Волинський національний університет імені Лесі Українки

Факультет інформаційних технологій і математики

Кафедра математичного аналізу та статистики

Ольга Мусіївна Кравчук

Аналітична геометрія та лінійна алгебра

Частина І

Лінійна алгебра

методичні рекомендації
до вивчення навчальної дисципліни
«Аналітична геометрія та лінійна алгебра»

для студентів спеціальності 104 Фізика та астрономія

Луцьк-2023

514.122:512.64(076.5)

К 77

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Волинського національного університету імені Лесі Українки

(протокол № 9 від 22 травня 2023 року)

Рецензенти:

Тимощук В.М. кандидат технічних наук, доцент кафедри фізики та вищої математики Луцького національного технічного університету

Мартинюк О.С. доктор пед. наук, професор кафедри експериментальної фізики, інформаційних та освітніх технологій Волинського національного університету імені Лесі Українки

К 77

Кравчук О.М. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Частина І. Лінійна алгебра: методичні рекомендації до вивчення навчальної дисципліни «Аналітична геометрія та лінійна алгебра» / Ольга Мусіївна Кравчук. Луцьк, 2023. 49 с.

У методичних рекомендаціях подано матеріал до вивчення тем: «Системи лінійних рівнянь. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь». «Матриці. Дії над матрицями. Ранг матриці», «Детермінанти (визначники) другого і третього порядків. Обернена матриця. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь», «Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера».

Рекомендації призначені для студентів бакалаврського рівня вищої освіти спеціальності 104 Фізика та астрономія.

УДК 514.122:512.64 (076.5)

© Кравчук О.М.
© Волинський національнийуніверситет імені Лесі Українки, 2023

Зміст

Передмова

Основна мета вивчення курсу «Аналітична геометрія та лінійна алгебра» для бакалаврів спеціальності 104 Фізика та астрономія - сформувати у студентів знання, уміння і навички необхідні для успішного вивчення інших профільних дисциплін, підготувати до продовження навчання за освітньо-кваліфікаційним рівнем магістр, сприяти забезпеченню суспільства спеціалістами різного рівня і профілю, а також створювати умови для розвитку кожної особистості з урахуванням її можливостей і потреб. Вивчення математики пов’язане із опануванням інших загальнонаукових та спеціальних дисциплін і з подальшою діяльністю випускників університету.

Дисципліна «Аналітична геометрія та лінійна алгебра» включає в себе аналітичну геометрію та лінійну алгебру. Ці складові тісно пов’язані.

Частина 1 «Лінійна алгебра» присвячена вивченню, передбачених навчальною програмою питань курсу лінійної алгебри.

Тут розглядаються методи розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, матрична та векторна форма запису таких системи. Вводяться поняття матриці, її визначника, рангу; дії над матрицями, їх властивості: властивості та методи обчислення визначника матриці; поняття оберненої матриці, критерій її існування та методи обчислення; критерій сумісності та критерій визначеності системи лінійних рівнянь; формули Крамера розв’язування систем лінійних рівнянь.

Розроблені методичні рекомендації містять теми практичних занять, перелік типових завдань для аудиторної та домашньої робіт. Основне завдання практичних занять - активне засвоєння понятійного апарату курсу лінійної алгебри, набуття вмінь використання цих понять та оволодіння деякими спеціальними методами розв’язування задач. Особлива увага звертається на розв’язання простих змістовних задач. До кожної теми підібрані завдання для самостійного розв’язання, а також індивідуальні домашні завдання.

Тема1. Системи лінійних рівнянь.
Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь

Теоретичні питання

1. Що називається розв'язком системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими?
2. Яка система рівнянь називається сумісною, визначеною, несумісною?
3. Які дві системи лінійних рівнянь називаються рівносильними?
4. Які перетворення систем називаються еквівалентними (рівносильними)?
5. В чому полягає суть методу послідовного виключення невідомих?
6. Як визначити чи система сумісна?
7. Які перетворення матриці називають елементарними?

Систему рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

називають *системою лінійних алгебраїчних рівнянь*, де $a_{ij,}b_i$ $(i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}) -$ коефіцієнти при змінних та вільні члени, відповідно, які є відомими; x_i $(i = \overline{1,n}) -$ невідомі. Скорочений запис:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

Розв'язком системи називають сукупність чисел $x_i = k_i, i = \overline{1,n},$ при підстановці яких у систему рівнянь замість відповідно $x_1, x_2, \dots, x_n$ кожне рівняння перетворюється на правильну рівність:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j = b_i, i = \overline{1,m}.$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь може не мати розв'язків (тоді її називають *несумісною*), мати один або багато розв'язків (тоді її називають *сумісною*).

Найпоширенішим методом розв'язування та дослідження системи лінійних рівнянь є метод Гаусса. За допомогою елементарних перетворень розширена матриця системи зводиться до сходинкового (трикутного) вигляду (прямий хід методу Гаусса):

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{1r} & a_{1r+1} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2r}^{(1)} & a_{2r}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \vdots & a_{rr}^{(r-1)} & a_{rr+1}^{(r-1)} & \vdots & a_{rn}^{(r-1} & b_r^{(r-1)} \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & b_{r+1}^{(r-1)} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_m^{(r-1)} \end{array}\right)$$

якій відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2\,r}^{(1)}x_r + a_{2r+1}^{(1)}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r+1r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}^{r-1}x_n = b_r^{(r-1)}, \\ 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = b_m^{(r-1)}, \end{cases}$$

Якщо хоча б одне з чисел $b_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, b_m^{(r-1)}$ відмінне від нуля, то система рівнянь буде несумісною. Якщо $b_{r+1}^{(r-1)} = \cdots = b_m^{(r-1)} = 0$ система буде сумісною.

Зразки розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

1. Потрібно знати, що суть методу Гаусса полягає у послідовному виключенні невідомих за допомогою елементарних перетворень. Особливістю методу є те, що при цьому немає необхідності наперед перевіряти систему на сумісність: Якщо система **несумісна**, то цей метод

приводить до того, що на деякому кроці разом з тим невідомим, яке виключаємо, у рівнянні виключаються всі останні невідомі, а в правій частині його отримуємо вільний член, відмінний від нуля. З отриманих двох суперечливих рівнянь робимо висновок про несумісність системи рівнянь. Наведемо приклад такого завдання.

