

Волинський національний університет імені Лесі Українки

**Кафедра теоретичної та комп'ютерної фізики**

**імені А. В. Свідзинського**

**Федосов С. А., Замуруєва О. В., Захарчук Д. А., Шигорін П. П.**

**ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ,  
МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ, І  
МЕТОДІВ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ  
ВИМІРЮВАНЬ**

**Курс лекцій**

Луцьк

2023

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Волинського національного університету імені Лесі Українки (протокол № 7 від 15 березня 2023 р.).

**Рецензенти:** *Ящинський Л. В.* – канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри фізики та вищої математики Луцького НТУ;

*Федонюк А. А.* – канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри загальної математики та методики навчання інформатики ВНУ імені Лесі Українки.

**Ф 33** Федосов С. А., Замуруєва О. В., Захарчук Д. А., Шигорін П. П. **Основи теорії ймовірностей, математичної статистики, і методів обробки результатів вимірювань** : курс лекцій. Луцьк : Волин. нац. ун-т ім. Лесі Українки, 2023. 42 с.

Курс лекцій «Основи теорії ймовірностей, математичної статистики, і методів обробки результатів вимірювань» – складова комплексу робочих матеріалів створених для забезпечення якісної підготовки фахівців галузей знань 01 Освіта/Педагогіка, 10 Природничі науки, технічних і медичних спеціальностей. Матеріал навчального видання може бути використаний як окремий змістовий модуль навчальних дисциплін «Вступ до фаху», «Методи обробки даних», «Фізика», «Біофізика», «Медична фізика», «Вища математика» або ж як окрема вибіркова дисципліна навчального плану підготовки здобувачів освітніх ступенів «бакалавр» і «магістр». Курс лекцій містять набір матеріалів необхідних для організації повноцінної аудиторної та самостійної роботи здобувачів вищої освіти та рекомендовано використовувати після засвоєння основних понять з математичного аналізу перед опануванням навчальних дисциплін «Фізика», «Біофізика», «Медична фізика» тощо.

Навчальне видання відповідає чинним освітнім програмам підготовки й рекомендовано бакалаврам спеціальностей 014 «Середня освіта» (спеціалізації 014.08 Середня освіта (Фізика)), 104 «Фізика та астрономія», 105 «Прикладна фізика та наноматеріали», а також буде корисним у використанні здобувачам освіти спеціальностей галузей природничих, технічних і медичних наук.

УДК 539.2

© Федосов С. А. та ін., 2023  
© ВНУ ім. Лесі Українки, 2023

## **ЗМІСТ**

<b>ВСТУП</b>	4
<b>1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ</b>	
1.1. Випадкові події	4
1.2. Рівноможливі наслідки	5
1.3. Теореми додавання та (або) множення ймовірностей	6
<b>2. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ</b>	
2.1. Дискретні та неперервні випадкові величини	11
2.2. Числові характеристики випадкової величини	13
2.3. Розподіл Бернуллі та розподіл Гаусса	14
<b>3. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ</b>	
3.1. Основні поняття математичної статистики	20
3.2. Елементи кореляційного та регресійного аналізу	27
3.3. Методи обробки результатів вимірювань	31
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b>	39
<b>ДОДАТКИ</b>	40

## ВСТУП

У навчальному виданні «Основи теорії ймовірностей, математичної статистики, і методів обробки результатів вимірювань : курс лекцій» спочатку вводяться основні поняття та формули теорії ймовірностей, на основі чого далі розглядаються основні поняття та деякі важливі задачі математичної статистики, а також застосування статистичних підходів при обробці результатів вимірювань.

## 1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

### 1.1. Випадкові події

У теорії ймовірностей розглядаються *випадкові події*. *Випадковою подією називається подія, яка може відбутися або не відбутися при виконанні певного комплексу умов. Наприклад, при киданні грального кубика може відбутися така подія, як випадіння на його верхній грані трьох точок, але ця подія може і не відбутися. Таким чином, поява трьох точок на верхній грані кубика – це випадкова подія. Комплекс умов, які необхідні для того, щоб подія могла відбутися (або не відбутися), називається випробуванням (дослідом). У наведеному прикладі випробування – це кидання кубика. Інший приклад випробування – це постріл. При цьому може відбутися така випадкова подія, як улучення в мішень, але ця подія може і не відбутися.*

*Наслідком випробування називається поява в результаті цього випробування якої-небудь випадкової події. Якщо в результаті випробування відбувається подія, що нас цікавить, кажуть про сприятливий наслідок випробування. Якщо ж така подія не відбувається, наслідок називають несприятливим.*

Випадковим подіям притаманні закономірності, які виявляються при багаторазових (масових) випробуваннях. Для кількісного опису цих закономірностей використовується поняття *відносної частоти події*. Нехай відбулося  $n$  випробувань і виявилось, що число сприятливих наслідків дорівнює  $m$  (подія  $A$  виникла  $m$  раз у  $n$  випробуваннях). Тоді *відносна частота події  $A$*  ( $P^*(A)$ ) – це відношення числа сприятливих наслідків до повного числа випробувань, тобто

$$P^*(A) = \frac{m}{n}.$$

Враховуючи, що  $0 \leq m \leq n$ , для відносної частоти випадкової події запишемо:  $0 \leq P^*(A) \leq 1$ .

Якщо провести декілька серій з невеликого числа випробувань, то найчастіше виявиться, що відносна частота в різних серіях приймає різні значення, які можуть значно відрізнятися одне від одного. Але якщо збільшувати число випробувань у серіях, то найчастіше значення величини  $P^*(A)$  у кожній із серій виявлятимуться все ближчими одне до одного. Таким чином, із збільшенням кількості випробувань у серії випробувань відносна частота випадкової події прямує до деякої границі, яка називається *ймовірністю випадкової події  $P(A)$* , тобто

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P^*(A).$$

Остання формула є *статистичним визначенням ймовірності*. Таким чином, у відповідності із статистичним визначенням, *ймовірність випадкової події – це границя, до якої прямує відносна частота цієї події при необмеженому збільшенні числа випробувань*.

Ймовірність випадкової події – найважливіша її кількісна характеристика, яка є мірою можливості реалізації випадкової події при випробуваннях.

При практичному використанні статистичного визначення ймовірності найскладнішим є питання про те, яка найменша кількість випробувань необхідна, аби значення відносної частоти випадкової події можна було прийняти як значення ймовірності, тобто щоб була забезпечена потрібна точність визначення  $P(A)$ .

## 1.2. Рівноможливі наслідки

Наступним важливим поняттям є поняття *рівноможливих наслідків*. Якщо в результаті випробування можлива поява різних наслідків, причому немає підстав вважати, що якийсь з цих наслідків може з'являтися частіше або рідше за інші, то ці наслідки називають *рівноможливими*. Наприклад, при киданні грального кубика немає підстав вважати, що поява зверху якоїсь конкретної грані відбуватиметься частіше або рідше за появу будь-якої іншої грані, тобто поява зверху будь-якої із граней грального кубика є рівноможливим наслідком.

Якщо всі наслідки, які можуть з'являтися при випробуванні є рівноможливими, то для визначення ймовірності події можна використовувати *класичне визначення ймовірності*.

Відповідно до класичного визначення, *ймовірність випадкової події – це відношення числа сприятливих наслідків до повного числа всіх рівноможливих наслідків*, тобто

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де  $P(A)$  – ймовірність випадкової події  $A$ ,  $m$  – число сприятливих наслідків,  $n$  – повне число всіх рівноможливих наслідків.

Для ймовірності випадкової події, як і для її відносної частоти, виконується нерівність  $0 \leq P(A) \leq 1$ , тобто ймовірність – невід'ємна величина, що менша або дорівнює одиниці. У випадку, якщо  $m = n$ , ніякі інші наслідки, крім сприятливих, неможливі. Подія, яка не може не відбутися при випробуванні, називається *вірогідною*. Її ймовірність дорівнює 1. Якщо  $m = 0$ , а  $n \neq 0$ , то сприятливий наслідок неможливий. Подія, яка не може відбутися при випробуванні, називається *неможливою*. Її ймовірність дорівнює 0.

Формули, за допомогою яких визначалося поняття ймовірності, використовуються для обчислення ймовірностей випадкових подій тільки у найпростіших випадках. У складніших випадках необхідно використовувати теореми додавання та (або) множення ймовірностей.

### 1.3. Теорема додавання та (або) множення ймовірностей

Перш, ніж вивчати ці теореми, введемо ще деякі поняття. Події  $A$  і  $B$  називаються несумісними, якщо поява події  $A$  виключає можливість появи події  $B$ . Наприклад, поява двох або трьох точок на верхній грані грального кубика при його одноразовому киданні є несумісними подіями, оскільки можливе випадіння двох або трьох крапок при різних випробуваннях, але неможливе їхнє одночасне випадіння при одноразовому киданні одного кубика.

Якщо несумісні події  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  утворюють таку групу подій, що у результаті випробування обов'язково відбувається одна з цих подій та не може відбутися ніяка інша подія, яка не входить до цієї групи, то кажуть, що події  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  утворюють повну групу подій.

Несумісні події  $A$  і  $B$  є протилежними, якщо з того факту, що при випробуванні не відбулася одна з них, випливає факт, що при цьому обов'язково відбулася інша. Наприклад, при киданні монети події, які полягають у випадінні зверху однієї із сторін (герб або цифра), є протилежними. Якщо дві несумісні події утворюють повну групу подій, вони є протилежними. Подія, протилежна події  $A$ , позначається  $\bar{A}$ .

Події  $A$  і  $B$  називаються незалежними, якщо ймовірність однієї з них не залежить від того, відбулася чи не відбулася інша. Наприклад, при дворазовому киданні монети подія  $A$ , якою є випадіння «герба» при першому киданні, та подія  $B$ , якою є випадіння «герба» при другому киданні, є незалежними. Події  $A$  і  $B$  називаються залежними, якщо ймовірність однієї з них залежить від того, відбулася чи не відбулася інша. При цьому, якщо ймовірність події  $B$  залежить від того, відбулася чи не відбулася подія  $A$ , кажуть про умовну ймовірність події  $B$ , і для цієї ймовірності використовується позначення  $P(B/A)$ . Для кращого розуміння терміна умовна ймовірність розглянемо такий приклад.

З ящика, у якому знаходяться дві білі та дві чорні кулі, які відрізняються тільки кольором, виймають, не дивлячись, дві кулі, причому перша вийнята куля назад не повертається. Подія  $B$  полягає в тому, що друга куля є білою. Ця подія є залежною від події  $A$ , яка полягає в тому, що і перша куля є білою. Зрозуміло, що якщо подія  $A$  відбулася, то умовна ймовірність події  $B$  ( $P(B/A)$ ) дорівнює  $\frac{1}{3}$ , якщо не відбулася, то умовна ймовірність події  $B$  ( $P(B/\bar{A})$ ) дорівнює  $\frac{2}{3}$ .

Тепер, після того як необхідні поняття сформульовані, розглянемо теореми додавання та множення ймовірностей.

