Волинський національний університет імені Лесі Українки

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні рекомендації для студентів

факультету інформаційних технологій і математики

Ч. ІІ

Луцьк 2023

УДК 519.21

С 79

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Волинського національного університету імені Лесі Українки

(протокол №__ від ___________ 2023 року)

Рецензенти:

Хомяк М.Я., кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри загальної математики та методики навчання інформатики Волинського національного університету імені Лесі Українки.

Костючко С.М., кандидат тех. наук, доцент кафедри комп'ютерної інженерії та кібербезпеки Луцького національного технічного університету.

Соліч К.В., Ковальчук І.Р., Філозоф Л.І.

С 79 Теорія ймовірностей і математична статистика. Методичні рекомендації для самостійної та аудиторної робіт з дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика». Ч. ІІ/ Катерина Василівна Соліч, Ігор Романович Ковальчук, Леонтій Іванович Філозоф. Луцьк. 2023. 79 с.

Методичні рекомендації містять теоретичний матеріал, розв'язки задач і дидактичний матеріал для індивідуальних робіт з теорії ймовірностей з тем «Дискретні випадкові величини», «Неперервні випадкові величини», «Дискретні випадкові вектори», «Неперервні випадкові вектори», «Коваріація. Коефіцієнт кореляції».

Видання призначене для студентів галузі знань 11 Математика та статистика, за спеціальністю 111 Математика, освітньої кваліфікації Бакалавр математики та студентів галузі знань 01 Освіта/ Педагогіка за спеціальністю 014 Середня освіта (Математика) освітньої кваліфікації Бакалавр середньої освіти зі спеціалізації «Середня освіта. Математика».

УДК 519.21

Передмова

У методичній розробці викладено в стислій формі теоретичний матеріал з тем «Дискретні випадкові величини», «Неперервні випадкові величини», «Дискретні випадкові вектори», «Неперервні випадкові вектори», «Коваріація. Коефіцієнт кореляції». Подано основні поняття, теореми, а також деякі висновки, зауваження, що є необхідними для розв'язування задач.

Кожна тема доповнена прикладами розв'язання типових задач. Досвід показує, що основною причиною труднощів для студентів при виконанні практичних завдань є слабкі навики аналізу різних ситуацій та їх ймовірнісного моделювання. Саме тому велику увагу приділяємо алгоритмізації розв'язування задач.

Запропонована велика кількість завдань для самостійного розв'язування може бути використана викладачами для проміжного і підсумкового контролю знань студентів, а також для індивідуального оцінювання.

РОЗДІЛ 4. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

4.1. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ І ЇХ РОЗПОДІЛИ

В кожному стохастичному експеременті можна розглядати величини, які набувають тих чи інших числових значень залежно від результатів експеременту. Такі величини називають **випадковими** і позначають через ξ, η, ζ, χ.

Оскільки результати стохастичного експеременту описують елементарними подіями ω, то випадкову величину ξ можна вважати числовою функцією $\xi = \xi(\omega)$, визначеною на просторі елементарних подій Ω. Проте, невсяку функцію, визначену на Ω, можна розглядати як випадкову величину. Для задання випадкової величини треба знати не лише її значення, а й ймовірності, з якими вона набуває цих значень. Для цього досить припустити, щоб для довільного дійсного x існувала ймовірність $\mathrm{P}\{\omega : \xi(\omega) < x\}$, тобто множина $\mathrm{A}_x = \{\omega : \xi(\omega) < x\}$ має бути випадковою подією ($\mathrm{A}_x \epsilon F$ σ- алгебрі випадкових подій ймовірносного простору (Ω, F, P)).

Означення 4.1. Нехай (Ω, F, P) – ймовірносний простір. **Випадковою величиною ξ** називають числову функцію $\xi = \xi(\omega) \in (-\infty; +\infty)$, яка визначена на просторі елементарних подій Ω і така, що для кожного дійсного x $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in F$.

Ймовірність випадкової події $\mathrm{A}_x = \{\omega : \xi(\omega) < x\}$ визначає функцію від x для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$.

Означення 4.2. Функцію $F(\mathrm{x}) = \mathrm{P}\{\ \xi < x\ \}$ (4.1)

і називають **функцією розподілу випадкової величини ξ** (ймовірність того, що випадкова величина ξ набуває значень, менших за x).

Властивості функції розподілу $\boldsymbol{F}(\mathrm{x})$

1. $0 \le F(x) \le 1$.
2. $F(+\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$.
3. Для довільних $a < b$ виконується $P\{a \le \xi \le b\} = F(a) - F(b)$.
4. Функція $F(x)$ неспадна.

5. Функція $F(x)$ неперервна зліва, тобто $F(\mathrm{x}-0) = F(x)$, для довільного x.

6. Для довільного a : $P\{\xi = a\} = F(a+0) - F(a)$.

Випадкова величина ξ вважається заданою, якщо відома її функція розподілу. При розв'язуванні задач зустрічаються, як правило, дискретні і неперервні випадкові величини, які задаються по-іншому.

4.2. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ І ЇХ РОЗПОДІЛИ

Означення 4.3. Випадкову величину ξ дискретною, якщо вона набуває лише скінченне або зліченне число різних значень $(x_1, \dots, x_k, \dots)$.

<u>Законом розподілу</u> дискретної випадкової величини $\xi = \xi(\omega)$ називатимемо функцію $P_\xi\colon x \to P_\xi(x), x \in X$, визначену на множині $X = \{x_1, \dots, x_k, \dots\}$ різних можливих значень випадкової величини ξ, що ставить у відповідність кожному можливому значенню $x \in X$ ймовірність $P\{\xi = x_k\} = p_k, k = 1,2, \dots$.

Закон розподілу зручно зображати таблицею:

ξ	x_1	x	$\dots$	x_k	$\dots$
p	p_1	p_2	$\dots$	p_k	$\dots$

(4.2)

При цьому $p_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. (4.3)

Для наочності закон розподілу дискретної випадкової величини зображають графічно. Для цього в прямокутній декартовій системі координат відкладають точки (x_1, p_1), $(x_2, p_2), \dots$, а потім послідовно з'єднують їх прямолінійними відрізками. Отримана ламана називається **<u>многокутником розподілу ймовірностей</u>**.

Нехай $F(x)$ - функція розподілу дискретної випадкової величини ξ із законом розподілу (4.2) і значення ξ розташовані в порядку зростання $x_1 < \dots < x_k < \dots$. Тоді для довільного дійсного x

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{x_k < x} p_{\mathrm{k}} \, . \qquad (4.4)$$

Значення функції $F(x)$ не змінюється при $x_k < x \leq x_{k+1}$, а в точках x_k функція $F(x)$ має стрибок величиною p_{k}. Отже, функція розподілу $F(x)$ розривна в точках x_k, східчаста і неперервна зліва.

<u>Приклад 4.1.</u> Випадкова величина ξ задана законом розподілу

ξ	1	2	5
p	0,2	0,5	0,3

Знайти функцію розподілу. Побудувати многокутник розподілу і графік функції $F(x)$.

Функція розподілу випадкової величини ξ має вигляд

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 1, \\ p_1 = 0{,}2, \ \ 1 < x \leq 2, \\ p_1 + p_2 = 0{,}7, \ \ 2 < x \leq 5, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1, x > 5. \end{cases}$$

Многокутник розподілу ймовірностей і графік функції розподілу (рис. 1 і рис. 2).