Розв’язати систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + \ x_3 = 9, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = -3, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2\ \ x_3 = 8. \end{cases}$

Розв’язання

Виключимо невідоме x_1 з усіх рівнянь системи, крім першого, застосовуючи елементарні перетворення (перше рівняння помножимо на 3 і віднімемо від другого, від третього віднімемо перше, помножене на 5).

Отримаємо систему: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \ x_3 = 3, \\ -7\ x_2 + 7x_3 = -3, \\ -7x_2 + 7\ \ x_3 = -7. \end{cases}$

у якій друге і третє рівняння - суперечливі. Отже, система **не має розв’язків**.

2. Якщо система **сумісна**, але **невизначена**, то на деякому кроці отримаємо два тотожні рівняння, одне з яких виключаємо з системи і таким чином, кількість невідомих стає більшою, ніж кількість рівнянь, тобто система має **безліч розв’язків**. Для прикладу розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + \ x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + \ x_2 + \ \ x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв’язання

Перше рівняння помножимо на (-3) і додамо до другого, перше помножимо на (-1) і додамо до третього, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ 3x_3 = 3, \\ 0x_1 - 5\ \ x_2 - 10x_3 = -5, \\ 0x_1 - \ x_2 - 2\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Третє рівняння системи помножимо на (-5) і додамо до другого. Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ 3x_3 = 3, \\ 1\,x_2 + 2x_3 = 1, \\ 0x_1 + 0\,x_2 + 0x_3 = 0. \end{cases}, \qquad \text{тобто} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ 3x_3 = 3, \\ 1\,x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Вибравши змінну x_3 за вільну, усі інші змінні виразимо через неї. З другого рівняння знаходимо $x_2 = 1 - 2x_3$.

З першого, після виключення з нього змінної x_2 знаходимо $x_1 = 1 + x_3$

Загальним розв’язком системи є $\begin{cases} x_1 = 1 + x_3, \\ x_2 = 1 - 2x_3. \end{cases}$ де x_3-довільне число.

3. Розглянемо ще одну систему:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + \ 2x_3 = 31, \\ 5x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 29, \\ 3x_1 + \ x_2 - \ \ x_3 = 10. \end{cases}$$

Виконаємо перетворення: до другого рівняння додамо перше, помножене на (-5), а до третього – помножене на (-3). Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + \ 2x_3 = 31, \\ -18\,x_2 - 9x_3 = -126, \\ -11\,x_2 - 7\,x_3 = -83. \end{cases}$$

Виконавши перетворення, отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + \ 2x_3 = 31, \\ 2\,x_2 + x_3 = 14, \\ 3\,x_3 = 12. \end{cases}$$

З третього рівняння знаходимо $x_3 = 4$. Отримане значення x_3 підставляємо у друге рівняння системи і звідти знаходимо x_2: $x_2 = \frac{1}{2}(14 - x_3)$,тобто $x_2 = 5$.

З першого рівняння системи визначимо x_1 , підставивши в нього отримані значення x_2 та x_3 : $x_1 = 31 - 4x_2 - 2x_3$.

Звідси $x_1 = 3$.

Отже, система має єдиний розв’язок $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 4$.

Завдання для самостійного розв'язування

Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_4 = 7, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 9, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 9x_4 = -1, \\ 2x_2 + 4x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 6, \\ 9x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7, \\ 4x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 3, \\ 6x_1 - 13x_2 + 11x_3 = 5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7, \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 9. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 11, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ 2x_1 - 13x_2 + 11x_3 - 8x_4 = 49, \\ 4x_1 + 9x_2 - 13x_3 + 14x_4 = -37. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 1, \\ 3x_1 + 8x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 11x_5 = 8. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 12, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 12x_4 = 16, \\ 2x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 5x_5 = 6. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 + 5x_5 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_1 + 4x_2 - 13x_3 + 6x_4 - 12x_5 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 8x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 1 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 1 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 1 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7. \end{cases}$

Тема 2. Поняття матриці.

2.1. Дії над матрицями. Ранг матриці

Теоретичні питання

1. Означення матриці розмірності $m \times n$?
2. Яка матриця називається прямокутною? Квадратною?
3. Яка матриця називається діагональною?
4. Яка матриця називається нульовою? Одиничною?
5. Що називається транспонуванням матриці?
6. Які матриці називаються рівними?
7. Що називається сумою двох матриць однакових розмірностей?
8. Які властивості суми матриць?
9. Що називається різницею двох матриць і як її знайти?
10. Що називається добутком матриці на число?
11. Властивості добутку матриці на число.
12. Що називається добутком двох матриць?
13. Які повинні бути розмірності матриць, щоб їх можна було перемножити?
14. Як знаходимо елемент c_{ij} матриці С добутку двох матриць А та В?
15. Які властивості добутку двох матриць?
16. Чому дорівнює матриця, транспонована до добутку декількох матриць?

Порівняння двох матриць. Дві матриці однакової розмірності називають рівними, якщо у них рівні відповідні елементи:

А = В, якщо $a_{ij} = b_{ij}, \ \forall i, j$.

Транспонування матриці – це заміна рядків на стовпці і навпаки. Матрицю транспоновану до матриці $\underset{m\times n}{A} = \|a_{ij}\|$, позначають $\underset{n\times m}{A^T} = \|a_{ij}^T\|$.

Додавання двох матриць. Сумою двох матриць однакової розмірності є матриця тієї ж розмірності, кожний елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів заданих матриць:

$$\underset{m \times n}{A} + \underset{m \times n}{B} = \underset{m \times n}{C} = \|c_{ij}\| = \|a_{ij} + b_{ij}\|.$$

Множення матриці на число. Для того, щоб помножити матрицю на число, потрібно кожний її елемент помножити на це число: якщо С=αА, то $c_{ij} = \alpha\alpha_{ij}, \forall i, j$.

Множення двох матриць. Варто зауважити, що при множенні матриці А на матрицю В, потрібно, щоб вони були узгоджені:кількість стовпців матриці А повинна дорівнювати кількості рядків матриці В. У результаті множення отримуємо матрицю С, кількість рядків якої рівна кількості рядків матриці А, а кількість стовпців –кількості стовпців матриці В, тобто $\underset{n\times m}{A} \times \underset{m\times k}{B} = \underset{n\times k}{C}$.