Теорему додавання ймовірностей сформулюємо тільки для випадку несумісних подій. Якщо є кілька несумісних подій  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , то ймовірність складної події, яка полягає в тому, що відбудеться одна з цих подій (тобто відбудеться або подія  $A_1$ , або подія  $A_2$ , ... або подія  $A_n$ ), дорівнює сумі ймовірностей цих подій, тобто

$$P(A_1 \text{ або } A_2 \dots \text{ або } A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n).$$

З теореми додавання ймовірностей випливають важливі наслідки:

1. Якщо несумісні події  $A_1, A_2, \dots, A_n$  утворюють повну групу подій, то

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n) = 1.$$

2. Якщо події  $A$  і  $B$  є протилежними, то

$$P(A) + P(B) = 1 \quad \text{або} \quad P(A) = 1 - P(B).$$

Теорему множення ймовірностей сформулюємо спочатку для незалежних подій. *Якщо події  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – незалежні, то ймовірність складної події, яка полягає в тому, що відбудуться всі ці події (тобто відбудеться і подія  $A_1$ , і подія  $A_2$ , ... і подія  $A_n$ ), дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто*

$$P(A_1 \text{ і } A_2 \dots \text{ і } A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Теорему множення ймовірностей для залежних подій спочатку сформулюємо для двох подій. *Якщо події  $A_1$  і  $A_2$  – залежні, то ймовірність складної події, яка полягає в тому, що відбудуться всі ці події (і подія  $A_1$ , і подія  $A_2$ ), дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність другої, тобто*

$$P(A_1 \text{ і } A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = P(A_2) \cdot P(A_2/A_1).$$

Теорема множення ймовірностей для залежних подій аналогічно записується для будь-якого числа подій. *Наприклад, для трьох подій відповідна формула має вигляд:*

$$P(A_1 \text{ і } A_2 \text{ і } A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P[A_3/(A_1 \text{ і } A_2)].$$

З теорем додавання та множення ймовірностей виводиться кілька важливих формул: *формула Бернуллі, формула повної ймовірності, формула Байєса.*

Формула Бернуллі використовується у випадку, якщо наслідком випробування може бути поява однієї з двох протилежних подій. Нехай ймовірність однієї з них дорівнює  $p$ , а ймовірність другої дорівнює  $q$ , причому  $q = 1 - p$ . Якщо у цьому випадку проводиться  $n$  випробувань, причому ймовірність появи першої події при кожному наступному випробуванні не залежить від того, яка з цих двох подій відбулася у попередніх випробуваннях, то ймовірність того, що перша подія при цьому відбудеться  $m$  раз ( $P(m \text{ з } n)$ ), може бути знайдена за формулою Бернуллі:

$$P(m \text{ з } n) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$

де  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ . Нагадаємо, що  $0! = 1$ .

Формули повної ймовірності та Байєса використовуються у випадках, якщо подія  $A$  може відбуватися тільки разом з однією із несумісних подій  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), які утворюють повну групу подій. Нехай ймовірність події  $B_i$  дорівнює  $P(B_i)$ , а ймовірність події  $A$  за умови, що відбулася подія  $B_i$ , дорівнює  $P(A/B_i)$ . Тоді безумовна ймовірність події  $A$  може бути знайдена за формулою повної ймовірності:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A/B_n) \cdot P(B_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(A/B_i) \cdot P(B_i). \end{aligned}$$

Нехай тепер  $P(B_j/A)$  – це ймовірність події  $B_j$  за умови, що подія  $A$  вже відбулася. Тоді ця ймовірність може бути знайдена за формулою Байєса:

$$P(B_j/A) = \frac{P(A/B_j) \cdot P(B_j)}{P(A)} = \frac{P(A/B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A/B_i) \cdot P(B_i)}$$

Зазначимо, що при застосуванні формули Байєса, ймовірності  $P(B_i)$  називають *апостеріорними*, а ймовірності  $P(B_j/A)$  – *апостеріорними*.

Розглянемо деякі приклади розв'язання задач.

*Приклад 1.* У ящику 20 куль, серед яких є кулі білого (*англ.* white), чорного (*англ.* black) і зеленого (*англ.* green) кольору. З ящика, не дивлячись, дістають одну кулю. Ймовірність того, що ця куля біла ( $P(w)$ ), дорівнює 0,5, а ймовірність того, що вона зелена ( $P(g)$ ), дорівнює 0,2. Скільки у ящику чорних куль?

Нехай  $m$  – шукане число чорних куль, а  $P(b)$  – імовірність того, що вийнята куля – чорна. Тоді  $P(b) = \frac{m}{20}$ . З іншого боку, події, які полягають в тому, що вийнята куля є білою, чорною або зеленою, утворюють повну групу несумісних подій. Тому

$$P(w) + P(b) + P(g) = 1,$$

звідки

$$P(b) = 1 - P(w) - P(g) = 1 - 0,5 - 0,2 = 0,3.$$

Тоді

$$\frac{m}{20} = 0,3 \quad \text{і} \quad m = 20 \cdot 0,3 = 6.$$

*Приклад 2.* Ймовірність народження хлопчика (*англ.* boy) ( $P(b)$ ) дорівнює 0,52. У родині троє дітей. Яка ймовірність того, що:

- у родині три хлопчики;
- у родині один хлопчик;
- у родині є хоча б одна дівчинка (*англ.* girl)?

Народження хлопчика та дівчинки – це протилежні події. Тому ймовірність народження дівчинки ( $P(g)$ ) дорівнює

$$P(g) = 1 - P(b) = 1 - 0,52 = 0,48.$$

- а) Відповідно до теореми множення ймовірностей для незалежних подій

$$P(3b) = P(b) \cdot P(b) \cdot P(b) = 0,52 \cdot 0,52 \cdot 0,52 = 0,14.$$

- б) Відповідно до теорем додавання та множення ймовірностей

$$\begin{aligned} P(1b) &= P[(b \text{ і } g \text{ і } g) \text{ або } (g \text{ і } b \text{ і } g) \text{ або } (g \text{ і } g \text{ і } b)] = \\ &= P(b) \cdot P(g) \cdot P(g) + P(g) \cdot P(b) \cdot P(g) + P(g) \cdot P(g) \cdot P(b) = \\ &= 0,52 \cdot 0,48 \cdot 0,48 + 0,48 \cdot 0,52 \cdot 0,48 + 0,48 \cdot 0,48 \cdot 0,52 = 0,36. \end{aligned}$$

- в) Подія, яка полягає в тому, що у родині є хоча б одна дівчинка, та подія, яка



полягає в тому, що у родині немає жодної дівчинки (тобто у родині три хлопчики), є протилежними. Тому для шуканої ймовірності запишемо:

$$P(\text{хоча б одна дівчинка}) = 1 - P(3b) = 1 - 0,14 = 0,86.$$

*Приклад 3.* У ящику знаходяться 5 білих (*англ.* white) куль, 3 чорні (*англ.* black) кулі та 2 зелені (*англ.* green) кулі. Не дивлячись, з ящика виймають дві кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі чорні, якщо:

а) перша вийнята куля повертається назад у ящик до того, як буде вийнята друга куля;

б) перша вийнята куля назад не повертається?

Використаємо теорему множення ймовірностей, враховуючи, що в першому випадку події незалежні, а у другому – залежні.

$$\text{а) } P(b \text{ і } b) = P(b) \cdot P(b) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = 0,09;$$

$$\text{б) } P(b \text{ і } b) = P(b) \cdot P(b/b) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}.$$

*Приклад 4.* Студент знає (*англ.* knows) 96 зі 100 питань, винесених на іспит. Яка ймовірність того, що з трьох питань, які є у білеті він:

а) знає всі три питання;

б) знає одне питання;

в) знає не більш двох питань?

$$\text{а) } P(3k) = P(k) \cdot P(k/k) \cdot P[k/(k \text{ і } k)] = \frac{96}{100} \cdot \frac{95}{99} \cdot \frac{94}{98} = 0,88;$$

б)

$$\begin{aligned} P(1k) &= P(k) \cdot P(n/k) \cdot P[n/(k \text{ і } n)] + \\ &+ P(n) \cdot P(k/n) \cdot P[n/(n \text{ і } k)] + \\ &+ P(n) \cdot P(n/n) \cdot P[k/(n \text{ і } n)] = \\ &= \frac{96}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{3}{98} + \frac{4}{100} \cdot \frac{96}{99} \cdot \frac{3}{98} + \frac{4}{100} \cdot \frac{3}{99} \cdot \frac{96}{98} = 0,0036; \end{aligned}$$

$$\text{в) } P(\text{знає не більш двох питань}) = 1 - P(\text{знає 3 питання}) = 1 - 0,88 = 0,12.$$

*Приклад 5.* Стрілець при одному пострілі влучає у десятку з імовірністю 0,8. Визначити ймовірність семи влучень у серії з десяти пострілів.

За формулою Бернуллі:

$$m = 7; \quad n = 10; \quad p = 0,8; \quad q = 1 - 0,8 = 0,2.$$

$$\text{Отже, } P(7 \text{ з } 10) = \frac{10!}{7!3!} \cdot (0,8)^7 \cdot (0,2)^3 \approx 0,2.$$

*Приклад 6.* Чотири заводи випускають однакові вироби, причому їхні

продуктивності за рік становлять: I завод – 500 шт., II завод – 1000 шт., III завод – 200 шт., IV завод – 1000 шт. Відомо, що ймовірність випуску браку становить: на I заводі – 0,01, на II заводі – 0,01, на III заводі – 0,005, на IV заводі – 0,004. Визначити ймовірність того, що навмання обраний з річної продукції цих заводів виріб є бракованим.

Позначимо подію, яка полягає в тому, що виріб, випущений I заводом –  $B_1$ , II заводом –  $B_2$ , III заводом –  $B_3$ , IV заводом –  $B_4$ . Тоді

$$P(B_1) = \frac{500}{500 + 1000 + 200 + 1000} = \frac{500}{2700} = \frac{5}{27};$$

$$P(B_2) = \frac{1000}{2700} = \frac{10}{27};$$

$$P(B_3) = \frac{2}{27};$$

$$P(B_4) = \frac{10}{27}.$$

Позначимо подію, яка полягає в тому, що виріб є бракованим,  $A$ . За умовою  $P(A/B_1) = 0,01$ ;  $P(A/B_2) = 0,01$ ;  $P(A/B_3) = 0,005$ ;  $P(A/B_4) = 0,004$ . Тоді за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = \sum_{i=1}^4 P(A/B_i) \cdot P(B_i) = 0,01 \cdot \frac{5}{27} + 0,01 \cdot \frac{10}{27} + 0,005 \cdot \frac{2}{27} + 0,004 \cdot \frac{10}{27} = \frac{1}{135}.$$

*Приклад 7.* Відділення лікарні спеціалізується на лікуванні трьох захворювань, причому кількості людей, хворих на I, II та III захворювання, співвідносяться як 1:5:3. Відомо, що деякий комплекс симптомів зустрічається при I захворюванні з ймовірністю 0,7; при II – з ймовірністю 0,3; при III – з ймовірністю 0,2. Визначити:

а) ймовірність наявності зазначеного комплексу симптомів у навмання обраного пацієнта цього відділення;

б) ймовірність того, що у навмання обраного пацієнта відділення є перше захворювання, якщо в нього виявлений зазначений комплекс симптомів.

Позначимо події, які полягають в тому, що у пацієнта є I, II або III захворювання,  $B_1$ ,  $B_2$  і  $B_3$  відповідно. Очевидно, що

$$P(B_1) = \frac{1}{9}; \quad P(B_2) = \frac{5}{9}; \quad P(B_3) = \frac{3}{9}.$$

Позначимо подію, яка полягає в тому, що у хворого є зазначений комплекс симптомів,  $A$ . Тоді

$$P(A/B_1) = 0,7; \quad P(A/B_2) = 0,3; \quad P(A/B_3) = 0,2.$$

Тоді за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = 0,7 \cdot \frac{1}{9} + 0,3 \cdot \frac{5}{9} + 0,2 \cdot \frac{3}{9} = \frac{0,7 + 1,5 + 0,6}{9} = \frac{14}{45}.$$

Після цього, за формулою Байеса:

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{0,7 \cdot \frac{1}{9}}{\frac{14}{45}} = 0,25.$$

## 2. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

### 2.1. Дискретні та неперервні випадкові величини

Важливою частиною теорії ймовірностей є питання, що пов'язані з випадковими величинами.

*Випадкова величина* – це величина, яка приймає в результаті випробування одне з множини можливих значень, причому поява того чи іншого значення цієї величини є випадковою подією. Наприклад, число «відмінників» у групі за підсумками семестрового контролю, кількість хлопчиків, які народилися у пологовому будинку в який-небудь день, температура хворого, діаметр зіниці, тривалість серцевого циклу – усе це випадкові величини.

Розрізняють *дискретні* та *неперервні* випадкові величини.

Дискретною випадковою величиною називається випадкова величина зі скінченною або зчисленою множиною можливих значень. Прикладами дискретної випадкової величини є два перших із наведених вище прикладів.

