Волинський національний університет імені Лесі Українки
Факультет інформаційних технологій і математики
Кафедра математичного аналізу та статистики

Соліч Катерина Василівна,
Федуник-Яремчук Оксана Володимирівна,
Філозоф Леонтій Іванович

Неелементарні задачі в тригонометрії

Практикум для самостійної та аудиторної робіт з дисципліни «Практикум розв’язування задач елементарної математики»

Луцьк-2023

УДК 514.11(076)

С 60

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Волинського національного університету імені Лесі Українки

(протокол №__ від ___________ 2023 року)

Рецензенти:

Гембарська С.Б., кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри теорії функцій та методики навчання математики Волинського національного університету імені Лесі Українки.

Костючко С.М., кандидат тех. наук, доцент кафедри комп'ютерної інженерії та кібербезпеки Луцького національного технічного університету.

Соліч К.В., Федуник-Яремчук О.В., Філозоф Л.І.

С 60 Неелементарні задачі в тригонометрії: практикум для самостійної та аудиторної робіт з дисципліни «Практикум розв'язування задач елементарної математики» / Катерина Василівна Соліч, Оксана Володимирівна Фендуник-Яремчук, Леонтій Іванович Філозоф. Луцьк. 2023. 60 с.

Навчальний посібник містить навчальні завдання для аудиторної і домашньої самостійної робіт з тем «Комбіновані рівняння та нерівності», «Нетривіальні методи розв'язування систем рівнянь та нерівностей».

Видання призначене для студентів галузі знань 01 Освіта / Педагогіка, за спеціальністю 014 Середня освіта (Математика), освітньої програми Середня освіта. Математика та студентів галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика освітньо-професійної програми Математика.

УДК 514.11(076)

Зміст

Вступ

Курс «Практикум розв'язування задач елементарної математики» належить до фундаментального циклу дисциплін з професійної підготовки студентів.

Мета вивчення навчальної дисципліни: закріплення у студентів навичок ефективного розв'язування задач елементарної математики. Головна увага звертається на розв'язування задач, оволодіння та закріплення основних прийомів їх розв'язування, ознайомлення з окремими спеціальними способами та різними типами вправ. Протягом вивчення курсу систематизується та підвищується рівень знань студентів, вивчаються специфічні методи та прийоми розв'язування задач, покращуються навички використання уже отриманих впродовж навчання у вузі знань.

Курс «Практикум розв'язування задач елементарної математики» має велике значення для вивчення курсу «Методика навчання математики» студентами спеціальності «Середня освіта (Математика)» та успішного проходження ними педагогічної практики. Важливу роль також курс матиме і для роботи з обдарованими учнями загальноосвітніх начальних закладів, при підготовці їх до олімпіад та турнірів, як джерело нових методів розв'язування задач, які не розглядаються в курсі шкільної математики.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Практикум розв'язування задач елементарної математики» є формування у студентів вміння пошуку найоптимальніших прийомів розв'язування задач елементарної математики; поглиблення рівня знань з традиційно складних розділів; практична робота з розв'язання ряду нестандартних вправ; вироблення у студентів уміння практичного застосування знань.

Самостійне навчання передбачає активне засвоєння знань і свідоме користування ними: осмислене читання підручника й додаткової літератури, розкриття змісту спеціальних термінів і понять, точне їх визначення, доведення тих чи інших положень при розв'язуванні задач та під час відповідей на поставлені запитання.

Даний навчальний посібник необхідний для поглибленого самостійного опрацювання студентом курсу і самоперевірки своїх знань з тем «Тригонометричні рівняння та нерівності», «Комбіновані рівняння та нерівності», «Використання властивостей функцій для розв’язування задач». У даній методичній розробці розглядаються рівняння, системи рівнянь, нерівності, які або не можуть відноситись до класичних типів (показникові, логарифмічні, ірраціональні, тригонометричні) – це так звані комбіновані рівняння і нерівності (їм присвячений §1), або розв’язуються не елементарними прийомами, а з використанням різних властивостей функцій – монотонність, випуклість, обмеженість (цьому присвячений §2), або містять надмірне число змінних (нестандартні рівняння - §3).

§ 1. Комбіновані рівняння, системи рівнянь, нерівності

Приклад 1. Розв’яжемо рівняння

$$\frac{1}{2}+16^{\sin x-}=\frac{6}{16^{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}.$$

Розв’язання. Так як

$$16^{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=16^{\frac{17\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}}=4^{1-\sin x}=\frac{4}{4^{\sin x}}.$$

то задане рівняння можна переписати у вигляді

$$\frac{1}{2}+16^{\sin x}=\frac{3\cdot 4^{\sin x}}{2}.$$

На першому етапі розглянемо це рівняння, як показникове. Введемо нову змінну u=$4^{\sin x}$. Тоді рівняння прийме вигляд

$$\frac{1}{2}+u^2=\frac{3u}{2},$$

і далі $2u^2-3u+1=0$, звідки $u_1=1$, $u_2=\frac{1}{2}$.

Отже, або $4^{\sin x}=1$, звідки $\sin x=0$, або $4^{\sin x}=\frac{1}{2}$, звідки $\sin x=-\frac{1}{2}$.

Тепер задача звелася до розв’язання сукупності двох тригонометричних рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=-\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Із першого рівняння знайдемо $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, і з другого відповідно отримаємо $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Відповідь: $x=\pi n$, $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$\lg \cos x + \log_{0,1} \sin 2x = \lg 7.$

Розв’язання. Спочатку розглянемо це рівняння, як логарифмічне. Так як $\log_{0,1} \sin 2x = \log_{(0,1)^{-1}} (\sin 2x)^{-1} = -\lg \sin 2x$, то задане рівняння можна переписати у вигляді

$\lg \cos x - \lg \sin 2x = \lg 7,$

і далі

$\lg \cos x = \lg (7 \sin 2x),$

$\cos x = 7 \sin 2x.$

Оскільки, згідно ОДЗ даного рівняння $\cos x \neq 0$, то отримаємо:

$\sin x = \frac{1}{14},$

звідки $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{14} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Перевірка. Її в даному випадку можна зробити за допомогою області визначення початкового рівняння:

$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin 2x > 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} \cos x > 0, \\ 2 \sin x \cos x > 0, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x > 0. \end{cases}$

Це означає, що корені рівняння повинні належати першій чверті числового кола.

Таким чином, з двох точок, які на колі є образами розв’язків рівняння

$\sin x = \frac{1}{14}$, потрібно вибрати лише ту, яка знаходиться в першій чверті.

Відповідь: $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{14} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\log_{\operatorname{tg} x} \frac{1 - \sin 2x}{1 + \cos 2x} + \log_{\operatorname{tg} x - 1} \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = 3 - \log_{\operatorname{tg} x} 2.$$

Розв'язання. Виконаємо деякі перетворення:

$$\log_{\operatorname{tg} x} \frac{(\sin x - \cos x)^2}{2\cos^2 x} + \log_{\operatorname{tg} x - 1} \frac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x} + \log_{\operatorname{tg} x} 2 = 3,$$

$$\log_{\operatorname{tg} x} \left(\frac{1}{2} (\operatorname{tg} x - 1)^2 \cdot 2\right) + \log_{\operatorname{tg} x - 1} \operatorname{tg} x = 3,$$

$$\log_{\operatorname{tg} x} \left(\frac{1}{2} (\operatorname{tg} x - 1)^2 \cdot 2\right) + \log_{\operatorname{tg} x - 1} \operatorname{tg} x = 3,$$

$$\log_{\operatorname{tg} x} (\operatorname{tg} x - 1)^2 + \log_{\operatorname{tg} x - 1} \operatorname{tg} x = 3,$$

$$2\log_{\operatorname{tg} x} (\operatorname{tg} x - 1) + \frac{1}{\log_{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x - 1)} = 3.$$

Поклавши $u = \log_{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x - 1)$, отримаємо:

$$2u + \frac{1}{u} = 3,$$

$$2u^2 - 3u + 1 = 0,$$

$$u_1 = 1, \ u_2 = \frac{1}{2}.$$

Це означає, що або $\log_{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x - 1) = 1$, або $\log_{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x - 1) = \frac{1}{2}$.

Звідси отримаємо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x - 1 = \operatorname{tg} x; \\ \operatorname{tg} x - 1 = \sqrt{\operatorname{tg} x}, \end{array}\right.$$

перше з яких не має розв'язків. У другому покладемо $t = \sqrt{\operatorname{tg} x}$. Отримаємо $t^2 - 1 = t$, звідки $t_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $t_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Зі зробленої заміни $t \geq 0$. Цій нерівності задовольняє лише перший із отриманих коренів.

Отже, $\sqrt{\operatorname{tg} x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, звідки $\sqrt{\operatorname{tg} x} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$x = \operatorname{arctg}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Перевірка. Як і в попередньому прикладі, її можна виконати за допомогою області визначення початкового рівняння:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x > 0, \\ \operatorname{tg} x - 1 > 0, \\ \operatorname{tg} x - 1 \neq 1, \\ \frac{1-\sin 2x}{1+\cos 2x} > 0, \\ \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} > 0. \end{cases}$$

У нас $\operatorname{tg} x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Зрозуміло, що перші три умови системи виконуються. Також зрозуміло, що при цих значеннях x виконуються нерівності $1 - \sin 2x > 0,\ 1 + \cos 2x > 0,\ \ 1 - \cos 2x > 0$. Залишилось перевірити правильність нерівності $\sin 2x > 0$.

Маємо $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$. Звідси зрозуміло, що з $\operatorname{tg} x > 0$ отримаємо $\sin 2x > 0$.

Отже, усі значення x, при яких $\operatorname{tg} x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, належать області визначення заданого рівняння. Оскільки, при його розв’язанні, окрім множини області визначення, не було перетворень, які могли привести до появи сторонніх коренів, то $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, – розв'язок даного рівняння.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} = (\operatorname{ctg} x)^{\cos x}$.

Розв’язання. Спочатку розглянемо це рівняння, як показниково-степеневе. Маємо:

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} = (\operatorname{tg} x)^{-\cos x}. \qquad (1)$$

Тепер потрібно розглянути це рівняння у кожному із наступних випадків:

1) Якщо $\operatorname{tg} x < 0$, але $\operatorname{tg} x \neq -1$, то із рівняння (1), прирівнявши показники, отримаємо $\sin x = -\cos x$, звідки $\operatorname{tg} x = -1$. Це рівняння несумісне з умовою $\operatorname{tg} x \neq -1$.

2) Якщо $\operatorname{tg} x = -1$, то $|\sin x| = |\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Це означає, що у рівнянні (1) від’ємне число підноситься до ірраціонального степеня, що не має сенсу.

3) Якщо $\operatorname{tg} x = 0$, тобто $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$,тоді і $\sin x = 0$. Це означає, що ліва частина рівняння (1) набуває вигляду 0^0, що не має сенсу.

4) Якщо $\operatorname{tg} x > 0$, але $\operatorname{tg} x \neq 1$, то з рівняння (1), прирівнявши показники , отримаємо $\sin x = -\cos x$, тобто $\operatorname{tg} x = -1$, що суперечить умові $\operatorname{tg} x > 0$.

5) Нарешті, якщо $\operatorname{tg} x = 1$, то рівняння (1) набуде вигляду:

$1^{\sin x} = 1^{-\cos x}$, тобто $1 = 1$.

Отже, рівняння (1) зводиться до рівняння $\operatorname{tg} x = 1$, звідки отримаємо

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 5. Розв’язати рівняння

$$\left|10\sin\frac{x}{2}-6+\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|^{\sqrt{11x-x^2-10}}=1. \qquad (2)$$

Розв'язання. Нехай $t=\sin\frac{x}{2}$ і $u=\left|10t-6+\frac{1}{t}\right|$. Тоді потрібно розглянути рівняння (2) у кожному із наступних випадків:

1) $u=o$;

2) $\begin{cases} u>0, \\ u\neq 1; \end{cases}$

3) $u=1$.

Нехай $u=0$ тобто $10t-6+\frac{1}{t}=0$ або, що те ж саме, $10t^2-6t+1=0$. Це рівняння не має дійсних коренів, бо його $D<0$.

Нехай $u=1$, тобто $10t-6+\frac{1}{t}=1$ або $10t-6+\frac{1}{t}=-1$. Перше з цих рівнянь перетвориться у рівняння $10t^2-7t+1=0$, а друге – в $10t^2-5t+1=0$. Перше рівняння має відповідно корені $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=\frac{1}{5}$, друге не має коренів в полі дійсних чисел.

Ми прийшли до сукупності тригонометричних рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}; \\ \sin\frac{x}{2}=\frac{1}{5}. \end{array}\right.$$

З неї знайдемо $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+2\pi k$;$x=(-1)^n 2\arcsin\frac{1}{5}+2\pi n$, $k,n\in\mathbb{Z}$. При цих значеннях рівняння (2) матиме вигляд

$$1^{\sqrt{11x-x^2-10}}=1.$$

Це правильне рівняння за умови $11x - x^2 - 10 \geq 0$, тобто $1 \leq x \leq 10$. Це означає, із знайдених розв'язків сукупності тригонометричних рівнянь потрібно вибрати ті, які належать відрізку $[1; 10]$.