при цьому кожен елемент c_{ij} матриці С дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го стовпця матриці А та j-го стовпця матриці В, тобто $c_{ij} = \sum_{p=1}^{m} a_{ip} b_{pj}, \forall i, j$.

У загальному випадку АВ≠ВА.

Для квадратних матриць $A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n}$.

Зразки виконання завдань

1. *Транспонувати матрицю А=* $\begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

Розв'язання

Транспоновану матрицю отримаємо, помінявши місцями рядки із відповідними стовпцями:

$$A^T = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

2. *Знайти матрицю A^T, якщо* A=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Матриця А має два рядки та три стовпці. Тому матриця $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. *Знайти суму двох матриць A та B:*

$$A=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad та \quad B=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Сумою матриць A та B буде матриця C, кожен елемент якої є сумою відповідних елементів матриць-доданків

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 5 & 9 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. *Знайти A + B, A – B та 3A, якщо*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+5 & 2+1 & 4+0 \\ 1-6 & 0+2 & -1-3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix};$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-5 & 2-1 & 4-0 \\ 1-(-6) & 0-2 & -1-(-3) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$3A = 3\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-3) & 3\cdot 2 & 3\cdot 4 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 0 & 3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 12 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

5. *Знайти 2A – 5B, якщо* $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Розв'язання

$$2A - 5B = 2\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 17 & -4 \end{pmatrix}.$$

8. *Знайти добутки AB та BA, якщо*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Обчислимо добуток C = AB. Узгодженість для множення матриці A на B виконується: кількість стовпців матриці A і кількість рядків матриці B однакова і дорівнює трьом. Обчислимо елемент

$$c_{11} = (-3)\cdot 1 + 2\cdot 0 + 4\cdot 2.$$

Аналогічно обчислимо інші елементи c_{ij}:

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-3)\cdot 1 + 2\cdot 0 + 4\cdot 2 & -3\cdot 5 + 2\cdot(-7) + 4\cdot(-2) \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 2 & 1\cdot 5 + 0\cdot(-7) + (-1)\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -37 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Отже, добутком AB є матриця розмірності 2×2 .

Обчислимо добуток BA:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot(-3) + 5\cdot 1 & 1\cdot 2 + 5\cdot 0 & 1\cdot 4 + 5 - 1 \\ 0\cdot(-3) + (-7)\cdot 1 & 0\cdot 2 + (-7)\cdot 0 & 0\cdot 4 + (-7) - 1 \\ 2\cdot(-3) + (-2)\cdot 1 & 2\cdot 2 + (-2)\cdot 0 & 2\cdot 4 + (-2) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -7 & 0 & 7 \\ -8 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Отже, добутком B A є матриця розмірності 3×3.

Варто *зауважити*, що добутки AB та BA різні.

9. *Знайти добуток матриць* A *та* B*:*

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -4\end{pmatrix}$$

Розв'язання

Розмірність матриці A рівна 3×3. а матриці B $-$ 3×1. Виконаємо множення як у попередньому прикладі:

$$\mathrm{AB}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot3-2\cdot2+1\cdot(-4)\\ 2\cdot3+3\cdot2-2\cdot(-4)\\ -1\cdot3+0\cdot2+3\cdot(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 20\\ -15\end{pmatrix}$$

Добутком матриць A та B є матриця розмірності 3×1.

10.*Знайти матрицю X з рівняння*

$$\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\end{pmatrix}+2\mathrm{X}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & -4\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Обчислимо добуток двох матриць:

$$A=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2 & 1\cdot0 & 1\cdot(-3)\\ 1\cdot2 & 1\cdot0 & 1\cdot(-3)\\ -3\cdot2 & -3\cdot0 & -3\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\\ 2 & 0 & -3\\ -6 & 0 & 9\end{pmatrix}.$$

Тоді матриця X визначається з рівності

$$\mathrm{X}=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & -4\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}-\mathrm{A}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2-2 & 3-0 & 5-(-3)\\ 0-2 & 1-0 & -4-(-3)\\ 3-(-6) & 2-0 & 0-9\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 3/2 & 4\\ -1 & 1/2 & -1/2\\ 9/2 & 1 & -9/2\end{pmatrix}.$$

11.*Знайти* A^3*, якщо* $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

Розв'язання

За означенням

$$\mathrm{A}^3 = \mathrm{AAA} \Rightarrow \mathrm{A}^2 = \mathrm{AA} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{A}^3 = \mathrm{A}^2\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -20 \\ 10 & -23 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\mathrm{A}^3 = \begin{pmatrix} -23 & -20 \\ 10 & -23 \end{pmatrix}$.

12.*Знайти значення матричного многочлена* $f(A)$, якщо

$$f(x) = -2x^2 + 5x - 3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Значення матричного многочлена $f(A)$ визначається рівністю

$$f(A) = -2A^2 + 5A - 3E.$$

Обчислимо A^2:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$f(A) = -2\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 3E =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Отже, $f(A) = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Транспонувати матрицю А, якщо:

а) $A = (1 \quad -2)$; б) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Знайти 2А - 4В, якщо

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 6 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Знайти 5A + 3B, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -6 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти $4A-5B$+2, якщо A=$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ і B=$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

5. Знайти матрицю X з рівняння:

а) $2\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} + 2X = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ 8 & 1 & 4 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $3X + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 10 \\ -2 & 13 \end{pmatrix}$.

6. Знайти добуток матриць A і B, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $A=(3 \;\; 4 \;\; -5 \;\; 1)$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

в) A=$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$;

г) A=$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4 & -3\\ 1 & 1 & -2 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & -1\\ 3 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}$.

7. Знайти добуток матриць АВ та ВА (якщо це можливо):

а) $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ 3 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 4\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2 & 0 & -3\\ -3 & -1 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 4 & 0\end{pmatrix}$.

8. Знайти добуток матриць АВ та ВА і показати, що АВ$\neq$ ВА, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -2 & 5 & 1\\ 3 & 4 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -5 & 4\\ 4 & 1 & 6\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$.