Для завдання дискретної випадкової величини необхідно задати закон розподілу цієї величини, тобто перелічити всі можливі значення цієї величини та відповідні їм імовірності. Зазвичай закон розподілу дискретної випадкової величини задається таблицею такого вигляду:

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$P(X)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	...	$P(x_n)$

Тут і далі великими літерами позначені випадкові величини взагалі, а рядковими – їх конкретні значення. Така таблиця може мати скільки завгодно стовпчиків.

Події, які полягають у тому, що в результаті випробування з'являється яке-небудь з можливих значень випадкової величини, є несумісними та утворюють повну групу подій. Тому

$$\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1.$$

Остання формула називається *умовою нормування дискретної випадкової величини*.

*Неперервною випадковою величиною* називається випадкова величина, яка може приймати будь-яке із значень, що належать інтервалу (інтервалам), в якому вона існує. Наприклад, температура людини або вміст цукру в крові – це неперервні випадкові величини.

Враховуючи, що неперервна випадкова величина приймає нескінченну множину значень, ймовірність того, що вона прийме яке-небудь певне значення, дорівнює нулю. Не дорівнює нулю ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме значення, яке лежить у якому-небудь інтервалі. Якщо ми розіб'ємо ділянку існування випадкової величини на декілька інтервалів і для кожного з цих інтервалів визначимо ймовірність попадання в нього випадкової величини, то така величина буде задана тим точніше, чим на більшу кількість інтервалів буде розбита ця ділянка існування. Найточніше завдання неперервної випадкової величини буде одержано, якщо розміри інтервалів прямуватимуть до нуля, а кількість інтервалів – до нескінченності. При цьому *величина, яка дорівнює відношенню ймовірності  $dP$  попадання випадкової величини в інтервал від  $x$  до  $x+dx$  до величини цього інтервалу  $dx$ , називається щільністю ймовірності неперервної випадкової величини  $X$* , тобто

$$f(X) = \frac{dP}{dx},$$

де  $f(X)$  – щільність ймовірності неперервної випадкової величини  $X$ .

Завдання щільності ймовірності неперервної випадкової величини є одним із способів завдання цієї величини (тобто, завдання закону розподілу цієї величини). З визначення  $f(X)$  випливає, що щільність імовірності – це невід'ємна величина. При відомій щільності ймовірності величини  $X$ , можна обчислити ймовірність попадання цієї величини у будь-який інтервал. Так, якщо щільність імовірності величини  $X$  дорівнює  $f(X)$ , то ймовірність попадання  $X$  в інтервал від  $a$  до  $b$  обчислюється за формулою:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(X) \cdot dx$$

та дорівнює величині площі криволінійної трапеції  $S$  під кривою  $f(X)$  на інтервалі від  $a$  до  $b$  (див. рис. 1).

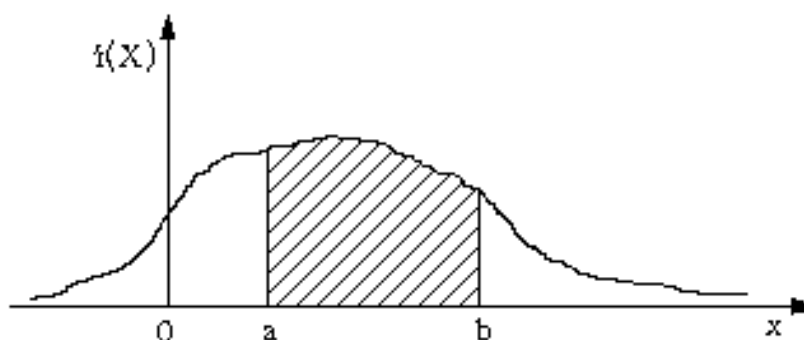


Рис. 1.

Подія, яка полягає в тому, що випадкова величина прийме будь-яке (кожне) значення, що знаходиться в інтервалі від  $-\infty$  до  $+\infty$ , є вірогідною. Тому

$$P(-\infty \leq X \leq +\infty) = 1.$$

Отже,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(X) \cdot dx = 1.$$

Остання формула називається умовою нормування неперервної випадкової величини.

Для завдання неперервної випадкової величини, крім щільності ймовірності, використовується функція розподілу. Функція розподілу  $F(X)$  неперервної випадкової величини  $X$  пов'язана з щільністю ймовірності  $f(X)$  цієї випадкової величини такими формулами:

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(X) \cdot dx, \quad f(X) = \frac{dF(X)}{dx}.$$

Перша з цих формул є, по суті, визначенням поняття функції розподілу. З цієї формули видно, що функція розподілу дорівнює ймовірності того, що випадкова величина прийме значення, яке лежить в інтервалі від  $-\infty$  до  $x$ , або, іншими словами, прийме значення, яке менше або дорівнює  $x$ .

Функція розподілу є невід'ємною величиною. Із збільшенням  $X$  функція розподілу зростає або залишається сталою, причому завжди  $F(X) \leq 1$ . Ймовірність попадання величини  $X$  в інтервал від  $a$  до  $b$  обчислюється при відомій функції розподілу  $F(X)$  за формулою

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Для опису випадкових величин можуть також використовуватись числові характеристики випадкових величин.

## 2.2. Числові характеристики випадкової величини

Серед числових характеристик випадкової величини  $X$  розглянемо математичне сподівання ( $M(X)$ ), дисперсію ( $D(X)$ ) і середнє квадратичне відхилення ( $\sigma(X)$ ).

Поняття математичного сподівання випадкової величини  $X$  майже збігається за змістом з поняттям середнього значення цієї величини. Докладніше питання про зв'язок і різницю цих понять буде обговорено при вивченні математичної статистики.

Для обчислення математичного сподівання дискретної випадкової величини використовується формула:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(x_i) = x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + \dots + x_n \cdot P(x_n),$$

де  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – усі можливі значення величини  $X$ , а  $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)$  – відповідні їм ймовірності.

Для обчислення  $M(X)$  у випадку, якщо  $X$  – неперервна випадкова величина, використовується формула:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(X) \cdot dx.$$

Дисперсія та середнє квадратичне відхилення характеризують величину відхилення (розкиду) значень випадкової величини від її математичного сподівання. Точніше, дисперсія випадкової величини  $X$  – це математичне сподівання квадрата відхилення значень цієї величини від її математичного сподівання, тобто

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Середнє квадратичне відхилення – це корінь квадратний з дисперсії, тобто

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

У випадку, якщо  $X$  – дискретна випадкова величина, дисперсія цієї величини може бути обчислена за формулою:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \cdot P(x_i).$$

Якщо  $X$  – неперервна випадкова величина, то дисперсію можна обчислити за формулою:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(X) dx.$$

Практично для обчислення дисперсії найчастіше використовують формулу:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Таким чином, дисперсія випадкової величини  $X$  дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини  $X$  і квадратом її математичного сподівання. При цьому  $M(X^2)$  обчислюють за формулами:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot P(x_i),$$

якщо  $X$  – дискретна випадкова величина, та

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(X) dx,$$

якщо  $X$  – неперервна випадкова величина.

Наприкінці питання про випадкові величини розглянемо деякі важливі приклади розподілів випадкових величин, а саме: біноміальний розподіл (розподіл Бернуллі) та нормальний розподіл (розподіл Гаусса).

### 2.3. Розподіл Бернуллі та розподіл Гаусса

Почнемо з біноміального розподілу. Нехай випадкова величина  $X$  – це кількість появ події  $A$  в  $n$  повторних незалежних випробуваннях. Нехай також ймовірність появи події  $A$  у кожному з випробувань дорівнює  $p$ , а ймовірність неяви цієї події у кожному з випробувань дорівнює  $q$ , тобто  $q = 1 - p$ . Тоді ймовірності значень випадкової величини  $X$  ( $0, 1, \dots, m, \dots, n$ ) можна визначити за формулою Бернуллі:

$$P(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Права частина формули Бернуллі – це загальний член розкладання бінома Ньютона  $(p + q)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m}$ . Тому розподіл дискретної випадкової величини, у якому ймовірність кожного значення дорівнює відповідному члену розкладання бінома  $(p + q)^n$ , називається біноміальним законом розподілу ймовірностей. У вигляді таблиці цей закон розподілу може бути заданий так:

$X$	0	...	$m$	...	$n$
$P(X)$	$q^n$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	$p^n$

Математичне сподівання та дисперсія дискретної випадкової величини  $X$ , яка має біноміальний розподіл, обчислюються за формулами:

$$M(X) = np; \quad D(X) = npq.$$

Серед розподілів неперервних випадкових величин особливе місце посідає нормальний розподіл (розподіл Гаусса). Це пов'язане з тим, що, як показано у відповідних розділах теорії ймовірностей, випадкові величини, які формуються під дією багатьох факторів, з яких жоден не є визначальним, мають або нормальний розподіл, або розподіл, близький до нормального.

Важлива особливість, яка виділяє нормальний закон серед інших законів розподілів, полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу при умовах, які дуже часто зустрічаються на практиці.

Якщо неперервна випадкова величина має нормальний розподіл, її щільність ймовірності описується формулою:

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де  $a$  і  $\sigma$  – деякі сталі.

Можна показати, що для випадкової величини, яка має нормальний розподіл,

$$M(X) = a, \quad D(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma.$$

Графік цього розподілу має форму дзвону. Він симетричний відносно прямої  $x = a$  (рис. 2).

Якщо змінювати  $a$  при постійному  $\sigma$ , то графік зміщується вздовж осі  $x$ , не змінюючи форму. Якщо зменшувати  $\sigma$  при постійному  $a$ , то графік стискається у напрямку до прямої  $x = a$ . Площа під графіком завжди дорівнює 1.

За необхідності обчислення ймовірності попадання величини  $X$ , яка має нормальний розподіл, у деякий інтервал треба інтегрувати наведений вище вираз для  $f(X)$ . Але цей інтеграл не може бути виражений через елементарні функції. У зв'язку з цим вводиться поняття *функції Лапласа*, яка дорівнює

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

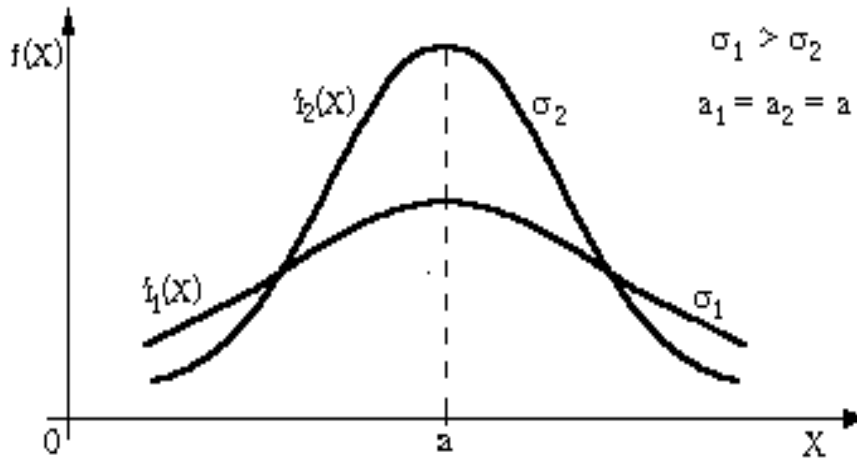


Рис. 2.

Для функції Лапласа за допомогою чисельних методів складена таблиця значень (див. Додаток А). Легко показати, що, якщо  $X$  має нормальний розподіл, то

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \varphi(t_2) - \varphi(t_1),$$

де  $t = \frac{x-a}{\sigma}$ .

Таким чином, обчислення ймовірності попадання нормально розподіленої випадкової величини в інтервал  $[x_1, x_2]$  зводиться до визначення значень  $t_1$  і  $t_2$  та знаходження за таблицею значень функції Лапласа величин  $\varphi(t_1)$  і  $\varphi(t_2)$ . Слід пам'ятати, що у таблиці значень функції Лапласа наводяться значення  $\varphi(t)$  тільки для додатних  $t$ , хоча при  $x < a$  значення  $t$  виходять від'ємними. У випадку від'ємних значень величини  $t$  треба використати властивість непарності функції Лапласа, тобто використати формулу  $\varphi(-t) = -\varphi(t)$ .

