ГІДРОДИНАМІКА БОЗЕ-ГАЗУ ЗА НАЯВНОСТІ КОНДЕНСАТУ

П. Шигорін

Кафедра теоретичної та комп'ютерної фізики імені А.В. Свідзинського Волинського національного університету імені Лесі Українки, Просп. Волі 13, Луцьк, Україна, 43025

E-mail: pashyh@gmail.com

У роботі проведене теоретичне дослідження нульового звуку в конденсованому бозе-газі. Для цього було розглянуто беззіткневу динаміку атомарного конденсованого бозе-газу при відмінних від нуля температурах. Отримано дисперсійне співвідношення для швидкості розповсюдження нульового звуку.

Ключові слова: нульовий звук, конденсований бозе-газ, беззіткнева динаміка.

Однією із найцікавіших задач статистичної механіки є дослідження динаміки колективних мод. У випадку рідин та газів колективні моди мають гідродинамічну природу і проявляються у вигляді звукових хвиль. Особливо розмаїтими є гідродинамічні моди у квантових рідинах та газах. Наприклад, у надплинному гелії-4 крім звичайних звукових хвиль (першого звуку) можуть поширюватися температурні хвилі (другий звук) [1]. Поява в надплинному гелії поряд із першим звуком другого звуку пов'язана із дворідинною структурою гідродинамічних рівнянь, що в свою чергу відбиває наявність в системі бозе-айнштайнівського конденсату. Мовою дворідинної моделі перший звук відповідає синфазним коливанням нормальної та надплинної компонент, другий – протифазним. Іншим прикладом багаточастинкової системи за наявності квантового виродження зі зламом симетрії є атомарний конденсований бозе-газ, що охолоджений до ультранизької температури (порядку десяток нанокельвінів) і утримується в магнітній пастці. Як показує теоретичний розрахунок [2], у такій системі можуть поширюватися перший та другий звук, а також теплова релаксаційна мода. На відміну від надплинного гелію-4, у якого через сильну взаємодію між атомами розділення нормальної та надплинної компоненти є неможливе, в конденсованому бозе-газі перший звук асоціюється із коливаннями густини атомів надконденсату, а другий звук – коливання густини конденсатних атомів.

У теорії фермі-рідини Ландау [3, 4] було передбачено особливий тип колективних коливань, які пов'язані із коливаннями фермі-сфери. Через те, що такі коливання можуть відбуватися при абсолютному нулі температур, відповідна колективна мода отримала назву нульовий звук. Колективні коливання, які мають подібні до нульового звуку властивості виникають у плазмі в беззіткневому режимі, коли можна знехтувати зіткненнями між частинками, тобто коли інтеграл зіткнень дорівнює нулеві [4]. Поява такого колективного руху пов'язана із далекодією кулонівських сил.

У даній роботі проводиться теоретичне дослідження нульового звуку в атомарному конденсованому бозе-газі. Для цього розглядається беззіткнева кінетика цього виродженого квантового газу.

Динаміка конденсованого бозе-газу при відмінних від нуля температурах описується на основі рівнянь руху для двох величин: вігнерівської функції розподілу атомів над конденсату $f = f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ та макроскопічної хвильової функції конденсату

$\Phi = \Phi(\mathbf{r},t)$. Відповідна система рівнянь побудована в роботах [4]. Вони мають вигляд

$$\frac{\partial n_c}{\partial t} + \nabla(n_c \boldsymbol{\upsilon}_c) = R[f], \qquad m\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\upsilon}_c \nabla\right)\boldsymbol{\upsilon}_c = -\nabla\mu_c, \tag{1}$$

(1)

$$\frac{\partial f(\mathbf{p},\mathbf{r},t)}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla f(\mathbf{p},\mathbf{r},t) - \nabla V_{eff}(\mathbf{r},t)\cdot\nabla_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p},\mathbf{r},t) = C_{22}[f] + C_{12}[f,\Phi], \tag{2}$$

де

$$f = f(\mathbf{p},\mathbf{r},t),\ \ f_i = f(\mathbf{p}_i,\mathbf{r},t),\ \ \tilde{\varepsilon}_c = \mu_c + \frac{m\upsilon_c^2}{2},\ \ \tilde{\varepsilon}_{p_i} = \frac{p_i^2}{2m} + V_{eff},\ n_c = |\Phi(\mathbf{r},t)|^2.$$

В правій частині рівняння (2) фігурує інтеграл зіткнень, що складається з двох доданків: $C_{22}[f]$ та $C_{12}[f,\Phi]$.

$$C_{12}[f,\Phi] = \frac{2g^2 n_c}{(2\pi)^2\hbar^4}\int d\mathbf{p}_1\int d\mathbf{p}_2\int d\mathbf{p}_3\delta(m\boldsymbol{\upsilon}_c + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)\delta(\tilde{\varepsilon}_c + \tilde{\varepsilon}_{p1} - \tilde{\varepsilon}_{p2} - \tilde{\varepsilon}_{p3})\times$$
$$\times[\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1) - \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_2) - \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_3)][(1+f_1)f_2 f_3 - f_1(1+f_2)(1+f_3)], \tag{3}$$

$$C_{22}[f] = \frac{2g^2}{(2\pi)^5\hbar^7}\int d\mathbf{p}_2\int d\mathbf{p}_3\int d\mathbf{p}_4\delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4)\delta(\tilde{\varepsilon}_p + \tilde{\varepsilon}_{p2} - \tilde{\varepsilon}_{p3} - \tilde{\varepsilon}_{p4})\times$$
$$\times[(1+f)(1+f_2)f_3 f_4 - f f_2(1+f_3)(1+f_4)], \tag{4}$$

Інтеграл зіткнень (4) описує двочастинкові зіткнення між збудженими атомами надконденсату, тоді як (3) описує зіткнення між атомами надконденсату, які «захопили» один атом конденсату. Обидва інтеграли забезпечують виконання законів збереження енергії та імпульсу. Інтеграл зіткнень $C_{22}[f]$ водночас забезпечує збереження числа атомів у конденсаті, $C_{12}[f,\Phi]$ описує взаємодію атомів конденсату та надконденсату, тобто можливі переходи із конденсату в теплову хмарину і навпаки.