9. Показати, що АВ = ВА, якщо

$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

10. Показати, що АХ = ВХ, хоча $A \neq B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 4 & -1\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}6 & 5 & 7\\ 2 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

11. Знайти значення матричного многочлена $f(A)$, якщо:

а) $f(x) = 2x^2 = 3x - 2, A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $f(x) = 3x^2 - 3x + 5, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $f(x) = x^2 - 2x - 5, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

г) $F(x) = x^2 - 5x + 3$ і $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $F(x) = x^2 + 3x - 7$ і $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

12. Обчислити A^n, де $n \in N$, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, n=3; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, n=3; в) $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$; n=3

г) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ n=2; д) $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$; n=3

е) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$ n=2; є) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ n=2.

Індивідуальні завдання з теми «Дії над матрицями»

Обчислити добуток матриць:

1. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 3 \\ -13 & 1 & -1 \\ 10 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -3 & -4 & 2 \\ 10 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 21 & 2 & -3 \\ 13 & -11 & 7 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 4 & 14 & -2 \\ 2 & -12 & 12 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 14 & -2 & -3 \\ 13 & -1 & -2 \\ 12 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \\ -1 & 12 & 12 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 11 & -2 & -3 \\ -3 & 12 & 11 \\ 12 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 12 & 3 \\ -3 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 12 & -2 & 3 \\ -3 & 13 & 4 \\ 11 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -4 \\ 10 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 12 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -3 & -4 & -2 \\ 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 11 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 0 & -3 \\ -13 & 4 & -4 \\ 12 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} -21 & 3 & -3 \\ -23 & 4 & -1 \\ -10 & 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 & 2 & -3 \\ -3 & 3 & 12 \\ 10 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 11 & 2 & -3 \\ 13 & -11 & 7 \\ 22 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 11 & 2 \\ 3 & -12 & -2 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 \\ 13 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & -2 \\ -1 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 12 & -3 & -4 \\ -2 & 11 & 12 \\ 11 & -4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 11 & -3 \\ -13 & 4 & -4 \\ 12 & 11 & -2 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 13 & -1 & 4 \\ -3 & 12 & 2 \\ 11 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \\ 13 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & 12 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 12 & -5 \\ 2 & -4 & -3 \\ 13 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 12 & 3 \\ 2 & 14 & 2 \\ 7 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 11 & 3 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 4 & -2 \\ -3 & 5 & -6 \\ 12 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} -11 & -3 & -5 \\ -21 & -5 & -1 \\ -11 & -3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & 11 \\ 11 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 13 & -2 & -5 \\ 15 & -11 & 9 \\ 12 & 12 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 5 & 12 & -2 \\ 3 & 13 & -5 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} -8 & -5 & -3 \\ 14 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & -4 \\ -4 & -2 & -2 \\ -2 & 10 & 13 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & -5 & -3 \\ -4 & 11 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 13 & -4 \\ 5 & -4 & -3 \\ 11 & -7 & -6 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 12 & -3 \\ 8 & 11 & -2 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 6 & 12 & -4 \\ 2 & -3 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 3 & -7 \\ -3 & 7 & -5 \\ 12 & 9 & -9 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} -13 & -2 & 6 \\ -15 & -5 & 5 \\ -11 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & 11 \\ 11 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} -3 & -5 & -4 \\ 14 & -11 & 8 \\ 12 & 16 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 5 & 11 & -1 \\ 6 & 15 & -4 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -3 & -5 & 10 \\ 1 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$

2.2. Ранг матриці. Критерій сумісності системи лінійних рівнянь

1. Як визначити чи система сумісна?
2. Що таке ранг матриці?
3. Що називають мінором матриці?

Мінором k-го порядку довільної матриці А називають визначник, що складається з елементів матриці, розміщених на перетині k рядків та k стовпців.

Наприклад, для матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ -5 & 8 & 9 & -7 \end{pmatrix}$ можна зазначити такі мінори:

Першого порядку $|-1|, |9|, |4|$;

Другого порядку $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$;

Третього порядку $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ -5 & 9 & -7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 5 \\ 8 & 9 & -7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \\ -5 & 8 & -7 \end{vmatrix}.$

Рангом матриці А називається найбільший з порядків її відмінних від нуля мінорів та позначають r(A), rang(A).

Елементарними перетвореннями матриці називають такі операції:

• перестановку місцями двох рядків (стовпців) матриці;

• множення рядка (стовпця) матриці на число, відмінне від нуля;

• додавання до елементів одного рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця).

При елементарних перетвореннях ранг матриці не змінюється.

Ранг східчастої матриці дорівнює кількості ненульових рядків.

Ранг матриці можна знайти за допомогою методу елементарних перетворень. Суть цього методу полягає в тому, що матрицю приводять до східчастого вигляду елементарними перетвореннями; кількість ненульових рядків отриманої східчастої матриці визначає ранг матриці.

Теорема *Кронекера-Капеллі:* Система лінійних алгебраїчних рівнянь *сумісна* тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці:

$$r(A) = r(A|B).$$

Для сумісних систем справедливі такі твердження:

1. Якщо ранг матриці сумісної системи збігається з кількістю невідомих (r(A)=n), то система рівнянь має єдиний розв'язок.

2. Якщо ранг матриці сумісної системи менший від кількості невідомих $(r(A) = r < n)$, то система рівнянь має безліч розв'язків.

При цьому r зміних $x_1, x_2, \dots, x_r$ називають *основними* (або *базисними*), якщо визначник матриці з коефіцієнтів при них (базисний мінор) відмінний від нуля. Решту n – r змінних $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ називають *неосновними* (або *вільними*).

Зразки виконання завдань

1. *Знайти ранг матриці методом елементарних перетворень*:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

а) застосуймо елементарні перетворення для того, щоб привести матрицю до східчастого вигляду. Для цього помножимо другий рядок матриці на 2 і додамо до них перший:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{\mathrm{I}+2\mathrm{II}} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримана східчаста має лише один не нульовий рядок, її ранг дорівнює одиниці. Отже, ранг початкової матриці так сам дорівнює одиниці.

б) Додамо до другого рядка перший:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{\mathrm{I}+\mathrm{II}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Отримана матриця містить два ненульових рядка. Отже, її ранг дорівнює двом.

в) Помножимо другий і третій рядки матриці на (-2) і додамо до них перший:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-2)\mathrm{II}+\mathrm{I} \\ (-2)\mathrm{III}+\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & -12 \end{pmatrix} \mathrm{III}+3\mathrm{II}$$

Потім помножимо другий рядок на 3 і додамо до третього рядка. Дістанемо

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримана східчаста матриця має два ненульових рядка, тому її ранг дорівнює двом. Отже, ранг початкової матриці так само дорівнює двом.