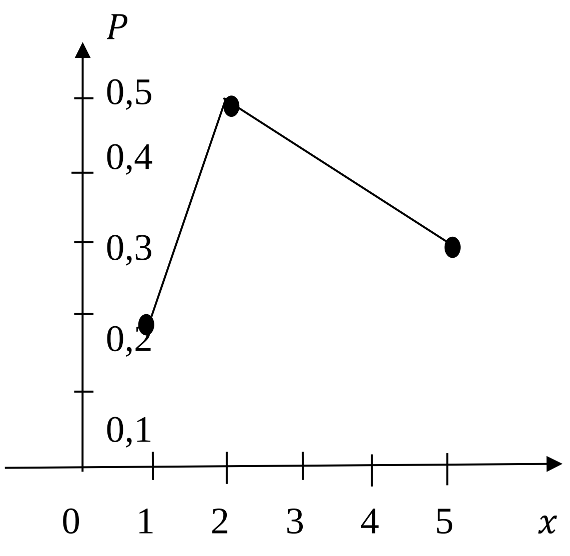


рис.1.

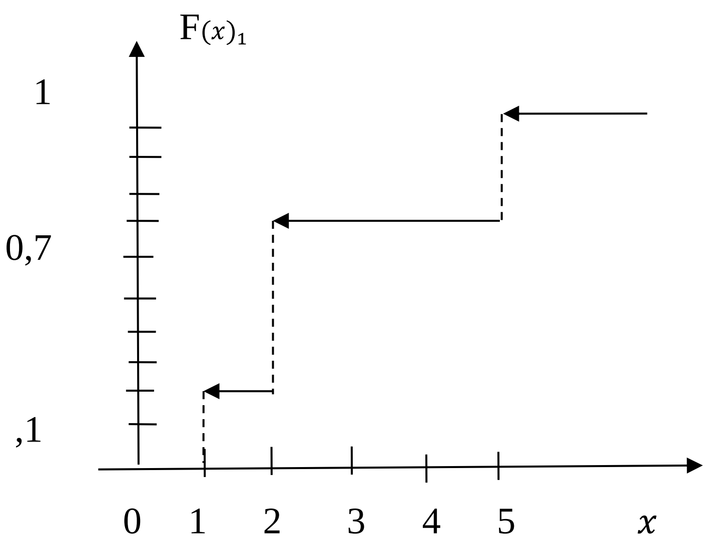


рис.2.

4.3. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

4.3.1. Математичне сподівання (середнє значення)

Означення 4.4. Нехай ξ – дискретна випадкова величина із законом розподілу $P\{\xi = x_k\} = p_k,\ k = 1,2,\ldots$. Тоді її **математичним сподіванням** M_ξ називається число (стала)

$$M_\xi = \sum_{к=1}^{\infty} x_k \cdot p_k, \qquad (4.5)$$

якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \cdot p_k$ збіжний (у противному випадку математимчне сподівання не існує).

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання сталої $(P(\xi = с) = 1)$ дорівнює самій сталій: $Mc = c$.

2. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання $Mc\xi = сM\xi$.

3. Математичне сподівання суми скінченного числа випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань: $M \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sum_{k=1}^{\infty} M\xi_k$.

4. Якщо випадкові величини ξ та η незалежні і мають математичні сподівання, то математмчне сподівання їх добутку дорівнює добутку їх математичних сподівань: $M\xi\eta = M\xi \cdot M\eta$.

5. Якщо $g(\text{x})$ функція в області $(-\infty; +\infty)$, то $\text{M}g(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k$ для дискретної випадкової величини ξ із законом розподілу $P\{\xi = x_k\} = p_k,\ k = 1,2,\ldots$ за умови $\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_k)| \cdot p_k < \infty$.

4.3.2. Дисперсія

Означення 4.5. Дисперсією $D\xi$ випадкової величини ξ називається число

$$D\xi = \text{M}(\xi - \text{M}\xi)^2. \qquad (4.6)$$

Властивості дисперсії

1. $D\xi \geq 0$ для будь-якої випадкової величини ξ .
2. Дисперсія сталої дорівнює нулеві: $D\text{c} = 0$.

3. $Dc\xi = c^2 D\xi$.

4. Якщо випадкові величини ξ і η незалежні, то $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$.

5. Якщо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ попарно незалежні, то $D \sum_{k=1}^{n} \xi_k = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k$.

6. $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$.

Нехай ξ – дискретна випадкова величина із законом розподілу $P\{\xi = x_k\} = p_k$ $k = 1,2, \dots$, то її дисперсію обчислюють за формулою (випливає з означення):

$$D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \sum_{k=1}^{n} (x_x - M\xi)^2 \cdot p_k. \qquad (4.7)$$

Або (випливає з властивості):

$$D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k - \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k\right)^2. \qquad (4.8)$$

Означення 4.6. Величина $\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}$ називається **середнім квадратичним відхиленням випадкової величини ξ**.

4.3.3. Моменти випадкової величини і інші числові характеристики

Означення 4.7. Початковим моментом порядку n ($n \geq 1$ – ціле число) називається число $\mathcal{L}_n = M\xi^n$, число $\mu_n = M(\xi - M\xi)^n$ - центральним моментом порядку n.

Зокрема, математичне сподівання є початковим моментом першого порядку, а дисперсія – центральним моментом другого порядку.

Нехай дискретна випадкова величина ξ має закон розподілу $P\{\xi = x_k\} = p_k$. Тоді її початкові і центральні моменти обчислюють за формулами:

$$\mathcal{L}_n = \sum_{\kappa=1}^{\infty} x_k^n p_k, \qquad (4.9)$$

$$\mu_n = \sum_{\kappa=1}^{\infty} (x_\kappa - M\xi)^n p_k\,. \qquad (4.10)$$

Центральні моменти виражаються через початкові. Для моментів перших чотирьох порядків справедливі формули:

$$\mu_1 = 0,$$

$$\mu_2 = \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1^2,$$

$$\mu_3 = \mathcal{L}_3 - 3\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 + 2\mathcal{L}_1^3, \qquad (4.11)$$

$$\mu_4 = \mathcal{L}_4 - 4\mathcal{L}_1\mathcal{L}_3 + 6\mathcal{L}_1^2\mathcal{L}_2 - 3\mathcal{L}_1^4.$$

Означення 4.8. Коефіцієнтом асиметрії A_s випадкової величини ξ називається відношення

$$A_s = \frac{\mu_3}{(\sigma(\xi))^3}. \quad (4.12)$$

Означення 4.9. Коефіцієнтом ексцесу E_s випадкової величини ξ називається число

$$E_s = \frac{\mu_4}{(\sigma(\xi))^4} - 3. \quad (4.13)$$

Означення 4.10. Модою $\mathrm{Mo}(\xi)$ дискретної випадкової величини ξ називається її найбільш ймовірне значення (для якого ймовірність p_k досягає максимуму).

Якщо ймовірність досягає максимуму не в одній, а в декількох точках, розподіл називають **полімодальним**. Існують розподіли, які не мають моди. Їх називають **антимодальними**.

Приклад 4.2. Знайти $M\xi$, $D\xi$, $\sigma(\xi)$, $\mathrm{Mo}(\xi)$, A_s, E_s для дискретної випадкової величини ξ, заданої в прикладі 4.1.