Для опису нульового звуку маємо розглянути беззіткневу динаміку. Таким чином маємо покласти інтеграли зіткнень рівними нулеві. Отже будемо виходити із наступної системи рівнянь

$$\frac{\partial n_c}{\partial t} + \nabla(n_c \boldsymbol{\upsilon}_c) = R[f], \tag{5а}$$

$$m\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\upsilon}_c \nabla\right)\boldsymbol{\upsilon}_c = -\nabla\mu_c, \tag{5б}$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{p},\mathbf{r},t)}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla f(\mathbf{p},\mathbf{r},t) - \nabla V_{eff}(\mathbf{r},t)\cdot\nabla_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p},\mathbf{r},t) = 0., \tag{6}$$

Перейдемо до побудови дисперсійного співвідношення між частотою та хвильовим числом. Звукову хвилю вважаємо процесом поширення періодичного збурення густини. Розглядаючи малі відхилення від стану рівноваги, який характеризується параметрами: n_{c0}, $\tilde{n}_0$ — рівноважні густини конденсату та теплової хмарини; $\boldsymbol{\upsilon}_{c0} = 0$ — швидкість конденсату; $f_0 = \frac{1}{e^{c^2+\beta g n_{c0}} - 1}$ – рівноважна функція розподілу. Покладемо

$$n_c(\mathbf{r},t) = n_{c0} + \delta n_c \exp(ikz - i\omega t),\ f(\mathrm{r},\mathbf{p},t) = f_0 + f_0[1+f_0]h_0(\mathbf{p})\exp(ikz - i\omega t). \tag{7}$$

При цьому слід вважати, що відхилення від рівноваги є малими, тобто виконуються співвідношення $|\delta n_c| << n_{c0}, |h_0| << f_0$.

Підставляючи співвідношення (7) у рівняння (5) і (6) та проводячи процедуру лінеаризації, одержуємо рівняння

$$c_z k\left[h_0(\mathbf{c}) + 2A\delta\tilde{n}_0(\mathbf{c})\right] - \omega_0 h_0(\mathbf{c}) = 0, \tag{8}$$

де $A = \dfrac{\beta g \dfrac{\omega_0^2}{k^2} + \dfrac{\beta^2 g^2 n_{c0}}{2}}{\dfrac{\omega_0^2}{k^2} - \dfrac{\beta g n_{c0}}{2}}$, $\mathbf{c} = (\beta/2m)^{1/2}\mathbf{p}$.

З урахуванням співвідношення

$$\delta\tilde{n}_0(\mathbf{c}) = \frac{1}{\pi^{3/2}\Lambda^3}\int d\mathbf{c} f_0(1+f_0)h_0(\mathbf{c}),$$

рівняння (8) набуде вигляду

$$c_z k\left[h_0(\mathbf{c}) + 2A\frac{1}{\pi^{3/2}\Lambda^3}\int d\mathbf{c} f_0(1+f_0)h_0(\mathbf{c})\right] - \omega_0 h_0(\mathbf{c}) = 0, \tag{9}$$

Ми отримали інтегральне рівняння для визначення відхилення функції розподілу від рівноважної.

Перепишемо (9) у іншому вигляді

$$\left(\frac{\omega_0}{ck} - \cos\theta\right)h_0(\mathbf{c}) = 2A\frac{1}{\pi^{3/2}\Lambda^3}\cos\theta\int d\mathbf{c} f_0(1+f_0)h_0(\mathbf{c}), \tag{10}$$

Це рівняння подібне до відомого дисперсійного співвідношення для нульового звуку в теорії Ландау фермі-рідини [3]. Розв'язок цього рівняння визначає поправку h до локально-рівноважної функції розподілу f_0, а також швидкість поширення нульового звуку.

1. Nozieres P. Theory of quantum liquids: superfluid Bose liquids [Text] / P. Nozieres, D. Pines. – Addison-Wesley. 1990. – 180 p.
2. Шигорін П. П. Дисперсійне співвідношення для хвиль першого та другого звуків у конденсованих атомарних бозе-газах / П. П. Шигорін, Ю. М. Лящук // Наук. вісн. Волин. нац. ун-ту ім. Лесі Українки. Фізичні науки. – 2010. – № 6. – С. 58-63.
3. Zaremba E. Dynamics of trapped Bose gas at finite temperatures [Text] / E. Zaremba, T. Nikuni, A. Griffin // Journ. Low Temp. Phys. — 1999. — Vol 116. — p. 277-298.
4. Shygorin P. Equations of coupled condensate and non-condensate dynamics in a trapped Bose gas / P. Shygorin, A. Svidzynskyj // Ukr. J. Phys. – 2010. – Vol. 55. – No. 5. – P. 554-559.