2 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

Розв'язання

Запишемо систему у матричному вигляді і виконаємо елементарні перетворення

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Маємо, $\begin{matrix} \mathrm{rangA} = \mathrm{rangB} = 2 \neq 4 \\ n = 4 \end{matrix}$, тобто система має безліч розв'язків.

Візьмемо x_1 та x_2 за основні змінні і виразимо їх через вільні x_3 та x_4:

$x_2 = -\frac{6}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4 + \frac{2}{11}$,

$x_1 = -\frac{14}{11}x_3 + \frac{2}{11}x_4 + \frac{1}{11}$.

Отримали загальний розв'язок системи*:*

$(-\frac{14}{11}x_3 + \frac{2}{11}x_4 + \frac{1}{11}; -\frac{6}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4 + \frac{2}{11}; x_3; x_4)$

Якщо $x_3 = 1, x_4 = 0,$ то $x_1 = -\frac{13}{11}; x_2 = -\frac{4}{11};$

тобто маємо розвязок $\left(-\frac{13}{11}; -\frac{4}{11}; 1; 0\right)$.

3. *Розв'язати систему* $\begin{cases} x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$

Розв'язання

Знаходимо rang A

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 0 & -29 & 6 \\ 0 & 7 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 0 & -29 & 6 \\ 0 & 0 & -190 \end{pmatrix}.$$

Отримуємо rangA= 3 = n.

Якщо rangA=n , то система має лише 1 розв'язок, <u>нульовий.</u>

<u>Можемо ще записати:</u>

$$7x_2 = 8x_3; x_2 = \frac{8}{7}x_3 \; ; x_1 - \frac{48}{7}x_3 + x_3 = 0; x_1 = \frac{41}{7}x_3 \; ,$$

тобто загальний розвязок $(\frac{41}{7}x_3; \; x_2 = \frac{8}{7}x_3; x_3)$.

4. *Дослідити систему на сумісність. Якщо сумісна, то знайти її розв'язок*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 9. \end{cases}$$

Розв'язання

Послідовно виконуючи елементарні перетворення, отримуємо матриці

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\cdot I + II \\ -I + III \\ -5\cdot I + IV \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2II + III \\ -3\cdot II + IV \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

Оскільки rangA= rangB=2. Система має безліч розв'язків.

Отримана матриця відповідає системі рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 6, \\ x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -1 \end{cases}$$

За основні візьмемо змінні

x_1, x_2 і виразимо їх через вільні змінні x_3, x_4.

Знайдемо з другого рівняння $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$,

а з першого, після підстановки x_2 визначимо x_1.

Отримаємо загальний розв'язок системи:

$x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4$ $\qquad$ $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$

5. *Розв'язати систему рівнянь* $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4, \\ 3x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$

Розв'язання

Запишемо основну і розширену матриці рівняння та за допомогою елементарних перетворень знайдемо ранг

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -4 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Як бачимо, rangA= rangB=2. Система має єдиний розв'язок:

$x_2 = 2; x_1 = 1.$

6. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=2 \\ 2x_1+3x_2-x_3=0 \\ x_1-2x_2+2x_3=1 \\ 4x_1-x_2+3x_3=3 \end{cases}$$

Розв'язання

Дослідимо систему на сумісність:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -1 \\ 0 & 7 & -5 & -2 \\ 0 & 7 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

За допомогою елементарних перетворень отримали: $\begin{array}{c} rangA=2 \\ rangB=3 \\ rA\neq rB\Rightarrow\emptyset \end{array}$.

Система розв'язків не має.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти ранг матриці методом елементарних перетворень:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -15 & 12 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & -6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$*; д)* $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & 12 & 0 \end{pmatrix}$

4. Дослідити систему на сумісність. Якщо сумісна, то знайти її розв'язок:

1. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7, \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2, \\ 3x_1-2x_2+5x_3+2x_4=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3, \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2\ . \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$

Тема 3. Визначники (детермінанти) матриць

3.1. Визначники другого, третього та вищих порядків, їх властивості та способи обчислення

Теоретичні питання

1. Як обчислити детермінант квадратної матриці другого порядку?
2. Сформулювати основні властивості детермінантів другого порядку.
3. Чому дорівнює детермінант квадратної матриці третього порядку?
4. Що називається транспонуванням детермінанта ?
5. Чи змінюється детермінант при транспонуванні?
6. Чи змінюється детермінант при перестановці двох рядків або двох стовпців?
7. Чому дорівнює детермінант, який має два пропорційні рядки або стовпці?
8. Як зміниться детермінант якщо всі елементи деякого рядка або стовпця помножити на деяке число?

9. Як можна подати детермінант, всі елементи деякого рядка якого є сумою двох доданків?
10. Чому дорівнює детермінант, один із рядків якого є лінійною комбінацією інших рядків?
11. Як зміниться детермінант, якщо до елементів деякого рядка додати будь – яку лінійну комбінацію відповідних елементів інших рядків?
12. Що називається доповняльним мінором елемента a_{ij} детермінанта третього порядку?
13. Що називається алгебраїчним доповненням до елемента a_{ij} детермінанта?
14. Сформулювати теорему про розклад детермінанта за елементами рядка чи стовпця.

Кожна квадратна матриця n-го порядку характеризується числом, яке називають визначником |A| (або детермінантом det A) і позначають так:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \cdots & \mathrm{a}_{1\mathrm{n}} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & \cdots & \mathrm{a}_{2\mathrm{n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{a}_{\mathrm{n}1} & \mathrm{a}_{\mathrm{n}2} & \cdots & \mathrm{a}_{\mathrm{nn}} \end{vmatrix}$$

Визначник другого порядку задається рівністю

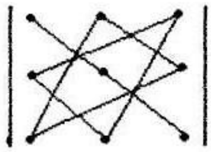
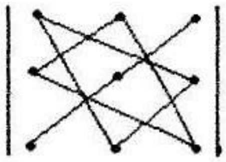
$$\begin{vmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{vmatrix} = \mathrm{a}_{11}\mathrm{a}_{22} - \mathrm{a}_{12}\mathrm{a}_{21};$$

визначник третього порядку — рівністю

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Знаки, з якими доданки входить у формулу для обчислення визначника третього порядку, легко запам'ятати, скориставшись правилом трикутників (Саррюса):

для знаку “+”  для знаку “-” 

Матрицю А, визначник якої дорівнює нулю (|A|=0), називають *виродженою*. Якщо |A| ≠ 0) матриця є *невиродженою*.

