вузлових точок та заповнюємо їх.

```
(%i26) for i:1 thru m1 do
(arraymake(X, [i]), X[0]:0,
X[i]:X[i-1]+h1);
```

```
(%o26) done
```

```
(%i27) for i:m1+1 thru m do
(X[m1]:L1,
X[i]:X[i-1]+h2);
```

```
(%o27) done
```

```
(%i28) for k:1 thru n do
(arraymake(T, [k]), T[0]:0,
T[k]:T[k-1]+s);
```

```
(%o28) done
```

Вносимо у шуканий масив u початкові та крайові значення.

```
(%i29) for i:0 thru m do
(u[i,1]:A(X[i]), u[i,0]:A(X[i]));
```

```
(%o29) done
```

```
(%i30) for k:0 thru n do
(u[0,k]:B1(T[k]), u[m,k]:B2(T[k]));
```

```
(%o30) done
```

Записуємо цикл обрахунку основного рівняння для точок від 1 до $m_1 - 1$, та окреме рівняння для точки m_1 . Таким чином буде знайдена температурна поверхня лівої компоненти.

```
(%i31) for k:1 thru n do
for i:1 thru m1-1 do
(u[i,k+1]:(a(X[i])^2*s/h(X[i])^2)*(u[i+1,k]-2*u[i,k]+u[i-1,k])+u[i,k],
u[m1,k]:(u[m1-1,k]+c(X[i])*h(X[i])*g(T[k]))/(c(X[i])*h(X[i])+1));
```

```
(%o31) done
```

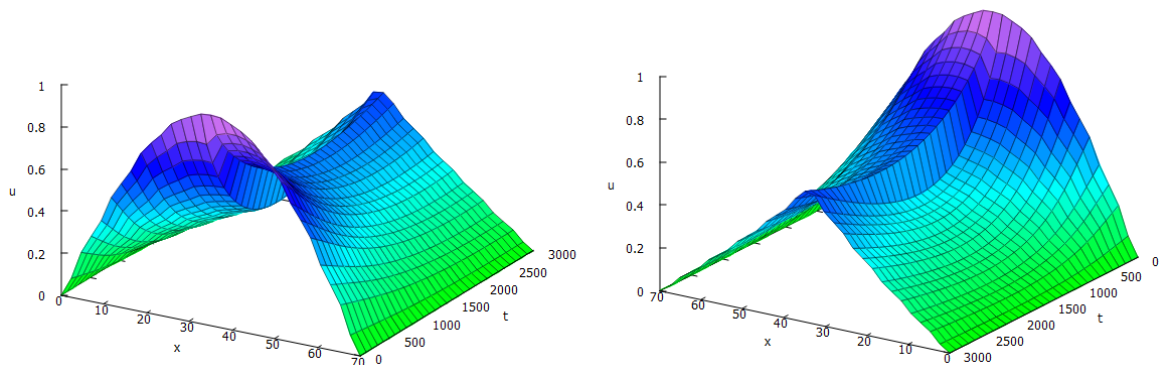


Рис. 4. Обрахована температурно-часова поверхня двокомпонентного стрижня за наявності джерела тепла.

Записуємо аналогічний цикл обрахунку у зворотному порядку базового рівняння для точок від m до $m_1 + 1$, та окреме рівняння для точки m_1 , знайшовши температурну поверхню правої компоненти.