Розглянемо спочатку випадок $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Якщо $k = 0, x = \frac{\pi}{3} \in [1; 10]$.

Якщо $k = 1$, то $x = \frac{5\pi}{3} \in [1; 10]$.

Якщо $k = 2$, то $x = \frac{13\pi}{3} \notin [1; 10]$.

Аналогічно не належить відрізку $[1; 10]$ ті значення x, які отримуються при інших значеннях k.

Розглянемо випадок $x = (-1)^n 2 \arcsin \frac{1}{5} + 2\pi n$. Для полегшення наступних роздумів розв'яжемо $\sin(2 \arcsin \frac{1}{5})$. Маємо

$$\sin(2 \arcsin \frac{1}{5}) = 2\sin(\arcsin \frac{1}{5}) \cos(\arcsin \frac{1}{5}) = \frac{2}{5} \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin \frac{1}{5})} =$$

$$= \frac{2}{5} \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{4\sqrt{6}}{25}.$$

Але $\frac{4\sqrt{6}}{25} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, тому $\arcsin \frac{4\sqrt{6}}{25} < \frac{\pi}{4} < 1$. Отже, що $2 \arcsin \frac{1}{5} < 1$.

Виберемо корені з випадку $x = (-1)^n 2 \arcsin \frac{1}{5} + 2\pi n$.

Якщо $n = 0$, то $x = 2 \arcsin \frac{1}{5} \notin [1; 10]$.

Якщо $n = 1$, то $x = (2\pi - 2 \arcsin \frac{1}{5}) \in [1; 10]$.

Якщо $n = 2$, то $x = (2 \arcsin \frac{1}{5} + 4\pi) \notin [1; 10]$.

При інших значеннях параметра n, отримані значення x не належать відрізку $[1; 10]$.

Отже, у випадку, коли $u = 1$, ми отримаємо наступні корені:

$x_1 = \frac{\pi}{3},\ x_2 = \frac{5\pi}{3}, x_3 = 2\pi - 2\arcsin\frac{1}{5}$.

Залишилось розглянути випадок, коли $u > 1$, але $u \neq 1$. У даному випадку рівняння (2) рівносильне рівнянню $\sqrt{11x - x^2 - 10} = 0$, звідки знайдемо $x_4 = 1,\ x_5 = 10$ – ще два корені рівняння (2).

Таким чином, коренями рівняння (2) є наступні значення x:

$x_1 = \frac{\pi}{3}; x_2 = \frac{5\pi}{3}; x_3 = 2\pi - 2\ \arcsin\frac{1}{5}; x_4 = 1; x_5 = 10.$

Приклад 6. Розв’язати нерівність

$$4\log_{16}\cos 2x + 2\log_4\sin x + \log_2\cos x + 3 < 0. \qquad (3)$$

Розв’язання. Виконуючи перетворення, отримуємо послідовно:

$4 \cdot \frac{1}{4}\log_2\cos 2x + 2 \cdot \frac{1}{2}\log_2\sin x + \log_2\cos x < -3,$

$\log_2\cos 2x + \log_2\sin x + \log_2\cos x < -3,$

$\log_2(\cos 2x\ \ \sin x\cos x) < \log_2\frac{1}{8}.$

Отже, нерівність (3), що розглядається на першому етапі розв’язання, як логарифмічна, рівносильна такій системі нерівність:

$$\begin{cases} \cos 2x > 0, \\ \sin x > 0, \\ \cos x > 0, \\ \cos 2x\sin x\cos x < \frac{1}{8}. \end{cases}$$

З другої і третьої нерівності цієї системи отримаємо:

$2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$

З першої нерівності відповідно маємо $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$ звідки

$-\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k.$

Остання нерівність системи набуде вигляду $\sin 4x < \frac{1}{2},$ звідки знайдемо

$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < 4x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, тобто $-\frac{7\pi}{24} + \frac{\pi k}{2} < x < \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}.$

Далі розв'яжемо систему

$$\begin{cases} 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ -\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ -\frac{7\pi}{24} + \frac{\pi k}{2} < x < \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}. \end{cases}$$

Скориставшись одиничним колом, отримаємо

$$\left[\begin{array}{l} 2\pi k < x < \frac{\pi}{24} + 2\pi k, \\ \frac{5\pi}{24} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{array} \right.$$

- розв'язок нерівності (3).

Приклад 7. Розв'язати нерівність

$\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{\log_{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} x - 1}} > 1.$

Розв 'язання. Розглянемо цю нерівність як показникову виду

$\left(\frac{3}{7}\right)^{u} > \left(\frac{3}{7}\right)^{0}.$

Так як основа $0 < \frac{3}{7} < 1$, то отримаємо $u < 0$, тобто

$\sqrt{\log_{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} x} < 1.$

Отримана ірраціональна нерівність рівносильна системі логарифмічних нерівностей

$\begin{cases} \log_{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} x \geq 0, \\ \log_{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} x < 1, \end{cases}$ з якої отримаємо $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \geq 1, \\ \operatorname{ctg} x < \sqrt{3}. \end{cases}$

Отже, $\pi k + \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{4} + \pi k$ – розв'язок даної нерівності.

Приклад 8. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \sin(1 - y + x^2) \cos 2x = \cos(x^2 - y + 1) \sin x \cos x\,, \\ \log_{2^x} \frac{2^{y+2x}}{2^{1+x^2}} = 2 - x. \end{cases} \qquad (4)$$

Розв'язання. Перепишемо перше рівняння системи (4) в наступному вигляді:

$$\sin(x^2 - y + 1) \cos 2x - \cos(x^2 - y + 1) \sin 2x = 0.$$

В лівій частині цього рівняння ми отримали синус різниці аргументів $x^2 - y + 1$ і $2x$, тобто $\sin(x^2 - y + 1 - 2x) = 0$.

Із другого рівняння системи (4) отримаємо рівняння

$$2^{y+2x-1-x^2} = 2^{x(2-x)},$$

Звідки $y + 2x - 1 - x^2 = 2x - x^2$, тобто $y = 1$.

Отже, систему (4) можна звести до більш простої системи

$$\begin{cases} \sin(1 - y + x^2 - 2x) = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, отримаємо $\sin(x^2 - 2x) = 0$, тобто $x^2 - 2x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, звідки $x = 1 \pm \sqrt{1 + \pi k}$, де $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Із цих значень потрібно відкинути значення $x = 0$, при якому основа логарифма в другому рівнянні системи перетворюється в 1. Тоді залишені значення x, що залишаться, можна записати так: $x = 2$, при $k = 0$, та

$x = 1 \pm \sqrt{1 + \pi k}$, де $k \in \mathbb{N}$.

Отже, в результаті отримали пари $(2; 1)$, $\left(1 \pm \sqrt{1 + \pi k}; 1\right)$, $k \in \mathbb{N}$.

Приклад 9. Розв'язати мішану систему

$$\begin{cases} \left(\sqrt{3} + 1\right)(1 + \cos xy \sin xy) = \left(\sqrt{3} + 1\right) \sin^2 xy + \cos 2xy, \\ x^2 y^2 - y^2 + 1 = 0, \\ \frac{1}{x^2} + y^2 \le 6. \end{cases} \tag{5}$$

Розв'язання. Будемо працювати спочатку з першим рівнянням системи, яке після перетворення зводиться до однорідного рівняння:

$\left(\sqrt{3} + 1\right)(\sin^2 xy + \cos^2 xy + \cos xy \sin xy) = \left(\sqrt{3} + 1\right) \sin^2 xy + \cos^2 xy - \sin^2 xy,$

$\sin^2 xy + \left(\sqrt{3} + 1\right) \cos xy \sin xy + \sqrt{3} \cos^2 xy = 0.$

Поділимо останнє рівняння на $\cos^2 xy \neq 0$, тоді

$\mathrm{tg}^2\, xy + \left(\sqrt{3} + 1\right)\mathrm{tg} xy + \sqrt{3} = 0,$

Звідки $\mathrm{tg} xy = -1$ та $\mathrm{tg} xy = -\sqrt{3}$, або $xy = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ та $xy = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Підставивши ці значення xy в друге рівняння системи (5), отримаємо:

$$y^2 = (-\frac{\pi}{4} + \pi k)^2 + 1 \text{ і } y^2 = (-\frac{\pi}{3} + \pi n)^2 + 1\,. \tag{6}$$

Але із третьої нерівності системи (5) випливає, що $y^2 < 6$. Підставляючи в рівність (6) значення параметрів $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, n =$

$0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$, переконуємося, що умова $y^2 < 6$ виконується лише при $k = 0$ та $n = 0$. Із рівнянь (6) знаходимо (при $k = 0$, $n = 0$):

$$y^2 = \frac{\pi^2}{16} + 1;\ y^2 = \frac{\pi^2}{9} + 1.$$

І відповідно: $xy = -\frac{\pi}{4};\ xy = -\frac{\pi}{3}$.

В результаті система (5) зведеться до більш простої сукупності двох систем: $\begin{cases} y^2 = \frac{\pi^2+16}{16}, \\ xy = -\frac{\pi}{4}, \\ \frac{1}{x^2} + y^2 \le 6; \end{cases}$ і $\begin{cases} y^2 = \frac{\pi^2+9}{9}, \\ xy = -\frac{\pi}{3}, \\ \frac{1}{x^2} + y^2 \le 6. \end{cases}$

Знайдемо розв'язок для кожної із систем з перших двох рівнянь і перевіримо результат за умовою $\frac{1}{x^2} + y^2 \le 6$. Отже, отримаємо наступні розв'язки системи (5):

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}, \\ y_1 = \frac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}; \end{cases} \begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}, \\ y_2 = -\frac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}; \end{cases} \begin{cases} x_3 = \frac{-\pi}{\sqrt{\pi^2+9}}, \\ y_3 = \frac{\sqrt{\pi^2+9}}{3}; \end{cases} \begin{cases} x_4 = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+9}}, \\ y_4 = -\frac{\sqrt{\pi^2+9}}{3}. \end{cases}$$

Приклад 10. Розв'язати рівняння залежно від значення параметра a:

$$\lg^2 \cos x + 2\lg \cos x - (a^2 + a - 3) = 0.$$

Розв'язання. Покладаючи $u = \lg \cos x$, зведемо рівняння з умови до квадратного рівняння

$$u^2 + 2u - (a^2 + a - 3) = 0,$$

звідки знаходимо $u_{1,2} = -1 \pm \sqrt{a^2 - a - 2}$. Якщо $D = a^2 - a - 2 < 0$, тобто $-2 < a < 1$, то розв'язків немає. Якщо $D = 0$, тобто $a = -2$ або

$a = 1$, то $u = -1$, тобто $\lg \cos x = -1$, а $\cos x = \frac{1}{10}$, звідки $x = \pm \arccos \frac{1}{10} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{N}$.

Залишилось розглянути випадок, коли $D > 0$, тобто $a < -2\ ;\ a > 1$. В цьому випадку дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь :

$$\left[\begin{array}{l}\lg \cos x = -1 - \sqrt{a^2 - a - 2}\ ;\\ \lg \cos x = -1 + \sqrt{a^2 - a - 2}\ .\end{array}\right.$$

Із першого рівняння знаходимо $\cos x = 10^{-1-\sqrt{a^2-a-2}}$і, оскільки $0 < 10^{-1-\sqrt{a^2-a-2}}$<1, знаходимо, що

$$x = \pm \arccos\left(10^{-1-\sqrt{a^2-a-2}}\right) + 2\pi n.$$

Друге рівняння сукупності відрізняється від першого тим, що перша його частина може бути додатною при деяких a .Оскільки $\lg \cos x \le 0$, то при таких значеннях a рівняння не буде мати розв'язків. Знайдемо ці значення a. Для цього потрібно розв'язати нерівність $-1 + \sqrt{a^2 - a - 2} > 0$. Маємо: $\begin{cases}\sqrt{a^2 + a - 2 > 1,}\\ a < -2; a > 1,\end{cases}$ або $\begin{cases}a^2 + a - 3 > 0,\\ a < -2; a > 1.\end{cases}$

Звідки $a < \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ або $a > \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

При цих значеннях a рівняння $\lg \cos x = -1 + \sqrt{a^2 + a - 2}$ не має коренів. Якщо ж $\frac{-1-\sqrt{13}}{2} \le a < -2$ або $1 < a \le \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$, то рівняння має розв'язок:

$$x = \pm \arccos\left(10^{-1-\sqrt{a^2+a-2}}\right) + 2\pi n.$$

Отже, отримаємо наступну відповідь:

1) якщо $\frac{-1-\sqrt{13}}{2} \le a \le -2$ або $1 \le a \le \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, то

$x = \pm \arccos\left(10^{-1\pm\sqrt{a^2+a-2}}\right) + 2\pi k,$

2) якщо $a < \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ або $a > \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, то

$x = \pm \arccos\left(10^{-1-\sqrt{a^2+a-2}}\right) + 2\pi k;$

3) якщо $-2 < a < 1,$ то рівняння не має розв'язків.