При обчисленні визначників потрібно знати і вміти застосовувати їх основні властивості:

1. При транспонуванні визначник не змінюється.
2. Якщо елементи будь-якого рядка (стовпця) матриці помножити на число λ, то її визначник так само помножиться на це число.
3. Якщо у визначника поміняти місцями дарки рядки (стовпці), то визначник лише змінить знак.
4. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.
5. Якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначних дорівнює нулю.
6. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) є сумою двох доданків, то визначник можна подати у вигляді суми двох визначників, елементи відповідних рядків (стовпців) яких дорівнюють відповідним доданкам.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31}+a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) долати елементи іншого рядка (стовпця), помноженого на

довільний множник.

Для обчислення визначників матриць *вищого* порядку використовують алгебраїчні доповнення елементів матриць, які визначають через їх мінори.

Розглянемо матрицю А = $\|a_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, n}$. *Мінором* M_{ij} елемента називають визначник, який отримують з визначника матриці А вилученням i-го рядка та -го стовпця. Наприклад, для матриці третього порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

маємо

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \dots , \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці А визначають за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема Лапласа. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на їх алгебраїчні доповнення, тобто

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in,}$$

$$|A| = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni,}$$

а сума добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка або стовпця дорівнює нулю, тобто

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \;\; i \neq j,$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj}, \;\; i \neq j$$

Для обчислення визначника матриці n-го порядку необхідно вибрати рядок (стовпець) матриці, обчислити алгебраїчні доповнення всіх ненульових елементів вибраного рядка (стовпця) і скористатись відповідною формулою. Найзручніше обчислювати визначник, розклавши його за елементами рядка (стовпця), який містить найбільшу кількість нулів. Нулі у відповідних рядках (стовпцях) можна утворювати, застосовуючи властивість 7 визначника.

Зразки розв'язування вправ

1. *Обчислити визначник матриці другого порядку:*

$$a)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad б)\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

За формулою обчислення визначників другого порядку записуємо:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 8 + 3 = 11$$

б) аналогічно попередньому завданню а) обчислюємо $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 6.$

2. *Розв'язати рівняння:* а)$\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$ б)$\begin{vmatrix} x^2 & 3 \\ x & 1 \end{vmatrix} = -2.$

Розв'язання

а) Обчисливши визначник і прирівнявши його до нуля, отримаємо рівняння відносно x: $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = x - 6 = 0.$

Звідки $x = 6$

б) У цьому випадку відносно невідомої x отримуємо квадратне рівняння $\begin{vmatrix} x^2 & 3 \\ x & 1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow x^2 - 3x = -2,$ розв'язками якого є $x_1 = 1, x_2 = 2.$

3. *Обчислити визначник* $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$, *застосовуючи правило трикутників.*

Розв'язання

Виконуємо обчислення:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 2$$

$$-3 \cdot 0 \cdot 3 - (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -6 + 0 - 12 - 2 - 0 + 8 = -12.$$

4. *Обчислити визначник третього порядку:*

Розв'язання

Перший спосіб – дописуванням перших двох рядків: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} =$

$$= 2\cdot(-3)\cdot 0 + 1\cdot(-2)\cdot 5 + (-1)\cdot 1\cdot 4 \ -(-1)\cdot(-3)\cdot 5 - 2\cdot(-2)\cdot 4 - 110 = -13$$

другий спосіб – за "правилом трикутників " :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3)\cdot 0 + 1\cdot(-2)\cdot 5 + (-1)\cdot 1\cdot 4 \ -(-1)\cdot(-3)\cdot 5 - 2\cdot(-2)\cdot 4 - 110 = -13$$

третій спосіб – зведення до трикутного вигляду. Тоді значення детермінанта рівне добутку діагональних елементів.

При обчисленні детермінантів досить часто використовуємо властивість, що значення детермінанта не зміниться, якщо до одного з його рядків (стовпців) додати інший рядок (стовпець), помножений на довільне, відмінне від нуля число:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \text{(-2) 1 3 = -6}$$

четвертий спосіб – розкладання детермінанта за елементами одного із рядків (стовпців):

п'ятий спосіб – спосіб нулів : зведення одного з рядків (стовпців) визначника до нульових елементів ,крім одного (див. приклад 3).

Зауважимо, що детермінанти четвертого та вищих порядків практично обчислюють ,застосовуючи їх властивості , зокрема : розклад детермінанта за елементами рядка (стовпця)

5. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$, *розклавши його за елементами третього рядка.*

Розв'язання

За формулою $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$ записуємо визначник:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2A_{31} + 0A_{32} + (-2)A_{33}.$$

Оскільки другий елемент вибраного рядка дорівнює нулю, то для визначника достатньо обчислити алгебраїчні доповнення A_{31}, A_{33}:

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \big((-2) \cdot 3 - 1 \cdot 1\big) = -7;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1.$$

Отже, $|A| = 2 \cdot (-7) + (-2) \cdot (-1) = -14 + 2 = -12.$

6. *Обчислити визначник* $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$, *утворивши нулі у третьому рядку.*

Розв'язання

Додамо до третього стовпця перший. Отримаємо визначник

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, третій рядок якого містить лише один ненульовий елемент. Розкладемо цей визначник за елементами третього рядка:

$$|A| = 2A_{31} = 2\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2 - 4) = -12.$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Обчислити детермінанти другого порядку:

а) $\begin{vmatrix} 12 & 5 \\ 14 & 15 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a+b & a^2+ab+b^2 \\ a-b & a-b \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \log_2 3 & \log_2 5 \\ \log_5 4 & \log_3 2 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} tg\alpha & \sin\alpha \\ 2 & \cos\alpha \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x^2 & x^2-x+1 \end{vmatrix}$;

є) $\begin{vmatrix} \lg_{\frac{1}{5}}(5\sqrt{5})\lg_{\sqrt{5}}\frac{1}{5} & \lg_{\sqrt{5}}\frac{1}{5} \\ -\lg_{\sqrt{5}}(5\sqrt{5})\lg_{\sqrt{5}}\frac{1}{5} & \lg_{\sqrt{5}}\frac{1}{5} \end{vmatrix}$.