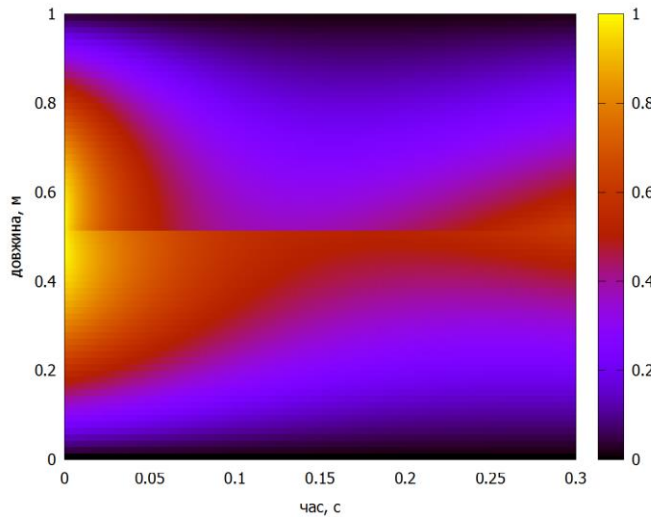
```
(%i32) for k:1 thru n do
for i:m-1 thru m1+1 step -1 do
(u[i,k+1]:(a(X[i])^2*s/h(X[i])^2)*(u[i+1,k]-2*u[i,k]+u[i-1,k])+u[i,k],
u[m1,k]:(u[m1+1,k]+c(X[i])*h(X[i])*g(T[k]))/(c(X[i])*h(X[i])+1));
```

```
(%o32) done
```

Обчислення завершені. Запроваджуємо функцію $H(x, t)$ округленням змінних, графік якої буде температурною поверхнею (Рис. 4).


```
(%i33) H(x,t):=float(u[round(x),round(t)])$
(%i34) wxplot3d(H(x,t),[x,0,m],[t,0,n]);
(%t34) (Graphics)
```

Тепер скористаємось побудовою кольорової матриці для отримання температурно-часової діаграми (Рис. 5).

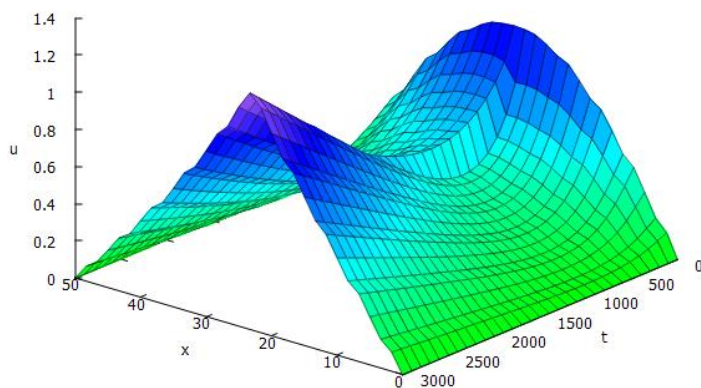


```
(%i35) load(draw)$
(%i36) U:zeromatrix(m,n)$
(%i37) for i:1 thru m do
for k:1 thru n do
U[i,k]:u[i,k];
(%o37) done
(%i38) wxdraw2d(image(U,0,0,0.3,1),
font = "Consolas",
font_size = 18,
xlabel = "час, с",
ylabel = "довжина, м");
(%t38) (Graphics)
```

Рис. 5. Температурно-часова діаграма двокомпонентного стрижня з джерелом тепла.

Обговоримо одержані результати. Бачимо, що присутність джерела тепла створює розрив між двома функціями температурної поверхні. У цьому характерна відмінність від першої задачі: там зберігає свою неперервність як функція, так і її похідна; тоді як у другій задачі присутній розрив і функції, і її похідної (відмінність теплових потоків спричиняється різницею у коефіцієнтах теплопереносу c_1 та c_2). На початку часового проміжку температури обох компонент зменшуються внаслідок охолодження до крайових значень, причому ліва компонента швидше, оскільки вона має більшу температуропровідність. Але внаслідок постійного теплового притоку обидві поверхні підвищуються і утворюють трикутний пік.

Хоча б здавалося, що після точки з'єднання дві поверхні повинні знову розійтись через різницю у коефіцієнтах a та c , насправді цей пік буде завжди присутній. Різниця між температурними поверхнями, яка обумовлена температуропровідністю та коефіцієнтом теплопереносу, буде набагато меншою за градієнт температур, створений безперервним притоком тепла від джерела (потужність котрого весь час збільшується).