Приклад 11. При яких параметрах a має розв'язок система рівнянь

$$\begin{cases} \left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}} - 5\right| - \left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}\right| - 7 + \left|24\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}} + 13\right| \\ \qquad\qquad\qquad = 11 - \sqrt{\sin\frac{\pi(x-2y-1)}{3}}, \\ 2(x^2 + (y-a)^2) - 1 = 2\sqrt{x^2 + (y-a)^2 - \frac{3}{4}}? \end{cases}$$

Розв'язання. Розглянемо перше рівняння системи. Покладемо

$t = \cos\frac{\pi y}{2}$ та $u = \sqrt{\sin\frac{\pi(x-2y-1)}{3}}.$

Тоді це рівняння матиме вигляд:

$$|12t - 5| - |12t - 7| + |24t + 13| = 11 - u, \qquad (7)$$

де $\begin{cases} 0 \le t \le 1, \\ 0 \le u \le 1. \end{cases}$

Очевидно, що $|24t + 13| = 24t + 13$. Розіб'ємо числову пряму на три проміжки точками $\frac{5}{12}, \frac{7}{12}$ (при першому значенні $12t - 5 = 0$, а при другому $12t - 7 = 0$) і розглянемо рівняння (7) в кожному із наступних трьох випадків: $t \le \frac{5}{12}$; $\frac{5}{12} < t < \frac{7}{12}$; $t \ge \frac{7}{12}$.

Якщо $t \leq \frac{5}{12}$, то рівняння (7) матиме вигляд :

$(5 - 12t) + (12t - 7) + (24t + 13) = 11 - u,$

і далі $24t + u = 0.$

Оскільки $t \geq 0$ і $u \geq 0$, рівність $24t + u = 0$ виконується лише у випадку , коли $t = 0$ і $u = 0$ одночасно , при чому $t = 0$ задовольняє умові $t \leq \frac{5}{12}$.

Якщо $\frac{5}{12} < t < \frac{7}{12}$, то рівняння (7) матиме вигляд:

$(12t - 5) + (12t - 7) + (24t + 13) = 11 - u,$

І далі

$48t + u = 10.$

Але $\frac{5}{12} < t < \frac{7}{12}$, $0 \leq u \leq 1$. Тоді $20 < 48t + u < 29$, тобто $48t + u$ не може дорівнювати 10. Отже, рівняння (7) не має розв'язків при $\frac{5}{12} < t < \frac{7}{12}$.

Якщо ж, нарешті, $t \geq \frac{7}{12}$, то рівняння (7) матиме вигляд:

$(12t - 5) - (12t - 7) + (24t + 13) = 11 - u,$

і далі $24t + u = -4.$

Це рівняння також не має розв'язків при $t \geq \frac{7}{12}$ і при $u \geq 0$.

Отже, рівняння (7) має тільки один розв'язок:

$$\begin{cases} t = 0, \\ u = 0. \end{cases}$$

А це означає, що перше рівняння заданої системи рівносильне системі рівнянь:

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi y}{2} = 0, \\ \sin\frac{\pi(x-2y-1)}{3} = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему , послідовно знаходимо:

$$\begin{cases} \frac{\pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ \frac{\pi(x-2y-1)}{3} = \pi k, \end{cases} \begin{cases} y = 1 + 2n, \\ x - 2y - 1 = 3k, \end{cases} \begin{cases} x = 3 + 4n + 3k, \\ y = 1 + 2n. \end{cases} \qquad (8)$$

Тепер звернемося до другого рівняння заданої системи. Поклавши $z = x^2 + (y-a)^2$, перепишемо це рівняння у вигляді

$$2z - 1 = 2\sqrt{z - \frac{3}{4}}.$$

Маємо $(2z-1)^2 = 4(z - \frac{3}{4})$, звідки $z = 1$, тобто

$$x^2 + (y-a)^2 = 1. \qquad (9)$$

Мова іде про пошук цілочисельних розв'язків рівняння (9), заданих умовами (8). Із рівняння (9) виходить, що $x^2 \leq 1$, тобто x може приймати тільки три значення: $0,\ 1,\ -1$.

Нехай $x = 0$,тобто $3 + 4n + 3k = 0$. Ця рівність можлива, тільки якщо $n \vdots 3$, тобто $n = 3m$. Тоді рівняння (9) матиме вигляд

$$0^2 + (1 + 6m - a)^2 = 1.$$

Звідки $1 + 6m - a = \pm 1$, тобто $a_1 = 6m$, $a_2 = 6m + 2$.

Нехай $x = 1,$ тобто $3 + 4n + 3k = 1$ або $4n + 3k + 2 = 0$. Переписавши останню рівність у вигляді $(3n + 3k + 3) + (n - 1) = 0$, очевидно, що вона можлива при цілочисельних n і k лише у випадку , коли $(n-1) \vdots 3$, тобто $n = 3m + 1$.Тоді рівняння (9) матиме вигляд

$$1 + (6m + 3 - a)^2 = 1.$$

Звідки $a = 6m + 3$.

Нехай тепер $x = -1$,тобто $3 + 4n + 3k = -1$ або $4n + 3k + 4 = 0$. Переписавши останню рівність у вигляді

$$(3n + 3k + 3) + (n + 1) = 0,$$

помічаємо, що вона можлива при цілочисельних n і k лише у випадку , коли $(n+1) \vdots 3$, тобто $n = 3m - 1$.Тоді рівняння (9) матиме вигляд

$$1 + (6m - 1 - a)^2 = 1.$$

Звідки $a = 6m - 1$.

Отже, задана в умові система має розв'язок при наступних значеннях параметра a: $a = 6m - 1$, $a = 6m$, $a = 6m + 2$, $a = 6m + 3$, де $m \in \mathbb{Z}$.

Приклад 12. При яких значення параметра a має розв'язок система рівнянь

$$\begin{cases} 2\cos x + a\sin y = 1, \\ \log_z \sin y = \log_z a \cdot \log_a(2 - 3\cos x), \\ \log_a z + \log_a\left(\frac{1}{2a} - 1\right) = 0? \end{cases} \qquad (10)$$

Розв'язання. Почнемо розв'язання системи (10) з другого рівняння системи. Маємо послідовно:

$$\frac{\log_a \sin y}{\log_a z} = \frac{\log_a(2 - 3\cos x)}{\log_a z},$$

$$\log_a \sin y = \log_a(2 - 3\cos x),$$

$\sin y = 2 - 3\cos x.$

Розглянемо це рівняння разом з першим рівнянням системи (10), отримаємо $\sin y = \frac{1}{2-3a}$, $\cos x = \frac{1-2a}{2-3a}$. Із останнього рівняння системи (10) знаходимо $z = \frac{2a}{1-2a}$.

З'ясуємо тепер , при яких a можна знайти x, y, z, визначені вказаними рівняннями. Так як $\sin y = \frac{1}{2-3a}$, а з системи (10) $\sin y > 0$, повинні виконуватися нерівності

$\frac{1}{2-3a} > 0$ і $\frac{1}{2-3a} \leq 1.$

Так як $\frac{1-2a}{2-3a} = \cos x$, а з системи (10) $\cos x < \frac{2}{3}$, повинні виконуватися нерівності

$\frac{1-2a}{2-3a} < \frac{2}{3}$ та $\frac{1-2a}{2-3a} \geq -1.$

Нарешті , з системи (10) повинні виконуватися умови:

$$\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ \frac{1}{2a} - 1 > 0, \end{cases}$$

тобто $0 < a < \frac{1}{2}$. Крім того, повинна виконуватися умова $z \neq 1$, тобто $\frac{2a}{1-2a} \neq 1$, звідки $a \neq \frac{1}{4}$.

Нарешті, система (10) має розв'язок при значеннях параметра a, які задовольняють наступну систему нерівностей:

$$\begin{cases} 0 < a < \frac{1}{2}, \\ a \neq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2-3a} > 0, \\ \frac{1}{2-3a} \leq 1, \\ \frac{1-2a}{2-3a} < \frac{2}{3}, \\ \frac{1-2a}{2-3a} \geq -1. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему , знаходимо

$$\begin{cases} 0 < a < \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4} < a \leq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

При цих значеннях параметра a система (10) буде мати розв'язки.

Вправи для самостійного розв'язання до §1

1.1. $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30.$

1.2. $4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 80 = 0.$

1.3. $2^{\cos 2x} = 3 \cdot 2^{\cos^2 x} - 4.$

1.4. $5^{\operatorname{ctg}^2 x}\left(26 - 5^{\frac{1}{\sin^2 x}}\right) = 0{,}5.$

1.5. $3^{\cos 2x}\left(4 \cdot 3^{\sin^2 x} - 9\right) = 1.$

1.6. $(0{,}5)^{\cos 2x} - 4^{-\sin^2 x} = 0{,}5.$

1.7. $\sin(3^{x-1} + 3^{x-2})\cos(3^{x-1} + 3^{x-2}) = \frac{1}{4}.$

1.8. $\frac{\sin 2^x}{\sin 2^{x-2} \cos\ 2^{x-2}} = 2\sqrt{3}.$

1.9. $\operatorname{ctg} 2^x = \operatorname{tg} 2^x + 2\operatorname{tg} 2^{x+1}$.

1.10. $2^{1+2\cos 5x} + 16^{\sin^2\frac{5x}{2}} = 9$.

1.11. $3^{\sin^2 x + 2\cos^2 x} + 3^{1-\sin 2x + 2\sin^2 x} = 28$.

1.12. $1 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 4^{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2}\cos x}}$.

1.13. $4 \cdot 2^{4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} - 15{,}5 \cdot 4^{\cos x + \sin x} = \frac{1}{3}\log_{\sqrt[3]{4}} 16$.

1.14. $\log_{\sin x}\cos x + \log_{\cos x}\sin x = 2$.

1.15. $\sin(\pi \lg x) + \cos(\pi \lg x) = 1$.

1.16. $\lg^2(\sin x + 4) + 2\lg(\sin x + 4) - \frac{5}{4} = 0$.

1.17. $\log_{\sin x}\left(\sin x - \frac{1}{4}\cos x\right) = 3$.

1.18. $\log_{8\cos^2 x}\sin x = \frac{1}{2}$.

1.19. $\log_9 \sin 2x = \log_3\sqrt{\frac{\sin x}{5}}$.

1.20. $\log_{\sqrt{2}\sin x}(1 + \cos x) = 2$.

1.21. $\log_{\sin 3x}(\cos x - \cos 2x) = 1$.

1.22. $3\log_2^2 \sin x + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$.

1.23. $\log_2 \cos 2x - \log_2 \sin x - \log_2 \cos x = 1$.

1.24. $\lg\sin 2x - \lg\sin x = \lg\cos 2x - \lg\cos x + 2\lg 2$.

1.25. $\lg\sin\frac{x}{2} = \lg(\cos x - \sin x) + \lg(\cos x + \sin x)$.

1.26. $\log_2 \sin x - \log_2 \cos x - \log_2(1 + \operatorname{tg} x) = 1 + \log_2(1 - \operatorname{tg} x)$.

1.27. $\log_5 \operatorname{tg} x = \log_5 4 \cdot \log_4(3\sin x)$.

1.28. $\frac{2}{\lg(0{,}5+\cos^2 x)} = \log_{\sin 2x} 10$.

1.29. $\log_{\sin x} 2 + \log_{\cos x} 2 + \log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\cos x} 2 = 0$.

1.30. $2\log_5|\operatorname{ctg} x| = \log_{0{,}2} \frac{\sin x}{5\sin x - 4\cos x}$.

1.31. $\log_2|\operatorname{tg} x| + \log_4 \frac{\cos x}{\sin x + 2\cos x} = 0$, якщо $\frac{9}{4} \le x \le 3$.

1.32. $1+\log_6(4\cos^2 x - \cos x - 1) = \log_6(4 - 7\cos x)$.

1.33. $\log_{\operatorname{ctg} x}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \cos 2x - \sin 2x + \sin x - \cos x\right) = 2$.

1.34. $\log_{\operatorname{tg} x}\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin 2x + \cos 2x + \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3}\sin x\right) = 2$.

1.35. $\log_{\cos x}\left(\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}} + \cos x - \sin^2 x - \sqrt{2}\sin x\right) = 2$.

1.36. $\log_{\sin x}(\sin 2x + 2\cos x + \sin x - \cos^2 x) = 2$.

1.37. $\log_{\cos x}\left(\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right) +$

$2\log_{\frac{1}{2} - \cos x}\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 3 - \log_{\cos x} 2$.

1.38. $\log_2\left(\cos 2x + \cos\frac{x}{2}\right) + \log_{0{,}5}\left(\sin x + \cos\frac{x}{2}\right) = 0$.