Випадкова величина ξ має закон розподілу заданий таблицею

ξ	1	2	5
p	0,2	0,5	0,3

1) За формулою (4.5)

$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}3 = 0{,}2 + 1 + 0{,}9 = 2{,}1.$

2.1) за формулою (4.6)

$D\xi = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M\xi)^2 \cdot p_k = (1 - 2{,}1)^2 \cdot 0{,}2 + (2 - 2{,}1)^2 \cdot 0{,}5 +$

$(3 - 2{,}1)^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}242 + 0{,}005 + 0{,}243 = 0{,}49.$

2.2) За формулою (4.7)

$\mathrm{M}\xi^2 = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mathrm{x}_\kappa^2 \mathrm{p}_\kappa = 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}5 + 3^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}2 + 2{,}0 + 2{,}7 = 4{,}9.$

$D\xi = \mathrm{M}\xi^2 - (\mathrm{M}\xi)^2 = 4{,}9 - (2{,}1)^2 = 4{,}90 - 4{,}41 = 0{,}49.$

3) $\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7.$

4) $\mathrm{Mo}(\xi) = 2.$

5) Знайдемо початкові моменти 3-го і 4-го порядків (формула (4.8)):

6) $\mathcal{L}_3 = \text{M}\xi^3 = \sum_k x_k^3 p_k = 1^3 \cdot 0{,}2 + 2^3 \cdot 0{,}5 + 3^3 \cdot 0{,}3 = 0{,}2 + 4{,}0 + 8{,}1 =$
$= 12{,}3;$

$$\mathcal{L}_4 = \text{M}\xi^4 = \sum_k x_k^4 p_k = 1^4 \cdot 0{,}2 + 2^4 \cdot 0{,}5 + 3^4 \cdot 0{,}3 = 0{,}2 + 8{,}0 + 24{,}3 =$$

$= 32{,}5.$

За формулами (4.10) обчислюємо центральні моменти 3-го і 4-го порядків:

$\mu_3 = \mathcal{L}_3 - 3\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 + 2\mathcal{L}_1^3 = 12{,}3 - 3 \cdot 2{,}1 \cdot 4{,}9 + 2 \cdot 2{,}1^3 = 12{,}3 - 30{,}87 +$
$+18{,}522 = -0{,}048.$

$\mu_4 = \mathcal{L}_4 - 4\mathcal{L}_1\mathcal{L}_3 + 6\mathcal{L}_1^2\mathcal{L}_2 - 3\mathcal{L}_1^4 = 32{,}5 - 4 \cdot 2{,}1 \cdot 12{,}3 + 6 \cdot 2{,}1^2 \cdot 4{,}9 -$
$-3 \cdot 2{,}1^4 = 32{,}5 - 103{,}32 + 129{,}654 - 58{,}3443 = 0{,}4897.$

Асиметрія:

$A_s = \frac{\mu_3}{\left(\sigma(\xi)\right)^3} = \frac{-0{,}048}{(0{,}7)^3} \approx -0{,}1399.$

Ексцес:

$\text{E}_s = \frac{\mu_4}{(\sigma(\xi))^4} - 3 = \frac{0{,}04897}{(0{,}7)^4} - 3 \approx -2{,}1602.$

4.4. ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Біноміальний розподіл. Випадкова величина ξ, яка набуває значень $0,1,2,\dots,n$ має біноміальний розподіл із параметрами n і p $(0 < p < 1)$, якщо

$$\text{P}\{\xi = k\} = C_n^k \cdot p^k(1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,\dots,n. \tag{4.14}$$

Таку схему можна інтерпритувати, як число появ події А в схемі Бернуллі при n випробуваннях із $P(A) = p$ у кожному випробуванні.

Математичне сподівання: $M\xi = np$.

Дисперсія біноміального розподілу: $D\xi = npq$

Геометричний розподіл. Випадкова величина ξ, яка набуває значень $0,1,2,\dots,n$ має геометричний розподіл із параметрами n і p $(0 < p < 1)$, якщо

$$P\{\xi = k\} = p(1-p)^{k-1}, \ k = 1,2,\dots \tag{4.15}$$

Таку випадкову величину можна інтерпритувати, як число незалежних випробувань до появи перший раз події А (успіху) з $P(A) = p$ у кожному випробуванні.

Математичне сподівання геометричного розподілу $M\xi = \frac{1}{\mathrm{p}}$, а дисперсія – $D\xi = \frac{q}{\mathrm{p}^2}$.

Розподіл Пуассона. Випадкова величина ξ, яка набуває значень $0,1,2,\dots,n$ має розподіл із параметрами $\lambda > 0$, якщо

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda}{k!}e^{-\lambda}, k = 1; 2; \dots . \qquad (4.16)$$

Пуасонів розподіл має числові характеристики: $\mathrm{M}\xi = D\xi = \lambda$.

Приклад 4.3. Проводиться перевірка великої партії деталей до виявлення нестандартної. Скласти закон розподілу числа перевірених деталей. Знайти математичне сподівання і дисперсію, якщо відомо, що ймовірність браку для кожної деталі рівна 0,1.

Випадкова величина ξ – число перевірених деталей має геометричний розподіл з параметром $p = 0{,}1$ ($q = 1 - p = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$). Тому закон розподілу мае вигляд: $P\{\xi = k\} = 0{,}1 \cdot 0{,}9^{k-1}, k = 1,2, \dots$.

$M\xi = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}1} = 10,$

$D\xi = \frac{q}{p^2} = \frac{0{,}9}{0{,}12} = 90.$

РОЗДІЛ 5. НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

5.1 ЩІЛЬНІСТЬ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Означення 5.1. Якщо існує невід'ємна інтегровна функція p(x) така, що для довільного дійсного x функцію розподілу F(x) випадкової величини ξ можна подати у вигляді

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du, \qquad (5.1)$$

то випадкову величину ξ називають **<u>неперервною</u>**, а підінтегральну функцію $p(x)$ – **<u>щільністю її розподілу</u>**.

Властивості щільності розподілу

1) $p(x) \geq 0$.
2) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$.
3) $P\{a \leq \xi \leq b\} = \int_{a}^{b} p(x)dx$.
4) $P'(x) = p(x)$ у точках неперервності функції $p(x)$.

Ймовірність того, що неперервна випадкова величина набуває довільного фіксованого значення a, дорівнює 0. Тобто $P\{\xi = a\} = 0$. Тому для неперервної випадкової величини ξ

$$P\{a \leq \xi < b\} = P\{a \leq \xi \leq b\} = P\{a < \xi \leq b\} = P\{a < \xi < b\} = \int_{a}^{b} p(x)dx.$$

<u>Приклад 5.1.</u> Дано щільність розподілу $p(x)$ неперервної випадкової величини ξ

$$p(x) = \begin{cases} csinx, & x \in (0; \frac{\pi}{2}], \\ 0, & x \notin (0; \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Знайти: 1) сталу C; 2) функцію розподілу $F(x)$; 3) $P\{0 < \xi < \frac{\pi}{2}\}$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$.

1) Сталу C знайдемо з властивості 2 щільності розподілу. Маємо

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = C\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin2xdx = C\,(-\frac{cos2x}{2}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = C\left(-\frac{cos\pi}{2} + \frac{cos0}{2}\right) =$$

$$= C\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = C.$$

Отже, $C = 1$.

2) За означенням

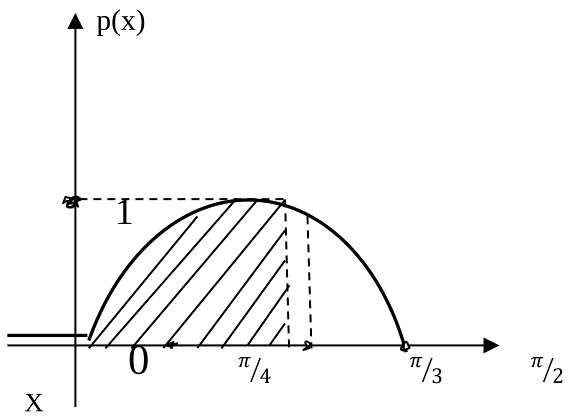
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du=\begin{cases}0,\ x\le 0,\\ \int_0^x sin2udu=\frac{1}{2}-\frac{cos2x}{2},0<x\le\frac{\pi}{2},\\ 1,\ x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