Функція розподілу нормально розподіленої випадкової величини також не може бути виражена через елементарні функції, але її можна виразити через функцію Лапласа:

$$F(x) = 0,5 + \varphi(t).$$

Ця формула дозволяє обчислювати значення  $F(x)$ , використовуючи таблицю значень функції Лапласа.

Розглянемо приклади визначення законів розподілу випадкових величин та обчислення їхніх характеристик.

*Приклад 8.* На гранях правильного тетраедру нарисовані числа 1, 2, 3 і 4. Знайти закон розподілу випадкової величини  $X$ , що дорівнює числу на нижній грані правильного тетраедра, при одноразовому киданні.

Випадання граней з числами 1, 2, 3 та 4 є рівноможливими. Їхні ймовірності однакові та дорівнюють 0,25. Тому закон розподілу має вигляд, поданий у таблиці (рівномірний розподіл)



$X$	1	2	3	4
$P$	0,25	0,25	0,25	0,25

*Приклад 9.* Для неперервної випадкової величини  $X$ , яка має щільність ймовірності

$$f(X) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2e^{-kx}, & x > 0 \end{cases}$$

визначити ймовірність  $P(-1 \leq X \leq 1)$ .

Спочатку знайдемо значення  $k$ . Для цього використаємо умову нормування для неперервної випадкової величини

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(X) \cdot dx = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^{+\infty} 2 \cdot e^{-kx} \cdot dx = \\ &= 0 - \frac{2}{k} \cdot e^{-kx} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Звідси  $k = 2$ . Тоді

$$\begin{aligned} P(-1 \leq X \leq 1) &= \int_{-1}^1 f(X) \cdot dx = \int_{-1}^0 0 \cdot dx + \int_0^1 2 \cdot e^{-2x} \cdot dx = \\ &= 0 - e^{-kx} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e^2}. \end{aligned}$$

*Приклад 10.* Знайти функцію розподілу неперервної випадкової величини  $X$ , яка має щільність ймовірності

$$f(X) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}, & -1 < x \leq 0 \\ \frac{2}{3}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}.$$

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(X) dx;$$

$$1) \ x \leq -1; \quad F(X) = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dx = 0;$$

$$2) \ -1 < x \leq 0; \quad F(X) = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \int_{-1}^x \frac{1}{3} \cdot dx = 0 + \frac{1}{3} x \Big|_{-1}^x = \frac{x+1}{3};$$

$$3) 0 < x \leq 1; \quad F(X) = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{3} \cdot dx + \int_0^x \frac{2}{3} \cdot dx = 0 + \frac{1}{3} x \Big|_{-1}^0 + \frac{2}{3} x \Big|_0^x = \\ = \frac{0+1}{3} + \frac{2(x-0)}{3} = \frac{1+2x}{3};$$

$$4) x > 1; \quad F(X) = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{3} \cdot dx + \int_0^1 \frac{2}{3} \cdot dx + \int_1^x 0 \cdot dx = \\ = 0 + \frac{1}{3} x \Big|_{-1}^0 + \frac{2}{3} x \Big|_0^1 + 0 = \frac{0+1+2(1-0)}{3} = 1.$$

Таким чином,

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{x+1}{3}, & -1 < x \leq 0 \\ \frac{1+2x}{3}, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

*Приклад 11.* Функція розподілу неперервної випадкової величини  $X$  дорівнює

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{2} \cdot (x+1), & -1 < x \leq 1. \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Знайти щільність ймовірності цієї випадкової величини.

$$f(X) = F'(X);$$

$$1) x \leq -1; \quad f(X) = 0' = 0;$$

$$2) -1 < x \leq 1; \quad f(X) = \left[ \frac{1}{2} \cdot (x+1) \right]' = \frac{1}{2};$$

$$3) x > 1; \quad f(X) = 1' = 0$$

Таким чином,

$$f(X) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{2}, & -1 < x \leq 1. \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

*Приклад 12.* Дискретна випадкова величина має такий закон розподілу:

$X$	1	2	3	4
-----	---	---	---	---

$P(X)$	0,4	0,3	0,2	0,1
--------	-----	-----	-----	-----

Знайти:  $M(X)$ ,  $D(X)$ ,  $\sigma(X)$ .

$$M(X) = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot P(x_i) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 = 2;$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot P(x_i) = 1 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,2 + 16 \cdot 0,1 =$$

$$= 0,4 + 1,2 + 1,8 + 1,6 = 5;$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 5 - 2^2 = 5 - 4 = 1;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1} = 1.$$

Приклад 13. Неперервна випадкова величина  $X$  має щільність ймовірності

$$f(X) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

Знайти:  $M(X)$ ,  $D(X)$ .

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(X) \cdot dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 \cdot dx + \int_0^1 x^2 \cdot dx + \int_1^2 x \cdot (2 - x) \cdot dx + \int_2^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx = \\ &= 0 + \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + x^2 \Big|_1^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 + 0 = \frac{1}{3} + 4 - 1 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(X) \cdot dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot 0 \cdot dx + \int_0^1 x^3 \cdot dx + \int_1^2 x^2 \cdot (2 - x) \cdot dx + \int_2^{+\infty} x^2 \cdot 0 \cdot dx = \\ &= 0 + \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 + \frac{2x^3}{3} \Big|_1^2 - \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 + 0 = \frac{1}{4} + \frac{16}{3} - \frac{2}{3} - \frac{16}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{6}; \end{aligned}$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}.$$

Приклад 14. Випадкова величина  $X$  має нормальний розподіл з параметрами  $a = 4$ ,  $\sigma = 2$ . Визначити значення її функції розподілу при  $x_1 = 6$  і  $x_2 = 0$ .

Для того, щоб використати таблицю значень функції Лапласа (див. Додаток 1), знайдемо  $t_1$  і  $t_2$  за формулами:

$$t_1 = \frac{x_1 - a}{\sigma} = \frac{6 - 4}{2} = 1; \quad t_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma} = \frac{0 - 4}{2} = -2.$$

За обчисленими значеннями  $t_1$  і  $t_2$  знаходимо

$$\varphi(t_1) = \varphi(1) = 0,341 \quad \varphi(t_2) = \varphi(-2) = -\varphi(2) = -0,477.$$

Тоді

$$F(6) = 0,5 + 0,341 = 0,841; \quad F(0) = 0,5 - 0,477 = 0,023.$$

*Приклад 15.* Випадкова величина  $X$  має нормальний розподіл з параметрами  $a = 2$ ,  $\sigma = 4$ . Визначити ймовірність того, що значення  $X$  знаходиться в інтервалі від 0 до 8.

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \varphi(t_2) - \varphi(t_1),$$

де

$$t_1 = \frac{x_1 - a}{\sigma} = \frac{8 - 2}{4} = \frac{3}{2} = 1,5; \quad t_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma} = \frac{0 - 2}{4} = -\frac{1}{2} = -0,5.$$

Тоді

$$P(0 \leq X \leq 8) = \varphi(1,5) - \varphi(-0,5) = 0,433 + 0,191 = 0,624.$$

### 3. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

#### 3.1. Основні поняття математичної статистики

Статистичні методи застосовуються при аналізі даних, які мають значущу випадкову мінливість. Статистичні методи можуть застосовуватися також і на етапі планування дослідження, у результаті якого будуть отримані експериментальні дані для наступного статистичного аналізу.

Вивчення понять математичної статистики почнемо з поняття *сукупності*. Сукупність – це множина об'єктів (елементів сукупності), які мають загальну властивість. Число елементів сукупності називають *об'ємом сукупності*. Сукупності можуть, у свою чергу, бути елементами якихось загальніших сукупностей. *Наприклад*, сукупність студентів першого курсу деякого вузу, сукупність студентів другого курсу та т. ін. є елементами сукупності, до якої входять всі студенти цього вузу.

Найбільша сукупність, яка об'єднує всі елементи, що мають яку-небудь властивість (властивість, наявність якої дозволяє віднести елементи до даної сукупності), називається *генеральною сукупністю*. При вивченні сукупностей ми, як правило, намагаємося зробити висновки, які стосуються всієї генеральної сукупності. *Наприклад*, якщо вивчається сукупність пацієнтів з яким-небудь захворюванням з метою визначення найефективнішого способу лікування цього захворювання, то, зрозуміло, що розроблений спосіб матиме цінність, якщо він

може застосуватися при лікуванні не тільки тих хворих, які вибиралися для дослідження, але й усіх хворих з даним захворюванням, тобто для всіх елементів генеральної сукупності.

Генеральна сукупність часто має дуже великий (а можливо, і нескінченно великий) об'єм, що робить неможливим вивчення всіх її елементів. Тому вивчають тільки частину елементів генеральної сукупності. Частина генеральної сукупності, яка обрана для вивчення, називається *вибірковою сукупністю* або просто *вибіркою*. Далі вважатимемо, що елементи розглянутих сукупностей характеризуються кількісною ознакою  $X$ , яка є випадковою (найчастіше - неперервною випадковою) величиною. Значення величини  $X$  для окремого елемента вибірки називають *варіантою*.

Звичайно оптимальна методика аналізу існуючих даних залежить від характеру розподілу величини  $X$ . Тому для одержання уяви про цей розподіл часто починають із графічного аналізу даних, тобто будують *гістограму* для розподілу величини  $X$ . З цією метою використовуються значення величини  $X$  (варіанти), які визначаються для кожного з елементів вибірки:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , де  $n$  – об'єм вибірки. Інтервал значень величини  $X$ , який містить всі значення цієї величини, розбивають на кілька інтервалів, які межують один з одним і розміри яких дорівнюють  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k$  ( $k$  – кількість таких інтервалів). Зазначимо, що найчастіше використовуються інтервали однакової ширини. Після цього для кожного  $j$ -го інтервалу підраховують число ( $m_j$ ) значень величини  $X$ , які належать до цих

інтервалів, та обчислюють величину  $P_j^* = \frac{m_j}{n}$ , що є відносною частотою попадання

величини  $X$  у  $j$ -й інтервал. Розділивши тепер величину  $P_j^*$  на  $\Delta x_j$ , одержимо для

кожного  $j$ -го інтервалу значення  $f_j^* = \frac{P_j^*}{\Delta x_j}$ , де  $f_j^*$  – щільність відносної частоти

величини  $X$ . При  $n \rightarrow \infty$  відносна частота прямує до ймовірності, а щільність відносної частоти – до щільності ймовірності величини  $X$ . Таким чином, величина  $f^*$  є вибірковою оцінкою щільності ймовірності. Якщо над кожним інтервалом  $\Delta x_j$  побудувати прямокутник (див. рис. 3) висотою  $f_j^*$ , то отримаємо ступінчастий графік, який і буде гістограмою для даної вибірки. Отже, гістограма є графіком емпіричної (експериментальної) оцінки щільності ймовірності випадкової величини  $X$ , тобто є графіком емпіричної оцінки закону розподілу цієї величини.

У ряді випадків буває важливо вже на початковому етапі аналізу даних вирішити питання про те, чи є підстави припускати наявність для величини  $X$  деякого конкретного закону розподілу (наприклад, нормального розподілу). Побудова гістограми дозволяє дати попередню (яка, можливо, потребує надалі уточнення) відповідь на зазначене питання.

При вивченні сукупностей, як правило, намагаються визначити значення яких-небудь числових показників, що характеризують ці сукупності. Ці числові показники прийнято називати *статистичними характеристиками*.

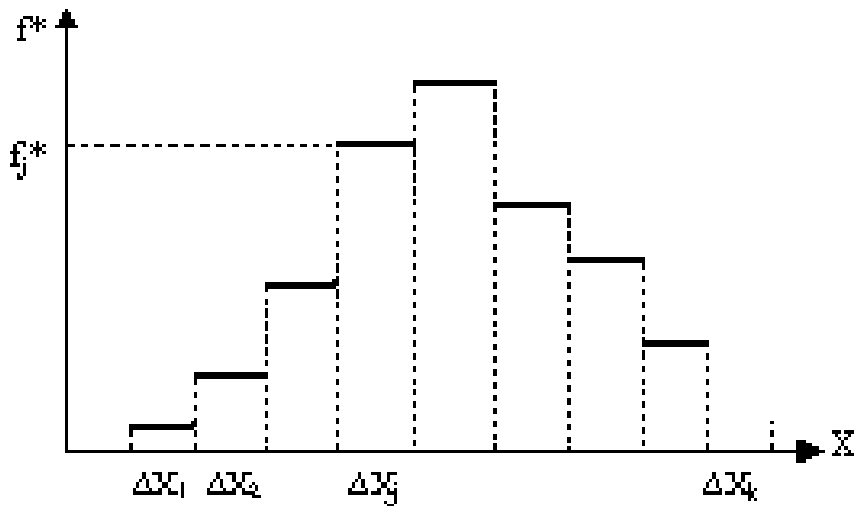


Рис. 3.