1.39. $\log_5\left(\cos\frac{x}{2} + 3\operatorname{tg} x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \log_{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{x}{2} + \operatorname{tg} 2x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = 0$.

1.40. $\log_{\frac{1}{3}}\left(\sin\frac{x}{2} + \cos 2x\right) + \log_3\left(\sin\frac{x}{2} - \sin x\right) = 0$.

1.41. $\log_{\frac{1}{6}}\left(\sin\frac{x}{2} - 3\operatorname{tg} x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \log_6\left(\sin\frac{x}{2} - \operatorname{tg} 2x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = 0$.

1.42. $|\log_{\frac{1}{3}}(1 + \sin 2x)| + |\log_{\frac{1}{3}}(1 - \sin 2x)| = 1$.

1.43. $|\log_3(1+\cos 2x)| + |\log_3(1-\cos 2x)| = 1.$

1.44. $3^{\frac{1}{2}+\log_3 \cos x} + 6^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}+\log_9 \sin x}.$

1.45. $5^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}+\log_5 \sin x} = 15^{\frac{1}{2}+\log_{15} \cos x}.$

1.46. $2^{\frac{5}{2}+2\cos 2x} - \left(2\sqrt{2}-1\right) \cdot 4^{\cos^2 x} + (2\sin^2 x)^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}\sin x}(\sqrt{2}-1)} = 0.$

1.47. $4^{\operatorname{tg}^2 x} + \log_{\sin x} \frac{1-\cos 2x}{2} = 4^{\frac{1}{1+\cos 2x}} \cdot \log_{2\sqrt[3]{2}} 4.$

1.48. $\log_{\sqrt{3}}\left(27^{\cos^2 x} - 3^{\sin^2 x}\right) + 2\cos^2 x = \frac{2}{\log_{12} 3} + \log_9(1 + 3^{-0,5+\cos 2x})^4.$

1.49. $\sqrt{\operatorname{tg} x + \sin x} + \sqrt{\operatorname{tg} x - \sin x} = 2\sqrt{\operatorname{tg} x}\cos x.$

1.50. $\sqrt{\frac{17}{\cos^2 x} + 8\operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos x} - 16} = 2\operatorname{tg} x\,(1 + 4\sin x).$

1.51. $(\sin x)^{-\sin x} - 1 = \operatorname{ctg}^2 x.$

1.52. $\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{2}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}\right|^{\sqrt{8x-x^2-12}} = 1.$

Розв’язати нерівності.

1.53. а) $4^{\sin^2 \pi x} + 3 \cdot 4^{\cos^2 \pi x} \leq 8;$

б) $9^{1+\sin^2 \pi x} + 30 \cdot 9^{\cos^2 \pi x} \leq 117.$

1.54. $0,2^{\cos 2x} - \frac{1}{25^{\cos^2 x}} < \frac{4}{5\sqrt{5}}.$

1.55. $|3^{\operatorname{tg} \pi x} - 3^{1-\operatorname{tg} \pi x}| \geq 2.$

1.56. $\log_2 \cos x > \log_2 \operatorname{tg} x$, якщо $0 \leq x \leq \pi.$

1.57. $\log_{2\sin x}(2\cos x) + 2\log_{2\cos x}(\sin x) > 3.$

1.58. $(\log_{\sin x}2)^2 < \log_{\sin x}(4\sin^3 x)$.

1.59. $(\log_{\operatorname{tg} x}3)^2 \le \log_{\operatorname{tg} x}(3\ \operatorname{tg}^2 x)$.

1.60. $\log_{(\cos x+\sqrt{3}\sin x)}\frac{1}{2} > 0$.

1.61. $\log_{\sin x}\operatorname{tg} x\ < 2\log_{\operatorname{tg} x}\sin x + 1$.

1.62. $\log_{(\sin x+\sqrt{3}\cos x)}(\frac{x^2}{2} - \frac{6x}{2} + 3) \ge 0$.

1.63. $\log_{\sqrt{2}(\cos x+\sqrt{3}\sin x)}(\sqrt{6}\sin x + \sqrt{2}\cos x) \ge 1$.

1.64. $\log_{(\sqrt{3}\sin x+\ \cos x)}(x^2 + 2x + 1) \ge 0$.

1.65. $\log_{(\sin x\ -\ \cos x)}(\sin x - 5\cos x) \ge 1$.

1.66. $\log_{\operatorname{ctg}^2 x}\frac{1+\sin x}{1-\sin x} < 1$.

1.67. $\log_{\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}}\sqrt{1 + 2\cos 2x} < 1$.

1.68. $\log_{\operatorname{tg}x}\sqrt{\sin^2 x - \frac{5}{12}} < -1$.

1.69. $\log_{|\sin x|}(x^2 - 8x + 23) > \frac{3}{\log_2|\sin x|}$.

1.70. $\log_{2\sin x}\sqrt{\cos 2x} \le \frac{1}{2}$, якщо $0 < x \le \frac{\pi}{2}$, $x \ne \frac{\pi}{6}$.

1.71. $\log_{2\operatorname{tg} x}\sqrt{\frac{2\cos 2x}{1+\cos 2x}} \le \frac{1}{2}$, якщо $\pi \le x \le 2\pi$, $x \ne \frac{3}{2}\pi$.

1.72. $\frac{\lg\sin x+\lg\cos x}{\lg(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)-2\lg 2} > 1$,якщо $0 \le x \le 2\pi$, $x \ne \frac{\pi}{2}$, $x \ne \frac{3}{2}\pi$.

1.73. $\frac{\lg 2+\lg\cos\ (x+\frac{\pi}{4})}{\lg\ (\sin x+\cos x)} > -1$, $-\pi \le x \le \pi$, $x \ne \pm\frac{3}{2}\pi$.

1.74. $\log_{\operatorname{tg}^2 x}(\cos x - \cos 3x) - \log_{\operatorname{tg}^2 2x}(\sin x + \sin 3x)\ > 0{,}45$.

1.75. $\log_{\mathrm{tg}^2 2x}(\sin x + \sin 3x) < 0{,}55 + \log_{\mathrm{tg}^2 2x}(\cos x + \cos 3x)$.

1.76. $\sqrt{1 - \log_{\mathrm{tg}\,x} 2}\left(1 - 3\log_{\mathrm{tg}\,x} 2 + 2\log^2_{\mathrm{tg}\,x} 2\right) \geq 0.$

1.77. $2^{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \mathrm{tg}\,x - 1}} < 1.$

1.78. $10 \cdot 0{,}3^{\sqrt[4]{\log_{\sqrt{3}} \mathrm{ctg}\,x}} > 3.$

1.79. $\log_{\sqrt{x}} \sin x \cdot \log_{2^x}(\frac{1}{9}(2^{2x-2} - 3 \cdot 2^{x-2} - 1)) \leq 0.$

1.80. $\sqrt{\mathrm{tg}\,x - 1}(\log_{\mathrm{tg}\,x}(2 + 4\cos^2 x) - 2) \geq 0.$

1.81. $\sqrt{4\sin^2 x - 1} \cdot \log_{\sin x} \frac{x-5}{2x-1} \geq 0.$

1.82. $\sqrt{3 + 2\,\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}^2 x} \geq \frac{1+3\,\mathrm{tg}\,x}{2}.$

1.83. $\sqrt{5 - 2\sin x} \geq 6\sin x - 1.$

1.84. $\sqrt{2 + 4\cos x} \geq \frac{1}{2} + 3\cos x.$

1.85. $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1.$

1.86. $\cos(2 - 4x) + \cos(2 + 4x) \geq \sqrt{2\cos^2 2x - 1}.$

1.87. $\sqrt{1 + 2\cos x} + \sqrt{\cos x} > \sqrt{\frac{17}{4} - \cos x}.$

1.88. $\frac{\arccos(x^2 - 3x + 2)}{8x^2 - 10x + 3} > 0.$

1.89. $\mathrm{arctg}\sqrt{x} > \arccos(1 - x).$

1.90. $x^{\lg \sin x} \geq 1.$

1.91. $x^{2\sin x - \cos 2x} < \frac{1}{x}.$

Розв'язати системи рівнянь:

1.92. $\begin{cases} 3^y = x, \\ 2\sin x + \sin 2x = 2\cos^2\frac{x}{2}. \end{cases}$

1.93. $\begin{cases} 1 + \frac{\log_2 21 - 1}{\log_2 \frac{x-y}{21}} = \log_{\frac{x-y}{21}} 2 \cdot \log_2(x+y), \\ \sqrt{2}\sin\frac{\pi(x-2)}{2} = \cos\frac{\pi y}{2} - \sin\frac{\pi y}{2}. \end{cases}$

1.94. $\begin{cases} \sqrt{1 + \sin x \sin y} = \cos x, \\ 2\sin x \operatorname{ctg} y + 1 = 0. \end{cases}$

1.95. $\begin{cases} \sqrt{1 + \sin x \sin y} = \cos y, \\ 2\sin y \operatorname{ctg} x + \sqrt{3} = 0. \end{cases}$

1.96.

$$\begin{cases} \cos^2 xy - 3\sin xy \cos xy = 2\cos y \cos(2xy - y) - 2\cos^2(xy - y), \\ x^3 - xy = 0, \\ x^6 + 2xy \le 5. \end{cases}$$

Розв'язати рівняння з параметром a.

1.97. $\lg^2 \sin x - 2a \lg \sin x - a^2 + 2 = 0.$

1.98. $\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} a + 1 = 0.$

1.99. $|\cos x|^{\operatorname{ctg} 2x + a \operatorname{ctg} x} = 1.$

1.100. $x^{\sin x - a} > 1 \ (a > 0; 0 < x < \frac{\pi}{2}).$

1.101. Для довільного $a > 0$ знайти розв'язок нерівності $x^{\sin x - a} \le 1$, що належить інтервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв’язати системи рівнянь з параметром a.

1.102. $\begin{cases} 2\sqrt{x} - 2\arccos y + z = 1, \\ 5\sqrt{x} + \arccos y + z = 6a - 14, \\ \sqrt{x} + \arccos y + 2z = 2a + 1. \end{cases}$

1.103. $\begin{cases} 2^x - y - \arcsin z = -6, \\ 3 \cdot 2^x + 2y - 3\arcsin z = 7, \\ 5 \cdot 2^x - y + \arcsin z = 6a + 2. \end{cases}$

1.104. При яких значеннях параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} \left|11 - 14\sqrt{\cos\frac{\pi x}{4}}\right| - \left|12\sqrt{\cos\frac{\pi x}{4}} - 1\right| = \\ \qquad = 3 + \left|-20\sqrt{\cos\frac{\pi x}{4}} - 7\right| + \sqrt{\sin\frac{\pi(x-2y)}{12}}, \\ 2((x-a)^2 + y^2 + 2y) + 1 = 2\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + 2y + \frac{1}{4}} \end{cases}$$

має хоча б один розв’язок?

1.105. При яких значеннях параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} (a-2)\sin x + \cos y = 1, \\ \log_a(2\cos y) = \log_a z(1 + 7\sin x), \\ \log_z \frac{a}{5-a} = 1. \end{cases}$$

має хоча б один розв’язок?

§ 2. Використання властивостей функцій при розв'язуванні рівнянь та нерівностей

Не всяке рівняння $f(x) = g(x)$ в результаті перетворення або за допомогою вдалої заміни змінної може буде зведено до рівняння того чи іншого стандартного виду, для якого існує певний алгоритм розв'язання. В таких випадках іноді виявляється корисним використовувати деякі властивості функцій $f(x)$, $g(x)$. Так, якщо одна з функцій спадає, а друга зростає на проміжку *X*, то рівняння $f(x) = g(x)$ або має один корінь (див. рис. 1, а) і тоді можна знайти його хоча би підбором, або не має коренів (див. рис. 1, б). Наприклад, для розв'язання рівняння $\sqrt{7-x} = x - 1$ не має потреби зводити обидві частини рівняння в квадрат. Достатньо помітити, що $x = 3$ – корінь рівняння та інших коренів не має, оскільки ліва частина рівняння – спадаюча, а права – зростаюча функція. Аналогічно буде при розв'язанні нерівності $\sqrt{x+8} < 2 - x$. Тут при $x = -2$ ліва і права частина рівні, але оскільки ліва частина – зростаюча, а права – спадаюча функція, то нерівність задовольняє значення x, яке менше за -2. З урахуванням області визначення отримаємо відповідь: $-18 \leq x < -2$. Якщо функція $f(x)$ на проміжку X обмежена зверху, при чому $\sup\limits_{x \in X} f(x) = A$, а функція g(x)обмежена знизу, при чому $\inf\limits_{x \in X} g(x) = A$, то рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Іноді для розв'язання рівняння $f(x) = g(x)$ корисно побудувати графік функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ і визначити абсциси точок їх перетину. Використовуються і інші неелементарні прийоми розв'язку рівнянь та нерівностей, іноді із залученням похідних. Про все це йде в наступному параграфі.