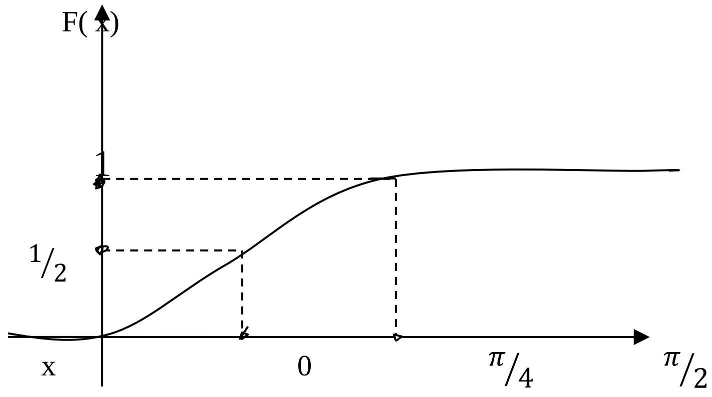
3) За властивістю 3

$$P\left\{0<\xi<\frac{\pi}{2}\right\}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}p(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}sin2xdx=-\frac{1}{2}cos2x|_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}cos\frac{2\pi}{3}+$$

$$+\frac{1}{2}cos0=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

4) Графіки функцій $p(x)$ і $F(x)$ мають вигляд:





5.2 ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

5.2.1 Математичне сподівання . Дисперсія

Означення 5.2. Нехай ξ – неперервна випадкова величина із законом розподілу p(x). **Математичним сподіванням** випадкової величини ξ називають число

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx, \tag{5.2}$$

якщо невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|x|p(x)dx$ збіжний (у противному разі математичне сподівання не існує).

Математичне сподівання неперервної випадкової величини має властивості 1-4 (див. п. 4.3.1). Крім того, якщо $g(x)$ неперервна функція в області $(-\infty;+\infty)$, то $Mg(x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)p(x)dx,$ (5.3)

за умови, що $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|p(x)dx<\infty$.

Дисперсія неперервної випадкової величини ξ зі щільністю розподілу $p(x)$ обчислюється за формулою (випливає з формул 4.5 і 5.3):

$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M\xi)^2 p(x)dx$. (5.4)

Також для обчислення дисперсії можна скористатися властивістю 6 (п. 4.3.2):

$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx\right)^2$. (5.5)

5.2.2 <u>Інші числові характеристики неперервних випадкових величин</u>

В пункті 4.3.3 дано означення моментів, асиметрії і ексцесу довільної випадкової величини.

Нехай ξ – неперервна випадкова величина зі щільністю $p(x)$. Тоді її початкові і центральні моменти обчислюють за формулами

$\mathcal{L}_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x)dx$, (5.6)

$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M\xi)^n p(x)dx$. (5.7)

Означення 5.3. **<u>Медіаною $\boldsymbol{M}$е($\boldsymbol{\xi}$)</u>** неперервної випадкової величини ξ називають таке її значення, для якого виконується рівність ймовірностей подій

Р$\{\xi < Me\xi\} = P\{\xi > Me\xi\}$.

Пряма $x = Me\xi$ ділить навпіл площу фігури, обмеженої графіком функції $p(x)$ і віссю абсцис.

Означення 5.4. **<u>Модою $\boldsymbol{M}$о($\boldsymbol{\xi}$)</u>** неперервної випадкової величини ξ називають таке її значення, для якого щільність розподілу $p(x)$ досягає найбільшого значення.

<u>Приклад 5.2.</u> Знайти математичне сподівання, дисперсію, моду і медіану випадкової величини ξ, заданої в прикладі 5.1.

1) За формулою (5.2)

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xsin2xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\left(-\frac{1}{2}cos2x\right) = -\frac{1}{2}xcos2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos2xdx = -\frac{\pi}{4}cos\pi + \frac{1}{4}sin2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(0-0) = \frac{\pi}{4}.$$

2) Обчислимо дисперсію за властивістю

$D\xi = $ М$\xi^2 - ($М$\xi)^2$, тобто за формулою (5.5).

$$\text{М}\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 sin2xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 d\left(-\frac{1}{2}cos2x\right) = -\frac{1}{2}x^2 cos2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2xcos2xdx = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd(sin2x) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}\left(xsin2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2xdx\right) =$$

$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2}\frac{cos2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}(cos\pi-cos0)=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}$.

Тоді $D\xi=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$.

3) Оскільки $\max p(x)=1$ при $x=\frac{\pi}{4}$, то $\text{Mo}(\xi)=\frac{\pi}{4}$.

4) Графік щільності симетричний відносно прямої $x=\frac{\pi}{4}$, тому $Me(\xi)=\frac{\pi}{4}$.

5.3 ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Рівномірний розподіл. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[a;b]$, якщо щільність її розподілу

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, \mathrm{x}\in[a;b],\\ 0, \ \mathrm{x}\notin[a;b].\end{cases} \tag{5.8}$$

Величину ξ можна інтерпритувати як таку, що набуває з рівними шансами довільних значень з відрізка $[a;b]$.

Математимчне сподівання і дисперсія рівномірного розподілу відповідно дорівнюють

$M\xi=\frac{a+b}{2}$, $\quad D\xi=\frac{(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}{12}$.

Показниковий розподіл. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром λ $(\lambda>0)$, якщо щільність її розподілу

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, \ x\geq 0,\\ 0, \ x<0.\end{cases} \tag{5.9}$$

Для показникового закону розподілу

$M\xi=\frac{1}{\lambda}$, $\quad D\xi=\frac{1}{\lambda^2}$.

Розподіл Коші. Випадкова величина ξ має розподіл коші з параметрами a $(a>0)$ і c, якщо щільність її розподілу

$$p(x)=\frac{\mathrm{a}}{\pi(a^2+(x-c)^2)}. \tag{5.10}$$

Якщо $a=1$, $c=0$, то

$$p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}. \tag{5.11}$$

Розподіл Коші має властивість стійкості, тобто сума випадкових величин, розподілених за законом Коші також має розподіл коші.

Математичне сподівання не існує.

Нормальний (Гауссів) розподіл $N(a,\sigma^2)$. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл із параметрами a,$\sigma>0$, якщо щільність її розподілу

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x \in (-\infty; +\infty). \qquad (5.12)$$

Для нормального розподілу $M\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$.

Якщо $a = 0$, $\sigma = 1$, то отримаємо стандартний нормальний розподіл. Щільність цього розподілу

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (5.13)$$

Ймовірність попадання нормальної випадкової величини в інтервал $(\alpha; \beta)$ можна знайти за допомогою функції Лапласа:

$$P\{\alpha < \xi < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - \mathrm{a}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \mathrm{a}}{\sigma}\right). \qquad (5.14)$$

Для симетричного відносно а проміжку $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ маємо

$$\mathrm{P}\{|\xi - a| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \qquad (5.15)$$

Приклад 5.3. В магазин надійшла велика партія товару. Вага одиниці товару – випадкова величина, яка підпорядковується нормальному закону з математичним сподіванням а=90 кг і середнім квадратичним відхиленням 15 кг. 1) знайти ймовірність того, що вага випадково відібраної одиниці товару буде знаходитись від 80 до 120 кг; відхилиться від математичного сподівання менше, ніж на 5 кг. 2) З ймовірністю 0,899 визначити межі, в яких буде знаходитися вага випадково відібраного товару?

1) а) скористаємося формулою (5.14):

$$P\{80 < \xi < 120\} = \Phi\left(\frac{120 - 90}{15}\right) - \Phi\left(\frac{80 - 90}{15}\right) \approx \Phi(2) + \Phi(0{,}67) =$$
$$= 0{,}47725 + 0{,}24857 = 0{,}72582.$$

б) Скористаємося формулою (5.15) розрахунку ймовірності відхилення випадкової величини ξ від математичного сподівання ($\varepsilon = 5$ кг):

$$\mathrm{P}\{|\xi - 90| < 5\} = 2\Phi\left(\frac{5}{15}\right) \approx 2\Phi(0{,}33) \approx 2 \cdot 0{,}1293 = 0{,}2586.$$

2) Знайдемо межі, в яких з ймовірністю 0,899 буде знаходитися вага випадково відібраної одиниці товару

$$P\{a - \varepsilon < \xi < a + \varepsilon\} = \mathrm{P}\{|\xi - a| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

В нашому випадку.

$$\mathrm{P}\{|\xi - 90| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{15}\right) = 0{,}899.$$

Звідси $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{15}\right) = \frac{0{,}899}{2} = 0{,}4495$.