Вибіркові сукупності утворюються шляхом випадкового відбору елементів з генеральної сукупності. Тому властивості вибіркової сукупності звичайно не збігаються точно з властивостями генеральної сукупності, тобто значення статистичних характеристик, які визначені при вивченні вибірки, не збігаються з істинними значеннями статистичних характеристик генеральної сукупності, причому відмінності визначених та істинних значень можуть бути великими. Отже, при вивченні вибірки ми ніколи не можемо точно визначити значення статистичних характеристик генеральної сукупності, а можемо тільки з більшою або меншою точністю оцінити ці значення. При цьому ті значення, що отримані при вивченні вибіркової сукупності і які використовуються замість істинних значень статистичних характеристик генеральної сукупності, називають оцінками (вибілковими оцінками) цих статистичних характеристик.

При оцінюванні статистичних характеристик за вибіркою існують дві основні проблеми: 1) як знайти найкращу вибірку оцінку досліджуваної характеристики (питання про те, що вважати найкращою оцінкою, тобто питання про критерії оптимальності оцінок ми взагалі не розглядатимемо через його складність), 2) наскільки цій оцінці можна довіряти, тобто наскільки сильно значення оцінки може відрізнятись від істинного значення статистичної характеристики. Відповідь на друге питання звичайно дається у вигляді обчислення меж *надійного інтервалу*, про що докладніше буде сказано далі. Зараз відзначимо, що наявність двох зазначених проблем обумовлює необхідність введення двох нових термінів. Визначення чисельного значення оптимальної оцінки статистичної характеристики називається *точковою оцінкою* цієї характеристики, а побудова надійного інтервалу – *надійною оцінкою*, або *інтервальною оцінкою*.

Розглянемо методику точкової оцінки математичного сподівання, дисперсії та середнього квадратичного відхилення випадкової величини за вибіркою.

Нехай при вивченні вибірки отримані такі значення деякої випадкової величини  $X : x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n$  – об'єм вибірки). Тоді оптимальною вибірковою оцінкою математичного сподівання величини  $X$  (далі позначатимемо її  $\hat{M}(X)$ ) є середнє вибіркоче ( $\bar{x}$ ), яке обчислюють за формулою:

$$\hat{M}(X) = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Привернемо увагу до різниці у застосуванні понять «середнє значення» та «математичне сподівання». Термін «математичне сподівання» стосується генеральної сукупності та еквівалентний поняттю «середнє значення для генеральної сукупності». Поняття «середнє значення», з одного боку, ширше, тому що можна говорити про середнє значення як для генеральної, так і для вибіркової сукупності, а з іншого боку, це поняття найчастіше вживається саме у значенні «середнє вибіркове».

Оптимальна вибіркова оцінка дисперсії величини  $X$  (далі позначатимемо її  $\hat{D}(X)$ ) обчислюється за формулою:

$$\begin{aligned} \hat{D}(X) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \\ &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}. \end{aligned}$$

На практиці для обчислення  $\hat{D}(X)$  часто використовують формулу:

$$\hat{D}(X) = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2 \right).$$

Вибіркову оцінку середнього квадратичного відхилення величини  $X$  (позначається  $\hat{\sigma}(X)$  або  $S(X)$ ) знаходять за формулою:

$$\hat{\sigma}(X) = S(X) = \sqrt{\hat{D}(X)}.$$

Враховуючи, що  $\hat{D}(X) = S^2(X)$ , для позначення вибіркової оцінки дисперсії замість  $\hat{D}(X)$  часто використовують позначення  $S^2$ .

Відзначимо, що вибіркова оцінка математичного сподівання є випадковою величиною. Для характеристики величини розкиду значень оцінки математичного сподівання відносно його істинного значення використовується така статистична характеристика, як похибка середнього  $m_x$  (інше позначення –  $S_{\bar{x}}$ ). Ця величина визначається за формулою:

$$m_x = \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Розглянемо тепер методика надійного (інтервального) оцінювання математичного сподівання випадкової величини за вибіркою.

Оцінка статистичної характеристики, знайдена за вибіркою, є випадковою величиною, та її відхилення від істинного значення статистичної характеристики у загальному випадку може бути як завгодно великим. Тому не можна ставити питання про визначення границь інтервалу, у який істинне значення статистичної характеристики попадає вірогідно, а можна лише розв'язувати задачу визначення інтервалу, у який істинне значення попадає з деякої ймовірністю  $\alpha$ , яка нас влаштовує, (її зазвичай називають *надійною ймовірністю* або *коефіцієнтом довіри*). Такий інтервал називають надійним інтервалом. Таким чином, *надійний інтервал для статистичної характеристики – це випадковий інтервал, границі якого*

повністю визначаються значеннями досліджуваної величини у вибірці, що вивчається, та який із заданою ймовірністю  $\alpha$  накриває істинне значення цієї статистичної характеристики. У цьому визначенні слова «випадковий інтервал» означають, що границі надійного інтервалу також є випадковими величинами. Величину  $p = 1 - \alpha$  називають *рівнем значущості* відхилення оцінки, або просто рівнем значущості.

Будемо розглядати задачу визначення надійного інтервалу тільки для математичного сподівання випадкової величини  $X$  та тільки у випадку, якщо ця величина має нормальний розподіл. Відзначимо, що описаний далі метод визначення надійних границь для  $M(X)$  застосовується у більшості практичних випадків без перевірки нормальності розподілу величини  $X$ , оскільки більшість випадкових величин, які зустрічаються на практиці, мають нормальний розподіл або близький до нього. Крім того, на практиці рідко зустрічаються розподіли, для яких надійний інтервал ширший, ніж для нормального розподілу.

Для обчислення границь надійного інтервалу для математичного сподівання нормально розподіленої випадкової величини  $X$  можуть використовуватися різні формули залежно від того, відомим або невідомим є значення дисперсії  $D(X)$ . Випадок відомої дисперсії має місце, коли здійснюються виміри приладом з відомою похибкою, причому ця похибка значно більша випадкової похибки вимірів (докладніше про це йтиметься при розгляді методів обробки результатів вимірювань), або коли дисперсія оцінена за вибіркою досить точно (вважається, що при  $n \geq 30$  вибіркочну оцінку дисперсії можна приймати як істинне значення дисперсії, тобто вважати величину  $D(X)$  відомою). У цьому випадку надійний інтервал для  $M(X)$  обчислюється за такою формулою:

$$\bar{x} - t(\alpha) \sqrt{\frac{D(X)}{n}} \leq M(X) \leq \bar{x} + t(\alpha) \sqrt{\frac{D(X)}{n}},$$

де  $\bar{x}$  – середнє вибіркоче,  $n$  – об'єм вибірки, а величину  $t(\alpha)$  знаходять за таблицею значень функції Лапласа (див. Додаток 1), виходячи з умови:  $\varphi(t) = \frac{\alpha}{2}$ . У фізико-технічних і медико-біологічних дослідженнях звичайно приймають  $\alpha = 0,95$  ( $p = 0,05$ ). У цьому випадку  $t(\alpha) = 1,96$ .

Якщо дисперсія невідома та  $n < 30$ , то при визначенні надійного інтервалу для  $M(X)$  використовують таку формулу:

$$\bar{x} - t(\alpha, k) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq M(X) \leq \bar{x} + t(\alpha, k) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}},$$

де  $S$  – вибіркочна оцінка середнього квадратичного відхилення,  $k$  – число ступенів волі (вільності) ( $k = n - 1$ ), а  $t(\alpha, k)$  – коефіцієнт Стьюдента, що визначається за таблицею значень коефіцієнта Стьюдента (див. Додаток 2). Його значення знаходять на перетині стовпчика, який відповідає необхідному значенню  $\alpha$  (або  $p$ ), і рядка з обчисленим значенням  $k$ . Наприклад, при  $p = 0,05$  і  $k = 20$ , маємо  $t(\alpha, k) = 2,09$ .

Проведення точкового та інтервального оцінювання статистичних характеристик досліджуваних сукупностей є найпоширенішим початковим етапом статистичного аналізу даних. Наступний етап може бути пов'язаний з висунанням і



перевіркою якихось гіпотез про досліджувані сукупності. *Перевірка статистичних гіпотез* – великий важливий розділ математичної статистики.

Познайомимося з однією простою задачею цього типу – перевіркою гіпотези про вірогідність різниці середніх значень у двох вибіркових сукупностях. Ця задача часто зустрічається на практиці, якщо у вибірок, отриманих при яких-небудь різних умовах (наприклад, на елементи однієї вибірки впливав якийсь фактор, а на елементи іншої – ні), виявляються різні значення середніх вибіркових та потрібно з'ясувати, чи є ці розбіжності випадковими або вони є результатом впливу згаданих різних умов одержання вибірок. Іншими словами, необхідно з'ясувати, чи належать досліджувані вибірки до однієї генеральної сукупності і відмінності між середніми вибірковими цих вибірок є випадковими, або ці розбіжності вірогідні, тобто вибірки належать до різних генеральних сукупностей. Для відповіді на сформульоване питання використовується така процедура аналізу вибірок. Обчислюються величини

$$k = n_1 + n_2 - 2; \quad H = (n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2$$

$$T = \sqrt{\frac{n_1 n_2 k}{(n_1 + n_2)H}} \cdot |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|,$$

де  $k$  – число ступенів волі,  $n_1$  і  $n_2$  – об'єми вибірок, що порівнюються,  $S_1$  і  $S_2$  – вибіркові оцінки середніх квадратичних відхилень першої та другої вибірок відповідно,  $\bar{x}_1$  і  $\bar{x}_2$  – середні вибірок. За таблицею значень коефіцієнта Стьюдента для обчисленого значення  $k$  і необхідного  $\alpha$  (або  $p$ ) визначають значення коефіцієнта Стьюдента  $t$ . Якщо  $T > t$ , то можна говорити про те, що різниця середніх вибіркових вірогідна, тобто вона не може бути пояснена випадковими факторами та є наслідком відмінності генеральних сукупностей, з яких відбиралися вибірки. Якщо  $T < t$ , то різниця не є вірогідною.

Якщо об'єми обох вибірок великі та приблизно дорівнюють один одному, то для обчислення  $T$  можна використовувати простішу формулу:

$$T = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}},$$

де  $m_1$  і  $m_2$  – похибки середнього для першої та другої вибірок, відповідно.

Підкреслимо, що розглянутий метод визначення вірогідності різниці двох вибіркових середніх повністю справедливий тільки тоді, коли величини  $X_1$  і  $X_2$  мають нормальний розподіл.

Розглянемо приклади використання вивчених методик статистичного аналізу даних.

*Приклад 1.* Вимірювання товщини досліджуваної пластини (у мм) дало такі результати: 5,34; 5,88; 5,38; 5,84; 6,60; 6,80; 6,26; 6,74; 6,42; 5,66; 6,56; 5,58. Знайти точкові оцінки математичного сподівання товщини досліджуваної пластини, її дисперсії та середнього квадратичного відхилення.

За формулою  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  ( $n=12$ ) знаходимо середнє вибіркве товщини досліджуваної пластини

$$\bar{x} = \frac{5,34 + 5,88 + \dots + 5,58}{12} = 6,09 \text{ мм.}$$

Вибіркова оцінка дисперсії дорівнює

$$\begin{aligned} S^2(X) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \\ &= \frac{1}{12-1} \left[ (5,34 - 6,08)^2 + (5,88 - 6,08)^2 + \dots + (5,58 - 6,08)^2 \right] \approx 0,29. \end{aligned}$$

Звідси вибіркву оцінку середнього квадратичного відхилення знайдемо як

$$S = \sqrt{0,29} = 0,54.$$

*Приклад 2.* Випадкова величина  $X$  має нормальний розподіл. У вибірці об'ємом  $n=16$  середнє вибіркве  $\bar{x}=23,7$ , а оцінка середнього квадратичного відхилення  $S=0,4$ . Визначити надійний інтервал для математичного сподівання з надійною ймовірністю  $\alpha=0,95$ .