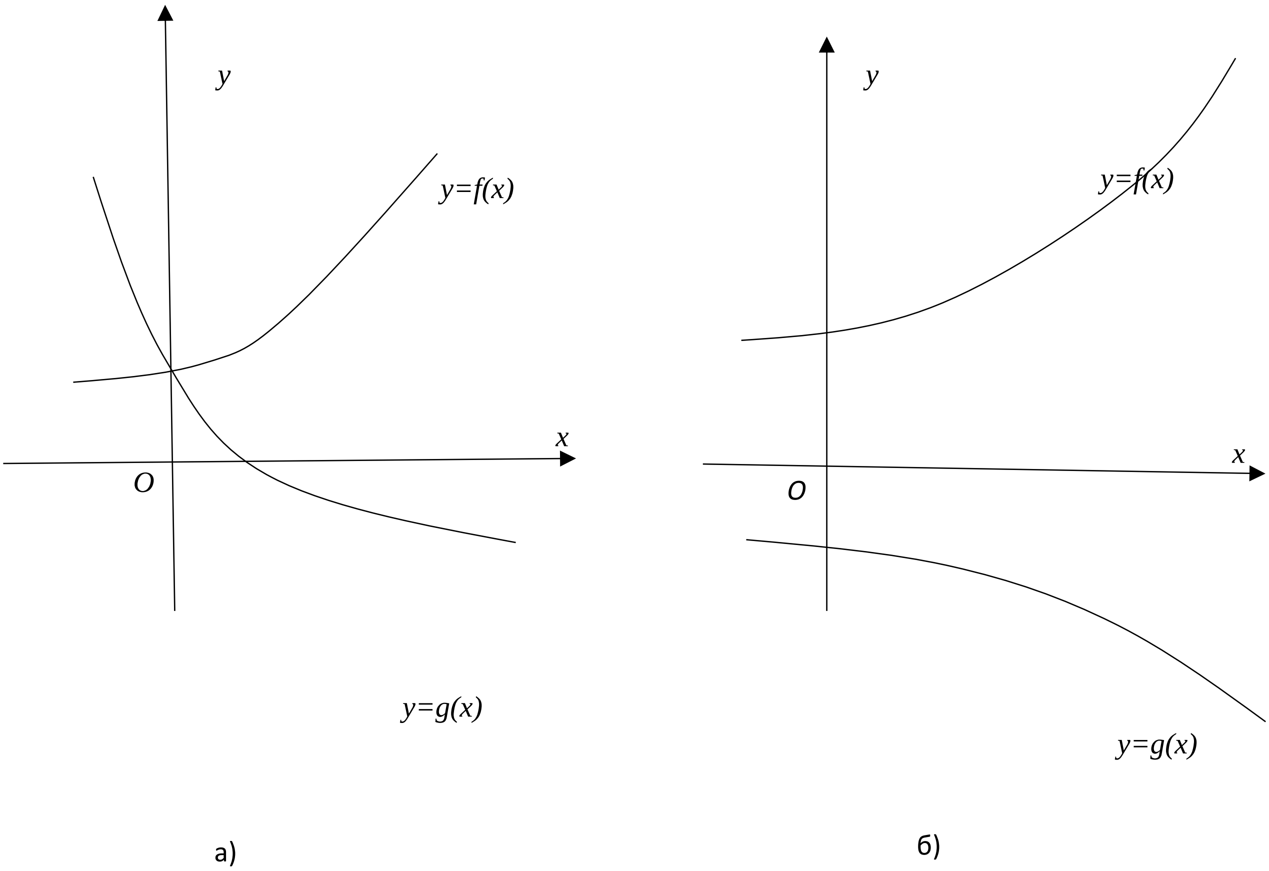

рис. 1

Приклад 1. Розв'язати рівняння $|6x-5| = 4\sin\frac{\pi x}{3}$.

Розв'язання. Побудуємо графіки функції $y = |6x-5|$ та $y = 4\sin\frac{\pi x}{3}$ (рис. 2), знайдемо два кореня рівняння : $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$2\cos^2\frac{x^2+x}{6} = 2^x + 2^{-x}. \qquad (1)$$

Розв'язання. Покладемо $t = 2^x$. Тоді права частина рівняння (1) матиме вигляд $\mathrm{t} + \frac{1}{t}$. Скористаємося відомою нерівністю $t + \frac{1}{t} \geq 2$ при $t > 0$.

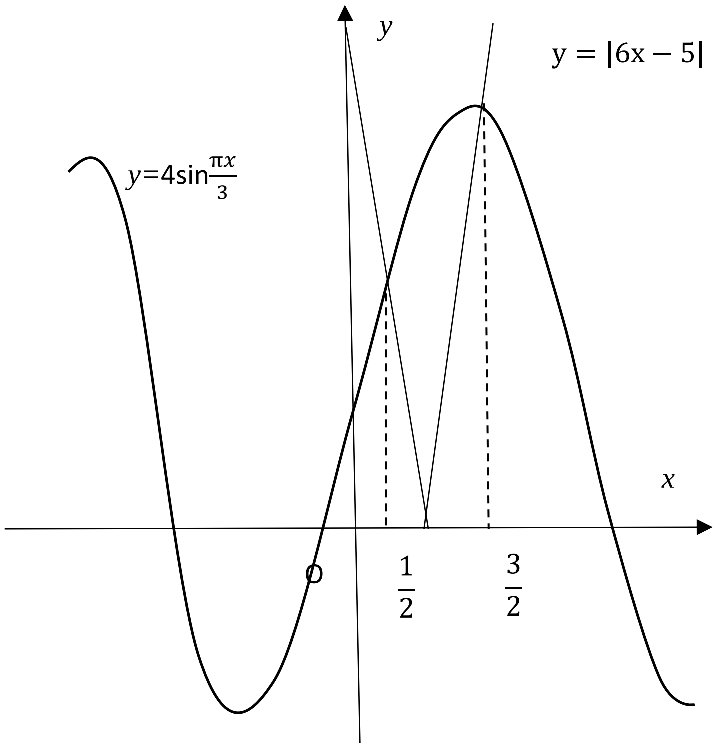

рис. 2

В той же час справедлива нерівність $2\cos^2\frac{x^2+x}{6} \leq 2$. Отже, рівняння (1) зводиться до системи рівнянь :

$$\begin{cases} 2\cos^2\frac{x^2+x}{6} = 2, \\ 2^x + 2^{-x} = 2. \end{cases}$$

З другого рівняння системи знайдемо $x = 0$. Оскільки це значення задовольняє і перше рівняння системи, то $x = 0$ - розв'язок системи, а тим самим і корінь рівняння (1).

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{x^2+4x+7} = \sqrt{3}\,\frac{1}{\sin(\pi+\frac{\pi x}{4})}. \qquad (2)$$

Розв'язання. Маємо $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x^2+4x+7} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{(x+2)^2+3}$.

Так як $0 < \operatorname{tg}\frac{\pi}{(x+2)^2+3} \leq \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, тобто $0 < \operatorname{tg}\frac{\pi}{(x+2)^2+3} \leq \sqrt{3}$.(3)

Отже, права частина рівняння (2) повинна бути додатною. Більше того, оскільки $\sin(\pi+\frac{\pi x}{4}) \leq 1$, отримаємо:

$$\sqrt{3}\frac{1}{\sin(\pi+\frac{\pi x}{4})} \geq \sqrt{3}. \qquad (4)$$

Співставляючи нерівності (3) і (4), матимемо систему

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\frac{\pi}{(x+2)^2+3} = \sqrt{3}\,, \\ \sqrt{3}\frac{1}{\sin(\pi+\frac{\pi x}{4})} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Перше рівняння системи перетворюється у правильну рівність тільки при

$x = -2$. Оскільки це значення задовольняє і друге рівняння системи, то $x = -2$ - єдиний корінь рівняння (2).

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$\sin x + 2\sin 2x = 4 + \sin 17x. \qquad (5)$$

Розв'язання. Так як $\sin x \leq 1$, $\sin 2x \leq 1$, то $\sin x + 2\sin 2x \leq 3$. Більше того $\sin x + 2\sin 2x < 3$. Справді, розглянемо рівняння

$$\sin x + 2\sin 2x = 3.$$

Така рівність може мати місце тоді і лише тоді, коли $\sin x = 1$ і $\sin 2x = 1$, що неможливо, або $\sin x = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, а при цих значеннях маємо :

$$\sin 2x = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \sin 2(\pi + 4\pi k) = 0.$$

Отже, $\sin x + 2\ \sin 2x < 3$. В той же час права частина рівняння (5) задовольняє нерівність $4 + \sin 17x \geq 3$. Таким чином, можна зробити висновок, що рівняння (5) не має розв'язку.

Приклад 5. Розв’язати змішану систему

$$\begin{cases} y\sin x = \log_2\left|\frac{y\sin x}{1+3y}\right|, \\ (6y^2+2y)(4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}) = 25y^2+6y+1, \\ |y| \leq 1. \end{cases} \tag{6}$$

Розв’язання. Зведемо друге рівняння системи до вигляду

$$4^z + \frac{4}{4^z} = \frac{25y^2+6y+1}{6y^2+2y}, \tag{7}$$

де $\mathrm{z} = \sin^2 x$, тобто $0 \leq \mathrm{z} \leq 1$.

Розглянемо функцію $u = 4^z + \frac{4}{4^z}$ на відрізку [0;1], знайдемо для неї u_{max} і u_{min}. Маємо

$$u' = 4^z\ln4 - 4\cdot4^{-z}\ln4 = \ln4\left(4^z - \frac{4}{4^z}\right) = \frac{\ln4}{4^z}(4^{2z}-4).$$

Отже, $u' = 0$, якщо $4^{2z} = 4$, тобто $\mathrm{z} = \frac{1}{2}$, а тому свої найбільші та найменші значення неперервна функція $u = 4^z + \frac{4}{4^z}$ на відрізку [0;1] може приймати тільки на кінцях відрізка або в точці $z = \frac{1}{2}$. Маємо

$u(0) = 5,$

$u\left(\frac{1}{2}\right) = 4,$

$u(1) = 5.$

Тоді $u_{max} = 5, u_{min} = 4.$

Отже, і права частина рівняння (7) повинна задовольняти систему нерівностей

$$\begin{cases} \frac{25y^2+6y+1}{6y^2+2y} \leq 5, \\ \frac{25y^2+6y+1}{6y^2+2y} \geq 4. \end{cases}$$

Розв'яжемо дану систему враховуючи, що система 6) містить умову $|y| \leq 1$. Отримаємо $y = -1$ та $\frac{1}{5} \leq y \leq 1$.

Розглянемо перше рівняння системи (6) в кожному із цих випадків.

Почнемо з випадку, коли $\frac{1}{5} \leq$ y ≤ 1. Тоді перше рівняння системи (6) можна записати так :

$$y \sin x = \log_2 \frac{y}{1+3y} + \log_2|\sin x|. \quad (8)$$

Розглянемо функцію $v = \frac{y}{1+3y}$ і знайдемо v_{max} та v_{min} на відрізку $[\frac{1}{5}; 1]$.

Маємо $v' = \frac{1}{(1+3y)^2}$, тобто $v' > 0$, а тому функція $v = \frac{y}{1+3y}$ зростає на $[\frac{1}{5}; 1]$.

Отже, $v_{min} = v(\frac{1}{5}) = \frac{1}{8}$, а $v_{max} = v(1) = \frac{1}{4}$. Але тоді функція $\log_2 \frac{y}{1+3y}$ приймає значення від $\log_2 \frac{1}{8}$ до $\log_2 \frac{1}{4}$, тобто від -3 до -2. Тепер оцінимо границі лівої та правої частин рівняння (8).

Так як $\frac{1}{5} \leq y \leq 1;\ -1 \leq \sin x \leq 1$, то $-1 \leq y \sin x \leq 1$.

Так як $-3 \leq \log_2 \frac{y}{1+3y} \leq -2$, $\log_2|\sin x| \leq 0$, то

$$\log_2 \frac{y}{1+3y} + \log_2|\sin x| \leq -2. \quad (9)$$

І так, права частина рівняння (9) не менша, ніж -1, а ліва частина не більша, ніж -2, отже, рівняння (9) не має розв'язку.

Розглянемо тепер випадок, коли $y = -1$. В цьому випадку друге рівняння системи (7) приймає вигляд $4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} = 5$, звідки після нескладних перетворень отримуємо $\sin^2 x = 0$, що нам не підходить, або $\sin^2 x = 1$, тобто

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Перше рівняння системи (7) при $y = -1$ приймає вигляд:

$$-\sin x = \log_2 \left|\frac{\sin x}{2}\right|. \qquad (10)$$

Так як $\left|\frac{\sin x}{2}\right| < 1$, то $\log_2 \left|\frac{\sin x}{2}\right| < 0$. Отже, $-\sin x < 0$, тобто $\sin x > 0$, а тому із знайдених вище значень $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ візьмемо тільки $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Вони задовольняють рівняння (10). І так, $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ y = -1 \end{cases}$ - розв'язок системи (6).