2. Обчислити детермінанти:

а) $\begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a+x & a & a \\ a & a+x & a \\ a & a & a \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a+x & a & a \\ a & a+x & a \\ a & a & a+x \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 31 & 27 & 111 \\ 95 & 68 & 76 \\ 123 & 101 & 285 \end{vmatrix}$; є) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & -3 & 11 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 \\ -1 & 7 & 4 \\ 8 & -2 & -5 \end{vmatrix}$; і) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & -4 \end{vmatrix}$.

3 . Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & -6 \\ -3 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, утворивши нулі у третьому стовпці.

4. Не розкриваючи детермінант, розв’язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & x-10 \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} = 0$.

5. Числа 204, 527 і 255 діляться на 17.Довести, що визначник

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ ділиться на 17.

6. Обчислити визначники, користуючись властивостями:

а) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 42 & 70 & 53 \\ 43 & 68 & 52 \\ 7 & 11 & 8 \end{vmatrix}$

7. Довести, що

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

8. Знайти суму алгебраїчних доповнень всіх елементів детермінанта:

а) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

3.2. Обернена матриця. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Теоретичні питання

1. Яка матриця називається оберненою до даної матриці?
2. Умова існування оберненої матриці.
3. За якою схемою шукаємо обернену матрицю?
4. Яке рівняння називається матричним?
5. У чому полягає суть матричного способу розв'язування системи лінійних рівнянь, у якої кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь?

Оберненою матрицею до матриці А є така матриця В, що АВ = ВА = Е. Обернену матрицю позначають A^{-1} і вона існує лише для невироджених матриць. За допомогою алгебраїчних доповнень A_{ij} її можна подати у вигляді

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ \mathrm{A}_{12} & A_{22} & \dots & A_{32} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{A}_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

Тобто алгебраїчні доповнення елементів i-го рядка записуються в i-й стовпець матриці A^{-1}.

Кожній системі рівнянь відповідають такі матриці:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

де А – матриця системи; В – матриця-стовпець системи; Х– матриця-стовпець невідомих.

Якщо до А додати матрицю-стовпець В, то одержану матрицю (A|B) називають *розширеною*.

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь можна записати у матричній формі:

$$AX = B.$$

Суть методу оберненої матриці: якщо матриця системи є невиродженою, то її розв’язок визначається за формулою

$$A^{-1}AX = EX = X = A^{-1}B$$

Зразки розв’язування вправ

1. *Знайти матрицю, обернену до* $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв’язання

Обчислимо визначник $|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}= 2 – 0 = 2.$

Матриця є не виродженою, тому існує обернена їй матриця. Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів першого та другого рядків.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2$, $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 0 = 0$,

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3$, $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$.

Запишемо обернену матрицю $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Виконаємо перевірку:

$$A^{-1}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, обернену матрицю знайдено правильно.

2. *Знайти матрицю, обернену до А, якщо:*

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \qquad \text{б) } B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Обчисливши визначник матриці А, отримаємо $|A| = 12$. Матриця є невиродженою, і тому існує обернена до неї матриця. Для відшукання цієї матриці потрібно обчислити дев'ять алгебраїчних доповнень:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -11;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Отже, за відповідною формулою записуємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -7 \\ 2 & -8 & -11 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність знайденої оберненої матриці:

$$A^{-1}A = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -7 \\ 2 & -8 & -11 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Обчислимо визначник матриці

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 6 + 12 + 1 - 45 + 16 = 0.$$

Матриця вироджена тому, тому оберненої до неї не існує.

3. Розв'язати матричне рівняння:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

а) Позначимо дані матриці через A та B:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тоді задане матричне рівняння запишеться у вигляді AX = B.

Визначник матриці A: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 14 = 1 \neq 0.$ Тому матриця A є невиродженою і для неї існує обернена матриця $A^{-1} \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Помножимо обидві частини матричного рівняння зліва на A^{-1}.

Одержимо

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 18 & 31 \\ -7 & -13 \end{pmatrix}.$$

Отже, X= $\begin{pmatrix} 18 & 31 \\ -7 & -13 \end{pmatrix}$.

б) Запишемо матричне рівняння у вигляді $AXB = C$, де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Якщо матриці A і B невироджені, то помноживши матричне рівняння на A^{-1} зліва і на B^{-1} справа, одержимо розв'язок:

$$A^{-1}AXB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Знайдемо визначники матриць А і В:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1; \qquad |B| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1.$$

Ці матриці не вироджені, тому до них існують обернені:

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

4. *Розв'язати рівняння* $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{T}$.

Розв'язання

Маємо матричне рівняння типу $AXB = C$, розв'язком якого є матриця $X = A^{-1}A \cdot C \cdot BB^{-1}$, оскільки $\underbrace{A^{-1} \times A}_{E}$ і $\underbrace{B^{-1} \times B}_{E}$.

Знайдемо обернені матриці до матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Delta A = 2; \qquad A_{11} = 4; A_{12} = 2; A_{21} = 3; A_{23} = 2;$

$$A^{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 - 8 + 3 = -5 ;$$

$B_{11} = 2;\ B_{12} = 1; B_{13} = -5;$

$B_{21} = -1; B_{22} = -3; B_{23} = 5, B_{31} = -4; B_{32} = -2; B_{33} = 5.$

$B^{-1} = -\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$

Матриця $C = 5\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{T} = 5\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Тоді

$$A^{-1} \cdot C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot 5\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 5 & 25 & 3 \\ 2 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1}C) \cdot B^{-1} = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix} 5 & 25 & 3 \\ 2 & 14 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 5 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 20 & -65 & -55 \\ 8 & -34 & -26 \end{pmatrix}.$$

Отже, $X = \begin{pmatrix} -10 & 65/2 & 55/2 \\ -4 & 17 & 13 \end{pmatrix}$.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Знайти обернену матрицю:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ -4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ -5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Обчислити матрицю B$= 11(A^{-1})^{T} + A^{T}$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Визначити, для яких значень α матриця А не має оберненої

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Розв'язати матричне рівняння:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; б) $X\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\mathrm{X}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 5 & 7\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\mathrm{X}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix}$;

д) $\mathrm{X}\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ -1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1 & 5\\ -2 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

5. Знайти матриці, обернені до матриці A і виконати перевірку:

а) $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 5\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}7 & -6 & 1\\ -5 & 3 & 1\\ 6 & -3 & -3\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$; д) $A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$; е) $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix}$;

є) $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$; ж) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -2 & -6\end{pmatrix}$; з) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 7 & 5 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 9 & 4\\ 0 & 0 & 11 & 5\end{pmatrix}$.