Межі надійного інтервалу знаходимо за формулою:

$$\bar{x} - t(\alpha, k) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq M(X) \leq \bar{x} + t(\alpha, k) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

За таблицею значень коефіцієнта Стьюдента (див. Додаток 2) визначаємо, що для  $\alpha=0,95$  і  $k=n-1=15$  коефіцієнт  $t(\alpha, k)=2,13$ .

Тепер надійний інтервал для  $M(X)$  можна записати у вигляді

$$23,8 - 0,21 \leq M(X) \leq 23,8 + 0,21$$

або

$$23,59 \leq M(X) \leq 24,01.$$

*Приклад 3.* Середнє значення та середнє квадратичне відхилення частоти дихання для однієї групи хворих ( $n=24$ ) становлять  $\bar{x}_1=24$  і  $S_1=5$  відповідно, а для іншої групи ( $n=35$ ) –  $\bar{x}_2=28$  і  $S_2=7$ . Потрібно з'ясувати, чи можна з надійною ймовірністю  $\alpha=0,95$  вважати різницю між середніми значеннями частоти дихання вірогідною.

Обчислюємо значення показника  $T$ :

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{n_1 n_2 k}{(n_1 + n_2) H}} \cdot |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = \\ &= \sqrt{\frac{24 \cdot 35 \cdot (24 + 35 - 2)}{(24 + 35) \cdot ((24 - 1) \cdot 5^2 + (35 - 1) \cdot 7^2)}} \cdot |24 - 28| = 2,56. \end{aligned}$$

Визначаємо число ступенів волі  $k$ :

$$k = 24 + 35 - 2 = 57.$$

За таблицею значень коефіцієнта Стюдента (див. Додаток 2) знаходимо  $t(0,95; 57) = 1,96$ . Оскільки  $T > t(\alpha, k)$ , робимо висновок про те, що отримана різниця між середніми значеннями частоти подиху в групах хворих не випадкова (вірогідна).

### 3.2 Елементи кореляційного та регресійного аналізу

Важливим питанням у математичній статистиці є питання про кореляційну залежність між випадковими величинами.

Залежності між випадковими величинами можуть бути функціональними, а можуть бути і не функціональними. *Наприклад*, з віком ріст дітей збільшується, тобто очевидним є існування залежності між ростом та віком дітей. Разом з тим, ця залежність не є функціональною, тому що при однаковому значенні величини вік, величина ріст у різних дітей набуває істотно різних значень. Очевидно, що величина росту при заданому віці є неперервною випадковою величиною, яка має деякий розподіл. Отже, залежність між величинами у цьому випадку полягає в тому, що кожному значенню однієї випадкової величини відповідає певний закон розподілу іншої величини. При цьому говорять вже не просто про щільність імовірності випадкової величини, а про її умовну щільність імовірності. *Наприклад*, умовна щільність імовірності величини  $Y$  ( $f(Y/x)$ ) – це щільність імовірності величини  $Y$  при вказаному значенні величини  $X$  (при  $X = x$ ). *Якщо умовна щільність імовірності величини  $Y$  ( $f(Y/x)$ ) залежить від  $X$ , а умовна щільність імовірності величини  $X$  ( $\varphi(X/y)$ ) залежить від  $Y$ , то кажуть, що між величинами  $Y$  та  $X$  існує кореляційна залежність.*

Якщо щільність ймовірності випадкової величини  $Y$  залежить від значення випадкової величини  $X$ , то й математичне сподівання величини  $Y$  залежить від цього значення, тобто можна казати про умовне математичне сподівання випадкової величини  $Y$  при заданому значенні величини  $X$  ( $M(Y/x)$ ). Таким чином, умовне математичне сподівання величини  $Y$  є функцією величини  $X$ , що математично можна записати так:

$$M(Y/x) = \psi(x),$$

де функція  $\psi(x)$  називається *функцією регресії  $Y$  на  $X$* . Графік цієї функції називається *лінією регресії*. Якщо у виразі для  $\psi(x)$  присутні які-небудь сталі коефіцієнти, то вони називаються *коефіцієнтами регресії*. Аналогічно може бути введено поняття функції регресії  $X$  на  $Y$ . Якщо

$$M(X/y) = \xi(y),$$

то функція  $\xi(y)$  – це функція регресії  $X$  на  $Y$ , причому у більшості випадків лінії регресії  $Y$  на  $X$  і  $X$  на  $Y$  – це різні лінії.

Точне визначення функції регресії потребує вивчення всієї генеральної сукупності, що на практиці, як правило, неможливо. Тому практично важливою задачею є оцінка функції регресії за наявними експериментальними даними, тобто за вибіркою. При цьому статистичний аналіз можна починати з використання графічних методів.

Нехай є вибірка, що містить  $n$  елементів, для кожного з яких визначаються значення випадкових величин  $Y$  і  $X$ , причому припускається, що між цими величинами є кореляційна залежність. Якщо точки з координатами  $y_i$  і  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) нанести на координатну площину  $XOY$ , то утвориться так зване *кореляційне поле*. Візуальне вивчення кореляційного поля найчастіше може стати основою для вибору зручного аналітичного виразу для опису функції регресії. Визначення оптимального аналітичного виразу для функції регресії пов'язане з обчисленням значень коефіцієнтів регресії. Методика визначення оптимальних вибірових оцінок коефіцієнтів регресії розглядатиметься далі. Зараз відзначимо, що, чим складніший аналітичний вираз, обраний для опису функції регресії, та чим більше коефіцієнтів він містить, тим складніше розв'язувати задачу вибіркової оцінки значень цих коефіцієнтів. Тому звичайно прагнуть використовувати для опису функції регресії якомога простіші залежності, але при цьому такі, графіки яких достатньою мірою відповідають отриманому кореляційному полю. Найпростіше задача обчислення значень коефіцієнтів регресії вирішується у випадку лінійної функції регресії, тобто при наявності залежності типу  $y = ax + b$ . Разом з тим, точки кореляційного поля майже ніколи не лягають точно на пряму лінію. Тому, обираючи лінійну функцію як функцію регресії, необхідно попередньо з'ясувати питання про те, наскільки обґрунтованим є припущення про лінійність функції регресії. З цією метою, виходячи з експериментальних даних, знаходять вибірову оцінку *коефіцієнта кореляції* (вибіровий коефіцієнт кореляції), використовуючи формулу:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{(n-1) \cdot S(X) \cdot S(Y)} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \cdot \bar{y}^2\right)}}$$

де  $R$  – вибіровий коефіцієнт кореляції.

Значення вибірового коефіцієнта кореляції лежать в інтервалі  $-1 \leq R \leq 1$ . Якщо  $R > 0$ , то функції регресії  $Y$  на  $X$  і  $X$  на  $Y$  – це зростаючі функції, а якщо  $R < 0$  – спадні. Чим ближче значення  $|R|$  до одиниці, тим тісніше точки кореляційного поля згруповані навколо прямої регресії, тобто тим більше підстав вважати функцію регресії лінійною. У цьому випадку кажуть про сильну кореляційну залежність. Чим ближче значення  $R$  до нуля, тим гірше точки кореляційного поля лягають на пряму та тим менше підстав вважати функцію регресії лінійною. Разом з тим, невеликі за модулем значення коефіцієнта кореляції зовсім не обов'язково означають відсутність кореляційної залежності між величинами  $Y$  і  $X$ , вони лише означають, що немає достатніх підстав вважати цю залежність лінійною. Таким чином, *коефіцієнт кореляції є мірою лінійності залежності між випадковими величинами*, але не мірою взагалі залежності між цими величинами.

При великих значеннях модуля вибіркового коефіцієнта кореляції для опису функції регресії можна використовувати лінійну функцію, що має вигляд  $y = ax + b$ . Такий опис вимагає обчислення значень коефіцієнтів регресії. Разом з тим, лінія регресії може бути проведена через кореляційне поле по-різному, тобто виникає питання про те, яку з ліній регресії слід вважати оптимальною, або інакше, якою повинна бути оптимальна процедура оцінки коефіцієнтів регресії за вибіркою. Для відповіді на це питання необхідно спочатку сформулювати критерії оптимальності, тобто, якщо ми говоримо про оптимальну функцію регресії, то, насамперед, треба вирішити, за яким критерієм ця функція має бути оптимальною.

*При визначенні функції регресії прийнято вважати оптимальними ті оцінки коефіцієнтів регресії, які отримані при застосуванні методу найменших квадратів.*

Суть методу найменших квадратів полягає в тому, що оптимальними значеннями коефіцієнтів регресії для функції  $y = \psi(x)$  вважаються ті, для яких сума

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \psi(x_i))^2$$

приймає найменше значення. В окремому випадку лінійної регресії вигляду

$$\psi(x) = ax + b$$

значення коефіцієнтів  $a$  і  $b$  визначають, мінімізуючи суму

$$\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2.$$

Для цього знаходять частинні похідні останнього виразу по  $a$  та по  $b$ , прирівнюють ці похідні до нуля та розв'язують отриману систему рівнянь. У підсумку для оптимальних вибірових оцінок коефіцієнтів регресії  $a$  і  $b$  одержують такі вирази:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}; \quad b = \frac{\bar{y} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x} \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}.$$

З урахуванням виразу для  $R$  останні вирази можна перетворити до вигляду:

$$a = R \frac{S(Y)}{S(X)}; \quad b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

У випадку регресії  $X$  на  $Y$  функція регресії має такий вигляд:

$$\xi(y) = a_1 y + b_1,$$

а коефіцієнти регресії  $a_1$  і  $b_1$  обчислюються за формулами:

$$a_1 = R \frac{S(X)}{S(Y)}; \quad b_1 = \bar{x} - a_1 \bar{y}.$$

Відзначимо, що лінії регресії  $Y$  на  $X$  і  $X$  на  $Y$  збігаються тільки в тому випадку, якщо  $|R|=1$ . У цьому випадку між величинами  $Y$  і  $X$  існує лінійна функціональна залежність.

Розглянутий метод статистичного вивчення зв'язку між характеристиками вибірки застосовується тільки в тому випадку, якщо ці характеристики є кількісними. Разом з тим, можливі ситуації, коли одна або кілька характеристик, між

якими припускається наявність зв'язку, є якісними. *Наприклад*, залежно від часу перебування на сонці людина може бути більш-менш засмаглою. Залежно від віку людина може бути більш-менш сивою. Наявність зв'язку між, наприклад, часом перебування на сонці та ступенем засмаглості очевидна, тобто виходить, у цьому випадку також можна говорити про існування кореляційної залежності, але необхідно вкладати у термін «кореляція» інший зміст та вводити інші кількісні параметри для визначення міри кореляційного зв'язку між досліджуваними характеристиками вибірки (ознаками).

Тому розглянутий раніше коефіцієнт кореляції часто називають *коефіцієнтом кореляції Пірсона*, відрізняючи його тим самим від інших кількісних характеристик залежності між ознаками.

Тепер розглянемо докладніше методи оцінки кореляційної залежності у випадку, якщо хоча б одна з ознак є якісною (не кількісною). При цьому опис ступеня вираженості якісної ознаки для елементів вибірки є порівняльним, тобто здійснюється за принципом «більше або менше». *Наприклад*, більш засмаглий або, наприклад, менш сивий. Кожну характеристику (ознаку) оцінюють шляхом ранжування: для одного з елементів ця характеристика вважається мінімальною та цьому елементу надається мінімальний ранг (наприклад, 1), для іншого елемента характеристика вважається другою за ступенем малості та цьому елементу надається наступний за величиною ранг (наприклад, 2) та т.ін. У такий самий спосіб кожному елементу вибірки надається значення рангів для кожної з тих характеристик, для яких припускається наявність кореляційного зв'язку.