Приклад 6. При яких значеннях параметра a з інтервалу (2; 5) нерівність

$$\log_2\big|3 - |\sin ax|\big| = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) \qquad (11)$$

має розв'язок на відрізку [2; 3] ?

Розв'язання. Зрозуміло, що $\log_2\big|3 - |\sin ax|\big| \geq \log_2 2 = 1$, а

$$\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1.$$

Отже, рівняння (11) рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} \log_2\left|3-|\sin ax|\right|=1, \\ \cos\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)=1, \end{cases} \text{або} \begin{cases} |\sin ax|=1, \\ x=\frac{1}{6}+2k. \end{cases} \qquad (12)$$

Із чисел виду $\frac{1}{6}+2k$ відрізку [2; 3] належить тільки $\frac{1}{6}+2$, тобто $x=\frac{13}{6}$. При цьому значенні перше рівняння системи (12) приймає вигляд $\left|\sin\frac{13a}{6}\right|=1$, звідки $\frac{13a}{6}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $a=\frac{3\pi+6\pi n}{13}$.

Залишилося серед цих значень вибрати лише ті, які належать інтервалу (2; 5). Такими будуть $a_1=\frac{9\pi}{13}$ (при $n=1$) та $a_2=\frac{15\pi}{13}$ (при $n=2$).

Отже, умови задачі задовольняють значення параметра a: $\frac{9\pi}{13}$; $\frac{15\pi}{13}$.

Вправи для самостійного розв'язування до § 2

Розв'язати рівняння.

2.1. $x^2+\cos x=0$.

2.2. $\sin x=x^2+x+1$.

2.3. $2\sin x=5x^2+2x+3$.

2.4. $2\cos\pi x=2x-1$.

2.5. $\cos\pi x=x^2+4x+5$

2.6. $3\arcsin x+\pi x-\pi=0$.

2.7. $3\arccos x-\pi x-\frac{\pi}{2}=0$.

2.8. $\log_\pi x=1+\sin x\cdot\log_\pi 2$.

2.9. $x^2+(x+1)\sin\frac{\pi x}{6}=\frac{3+x}{2}$.

2.10. $-2\sqrt{3}\pi\sin x = |x+\pi| + |x-2\pi|$.

2.11. $2\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{6} = \frac{1}{x^2} + x^2$.

2.12. $3 + (x-\pi)^2 = 1 - 2\cos x$.

2.13. $2\cos\frac{x}{3} = 5^x + 5^{-x}$.

2.14. $3^{|\sin\sqrt{x}|} = |\cos x|$.

2.15. $2^{-\cos x} = \log_\pi x + \log_x \pi$.

2.16. $3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2} = 5 + 4\sin 2\pi x$.

2.17. $5^{|1-4x^2|} = \sin\pi x$.

2.18. $2^{1-|4x-1|} = \operatorname{tg}\pi x + \operatorname{ctg}\pi x$.

2.19. $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

2.20. $\sqrt{2+\cos^2 2x} = \sin 3x - \cos 3x$.

2.21. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\left(\sin x + \sqrt{2}\cos^2 x\right)\right) - \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\operatorname{tg}^2 x\right) = 1$.

2.22. $\log_2(3+2x-x^2) = \operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{4} + \operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{4}$.

2.23. $\log_{\frac{1}{3}}(3+|\sin x| = 2^{|x|} - 2$.

2.24. $\log_2(3-|\cos x| = 2^{-|\pi-x|}$.

2.25. $\log_3\left(\frac{1}{3} - \left|\frac{3\pi}{2} - x\right|\right) = \sin x$.

2.26. $\log_3\left(4 - \left|\cos\frac{4x}{3}\right|\right) = \sin x$.

2.27. $\sin\frac{\pi}{x^2+6x+13} = \frac{\log_3|x|+\log_{|x|}3}{2\sqrt{2}}$.

2.28. $\cos\frac{16\pi}{16x^2-8x+49}=\frac{1}{\text{tg}^2\,\pi x+\text{ctg}^2\,\pi x}.$

2.29. $\sin x-\sin 15x\ \cos x=\frac{3}{2}.$

2.30. $\sqrt{\sin^3 x}+\sqrt{\cos^3 x}=\sqrt{2}.$

2.31. $\lg\sin x+\lg\sin 5x=\log_{0,1}\cos 4x.$

2.32. $\arcsin(x^2-2x+2)=\frac{\pi x}{2}.$

2.33. $\arccos(6\,x-x^2-10)=-\frac{\pi x}{3}.$

2.34. $3\arcsin\left(x^2+x+\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{\text{tg}^2\frac{\pi x}{2}+\text{ctg}^2\frac{\pi x}{2}}.$

2.35. $\cos^4(\text{arcctg}x)+\sin^4(\text{arcctg}x)=\sin^{-2}(\text{arcctg}x).$

Розв’язати нерівність:

2.36. $\cos^2(x+1)\lg(9-2x-x^2)\geq 1.$

2.37. $(4x-x^2-3)\ \log_2(\cos^2\pi x+1)\geq 1.$

2.38. $\cos^{-2}(x+3\,\text{tg}\,x)+(\text{tg}x-\text{tg}^2x)^2\leq 1.$

2.39. $\cos\left(\pi(x+\frac{1}{2}\sin\pi x\right)+(\sin^2\pi x+\sin\pi x)^2\leq -1.$

2.40. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\left(2^x+\sin\frac{\pi x}{2}\right)\right)+|3^x+3^{1-x}-4|\leq -1.$

2.41. Розв’язати змішану систему

$$\begin{cases}(3-y^2)\cos^2 x=\log_3\left|\dfrac{8+y}{y(1-\sin^3 x)}\right|,\\ (y^2+8y)(3^{2+2\sin^4 x}+3^{2\cos^4 x+\sin^2 2x-4})=2y^2+16y+64,\\ 1\leq y\leq 10.\end{cases}$$

2.42. При яких значеннях параметра а з інтервалу (2;7) рівняння

$\log_2\left(1+\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{5\pi}{12}\right)\right)=|\cos ax|-1$ має розв'язок на відрізку [1;2]?

2.43. При яких значеннях параметра a з інтервалу (5;16) рівняння

$1+\cos^2\left(\frac{ax}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos\pi x-\sin\pi x|}$ має розв'язок на відрізку [1;2]?

2.44. При яких значеннях параметра a з інтервалу (1;5) рівняння

$\cos^2(\pi x+\frac{5\pi}{12})+\frac{1}{2}=(\frac{1}{2})^{1+|\sin ax|}$ має розв'язок на відрізку [2;3] ?

§ 3. Нестандартні рівняння і нерівності

Термін “нестандартне завдання” має в методиці математики багато тлумачень. У цьому параграфі до нестандартних ми відносимо рівняння і нерівності з двома-трьома змінними, а також системи рівнянь, в яких число рівнянь менше числа змінних. Зрозуміло, що не всяке рівняння з двома змінними можна віднести до нестандартних, наприклад рівняння $x + y = 5$, розв’язками якого є будь-які пари чисел, які в сумі дають 5. Це рівняння настільки ж просте, наскільки невизначене (має безліч розв’язків). Ми будемо вважати нестандартним таке рівняння з двома-трьома змінними, яке після більш-менш оригінальних міркувань приводить до цілком конкретних розв’язків.

Приклад 1. Розв’язати рівняння

$$\sin^4 x + \cos^4 y + 2 = 4 \sin x \cos y.$$

Розв’язання. Послідовно маємо:

$$(\sin^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 y + \cos^4 y) + 2\sin^2 x \cos^2 y + 2 - 4 \sin x \cos y = 0,$$

$$(\sin^2 x - \cos^2 y)^2 + 2(\sin x \cos y - 1)^2 = 0.$$

Приходимо до системи тригонометричних рівнянь

$$\begin{cases} \sin^2 x = \cos^2 y, \\ \sin x \cos y = 1. \end{cases}$$

Поклавши $u = \sin x, v = \cos y$,отримаємо систему

$$\begin{cases} u^2 = v^2, \\ uv = 1. \end{cases}$$

Звідки знаходимо

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ v_1 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = -1, \\ v_2 = -1, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos y = 1, \end{cases} \begin{cases} \sin x = -1, \\ \cos y = -1. \end{cases}$$

З першої системи одержимо

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ y = 2\pi n, \end{cases}$$

з другої

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ y = \pi + 2\pi n. \end{cases}$$

Приклад 2. Розв’язати рівняння

$$\cos(x - y) - 2\sin x + 2\sin y = 3.$$

Розв’язання. Виконаємо деякі перетворення:

$$-2(\sin x - \sin y) = (1 - \cos(x - y)) + 2,$$

$$-4\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} = 2\sin^2\frac{x-y}{2} + 2.$$

Поклавши $t = \sin\frac{x-y}{2}$, отримаємо рівняння

$$t^2 + 2\cos\frac{x+y}{2} t + 1 = 0,$$

Розглянемо його як квадратне відносно t. Маємо:

$$t_{1,2} = -\cos\frac{x+y}{2} \pm \sqrt{\cos^2\frac{x+y}{2} - 1}.$$

Звідси слідує, що $\cos^2\frac{x+y}{2} - 1 \geq 0$. Так як з іншого боку $\cos^2\frac{x+y}{2} \leq 1$. Робимо висновок,що $\cos^2\frac{x+y}{2} = 1$,тоді $t = -\cos\frac{x+y}{2}$.

У підсумку, як в попередньому прикладі приходимо до системи тригонометричних рівнянь

$$\begin{cases}\cos^2\frac{x+y}{2}=1,\\ \sin\frac{x-y}{2}=-\cos\frac{x+y}{2}.\end{cases}$$

Ця система рівносильна сукупності двох систем:

$$\begin{cases}\cos\frac{x+y}{2}=1,\\ \sin\frac{x-y}{2}=-1;\end{cases}\quad \begin{cases}\cos\frac{x+y}{2}=-1,\\ \sin\frac{x-y}{2}=1.\end{cases}$$

З першої системи отримуємо

$$\begin{cases}\frac{x+y}{2}=2\pi k,\\ \frac{x-y}{2}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}+2\pi(k+n),\\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi(k-n).\end{cases}$$

З другої системи отримуємо:

$$\begin{cases}\frac{x+y}{2}=\pi+2\pi k,\\ \frac{x-y}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases}x=\frac{3\pi}{2}+2\pi(k+n),\\ y=\frac{3\pi}{2}+2\pi(k-n).\end{cases}$$

Приклад 3. Розв’язати рівняння

$$\frac{|\operatorname{ctg} xy|}{\cos^2 xy}=\log_{\frac{1}{3}}\left(y^2-2y+\frac{10}{9}\right). \qquad (1)$$

Розв'язання. Оскільки $\frac{1}{\cos^2 xy} = 1 + \text{tg}^2 xy$, а $y^2 - 2y + \frac{10}{9} = (y-1)^2 + \frac{1}{9}$, то перепишемо рівняння (1) у вигляді:

$$\frac{1+\text{tg}^2 xy}{|\text{tg}\, xy|} = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9} + (y-1)^2\right). \qquad (2)$$

Неважко показати, що $\frac{1+\text{tg}^2 xy}{|\text{tg}\, xy|} \geq 2$. Для цього достатньо переписати цю нерівність у вигляді

$$\frac{1}{|\text{tg} xy|} + |\text{tg} xy| \geq 2$$

і скористатись відомою нерівністю $t + \frac{1}{t} \geq 2$, якщо $t > 0$. В той час

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9} + (y-1)^2\right) \leq 2.$$

Справді, $\frac{1}{9} + (y-1)^2 \geq \frac{1}{9}$, а (тоді в силу спадання функції $\log_{\frac{1}{3}} t$)

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9} + (y-1)^2\right) \leq \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9} = 2.$$

Отже, ліва частина рівняння (2) не менша ніж 2, а права не більша ніж 2, значить кожна з них дорівнює 2, тобто ми приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1+\text{tg}^2 xy}{|\text{tg}\, xy|} = 2, \\ \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9} + (y-1)^2\right) = 2, \end{cases} \text{або} \begin{cases} |\text{tg}\, xy| = 1, \\ (y-1)^2 = 0. \end{cases}$$

З другого (більш простого) рівняння системи отримуємо $y = 1$. Тоді перше рівняння системи набуває вигляду $|\text{tg}\, xy| = 1$, звідки $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$\frac{3+2\cos(x-y)}{2} = \sqrt{3+2x-x^2}\cos^2\frac{x-y}{2} + \frac{\sin^2(x-y)}{2}$. (3)

Розв'язання. Виконаємо деякі перетворення

$\frac{3}{2} + \cos^2\frac{x-y}{2} - \sin^2\frac{x-y}{2} = \sqrt{3+2x-x^2}\cos^2\frac{x-y}{2} +$
$2\sin^2\frac{x-y}{2}\cos^2\frac{x-y}{2}$. (4)

Покладемо $t = \cos^2\frac{x-y}{2}$. Тоді $\sin^2\frac{x-y}{2} = 1-t$ і рівняння (4) набуде вигляду

$\frac{3}{2} + t - (1-t) = \sqrt{3+2x-x^2}\ t + 2(1-t)\,t,$

і далі $\sqrt{3+2x-x^2} = 2t + \frac{1}{2t}$, $0 < t \le 1$.