За таблицею функції Лапласа (таб. 3 додатків) знайдемо аргумент:

$\varepsilon/15 = 1{,}64 \implies \varepsilon = 1{,}64 \cdot 15 = 24{,}6.$

Шукані межі інтервалу $(90 - 24{,}6;\ 490 + 24{,}6)$ або $(65{,}4; 144{,}6)$.

РОЗДІЛ 6. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕКТОРИ

6.1. БАГАТОВИМІРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ

Означення 6.1. Нехай $\xi_{1,}\xi_{2,\dots,}\xi_n$ – випадкові величини на ймовірносному просторі (Ω, F, P). Функцію $\xi(\omega) = \xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ називатимемо n-вимірною випадковою величиною або випадковим вектором в R^n.

Означення 6.2. Функцією розподілу випадкового вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ будемо називати функцію

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\omega: \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \dots, \xi_n(\omega) < x_n\} \quad (6.1)$$

Означення 6.3. Випадкові величини $\xi_{1,}\xi_{2,\dots,}\xi_n$ називаються незалежними, якщо

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n). \quad (6.2)$$

Якщо $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - незалежні випадкові величини, то для довільних множин $B_1, B_2, \dots, B_n$

$$P\big(\xi_1 \epsilon B_1, \xi_2 \epsilon B_2, \dots, \xi_n \epsilon B_n\big\} = P\big\{\xi_1 \epsilon B_1\big\} \cdot P\big\{\xi_2 \epsilon B_2\big\} \cdot \dots \cdot P\{\xi_n \epsilon \mathrm{B}_n\} \quad (6.3)$$

і навпаки.

Нехай (ξ, η) – двовимірна випадкова величина з функцією розподілу $F(x, y) = P\{\xi < x, \eta < y\}$.

Геометрично $F(x, y)$ інтерпритується як ймовірність попадання випадкової точки (ξ, η) у квадрант із вершиною (x, y).

Властивості функції розподілу $\boldsymbol{F_{\xi\eta}(x, y) = F(x, y)}$

1. $F(+\infty, +\infty) = 1$, $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$.
2. Знаючи функцію розподілу $F(x, y)$ випадкового вектора (ξ, η), можна знайти функцію розподілу кожної з його координат:

$$F_\xi(x) = F(x, +\infty), \qquad F_\eta(y) = F(+\infty, y).$$

3. Функція розподілу $F(x, y)$ неспадна по кожному з аргументів.
4. $P\{ x_1 \le \xi \le x_2, y_1 \le \eta \le y_2\} = F\{x_2, y_2\} - F\{x_1, y_2\} - F\{x_2, y_1\} +$
$+F\{x_1, y_1\}$.

6.2. ДИСКРЕТНИЙ ВИПАДКОВИЙ ВЕКТОР

Означення 6.4. Випадковий вектор називається дискретним, якщо його компоненти – дискретні величини.

Означення 6.5. Законом розподілу дискретної випадкової величини $\zeta = (\xi, \eta)$ називатимемо функцію

$P_\zeta: (x_i, y_i) \to P_\zeta(x_i, y_i), (x_i, y_i) \epsilon X,$

визначену на множині $X \subset R^2$ всіх можливих значень випадкової величини $\zeta = (\xi, \eta)$.

Закон розподілу дискретного випадкового вектора $\zeta = (\xi, \eta)$ будемо записувати у вигляді

$$P\{\ \xi = x_i, \eta = y_i\} = p_{ij}, \quad i, j = 1,2, \dots . \qquad (6.4)$$

Закон розподілу (6.4) можна подати у вигляді таблиці

η \ ξ	y_1	y_2	…	y_j	…	Σ
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1j}	…	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2j}	…	$p_{2\cdot}$
…	…	…	…	…	…	…
x_i	p_{i1}	p_{i2}	…	p_{ij}	…	$p_{i\cdot}$
…	…	…	…	…	…	…
Σ	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	…	$p_{\cdot j}$	…	1

(6.5)

Тут $x_1, x_2, \dots -$ значення випадкової величини ξ; $y_1, y_2, \dots -$ значення випадкової величини η, $p_{ij} = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$, при цьому $p_{ij} \geq 0$, $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

Крім того

$$\sum_j p_{ij} = P\{\xi = x_i\} = p_{i\cdot}, \qquad (6.6)$$

$$\sum_i p_{ij} = P\{\eta = y_j\} = p_{\cdot j}.$$

Для функції розподілу *F(x,y)* дискретного випадкового вектора (ξ, η), заданого законом розподілу (6.4) справедлива рівність

$$F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij}. \qquad (6.7)$$

Дискретні випадкові величини ξ та η, які набувають значень $x_1, x_2, \dots$ і $y_1, y_2, \dots$ відповідно, є **незалежними,** якщо для всіх i, j виконується рівність

$$P\ \{\ \xi = x_i, \eta = y_i\} = P\{\xi = x_i\} \cdot P\{\eta = y_i\}. \qquad (6.8)$$

<u>Приклад 6.1.</u> Закон розподілу дискретної випадкової величини (ξ, η) задано таблицею

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1	2
1	0,10	0,25	0,30	0,15
2	0,10	0,05	0,00	0,05

Знайти: 1) закони розподілу випадкових величин ξ та η;

2) $P\{\xi < 2, \eta \geq 0\}$;

3) $F(1;-2)$, $F(1{,}1;1{,}5)$, $F(3;0{,}4)$.

Чи незалежні ξ та η?

1) $P\{\xi = 1\} = \sum_j \mathrm{p}_{1\mathrm{j}} = 0{,}10 + 0{,}25 + 0{,}30 + 0{,}15 = 0{,}8$.

$P\{\xi = 2\} = \sum_j \mathrm{p}_{2\mathrm{j}} = 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}00 + 0{,}05 = 0{,}2$.

Закон розподілу випадкової величини ξ має вигляд

ξ	1	2
p	0,8	0,2

$P\{\eta = -1\} = \sum_i p_{i1} = 0{,}10 + 0{,}10 = 0{,}2$;

$P\{\eta = 0\} = \sum_i p_{i2} = 0{,}25 + 0{,}05 = 0{,}3$;

$P\{\eta = 1\} = \sum_i p_{i3} = 0{,}30 + 0{,}00 = 0{,}3$;

$P\{\eta = 2\} = \sum_i p_{i4} = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}2$.

Закон розподілу випадкової величини η має вигляд:

η	-1	0	1	2
p	0,2	0,3	0,3	0,2

2) $P\{\xi < 2, \eta \geq 0\} = 0{,}25 + 0{,}30 + 0{,}15 = 0{,}6$.

3) $F(2;-2) = P\{\xi < 2, \eta < -2\} = P\{(\xi < 2) \cap (\eta < -2)\}0$;

$F(1{,}1;+1{,}5) = P\{\xi < 1{,}1, \eta < +1{,}5\} = 0{,}10 + 0{,}25 = 0{,}35$;

$F(3;0{,}4) = P\{\xi < 3, \eta < 0{,}4\} = 0{,}10 + 0{,}25 + 0{,}10 + 0{,}05 = 0{,}5$.

Випадкові величини ξ та η залежні. Наприклад,

$P\{\xi = 2, \eta = 1\} = 0$, але $P\{\xi = 2\} \cdot P\{\eta = 1\} = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06 \neq 0$.