Далі попарно аналізуються ознаки, для яких припускається наявність зв'язку. Нехай для якоїсь з таких пар  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) – це значення рангу за однією ознакою для  $i$ -го елемента вибірки ( $n$  – об'єм вибірки), а  $y_i$  – значення рангу за іншою ознакою для того самого елемента вибірки. Для перевірки наявності кореляційної залежності між досліджуваними ознаками обчислюють коефіцієнт рангової кореляції (*коефіцієнт кореляції Спірмена*) за формулою:

$$R = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}{n(n^2 - 1)}.$$

Коефіцієнт кореляції Спірмена є мірою ступеня кореляційної залежності між ознаками, причому, чим більший за модулем коефіцієнт кореляції тим тіснішою є ця залежність.

Розглянемо приклад обчислення коефіцієнтів кореляції та регресії при аналізі експериментальних даних.

*Приклад 4.* Результати одночасного вимірювання значень величин  $Y$  і  $X$  для елементів деякої вибірки наведені в таблиці. Знайти вибіркову оцінку коефіцієнта кореляції та рівняння регресії  $Y$  на  $X$  і  $X$  на  $Y$ .

$X$	3,1	1,5	3,7	2,8	0,5	3,5	4,5	2,0	0,9
$Y$	1,7	1,2	3,0	2,5	0,7	2,2	2,6	1,9	1,8

Спочатку знаходимо середні вибіркові величин  $Y$  і  $X$  :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{22,5}{9} = 2,50;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{17,6}{9} = 1,96.$$

Потім знаходимо вибіркові оцінки середніх квадратичних відхилень:

$$S(X) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{1,84} = 1,36;$$

$$S(Y) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{0,46} = 0,68$$

та обчислюємо значення величини

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} = 50,34 - 9 \cdot 2,5 \cdot 1,96 = 6,24.$$

Тепер можна обчислити значення коефіцієнта кореляції:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{(n-1)S(X)S(Y)} = \frac{6,24}{8 \cdot 1,36 \cdot 0,68} = 0,84.$$

Отримане значення  $R$  достатньо велике, щоб вважати регресію лінійною, тому можна перейти до обчислення коефіцієнтів регресії.

$$a = R \frac{S(Y)}{S(X)} = 0,84 \cdot \frac{0,68}{1,36} = 0,48;$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 1,96 - 0,48 \cdot 2,5 = 0,76;$$

$$a_1 = R \frac{S(X)}{S(Y)} = 0,84 \cdot \frac{1,36}{0,68} = 1,67;$$

$$b_1 = \bar{x} - a_1 \bar{y} = 2,5 - 1,67 \cdot 1,96 = -0,77.$$

Тепер рівняння регресії  $Y$  на  $X$  і  $X$  на  $Y$  можуть бути записані відповідно у вигляді:

$$y = 0,48x + 0,76 \quad \text{і} \quad x = 1,67y - 0,77.$$

### 3.3. Методи обробки результатів вимірювань

*Вимірюванням* називається обчислення значення вимірюваної величини експериментальним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів.

Вимірювання поділяють на *прямі*, *непрямі*, *сукупні* та *сумісні*, які розрізняються видом *рівнянь вимірювань*.

З прямими вимірюваннями маємо справу, коли прилад (засіб вимірювання) призначений для визначення чисельних значень безпосередньо вимірюваної величини. Якщо  $y$  — шукана величина, а  $x$  — безпосередньо вимірювана величина, то при прямих вимірюваннях рівняння вимірювань має вигляд:  $y = x$ . *Наприклад*,

вимірювання довжини лінійкою, сили струму амперметром – усе це прямі вимірювання.

Якщо шукана величина  $y$  обчислюється відповідно до рівняння вимірювань  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , де  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – безпосередньо вимірювані величини, а  $f$  – деяка функція, то такі вимірювання називаються *непрямими*. Наприклад, якщо при вимірюваннях потужності електричного струму ( $P$ ) безпосередньо вимірюється сила струму ( $I$ ) та напруга ( $U$ ), а потужність розраховується за формулою  $P = I \cdot U$ , то такі вимірювання потужності є *непрямими*. У цьому прикладі  $y = P$ ,  $x_1 = I$ ,  $x_2 = U$ ,  $n = 2$ .

Якщо всі шукані величини  $y_1, y_2, \dots, y_k$  пов'язані з безпосередньо вимірюваними величинами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  рівнянням вимірювань

$$F(y_1, y_2, \dots, y_k, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

то такі вимірювання називають *сумісними*. Відзначимо, що при сумісних вимірюваннях число вимірювань ( $m$ ) має бути більшим або дорівнювати числу шуканих величин, тобто  $m \geq k$ . Можна навести такий приклад сумісних вимірювань. Відомо, що у певних діапазонах температур залежність опору ( $R$ ) деяких провідників від температури ( $t$ ) можна подати у вигляді  $R = R_0(1 + \alpha t)$ , де  $R_0$  і  $\alpha$  – деякі сталі, які необхідно визначити. У цьому випадку шляхом багаторазових одночасних вимірювань величин  $R$  і  $t$  можуть бути отримані ряди значень  $R_i$  і  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $m > 2$ ) та визначені чисельні значення коефіцієнтів  $R_0$  і  $\alpha$ . У цьому прикладі  $y_1 = R_0$ ,  $y_2 = \alpha$ ;  $x_1 = R$ ,  $x_2 = t$ ;  $k = n = 2$ .

Сукупні вимірювання є окремим випадком сумісних вимірювань. При сукупних вимірюваннях всі шукані величини  $y_1, y_2, \dots, y_k$  є однойменними. У зв'язку з тим, що сукупні вимірювання є окремим випадком сумісних вимірювань, та методика обробки результатів таких вимірювань не відрізняється від методики обробки результатів сумісних вимірювань, надалі ми окремо не розглядатимемо сукупні вимірювання.

Відзначимо таке: якщо  $m > k$ , то вимірювання називаються *надлишковими*, а якщо  $m = k$ , то *безнадлишковими*.

Перш ніж перейти до опису способів обробки результатів вимірювань, слід ввести ряд термінів, пов'язаних з *похибками* вимірювань. *Похибка вимірювання* – це відхилення результату вимірювання від істинного значення вимірюваної величини.

Значення величин, які отримані при вимірюваннях, називають *виміряними*. У загальному випадку виміряні значення відрізняються від істинного значення ( $x_i$ ) вимірюваної величини, яке ніколи не може бути визначене абсолютно точно. Тому за результатами вимірювань знаходять оцінку істинного значення, яка називається *дійсним значенням* ( $x_0$ ) вимірюваної величини та використовується замість істинного значення. Різниця між виміряним та дійсним значеннями вимірюваної величини називають *абсолютною похибкою* окремого вимірювання, тобто  $\Delta x = x - x_0$ , де  $\Delta x$  – абсолютна похибка вимірюваної величини,  $x$  – виміряне значення. Якщо дійсне значення не дорівнює нулю, то відношення абсолютної похибки до дійсного значення називають *відносною похибкою* ( $\delta x$ ), тобто



$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_0}$$

Величина, обернена модулю відносної похибки  $\left(\frac{1}{\delta x}\right)$ , називається *точністю вимірювання*.

Похибка вимірювання може мати кілька складових: *методичну, інструментальну*, обумовлену впливом зовнішніх причин, *суб'єктивну*.

*Методична похибка* – це складова похибки вимірювання, яка виникає внаслідок недосконалості методу вимірювань, внаслідок впливу вимірювальної апаратури на виміряну фізичну величину або в результаті деяких припущень при виведенні розрахункових формул.

*Інструментальна похибка* обумовлена конструктивною або технологічною недосконалістю засобів вимірювань. Вона залежить від якості виготовлення та стабільності мір, вимірювальних приладів та перетворювачів, від градування та похибки відліку вимірювальних приладів.

Похибка, обумовлена впливом зовнішніх причин, виникає внаслідок відхилення від нормальних для даного засобу вимірювань умов роботи.

Суб'єктивна похибка може виникати внаслідок недосконалості органів почуттів спостерігача, а також при недостатній його досвідченості, неувважності у момент відліку показань тощо.

За походженням похибки поділяють на *систематичні* та *випадкові*.

*Систематичні похибки* виникають унаслідок постійного впливу деякого фактора та є сталими або закономірно змінюються з часом. Вивчення факторів, які впливають на результати вимірювань, може дозволити зменшити або виключити систематичні похибки.

Якість вимірювань, яка відображає близькість до нуля систематичної похибки, називається *правильністю вимірювань*. Малі значення систематичної похибки свідчать про правильність вимірювань.

*Випадкові похибки* пов'язані з впливом випадкових неконтрольованих факторів та не можуть бути враховані заздалегідь. Величина випадкової похибки може бути знижена шляхом проведення багаторазових вимірювань та використання статистичних методів обробки результатів вимірювань.

*Збіжністю вимірювань* називається якість, яка відображає близькість одне до одного результатів вимірювань, виконаних в однакових умовах. Висока збіжність результатів повторних вимірювань означає, що значення випадкової похибки невеликі.

Залежно від наявності або відсутності функціонального зв'язку між похибкою вимірювання та значенням вимірюваної величини розрізняють *адитивну* та *мультиплікативну* похибки. Адитивна похибка не залежить від значення вимірюваної величини. Мультиплікативна похибка залежить від значення вимірюваної величини.

Якщо вимірювання здійснюються багаторазово, то під *абсолютною похибкою вимірювань* (вимірювань у цілому, а не окремого вимірювання!) розуміють модуль різниці між істинним та дійсним значеннями. Оскільки істинне значення вимірюваної величини невідоме, абсолютну похибку вимірювань можна визначити,

тільки задавшись надійною ймовірністю ( $\alpha$ ), з якою необхідно оцінити можливе відхилення  $x_{\partial}$  від  $x_i$ . При цьому  $\Delta x$  виявляється залежною від  $\alpha$ .

Розглядаючи методи обробки вимірювань, почнемо з прямих вимірювань.

При **прямих вимірюваннях** похибки можуть бути пов'язані як з нестабільністю (випадковим характером) самої вимірюваної величини, так і з засобами вимірювання, що використовувались. У першому випадку говорять про випадкові, у другому – про інструментальні похибки. Методика обробки результатів прямих вимірювань залежить від співвідношення внесків випадкової та інструментальної похибок у загальну похибку вимірювань.

Якщо випадкова похибка набагато перевищує інструментальну, вимірювання необхідно проводити багаторазово. У цьому випадку отримують ряд значень вимірюваної величини  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n$  – число вимірювань). За дійсне значення приймається середнє вибіркоче, тобто

$$x_{\partial} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

За абсолютну похибку приймається половина ширини надійного інтервалу, тобто

$$\Delta x = t(\alpha, k) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}},$$

де  $t(\alpha, k)$  – коефіцієнт Стьюдента, який відповідає надійній ймовірності  $\alpha$  (значення величини  $\alpha$  найчастіше приймають таким, що дорівнює 0,95) та числу ступенів волі  $k$ ;  $S$  – вибіркоче оцінка середнього квадратичного відхилення величини  $X$ .

Якщо інструментальна похибка набагато перевищує випадкову, достатньо одного вимірювання. При цьому виміряне значення приймається як дійсне, а абсолютна похибка обчислюється за формулою:

$$\Delta x = \sqrt{\left( t(\alpha, \infty) \cdot \frac{d}{3} \right)^2 + (\alpha v)^2}.$$

Тут  $v$  – похибка відліку, а  $d = \frac{\gamma \cdot x_n}{100\%}$ , де  $\gamma$  – *приведена* похибка приладу, а  $x_n$  –

нормувальне значення. У засобів вимірювань з рівномірною шкалою похибка відліку складає половину ціни поділки приладу, а нормувальне значення дорівнює модулю різниці крайніх значень шкали. Величину  $\gamma$  визначають, виходячи з класу точності приладу (він позначений на корпусі приладу). Точніше, клас точності приладу дорівнює *приведеній* похибці, якщо вона виражена у відсотках.