Так як $\sqrt{3+2x-x^2} = \sqrt{4-(1-x)^2} \le 2$, а $2t + \frac{1}{2t} \ge 2$,то отримуємо систему

$$\begin{cases}\sqrt{4-(1-x)^2} = 2,\\ 2t + \frac{1}{2t} = 2,\end{cases}$$

звідки знаходимо $\begin{cases}x = 1,\\ t = 1,\end{cases}$ тобто $\begin{cases}x = 1,\\ \cos^2\frac{x-y}{2} = 1.\end{cases}$

Розв'язавши цю систему, отримаємо наступні розв'язки заданого рівняння:

$$\begin{cases}x = 1,\\ y = 1 + 2\pi n.\end{cases}$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x})^2 + (\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x})^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y.$

Розв'язання. Виконаємо послідовні перетворення

$\sin^4 x + 2 + \frac{1}{\sin^4 x} + \cos^4 x + 2 + \frac{1}{\cos^4 x} = 12 + \frac{1}{2}\sin y,$

$\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x \cos^4 x} = 8 + \frac{1}{2}\sin y,$

$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x + \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^4 x \cos^4 x} = 8 + \frac{1}{2}\sin y.$ (5)

Поклавши $t = \sin^2 x \cos^2 x$,перепишемо рівняння (5) у вигляді

$1 - 2t + \frac{1-2t}{t^2} = 8 + \frac{1}{2}\sin y$, тобто

$\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} - 2t = 7 + \frac{1}{2}\sin y.$ (6)

Розглянемо функцію $z = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} - 2t$. Тут $t = \sin^2 x \cos^2 x$, тобто $t = \frac{1}{4}\sin^2 2x$.

Значить $0 < t \le \frac{1}{4}$. Знайдемо найменше значення функції $z = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} - 2t$ на проміжку $(0; \frac{1}{4}]$.

Маємо $z' = -\frac{2}{t^3} + \frac{2}{t^2} - 2 = \frac{-2+2t-2t^3}{t^3}$. Зрозуміло, що на розглянутому проміжку $-2 + 2t - 2t^3 < 0$, тобто $z' < 0$, а тому функція $z(t)$ спадає на $(0; \frac{1}{4}]$. Значить $z_{min} = z\left(\frac{1}{4}\right) = 7{,}5$, тобто ліва частина рівняння (6) рівна 7,5, тобто ми переходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} - 2t = 7{,}5, \\ 7 + \frac{1}{2}\sin y = 7{,}5, \end{cases} \text{звідки} \begin{cases} t = \frac{1}{4}, \\ \sin y = 1, \end{cases} \text{або} \begin{cases} \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}, \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{cases}$$

З рівняння $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}$ отримуємо:

$\sin^2 2x = 1,$

$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}.$

В результаті знаходимо наступний розв'язок заданого рівняння:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{cases}$$

Приклад 6. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 8\cos x \cos y \cos(x - y) + 1 = 0, \\ x + y = z. \end{cases} \qquad (7)$$

Розв'язання. Виконаємо деякі перетворення першого рівняння системи:

$4(\cos(x + y) + \cos(x - y))\cos(x - y) + 1 = 0,$

$4\cos^2(x - y) + 4\cos(x - y)\cos(x + y)) + (\cos^2(x + y) + \sin^2(x + y)) = 0,$

$(2\cos(x - y) + \cos(x + y))^2 + \sin^2(x + y) = 0.$

Це рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 2\cos(x - y) + \cos(x + y) = 0, \\ \sin(x + y) = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Рівняння $\sin(x + y) = 0$ зводиться до сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x + y = 2\pi n, \\ x + y = \pi + 2\pi n. \end{array}\right.$$

В першому випадку $\cos(x + y) = 1$, в другому $\cos(x + y) = -1$. Значить система (8) рівносильна сукупності двох систем:

$$\begin{cases} x + y = 2\pi n\,, \\ \cos(x - y) = -\frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} x + y = \pi + 2\pi n, \\ \cos(x - y) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

З першої системи знаходимо

$$\begin{cases} x + y = 2\pi n, \\ x - y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases}$$

тобто $\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi(n + k), \\ y = \mp\frac{\pi}{3} + \pi(n - k). \end{cases}$ (9)

З другої системи знаходимо

$$\begin{cases} x + y = \pi + 2\pi n, \\ x - y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases}$$

звідки $\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + \pi(n + k), \\ y = \frac{\pi}{3} + \pi(n - k). \end{cases}$ (10)

або $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi(n + k), \\ y = \frac{2\pi}{3} + \pi(n - k). \end{cases}$ (11)

Пари, задані умовами (9),(10),(11) - розв’язок системи (8). Користуючись тепер тим, що $z = x + y$, отримуємо розв’язок системи (7):

$$\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi(n + k), \\ y = \mp\frac{\pi}{3} + \pi(n - k), \\ z = 2\pi n; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + \pi(n + k), \\ y = \frac{\pi}{3} + \pi(n - k), \\ z = \pi + 2\pi n; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi(n + k), \\ y = \frac{2\pi}{3} + \pi(n - k), \\ z = \pi + 2\pi n. \end{cases}$$

Приклад 7. Розв’язати нерівність

$$1 - \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} + \arccos(x + |\sin y|) \leq 0. \quad (12)$$

Розв'язання. Так як функція $u = \arccos t$ визначена тільки для $t \in [-1; 1]$, то $-1 \leq x + |\sin y| \leq 1$, тобто

$$-1 - |\sin y| \leq x \leq 1 - |\sin y|. \qquad (13)$$

Так як $0 \leq |\sin y| \leq 1$, то з подвійної нерівності (13) випливає, що

$$-2 \leq x \leq 1. \qquad (14)$$

На проміжку $(-2; 1]$ функція $v = \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$ зростає, а значить

$$v_{max} = v(1) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

тобто на цьому відрізку $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} \geq 0$, а значить $1 - \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} \geq 0$. В той час функція $v = \arccos t$ приймає значення з відрізка $[0; \pi]$, тобто

$$\arccos(x + |\sin y|) \geq 0.$$

Так, в лівій частині нерівності (12) міститься сума двох не відмінних виразів $1 - \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$ і $\arccos(x + |\sin y|)$. Значить нерівність (12) може виконуватись лише у випадку, коли кожен із вказаних виразів перетвориться в нуль:

$$\begin{cases} 1 - \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} = 0, \\ \arccos(x + |\sin y|) = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему отримуємо:

$$\begin{cases} \frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x + |\sin y| = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 4k + 1, \\ |\sin y| = -4k. \end{cases} \qquad (14)$$

Останнє рівняння має розв'язок при $k = 0$ (при інших цілих k права частина рівняння буде за модулем більша 1). Значить систему (14) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} x = 1, \\ |\sin y| = 0, \end{cases}$$

звідки знаходимо $\begin{cases} x = 1, \\ y = \pi k \end{cases}$ - розв’язок нерівності (12).

Вправи для самостійного розв’язування до § 3

3.1. $\mathrm{tg}^2\pi(x+y) + \mathrm{ctg}^2\pi(x+y) = \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1.$

3.2. $\log_3|\pi x| + \log_{|\pi x|} 3 = \frac{2}{\sin^2(x+y) - 2\sin(x+y) + 2}.$

3.3. $2^{\mathrm{tg}^2 xy + \mathrm{ctg}^2 xy} = \frac{4}{\log_2(4x^2-4x+3)}.$

3.4. $4\sin^2 xy - 4\sin xy + 3 = \frac{4}{\ln|y| + \log_{|y|} e}.$

3.5. $3^{\sin x} = \frac{1}{\log^2_{\sqrt[3]{\pi}}(x+y) - 6\log_{\sqrt[3]{\pi}}(x+y) + 12}.$

3.6. $4\left(3\sqrt{4x-x^2}\sin^2\frac{x+y}{2} + 2\cos(x+y)\right) = 13 + 4\cos^2(x+y).$

3.7. $x^{\sin y} + (1-x)^{\cos y} = 1.$

3.8. $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)(1 + \mathrm{tg}^2\, 2y)(3 + \sin 3z) = 4.$

Розв’язати системи рівнянь.

3.9. $\begin{cases} 8\sin x\cos y\sin(x+y) + 1 = 0, \\ x = y + z. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} 4\left(2\cos x\cos y - \left(\sqrt{3}+1\right)\cos z\right)\cos(x+y) + 3 = 0, \\ x - y = z. \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = 2\sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}|\sin x| + \log_{|\sin x|}\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\cos^2 y, \\ \mathrm{tg}^2 y + 2^{\sin z} = 1. \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} 2^{1+\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 4\cos^2 y, \\ \log_{\frac{1}{2}} \sin z + \sin^2 y = 1. \end{cases}$

Розв'яжіть нерівності.

3.14. $y - \sqrt{1 - y - x^2} \geq \frac{1}{|\cos x|}$.

3.15. $\cos x - y^2 - \sqrt{y - x^2 - 1} \geq 0$.

3.16. $\frac{\log_3\left(2+2^{|x|}\right)}{\cos^2(x+y)} \leq 1$.

3.17. $(3 - \cos^2 x - 2\sin x)(\lg^2 y + 2\lg y + 4) \leq 3$.

3.18. $(\sin^2(x+y) + 2\sin(x+y) + 2)\log_2(3^x + 3^{-x}) \leq 1$.

3.19. $2^y - 2\cos x + \sqrt{y - x^2 - 1} \leq 0$.

3.20. $2^{\cos x} - |y| + \sqrt{y^2 + \frac{1}{|\cos x|} - 1} \leq \frac{1}{2}$.

3.21. $\pi y + 2\arcsin(x^2 + y) \geq 2\pi$.

3.22. $\lg(1+y) + \arcsin\left(2^{|x|} + y\right) \geq \frac{\pi}{2}$.

3.23. $\log_{\frac{1}{2}}(1+x) + \arcsin(x + y^2) \leq -1$.

Відповіді

§ 1. Комбіновані рівняння, системи рівнянь, нерівності

1.1. $\frac{\pi}{6}+\pi k,\ -\frac{\pi}{6}+\pi k\ ,\ \frac{\pi}{3}+\pi n,\ \ -\frac{\pi}{3}+\pi n.$ **1.2.** $\frac{\pi}{3}+\pi k,\ -\frac{\pi}{3}+\pi k$ **1.3.** $\pi k.$ **1.4.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ **1.5.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$ **1.6.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ **1.7.** $\log_3\left((-1)^k\frac{3\pi}{16}+\frac{9\pi k}{8}\right)$, де $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. **1.8.** $\log_2\left(\frac{\pi}{3}+4\pi k\right)$, де $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\log_2\left(-\frac{\pi}{3}+4\pi n\right)$, де $n\in\mathbb{N}$. **1.9.** $\log_2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right)$, де $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\log_2\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right)$, де $n\in\mathbb{N}$. **1.10.** $\frac{2\pi k}{5}$, $\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5},\ -\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5}$. **1.11.** $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ -\frac{\pi}{4}+\pi n.$ **1.12.** $\frac{\pi}{4}+\pi k.$ **1.13.** $2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n.$ **1.14.** $\frac{\pi}{4}+2\pi k.$ **1.15.** $10^{2k+\frac{1}{2}},\ 10^{2n}$. **1.16.** $(-1)^k\arcsin\left(\sqrt{10}-4\right)+\pi k.$ **1.17.** $\frac{\pi}{12}+2\pi k,\ \frac{11\pi}{12}+2\pi n.$ **1.18.** $(-1)^k\operatorname{arctg}\sqrt{8}+\pi k.$ **1.19.** $c.$ **1.20.** $\frac{\pi}{3}+2\pi k.$ **1.21.** $\frac{\pi}{4}+2\pi k.$ **1.22.** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n.$ **1.23.** $\frac{\pi}{8}+2\pi k.$ **1.24.** $\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+2\pi k.$ **1.25.** $\frac{9\pi}{5}+4\pi k.$ **1.26.** $\operatorname{arctg}\frac{-1+\sqrt{17}}{4}+2\pi k.$ **1.27.** $\arccos\frac{1}{3}+2\pi k.$ **1.28.** $\frac{\pi}{3}+\pi k.$ **1.29.** $\frac{\pi}{4}+2\pi k.$ **1.30.** $\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \pi-\operatorname{arctg}5+\pi n.$ **1.31.** $\frac{3\pi}{4}$. **1.32.** $\pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\pi k.$ **1.33.** $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k.$ **1.34.** $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k.$ **1.35.** $-\frac{\pi}{4}+2\pi k.$ **1.36.** $\frac{2\pi}{3}+2\pi k.$ **1.37.** $\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi k;\ \pm\arccos\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+2\pi n.$ **1.38.** $\frac{\pi}{6}+4\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n.$ **1.39.** $\frac{\pi}{6}+4\pi k.$ **1.40.** $-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{7\pi}{6}+4\pi n.$ **1.41.** $\frac{5\pi}{6}+4\pi k.$ **1.42.** $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **1.43.** $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **1.44.** $\frac{5\pi}{12}+2\pi k.$ **1.45.** $\frac{\pi}{6}+2\pi k.$ **1.46.** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k;\ (-1)^k\frac{1}{2}\arccos\frac{2-\sqrt{2}}{4}+\pi k.$ **1.47.** $\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n.$ **1.48.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k.$ **1.49.** $\pi k,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n.$ **1.50.** $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ (-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{4}+\pi k.$ **1.51.** $\frac{\pi}{2}+2\pi n.$ **1.52.** $2\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3};\ \frac{3\pi}{2};\ 2;\ 6.$ **1.53.** $\frac{1}{4}+k\le x\le\frac{3}{4}+k.$ **1.54.** $-\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{\pi}{6}+\pi k.$ **1.55.** $\frac{1}{4}+k\le x\le\frac{1}{2}+k,\ -\frac{1}{2}+n<x\le n.$ **1.56.** $0<x<\arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **1.57.** $\arccos\frac{-1+\sqrt{17}}{4}+2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{\pi}{4}+$