Якщо зафіксувати значення одного з аргументів, наприклад, покласти $\eta = y_i$, то отриманий розподіл випадкової величини ξ називається **умовним розподілом ξ за умови $\eta = y_i$**.

$$P\left\{\xi = x_i / \eta = y_i\right\} = \frac{P\{\xi=x_i,\eta=y_i\}}{P\{\eta=y_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}. \qquad (6.9)$$

Аналогічно **умовний розподіл η за умови $\xi = x_i$** задається за допомогою умовних ймовірностей

$$P\left\{\eta = y_i / \xi = x_i\right\} = \frac{P\{\xi=x_i,\eta=y_i\}}{P\{\xi=x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}. \qquad (6.10)$$

Приклад 6.2. Знайти умовні закони розподілу випадкової величини ξ за умови $\eta = 2$ та випадкової величини η за умови $\xi = 1$ для прикладу 6.1.

1) $P\{\eta = 2\} = p_{\cdot 4} = 0{,}2$.

Знайдемо умовні ймовірності $P\left\{\xi = x_i / \eta = y_4\right\}$:

$$P\left\{\xi = +1 / \eta = 2\right\} = \frac{p_{14}}{p_{\cdot 4}} = \frac{0{,}15}{0{,}2} = 0{,}75;$$

$$P\left\{\xi = 2 / \eta = 2\right\} = \frac{p_{24}}{p_{\cdot 4}} = \frac{0{,}05}{0{,}2} = 0{,}25.$$

Отримаємо:

ξ	1	2
$P\left\{\xi / \eta = 2\right\}$	0,75	0,25

2) $P\{\xi = 1\} = p_{1\cdot} = 0{,}8$.

Шукаємо умовні ймовірності $P\left\{\eta = y_i / \xi = x_1\right\} = \frac{p_{1j}}{p_{1\cdot}}$:

$$P\left\{\eta = -1 / \xi = 1\right\} = \frac{p_{11}}{p_{1\cdot}} = \frac{0{,}10}{0{,}8} = 0{,}125;$$

$$P\left\{\eta = 0 / \xi = 1\right\} = \frac{p_{12}}{p_{1\cdot}} = \frac{0{,}25}{0{,}8} = 0{,}3125;$$

$$P\left\{\eta = 1 / \xi = 1\right\} = \frac{p_{13}}{p_{1\cdot}} = \frac{0{,}3}{0{,}8} = 0{,}375;$$

$$P\left\{\eta = 2 / \xi = 1\right\} = \frac{p_{14}}{p_{1\cdot}} = \frac{0{,}15}{0{,}8} = 0{,}1875.$$

Отримаємо:

η	-1	0	1	2
$P\left\{{}^{\eta}/_{\xi = 1}\right\}$	0,125	0,3125	0,375	0,1875

6.3. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕКТОРІВ

Нехай задано дискретний випадковий вектор (ξ, η) із законом розподілу $P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}p_{ij}$.

Математичні сподівання і дисперсії випадкових величин ξ і η обчислюються за формулами:

$$M\xi = \sum_i \sum_j x_i \, \mathrm{p_{ij}} = \sum_i x_i p_{i\cdot}\,; \quad (6.11)$$

$$D\xi = \sum_i \sum_j x_i^2 \, \mathrm{p_{ij}} - (\mathrm{M\xi})^2 = \sum_i x_i^2 p_{i\cdot} - (\mathrm{M\xi})^2; \quad (6.12)$$

$$M\eta = \sum_i \sum_j \mathrm{y}_j \, \mathrm{p_{ij}} = \sum_j y_j p_{\cdot j}\,; \quad (6.13)$$

$$D\eta = \sum_i \sum_j y_j^2 \, \mathrm{p_{ij}} - (\mathrm{M\eta})^2 = \sum_j y_j^2 p_{\cdot j} - (\mathrm{M\eta})^2. \quad (6.14)$$

Тоді середні квадратичні відхилення шукають за означенням

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}, \;\; \sigma(\eta) = \sqrt{D\eta}. \quad (6.15)$$

Коваріацію випадкових величин ξ і η зручно шукати за властивістю $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = M(\xi \cdot \eta) - M\xi \cdot M\eta$:

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \sum_i \sum_j x_i \cdot y_i \cdot \mathrm{p_{ij}} - M\xi \cdot M\eta. \quad (6.16)$$

Умовним математичним сподіванням випадкової величини η при умові, що $\xi = x_i$ називається математичне сподівання η, обчислене за умовним розподілом (6.10):

$$\mathrm{M}\left\{{}^{\eta}/_{\xi = \mathrm{x}_i}\right\} = \sum_j \mathrm{y}_j \cdot \frac{p_{ij}}{\mathrm{p_{i\cdot}}}. \quad (6.17)$$

Приклад 6.3. Знайти $M\xi, D\xi, M\eta, D\eta, \sigma(\xi), \sigma(\eta)$, $\mathrm{cov}(\xi, \eta)$, $\rho(\xi, \eta)$, $\mathrm{M}\left({}^{\xi}/_{\eta = 2}\right)$ і $\mathrm{M}\left({}^{\eta}/_{\xi = 1}\right)$ для прикладу 6.1.

Просумуємо ймовірності в таблиці по рядках і стовпцях:

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1	2	$p_{i\cdot}$
1	0,1	0,25	0,3	0,15	0,8

2	0,1	0,05	0	0,05	0,2
$p_{\cdot j}$	0,2	0,3	0,3	0,2	1

$M\xi = \sum_i x_i p_{i\cdot} = 1 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 0{,}2 = 1{,}2;$

$M\xi^2 = \sum_i x_i^2 p_{i\cdot} = 1 \cdot 0{,}8 + 4 \cdot 0{,}2 = 1{,}6;$

$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 1{,}6 - (1{,}2)^2 = 0{,}16;$

$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4;$

$M\eta = \sum_j y_j p_{\cdot j} = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}5;$

$M\eta^2 = \sum_j y_j^2 p_{\cdot j} = 1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 = 1{,}3;$

$D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2 = 1{,}3 - (0{,}5)^2 = 1{,}05;$

$\sigma(\eta) = \sqrt{D\eta} = \sqrt{1{,}05} \approx 1{,}025.$

$M(\xi \cdot \eta) = \sum_i \sum_j x_i \cdot y_i \cdot p_{ij} = 1 \cdot (-1) \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 1 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 2 \cdot 0{,}15 + 2 \cdot (-1) \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0 \cdot 0{,}05 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}05 = -0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}3 - 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}5.$

Знайдемо коваріацію:

$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = M(\xi \cdot \eta) - M\xi \cdot M\eta = 0{,}5 - 1{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}5 - 0{,}6 = -0{,}1.$

Коефіцієнт кореляції

$\rho(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\cdot\sigma(\eta)} \approx \frac{-0{,}1}{0{,}4\cdot 1{,}025} \approx -0{,}244.$

Умовні розподіли, за якими будемо шукати математичні сподівання, знайдені в прикладі 6.2, тому

$M\left(\xi/_{\eta = 2}\right) = 1 \cdot 0{,}75 + 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}75 + 0{,}5 = 1{,}25;$

$M\left(\eta/_{\xi = 1}\right) = -1 \cdot 0{,}125 + 0 \cdot 0{,}3125 + 1 \cdot 0{,}375 + 2 \cdot 0{,}1875 = -0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375 = 0{,}875.$.

РОЗДІЛ 7. НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕКТОРИ

7.1. ЩІЛЬНІСТЬ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОГО ВЕКТОРА

Розглянемо двовимірну випадкову величину (вектор) (ξ, η) із функцією розподілу $F(x, y)$.