Для прикладу, обчислена поверхня задачі у випадку розгляду часового проміжку 0.6 с зображена на Рис. 6. Поведінка системи повністю відповідає загальній теоремі: для задачі Робіна при достатньо великому часі спостереження температурна функція вже не залежить від початкового розподілу і є лінійною функцією зі змінним кутовим коефіцієнтом [5]:

$$u(x,t) = \frac{g(t) - T_1}{L} x.$$

Рис. 6. Обрахована поверхня для часу 0.6 с.

На рисунку в кінцевій частині справді ми бачимо майже трикутну форму профіля, де температурні функції є фактично прямими відрізками із ледь помітними кривинами.

Виникає природне питання про масштабованість запропонованої схеми. Розглянемо стрижень, який складається вже з трьох компонент: ліва, середня і права. Нехай у місцях з'єднань діють теплові джерела з різними потужностями. Для лівої та правої частин виникає задача Робіна, у якій відома функція на одному краї та її похідна на іншому краї в кожен момент часу (а це крайова задача третього роду), тому ми можемо застосувати запропоновану схему та обрахувати відповідну поверхню. Для середньої частини будуть відомі лише теплові потоки на краях, тобто похідні температурної функції (крайова задача другого роду, або задача Неймана). Способом її вирішення є лише розв'язання системи з m рівнянь, де m – кількість просторових вузлів сітки, для прикладу, методом Кранка-Ніколсона [6]. Причому для спостереження часової еволюції таких систем має бути n – кількість часових вузлів. У нашому випадку це мало б бути 3000 систем із 35 рівнянь. Такі завдання вимагають вже вищих обчислювальних потужностей.

Висновки та перспективи подальшого дослідження. У роботі представлений алгоритм аналізу та числового розрахунку температурного розподілу для двокомпонентної системи; розв'язані задачі охолодження такої системи та її нагрівання за наявності джерела тепла. Запропоновану схему можна вільно розширити на подібні випадки для більшого числа компонент, або для складових частин із неоднорідних матеріалів (зі змінними тепловими характеристиками). Подальшим природним узагальненням є перехід до двовимірного середовища: розгляд 2d-плити із кількох частин або зі змінною температуропровідністю та за наявності нагрівальних елементів.

У дослідженні ми використовували вільне програмне забезпечення CAS Maxima, яка є досить потужним та розробленим застосунком для розв'язання широкого кола математичних та фізичних задач моделювання.

Список бібліографічного опису

1. Nakhle H. Asmar. Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems: Third Edition. – Dover Publications, 2016. – 816 p.
2. S.R.K. Iyengar, R.K. Jain. Numerical Methods. – New Age International Limited Publishers, 2009. – 326 p.
3. W.Y. Yang, W. Cao, T.S. Chung, J. Morris. Applied Numerical Methods using MATLAB. – A John Wiley & Sons, Inc., 2005. – 512 p.
4. Шваліковський Д. М. Моделювання процесів та систем у середовищі CAS Maxima. – Луцьк: ВНУ імені Лесі Українки, 2024. – 252 с.
5. Ryan C. Daileda. Partial Differential Equations: Lecture Handouts & Slides. The 1-D Heat Equation, Part 2. – Trinity University, 2023. – 24 p.
6. A. Kharab, R.B. Guenther. An Introduction to Numerical Methods. – Taylor & Francis Group, 2019. – 615 p.

References

1. Nakhle H. Asmar. Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems: Third Edition. – Dover Publications, 2016. – 816 p.
2. S.R.K. Iyengar, R.K. Jain. Numerical Methods. – New Age International Limited Publishers, 2009. – 326 p.
3. W.Y. Yang, W. Cao, T.S. Chung, J. Morris. Applied Numerical Methods using MATLAB. – A John Wiley & Sons, Inc., 2005. – 512 p.
4. D.M. Shvalikovskiy. Simulation of Processes and Systems in the CAS Maxima Environment. – Lutsk: Lesya Ukrainka Volyn National University, 2024. – 252 p.
5. Ryan C. Daileda. Partial Differential Equations: Lecture Handouts & Slides. The 1-D Heat Equation, Part 2. – Trinity University, 2023. – 24 p.
6. A. Kharab, R.B. Guenther. An Introduction to Numerical Methods. – Taylor & Francis Group, 2019. – 615 p.