6. Розв'язати матричне рівняння:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & -5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}6 & 9\\ 2 & 3\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, д) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}9 & 7 & 6\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 18 & 12 & 9\\ 23 & 15 & 11\end{pmatrix}$.

7. Розв'язати систему рівнянь матричним способом:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 14, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 12. \end{cases}$

Індивідуальні завдання з теми «Обернена матриця»

Розв'язати матричне рівняння:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

4. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

5. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

6. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$

7. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$

8. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$

10. $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

11. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$

12. $X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

13. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$

14. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

16. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

18. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

20. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

22. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 3 & 0 & -4 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

24. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

26. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

28. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -3 & -5 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

30. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 13 & 2 & 2 \\ 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Тема 4. Метод Крамера розв’язування систем лінійних рівнянь

Теоретичні питання

1. Що називається розв’язком системи двох (трьох) лінійних рівнянь з двома (трьома) невідомими?

2. Що значить розв'язати систему рівнянь?

3. Яка система рівнянь називається сумісною?

4. Яка система рівнянь називається несумісною?

5. Яка система рівнянь називається визначеною?

6. Яка система рівнянь називається невизначеною?

11. Сформулювати правило Крамера розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Система лінійних рівнянь, кількість рівнянь і невідомих якої однакова (m = n), має єдиний розв'язок, якщо її матриця є невиродженою ($|A| \neq 0$). Якщо система має єдиний розв'язок, то його можемо знайти за формулами Крамера

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, y = \frac{\Delta y}{\Delta}, z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Зразок розв'язування вправ

Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} -x & -3y & & = 2 \\ -x & +2y & +3z & = 0 \\ x & & -2z & = -1 \end{cases}$$

Розв'язання

За формулами Крамера:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1, \ \Delta_X = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 9 = 1, \ \Delta_Y = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отже, $x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{1}{-1} = -1$, $z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1$.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

а) $\begin{cases} 5x - 2y = 5, \\ 3x + 4y = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha = a, \\ x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha = b. \end{cases}$

2. Дослідити системи на сумісність, визначеність:

а) $\begin{cases} 15x - 2y = 11, \\ 13x + 4y = 21; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 15x - 12y = 10, \\ 30x - 24y = 31; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x - 12y = 10, \\ 10x - 24y = 20. \end{cases}$

3. Дослідити, при яких значеннях параметра λ система лінійних рівнянь буде визначеною, невизначеною, несумісною, і розв'язати ці системи при тих значеннях λ, при яких система визначена:

а) $\begin{cases} (2-\lambda) \cdot x + 6y = 1, \\ 6 \cdot x + (2-\lambda) \cdot y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \lambda \cdot x + (\lambda+1) \cdot y = 5, \\ 3 \cdot x + 4 \cdot y = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \lambda \cdot x + (\lambda+10) \cdot y = -1, \\ (\lambda-10) \cdot x + (\lambda+1) \cdot y = 2. \end{cases}$

9. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 1 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 1 = 0, \\ 5x_1 - 6x_2 + 11x_3 + 3 = 0. \end{cases}$

10. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 10, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 14; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 14, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$

Індивідуальні завдання з теми

« Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера»

Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

1. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 13x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 7, \\ 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 32, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 41. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 9. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ -4x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ 5x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = -1, \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 11x_3 = -3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 1 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 1 = 0, \\ 5x_1 - 6x_2 + 11x_3 + 3 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -9, \\ 8x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -13, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -3, \\ -3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = -1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 11x_3 = -3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 1 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 1 = 0, \\ 11x_1 - 6x_2 + 5x_3 + 3 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 7 = 0, \\ 3x_1 + 9x_2 + 27x_3 - 5 = 0, \\ 5x_1 + 25x_2 + 125x_3 - 1 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9, \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 14, \\ -2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 18. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 1 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 11 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 \qquad - 31 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 \qquad + 43 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 20 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \quad + 5x_3 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 \quad + 5x_3 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 + \quad x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ -x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 7. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \quad - x_3 = 4, \\ 5x_1 + 13x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 \quad - x_3 = 2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x_1 + \quad 7x_2 + 2x_3 = 15, \\ 2x_1 + \quad 5x_2 - 3x_3 = 15, \\ 5x_1 + 10x_2 - 11x_3 = 36. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 28, \\ -6x_1 + 7x_2 - 6x_3 = -1, \\ -9x_1 + 7x_2 - 9x_3 = \quad 5. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 14, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 21, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -16, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 41. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

29. $\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 7, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 18, \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 39. \end{cases}$

Рекомендована література

1. Андрійчук В.І. Лінійна алгебра: навч.посіб. Львів. Львів. Нац. ун-т імені Івана Франка. 2008. 226 с.
2. Безущак О.О. Навчальний посібник з лінійної алгебри для студентів механіко- математичного факультету. К. ВПЦ «Київський університет». 2019. 224 с.
3. Волошина Т.В. Вибрані питання лінійної алгебри та аналітичної геометрії: навч. посіб. для студ. спец. «інформатика». Луцьк. Волин. нац. ун-т імені Лесі Українки. 2010. 116 с.
4. Завало О.Т. та ін. Алгебра і теорія чисел. Практикум. Ч.І. Київ. Вища школа.1983.
5. Ілляшенко В.Я., Кремінь В.М. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Ч.1. Луцьк. РВВ «Вежа».2010. 95 с.
6. Романів О.М. Лінійна алгебра: навч.посіб. Львів. І.Е.Чижиков. 2014. 279 с.
7. Рудавський Ю.К. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Львів. Бескид Біт. 2002. 256 с.
8. Рудавський Ю.К. та ін. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Л. : Бескид Біт, 2002. 262 с.
9. Чарін В.С. Лінійна алгебра. Київ. Техніка. 2004. 416 с.