Якщо випадкова та інструментальна похибки – це величини одного порядку, то вимірювання проводять багаторазово для зниження величини випадкової похибки, а як дійсне значення приймається середнє вибіркоче. Абсолютна похибка при цьому обчислюється за формулою:

$$\Delta x = \sqrt{\left( t(\alpha, k) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right)^2 + \left( t(\alpha, \infty) \cdot \frac{d}{3} \right)^2}.$$

Похибка відліку в цьому випадку є частиною випадкової похибки.



Зазвичай при цьому похибка вимірювань велика, та її складно оцінити. Тому при сумісних вимірюваннях прагнуть до того, щоб  $m$  було більшим за  $k$ . У цьому випадку для визначення дійсних значень шуканих величин використовують метод найменших квадратів. Про метод найменших квадратів вже йшлося вище, де обчислювалися коефіцієнти регресії. У загальному випадку застосовуються ті самі основні ідеї, що і раніше (знаходження частинних похідних, дорівнювання їх нулю тощо). Розв'язуючи системи рівнянь, визначають дійсні значення шуканих величин  $y_1, y_2, \dots, y_k$ . Щодо похибок вимірювань цих величин, то формули їх розрахунку досить складні навіть у найпростішому випадку, коли рівняння вимірювань – це лінійні рівняння. Унаслідок цього методу розрахунку похибок сукупних та сумісних вимірювань ми не обговорюватимемо.

Розглянемо приклади обробки результатів вимірювань при різних видах вимірювань.

*Приклад 5.* При визначенні вмісту азоту в даній пробі були отримані такі результати: 9,28 %; 9,38 %; 9,35 %; 9,43 %; 9,53 %; 9,48 %. Відомо, що у цих вимірюваннях випадкова похибка значно більша за інструментальну. Знайти дійсне значення вмісту азоту в пробі, а також абсолютну та відносну похибки при надійній ймовірності  $\alpha = 0,95$ .

Знаходимо дійсне значення вимірюваної величини:

$$x_{\partial} = \frac{9,28 + 9,38 + \dots + 9,48}{6} = 9,41 \text{ \%}.$$

Визначаємо вибірккову оцінку середнього квадратичного відхилення:

$$S = \sqrt{\frac{1}{5} (9,28 - 9,41)^2 + \dots + (9,48 - 9,41)^2} = 0,091 \text{ \%}.$$

Знаходимо за таблицею (див. Додаток 2) значення коефіцієнта Стьюдента:

$$t(0,95; 5) = 2,571.$$

Обчислюємо абсолютну похибку вимірювань:

$$\Delta x = t(\alpha, k) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 0,095 \text{ \%}.$$

Тоді відносна похибка дорівнює

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_{\partial}} = \frac{0,095}{9,41} = 0,01.$$

*Приклад 6.* Сила струму вимірюється амперметром класу точності 2,5. Діапазон вимірювань  $0 \div 10$  А, ціна поділки 0,05 А. Амперметр показує силу струму 9 А. Знайти абсолютну та відносну похибки.

Приведена похибка приладу дорівнює  $\gamma = 2,5 \text{ \%}$ . Величину  $d$  можна визначити, знаючи приведену похибку та нормувальне значення, яке в цьому випадку дорівнює  $x_n = 10$  А.

$$d = \frac{\gamma \cdot x_n}{100\%} = \frac{2,5 \cdot 10}{100} = 0,25 \text{ А.}$$

Похибка відліку в цьому випадку дорівнює 0,025 А (половині ціни поділки), яка є величиною, значно меншою, ніж  $d$ . Тому абсолютна похибка вимірювання  $\Delta I$  приблизно дорівнює абсолютній похибці приладу:

$$\Delta I = t(\alpha, \infty) \cdot \frac{d}{3} = \frac{1,96 \cdot 0,25}{3} = 0,163 \text{ А.}$$

Тоді відносна похибка вимірювання:

$$\delta I = \frac{\Delta I}{I} = \frac{0,163}{9} = 0,018.$$

*Приклад 7.* Сила струму вимірюється амперметром класу точності 1,5. Діапазон вимірювань  $0 \div 2$  А. Отримані такі результати вимірювань сили струму: 0,30; 0,285; 0,31; 0,31; 0,30; 0,29; 0,285; 0,32; 0,30 (А). Визначити дійсне значення сили струму та абсолютну похибку вимірювань.

$$I_{\varnothing} = \bar{I} = \frac{1}{9} (0,30 + 0,285 + \dots + 0,30) = 0,3 \text{ А;}$$

$$\Delta I = \sqrt{\left( t(\alpha, k) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right)^2 + \left( t(\alpha, \infty) \cdot \frac{d}{3} \right)^2};$$

$$d = \frac{\gamma \cdot x_n}{100\%} = \frac{1,5 \cdot 2}{100} = 0,03 \text{ А;}$$

$$k = n - 1 = 8; \quad t(0,95; 8) = 2,31; \quad \sqrt{n} = 3; \quad t(0,95; \infty) = 1,96;$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{8} (0,30 - 0,30)^2 + \dots + (0,30 - 0,30)^2} = 0,012 \text{ А;}$$

$$\Delta I = \sqrt{\left( 2,31 \cdot \frac{0,012}{3} \right)^2 + \left( 1,96 \cdot \frac{0,03}{3} \right)^2} = 0,022 \text{ А.}$$

*Приклад 8.* Визначити дійсне значення потужності, яка виділяється на резисторі, а також абсолютну та відносну похибки визначення потужності, якщо прямі вимірювання сили струму в резисторі та напруги на ньому дали такі результати:  $U = 107,3 \pm 0,3$  В;  $I = 7,65 \pm 0,04$  А.

Дійсне значення потужності знайдемо за формулою:

$$P_{\varnothing} = U \cdot I = 107,3 \cdot 7,65 = 821 \text{ Вт.}$$

Далі знайдемо відносну похибку:

$$\begin{aligned} \delta P &= \sqrt{\left(\frac{\partial \ln P(U_\partial, I_\partial)}{\partial U} \Delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln P(U_\partial, I_\partial)}{\partial I} \Delta I\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U_\partial}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I_\partial}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0,3}{107,3}\right)^2 + \left(\frac{0,04}{7,65}\right)^2} = 0,006. \end{aligned}$$

Тепер

$$\Delta P = P_\partial \cdot \delta P = 821 \cdot 0,006 = 4,9 \text{ Вт.}$$

*Приклад 9.* Рівняння вимірювань має такий вигляд:  $y = ax^2 + bx + c$ . При сумісних вимірюваннях були отримані такі пари значень  $x$  і  $y$ : 2 і 8; 3 і 11; 4 і 14; 5 і 17; 6 і 15; 7 і 11; 8 і 8. Знайти дійсні значення величин  $a$ ,  $b$  та  $c$  і записати оптимальне за методом найменших квадратів рівняння, яке пов'язує змінні  $x$  і  $y$ .

Відповідно до методу найменших квадратів треба знайти такі значення  $a$ ,  $b$  та  $c$ , за яких сума

$$\sum_{i=1}^7 (y_i - ax_i^2 - b_i - c)^2$$

приймає мінімальне значення. Тому значення шуканих величин  $a$ ,  $b$  та  $c$  знайдемо шляхом розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^7 x_i^4 + b \sum_{i=1}^7 x_i^3 + c \sum_{i=1}^7 x_i^2 = \sum_{i=1}^7 y_i x_i^2 \\ a \sum_{i=1}^7 x_i^3 + b \sum_{i=1}^7 x_i^2 + c \sum_{i=1}^7 x_i = \sum_{i=1}^7 y_i x_i \\ a \sum_{i=1}^7 x_i^2 + b \sum_{i=1}^7 x_i + 7c = \sum_{i=1}^7 y_i \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} 7475a + 1295b + 203c = 2371 \\ 1295a + 203b + 35c = 421 \\ 203a + 35b + 7c = 82 \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, одержимо:  $a = -1,05$ ;  $b = 10,1$ ;  $c = -9,0$ . Таким чином, для опису експериментальних даних оптимальною за методом найменших квадратів буде залежність

$$y = -1,05x^2 + 10,1x - 9.$$

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Васильків І. М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посіб. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2020. 184 с.
2. Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. Теорія ймовірностей та математична статистика. К. : Центр учбової літератури, 2010. 424 с.
3. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика. Ч. 1. К. : КНЕУ, 2000. 304 с.
4. Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В., Орел Б. П., Штабальок П. І. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. К. : НТУУ «КПІ», 2014. 212 с.
5. Медведєв М. Г., Пашенко І. О. Теорія ймовірностей та математична статистика. К. : Ліра-К., 2008. 536 с.
6. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика. К. : Центр навчальної літератури, 2004. 448 с.
7. Свердан П. Л. Вища математика. Математичний аналіз і теорія ймовірностей : підручник. К. : Знання, 2008. 456 с.
8. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. Вища математика : підручник для студ. вищ. фармац. ф-тів вищ. мед. навч. закл. IVр. акред. Вінниця : Нова книга, 2014. 632 с.
9. Кнігавко В. Г., Зайцева О. В., Бондаренко М. А. та ін. Медична та біологічна фізика : підручник для студентів медичних ВНЗ. Харків : ХНМУ, 2013. 364 с..
10. Чалий О. В., Цехмістер Я. В., Агапов Б. Т. та ін. Медична та біологічна фізика : підручник для студ. вищих мед. (фарм.) навч. заклад. Вид. 2-ге. Вінниця : Нова Книга, 2017. 528 с.

## ДОДАТКИ

Додаток А.

**Таблиця значень функції Лапласа**

$t$	$\varphi(t)$	$t$	$\varphi(t)$	$t$	$\varphi(t)$
0,00	0,0000	1,00	0,3413	2,00	0,47725
0,05	0,0199	1,05	0,3531	2,05	0,47981
0,10	0,0398	1,10	0,3643	2,10	0,48214
0,15	0,0596	1,15	0,3749	2,15	0,48422
0,20	0,0793	1,20	0,3849	2,20	0,48610
0,25	0,0987	1,25	0,3944	2,25	0,48778
0,30	0,1179	1,30	0,4032	2,30	0,48928
0,35	0,1368	1,35	0,4115	2,35	0,49061
0,40	0,1554	1,40	0,4192	2,40	0,49180
0,45	0,1736	1,45	0,4265	2,45	0,49286
0,50	0,1915	1,50	0,4332	2,50	0,49379
0,55	0,2088	1,55	0,4394	2,55	0,49461
0,60	0,2257	1,60	0,4452	2,60	0,49534
0,65	0,2422	1,65	0,4505	2,70	0,49653
0,70	0,2580	1,70	0,4554	2,80	0,49744
0,75	0,2734	1,75	0,4599	2,90	0,49813
0,80	0,2881	1,80	0,4641	3,00	0,49865
0,85	0,3023	1,85	0,4678	4,00	0,499968
0,90	0,3159	1,90	0,4713	5,00	0,49999997
0,95	0,3289	1,95	0,4744		



Таблиця значень коефіцієнта Стьюдента

$\alpha$ $k$	0,95	0,99	0,999
2	4,303	9,925	31,598
3	3,182	5,841	12,924
4	2,776	4,604	8,610
5	2,571	4,032	6,869
6	2,447	3,707	5,959
7	2,365	3,499	5,408
8	2,306	3,355	5,041
9	2,262	3,250	4,781
10	2,228	3,169	4,587
12	2,179	3,055	4,318
14	2,145	2,977	4,140
16	2,120	2,921	4,015
18	2,101	2,878	3,922
20	2,086	2,845	3,850
22	2,074	2,819	3,792
24	2,064	2,797	3,745
26	2,056	2,779	3,707
28	2,048	2,763	3,674
30	2,042	2,750	3,646
40	2,021	2,704	3,551
60	2,000	2,660	3,460
120	1,980	2,617	3,373
$\infty$	1,960	2,576	3,291

Навчальне видання

**Федосов Сергій Анатолійович**  
**Замуруєва Оксана Валеріївна**  
**Захарчук Дмитро Андрійович**  
**Шигорін Павло Павлович**

**Основи теорії ймовірностей, математичної статистики,  
і методів обробки результатів вимірювань**

*Курс лекцій*

*Друкується в авторській редакції*