$2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. **1.58.** $2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n$. **1.59.** $\pi k < x \le \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$, $\frac{\pi}{3} + \pi n \le x < \frac{\pi}{2} + \pi n$. **1.60.** $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < 2\pi k$. **1.61.** $2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{4} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. **1.62.** $-\frac{\pi}{6} < x \le 1$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$. **1.63.** $2\pi k \le x < \frac{7\pi}{12} + 2\pi k$; $\frac{7\pi}{12} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{12} + 2\pi k$. **1.64.** $-\frac{\pi}{6} < x < 0$; $2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. **1.65.** $\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n$.

1.66. $\begin{cases} -\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x \ne 2\pi k; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \\ x \ne \pi + 2\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \\ x \ne \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \end{cases}$

1.67. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \arccos\frac{\sqrt{6}}{4} + 2\pi k$, $-\arccos\frac{\sqrt{6}}{4} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$. **1.68.** $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{3} + \pi k$. **1.69.** $3 < x < \pi$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < x < 5$. **1.70.** $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$, $0 < x \le \arcsin\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. **1.71.** $\pi < x \le \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1) + \pi$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi < x < \frac{5\pi}{4}$. **1.72.** $\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{12}$. **1.73.** $\frac{5\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{8} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{8} < x < 0$. **1.74.** $2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

1.75. $\begin{cases} 2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x \ne \frac{\pi}{8} + 2\pi k, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \\ x \ne \frac{5\pi}{8} + 2\pi n. \end{cases}$

1.76. $\operatorname{arctg} 2 + \pi k$; $\pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$; $\operatorname{arctg} 4 + \pi n \le x < \frac{\pi}{2} + \pi n$.

1.77. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k < x \le \frac{\pi}{4} + \pi k$. **1.78.** $\frac{\pi}{6} + \pi k < x \le \frac{\pi}{4} + \pi k$.

1.79. $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$, $3 \le x < \pi$. **1.80.** $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{3} + \pi k$.

1.81. $-\frac{3\pi}{2} < x \le -4$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n \ne 0)$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi l < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi l$ $(l \ne 0; -1)$; $(-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m$ $(m \ne 0; 1)$. **1.82.** $-\frac{\pi}{4} + \pi k \le x \le \frac{\pi}{4} + \pi k$. **1.83.** $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \le x \le \frac{\pi}{6} + 2\pi k$. **1.84.** $\frac{\pi}{3} + \pi k \le x \le \frac{2\pi}{3} + \pi k$.

1.85. $2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. **1.86.** $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$. **1.87.** $-\arccos\frac{1}{7} + 2\pi k < x < \arccos\frac{1}{7} + 2\pi k$. **1.88.** $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \le x < \frac{1}{2}$; $\frac{3}{4} < x \le \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **1.89.** $\emptyset$. **1.90.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $(k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, $0 < x < 1$.

1.91. $\begin{cases} \pi + 2\pi k < x < 2\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ x \ne \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases}$ $0 < x < 1$.

1.92. $(\pi + 2\pi k;\ \log_3(\pi + 2\pi k))$ $(k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$;
$\left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;\ \log_3\left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n\right)\right)$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$.

1.93. $\left(3n - \frac{3}{8}; n + \frac{1}{8}\right)$; $\left(6n - \frac{3}{4}; 2n + \frac{3}{4}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$.

1.94. $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$.

1.95. $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$.

1.96. $\left(-\frac{\sqrt[3]{4-\pi}}{\sqrt[3]{4}}; -\frac{\pi}{2\sqrt[3]{4-2\pi}}\right)$, $\left(-\sqrt[3]{1 - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}}; \frac{-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}{\sqrt[3]{1-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}}\right)$.

1.97. $\emptyset$ при $-1 < a < \sqrt{2}$; $(-1)^k \arcsin 10^{a\pm\sqrt{2a^2-2}} + \pi k$ при $-\sqrt{2} < a \le -1$; $(-1)^k \arcsin 10^{a-\sqrt{2a^2-2}} + \pi k$ при $a \le -\sqrt{2}$, $a \ge \sqrt{2}$.

1.98. $\emptyset$ при $a \le 0$, $a \ge 1$; $(-1)^k \arcsin 2^{-\sqrt{-\frac{1}{2}\log_2 a}} + \pi k$ при $0 < a < 1$.

1.99. $\emptyset$ при $a \le -\frac{1}{2}$; $\operatorname{arctg}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{1+2a}}\right) + \pi k$ при $a > -\frac{1}{2}$.

1.100. $0 < x < \arcsin a$, $1 < x < \frac{\pi}{2}$ при $0 < a \le \sin 1$; $\arcsin a < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < x < 1$ при $\sin 1 < a < 1$; $0 < x < 1$ при $a \ge 1$.

1.101. 1) $\arcsin a < x \leq 1$ при $0 < a \leq \sin 1$; 2) $1 \leq x < \arcsin a$ при $\sin 1 < a \leq 1$; 3) $1 \leq x < \frac{\pi}{2}$ при $a > 1$.

1.102. $\emptyset$ при $a < 3$, $a > \pi + 2$; $((a-3)^2, \cos(a-3))$ при $3 \leq a \leq \pi + 2$.

1.103. $\emptyset$ при $a \leq -1$, $a > \frac{\pi-4}{2}$; $(\log_2(a+1); 5; \sin(a+2))$ при $-1 < a \leq \frac{\pi-4}{2}$. **1.104.** $12k+9$; $12k+11$. **1.105.** $2 \leq a < 2{,}5$; $2{,}5 < a < 5$.

§ 2. Використання властивостей функцій при розв'язуванні рівнянь та нерівностей

2.1. $\emptyset$. **2.2.** $\emptyset$. **2.3.** $\emptyset$. **2.4.** $0{,}5$. **2.5.** 2. **2.6.** $0{,}5$. **2.7.** $0{,}5$. **2.8.** π. **2.9.** -1; 1. **2.10.** $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$. **2.11.** $\emptyset$. **2.12.** π. **2.13.** 0. **2.14.** 0. **2.15.** π. **2.16.** $\frac{1}{4}$. **2.17.** $\frac{1}{2}$. **2.18.** $\frac{1}{4}$. **2.19.** $\frac{\pi}{4} + \pi k$. **2.20.** $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$. **2.21.** $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$. **2.22.** 1. **2.23.** 0. **2.24.** π. **2.25.** $\frac{3\pi}{2}$. **2.26.** $-\frac{3\pi}{2} + 6\pi k$. **2.27.** -3. **2.28.** $\frac{1}{4}$. **2.29.** $\emptyset$. **2.30.** $\emptyset$. **2.31.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. **2.32.** 1. **2.33.** 3. **2.34.** $-\frac{1}{2}$. **2.35.** 0. **2.36.** -1. **2.37.** 2. **2.38.** πk. **2.39.** $2k+1$; $\frac{2k-1}{2}$. **2.40.** 0. **2.41.** $(\pi k; 1)$. **2.42.** $\frac{6\pi}{7}$; $\frac{12\pi}{7}$. **2.43.** $\frac{9\pi}{5}$; $\frac{17\pi}{5}$; 5π. **2.44.** $\frac{12\pi}{25}$; $\frac{24\pi}{25}$; $\frac{36\pi}{25}$.

§ 3. Нестандартні рівняння та нерівності

3.1. $\left(1; \frac{2k-3}{4}\right)$. **3.2.** $\left(\frac{3}{\pi}; \frac{\pi}{2} - \frac{3}{\pi} + 2\pi k\right), \left(-\frac{3}{\pi}; \frac{\pi}{2} + \frac{3}{\pi} + 2\pi k\right)$. **3.3.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$. **3.4.** $\left((-1)^k \frac{\pi}{6e} + \frac{\pi k}{e}; e\right)$, $\left((-1)^{k+1} \frac{\pi}{6e} + \frac{\pi k}{e}; e\right)$. **3.5.** $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ 3 + \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$. **3.6.** $\left(2;\ \pm\frac{2\pi}{3} - 2 + \pi k\right)$. **3.7.** $(0; 2\pi k < y < \pi + 2\pi k)$, $\left(1; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < y < \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$. **3.8.** $\left(\pi k; \frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} m\right)$. **3.9.** $\left(\frac{\pi}{6} + \pi(n+k);\ -\frac{\pi}{3} + \pi(n-k);\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi(n+k);\ -\frac{2\pi}{3} + \pi(n-k);\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi(n+k);\ \frac{\pi}{3} + \pi(n-k);\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$,

$\left(\frac{\pi}{6}+\pi(n+k);\ \frac{2\pi}{3}+\pi(n-k);\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$. **3.10.** $\left(\frac{\pi}{12}+\pi(n+k);\ \frac{\pi}{12}+\pi(n-k); 2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{12}+\pi(n+k);\ -\frac{\pi}{12}+\pi(n-k); 2\pi k\right)$, $\left(\frac{11\pi}{12}+\pi(n+k);\ -\frac{\pi}{12}+\pi(n-k); \pi+2\pi k\right)$, $\left(\frac{\pi}{12}+\pi(n+k);\ -\frac{11\pi}{12}+\pi(n-k); \pi+2\pi k\right)$. **3.11.** $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k;\ \frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi m\right)$. **3.12.** $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k;\ \pi n;\ \pi m\right)$. **3.13.** $\left(\pi k;\ \pi n; (-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m\right)$. **3.14.** $(0;\ 1)$. **3.15.** $(0;\ 1)$. **3.16.** $(0;\ \pi k)$. **3.17.** $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{1}{10}\right)$. **3.18.** $\left(0; -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$. **3.19.** $(0;\ 1)$. **3.20.** $(\pi+2\pi k;\ t)$, де $t\in R$. **3.21.** $(0;\ 1)$. **3.22.** $(0;\ 1)$. **3.23.** $(1;\ 0)$.

Література

1. Вибрані питання елементарної та вищої математики. Навчальний посібник. Вагіна Н.С., Онуфрієнко О.Г., Коваленко В.М. Мелітополь: Видавничий будинок Мелітопольської міської друкарні, 2018. 145 с.

2. Вибрані питання елементарної математики: посібник для вступників до вузів та слухачів підготовчих відділень. за ред. А. В. Скорохода. 2-е видання. К. : Вища школа, 1972. 420 с.

3. Збірник задач з математики для вступників до вищих навчальних закладів. за ред. М. І. Сканаві. 6-е видання. К. : Вища школа, 2014. 608 с.

4. Математика для вступників до вузів: Навч. посібник. За ред. В. В. Семенця Упоряд. : Бондаренко М. Ф., Дікарєв В. А., Мельников О. Ф., Семенець В. В., Шкляров Л. Й. Харків : «Компанія СМІТ», 2002. 1120 с.

5. Алгебра і початки аналізу : Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Х. : Гімназія, 2010. 352 с.

6. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Збірник задач з математики: Посібник для вступників до вузів. Київ «ТВіМС», 2000. 318 с.

7. Тригонометрія. Вчимося розв’язувати задачі. А.Г. Мерзляк. В.Б. Полонський, Ю.М. Рабінович та ін. К.: Генеза. 2008. 352 с.

Навчально-методичне видання

Соліч Катерина Василівна,
Федуник-Яремчук Оксана Володимирівна
Філозоф Леонтій Іванович

Неелементарні задачі в тригонометрії

Практикум для самостійної та аудиторної робіт з дисципліни
«Практикум розв’язування задач елементарної математики»

Друкується в авторській редакції