Означення 7.1. Якщо існує невід'ємна інтегровна на всій площині функція $p(x, y)$ така, що

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(u, v) dv du \qquad (7.1)$$

для довільних (x, y), то випадковий вектор (ξ, η) називають **неперервним**, а підінтегральну функцію $p(x, y)$) – **щільністю його розподілу.**

Щільність розподілу $p(x, y)$ випадкового вектора має такі властивості:

1) $p(x, y) \geq 0$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathrm{x}, \mathrm{y}) d\mathrm{x} d\mathrm{y} = 1$;

3) $P\{(\xi, \eta) \in D\} = \iint_D \; p(x, y) dx dy, D \subset R^2$;

4) $\frac{\partial^2 \mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y})}{\partial \mathrm{y} \, \partial \mathrm{x}} = \mathrm{p}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ у точках неперервності $\mathrm{p}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$;

5) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \, dy = p_\xi(x)$, $\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \, dx = p_\eta(y)$.

Властивість 4 геометрично означає, що ймовірність потрапляння точки (ξ, η) в область D дорівнює об'єму тіла, обмеженого зверху поверхнею $z = p(x, y)$, основу якого в площині $x\mathrm{O}y$ становить область D.

Неперервні випадкові величини ξ та η **незалежні** тоді і тільки тоді, коли

$$p(x, y) = p_\xi(x) \cdot p_\eta(y). \qquad (7.2)$$

Випадковий векто p (ξ, η) є **рівномірно розподіленим** в області Н, якщо його щільність

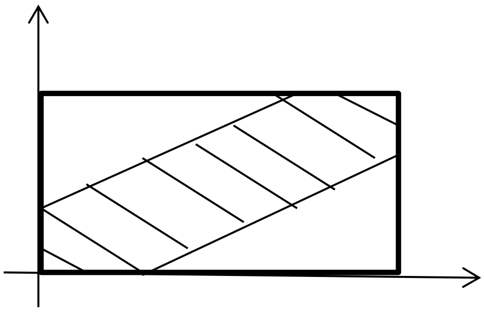
$$p(x, y) = \begin{cases} c, (x, y) \in H, \\ 0, (x, y) \notin H. \end{cases}$$

З властивості 2 отримуємо $c = \frac{1}{\text{пл.}H}$.

Приклад 7.1. Двовимірна випадкова величина (ξ, η) рівномірно розподілена в квадраті $H = \{ (x, y): 0 < x \leq T, 0 < y \leq T\}$. Знайти: 1) $p_{\xi\eta}(x, y)$; 2) $F_{\xi\eta}(x, y)$; 3) $P\{ |\xi - \eta| \leq l, l < T\}$; 4) $p_\xi(x)$ і $p_\eta(y)$. Чи незалежні ξ та η?

1) $S_{\text{кв}} = T^2$. Тому

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{T^2}, (x,y) \in H, \\ 0, (x,y) \notin H, \end{cases}$$



H

де $H = \{ (x,y): 0 < x \le T, 0 < y \le T\}$.

2) $$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(x,y)dxdy = \begin{cases} 0, x \le 0 \text{ або } y \le 0, \\ \frac{xy}{T^2}, 0 < x \le T, 0 < y \le T, \\ \frac{x}{T}, 0 < x \le T, y > T, \\ \frac{y}{T}, x > T, 0 < y \le T. \end{cases}$$

3) Нехай $D = \{ (x,y): |x-y| \le l, 0 < x \le T,\ 0 < y \le T\}$.

За властивістю 3

$$P\{|\xi - \eta| \le l\} = \int_D p(x,y)dxdy = \int_D \frac{1}{T^2}dxdy = \frac{1}{T^2}\text{пл.}\, D = \frac{T^2-(T-l)^2}{T^2}.$$

4) За властивістю 4

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy = \begin{cases} \frac{1}{T^2}\int_0^T dy = \frac{1}{T}, 0 < x \le T, \\ 0, x \le 0 \text{ або } x > T. \end{cases}$$

$$p_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx = \begin{cases} \frac{1}{T^2}\int_0^T dx = \frac{1}{T}, 0 < y \le T, \\ 0, y \le 0 \text{ або } y > T. \end{cases}$$

Отже, випадкові величини ξ та η мають рівномірний розподіл на $(0;T]$.

Оскільки $p(x,y) = p_\xi(x) \cdot p_\eta(y)$ для всіх дійсних x і y, то випадкові величини ξ і η незалежні.

Умовною щільністю випадкової величини ξ при умові, що $\eta = y$, називається функція

$$p_\xi\left({}^{x}\!/_{y}\right) = p_\xi\left({}^{x}\!/_{\eta = y}\right) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)} = \frac{p(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx}. \qquad (7.3)$$

Аналогічно

$$p_\eta\left({}^{y}/_{x}\right) = p_\eta\left({}^{y}/_{\xi\, =\, x}\right) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)} = \frac{p(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy}. \qquad (7.4)$$

умовна щільність випадкової величини η при умові $\xi = x$.

З формул (7.3) і (7.4) випливає

$$p(x,y) = p_\xi(x) \cdot p_\eta\left({}^{y}/_{x}\right) = p_\eta(y) \cdot p_\xi\left({}^{x}/_{y}\right) \qquad (7.5)$$

Приклад 7.2. Двовимірна випадкова величина (ξ, η) рівномірно розподілена в крузі $R = 1$. Знайти умовні щільності випадкових величин ξ та η.

Щільність випадкового вектора (ξ, η) має вигляд

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, x^2 + y^2 \le 1, \\ 0,\ x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Знайдемо щільності компонент вектора:

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},\ |x| \le 1.$$

Отже,

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},\ |x| \le 1, \\ \quad 0,\quad |x| > 1. \end{cases}$$

Аналогічно

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, \qquad |y| \le 1, \\ \qquad 0,\quad |y| > 1. \end{cases}$$

Знайдемо умовні щільності випадкових величин ξ та η:

$$p_\xi\left({}^{x}/_{y}\right) = \frac{p(x,y)}{p_\eta(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}},\ |x| < \sqrt{1-y^2}, \\ \quad 0,\ |x| \ge \sqrt{1-y^2}; \end{cases}$$

$$p_\eta\left({}^{y}/_{x}\right) = \frac{p(x,y)}{p_\xi(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}},\ |y| < \sqrt{1-x^2}, \\ 0,\ |y| \ge \sqrt{1-x^2}. \end{cases}$$

7.2 ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕКТОРІВ

Нехай (ξ, η) – неперервний випадковий вектор із щільністю $p(x, y)$.

Основні числові характеристики для неперервних випадкових величин ξ та η:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x, y)dxdy; \quad (7.6)$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p(x, y)dxdy - (M\xi)^2; \quad (7.7)$$

$$M\eta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p(x, y)dxdy; \quad (7.8)$$

$$D\eta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot p(x, y)dxdy - (M\eta)^2. \quad (7.9)$$

Середні квадратичні відхилення:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi},\ \sigma(\eta) = \sqrt{D\eta}. \quad (7.10)$$

Коваріація випадкових величин ξ і η обчислюється за формулою

$$cov(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - M\xi)(y - M\eta)p(x, y)dxdy \quad (7.11)$$

або:

$$cov(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot y^2 \cdot p(x, y)dxdy - M\xi \cdot M\eta. \quad (7.12)$$

Приклад 7.3. Знайти $M\xi$, $D\xi$, $M\eta$, $D\eta$, $\sigma(\xi)$, $\sigma(\eta)$, $cov(\xi, \eta)$ для випадкового вектора (ξ, η), заданого в 7.1.

Щільність випадкового вектора (ξ, η)

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{T^2},\ 0 < |x| \le T, 0 < y \le T, \\ \ 0, \quad \text{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x, y)dxdy = \int_0^T\int_0^T x \cdot \frac{1}{T^2}dxdy = \frac{1}{T^2}\int_0^T x \cdot Tdt = \frac{1}{T} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^T = \frac{T}{2}.$$

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x, y)dxdy = \int_0^T\int_0^T x^2 \cdot \frac{1}{T^2}dxdy = \frac{1}{T^2}\int_0^T x^2 \cdot Tdx = \frac{1}{T}\frac{x^3}{3}\Big|_0^T = \frac{T^2}{3}.$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{T^2}{3} - \left(\frac{T}{2}\right)^2 = \frac{T^2}{3} - \frac{T^2}{4} = \frac{T^2}{12}.$$

Аналогічно, $M\eta = \frac{T}{2}$, $\quad D\eta = \frac{T^2}{12}$.

Знайдемо коваріацію:

$$M(\xi \cdot \eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyp(x, y)dxdy = \int_0^T\int_0^T xy\frac{1}{T^2}dxdy = \frac{1}{T^2}\int_0^T xdx \cdot \int_0^T ydy =$$

$= \frac{1}{T^2} \cdot \frac{T^2}{2} \cdot \frac{T^2}{2} = \frac{T^2}{4}.$

$cov(\xi, \eta) = M(\xi \cdot \eta) - M\xi \cdot M\eta = \frac{T^2}{4} - \frac{T}{2} \cdot \frac{T}{2} = 0.$

Випадкові величини ξ і η некорельовані і незалежні (див. приклад 7.1).

Умовне математичне сподівання ξ при умові, що $\eta = y$, визначається формулою

$$M\left(\xi/_{\eta = y}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi\left(x/_{\eta = y}\right) dx. \qquad (7.13)$$

Аналогічно умовне математичне сподівання η при умові, що $\xi = x$, визначається формулою

$$M\left(\eta/_{\xi = x}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} y p_\eta\left(y/_{\xi = x}\right) dy. \qquad (7.14)$$

Приклад 7.4. Знайти умовні математичні сподівання випадкових величин ξ і η за прикладом 7.2.

Умовні щільності випадкових величин ξ і η:

$$p_\xi\left(x/_y\right) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & |x| < \sqrt{1-y^2}, \\ 0, & |x| \geq \sqrt{1-y^2}. \end{cases}$$

$$p_\eta\left(y/_x\right) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & |y| < \sqrt{1-x^2}, \\ 0, & |y| \geq \sqrt{1-x^2}. \end{cases}$$

Знайдемо умовні математичні сподівання за формулами (7.13) і (7.14):

$$M\left(\xi/_{\eta = y}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi\left(x/_y\right) dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} dx = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

Аналогічно

$$M\left(\eta/_{\xi = x}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} y p_\eta\left(y/_x\right) dy = 0.$$

РОЗДІЛ 8. КОВАРІАЦІЯ. КОЕФІЦІЄНТ КОРЕЛЯЦІЇ

8.1. КОВАРІАЦІЯ

Означення 8.1. Коваріацією (або **кореляційним моментом)** $cov(\xi,\eta)$ випадкових величин ξ і η називається число

$$cov(\xi,\eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta). \qquad (8.1)$$

Для обчислення коваріації застосовують формули (6.16), (7.11), (7.12).

Випадкові величини ξ і η називають **некорельованими**, якщо $cov(\xi,\eta) = 0$ і **корельованими**, якщо $cov(\xi,\eta) \neq 0$.

Властивості коваріації

1) $cov(\xi,\xi) = D\xi$.
2) $cov(\xi,\eta) = cov(\eta,\xi)$.
3) $cov(c\xi,\eta) = c \cdot cov(\xi,\eta)$; $cov(\xi,c\eta) = c \cdot cov(\xi,\eta), c = const$.
4) $cov(\xi,\eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta$.
5) $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2cov(\xi,\eta)$.
6) $D(\sum_{i=1}^{n} \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i + 2\sum_{i<j} cov(\xi_i,\xi_j)$, $(i,j = 1,2,\dots,n)$.
7) $D(\sum_{i=1}^{n} c_i\xi_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i \cdot c_j\, cov(\xi_i,\xi_j)$ для довільних сталих $c_1,\dots,c_n$.
8) Якщо ξ і η незалежні випадкові величини, то $cov(\xi,\eta) = 0$.

Означення 8.2 Коваріаційною (кореляційною) матрицею n-вимірної випадкової величини $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ називається матриця виду

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots\dots. & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (8.2)$$

де $b_{ij} = cov(\xi_i,\xi_j)$, $i,j = 1,2,\dots,n$.

Очевидно, $b_{ii} = D\xi_i$, $i = 1,2,\dots,n$ (по діагоналі розміщені дисперсії), $b_{ij} = b_{ji}$ (матриця симетрична). Якщо випадкові величини $\xi_1,\dots,\xi_n$ попарно некорельовані, то матриця стає діагональною.

8.2. КОЕФІЦІЄНТ КОРЕЛЯЦІЇ

Означення 8.3 Нехай ξ і η – випадкові величини, для яких існують дисперсії $D\xi$ і $D\eta$. **Коефіцієнтом кореляції випадкових величин ξ та η** називають число (сталу)

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}. \tag{8.3}$$

Властивості коефіцієнта кореляції

1) Для довільних ξ і η $|\rho_{\xi\eta}| \le 1$.

2) $|\rho_{\xi\eta}| = 1$ тоді і лише тоді, коли існують такі сталі $a \ne 0$ і b, що $\eta = a\xi + b$.

3) Якщо ξ і η незалежні випадкові величини, то $\rho_{\xi\eta} = 0$.

Обернене твердження до властивості 3 взагалі не вірне. Отже, якщо ξ та η незалежні, то вони некорельовані, але з некорельованості ξ і η ще не випливає їх незалежність.

Приклад 8.1 За даною кореляційною матрицею випадкового вектора $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0{,}4 & -0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 25 & 0{,}5 & 1 \\ -0{,}2 & 0{,}5 & 4 & -2 \\ 0{,}1 & 1 & -2 & 16 \end{pmatrix}$$

Знайти $D\xi$, якщо $\zeta = 2\xi_1 - 4\xi_2 + 3\xi_3 - \xi_4 + 10$.

За властивістю 7 п. 8.1

$$D(\sum_{i=1}^{n} c_i\xi_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i \cdot c_j\, b_{ij} = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 D\xi_i + 2\sum_{i<j} c_i c_j cov(\xi_i, \xi_j).$$

Отримаємо:

$$D\xi = D(2\xi_1 - 4\xi_2 + 3\xi_3 - \xi_4 + 10) = 4D(\xi_1 + 16D\xi_2 + 9D\xi_3 + D\xi_4 + 2\cdot 2\cdot (-4)\cdot cov(\xi_1,\xi_2) + 2\cdot 2\cdot 3cov(\xi_1,\xi_3) + 2\cdot 2\cdot(-1)cov(\xi_1,\xi_4) + 2\cdot (-4)3cov(\xi_2,\xi_3) + 2(-4)(-1)cov(\xi_2,\xi_4) + 2\cdot 3\cdot(-1)cov(\xi_3,\xi_4) = 4\cdot 9 + 16\cdot 25 + 9\cdot 4 + 16 - 16\cdot 9 + 12\cdot 0{,}4 - 4\cdot 0{,}1 - 24\cdot 0{,}5 + 8\cdot 1 - 6\cdot(-2) = 36 + 400 + 36 + 16 - 144 + 4{,}8 - 0{,}4 - 12 + 8 + 12 = 356{,}4.$$

<u>Приклад 8.2.</u> Знайти $M\xi$, $D\xi$, якщо $\zeta = 2\xi - 5\eta + 8$ для прикладу 6.3.

В прикладі 6.3 обчислено характеристики:

$M\xi = 1{,}2$; $D\xi = 0{,}16$; $\mathrm{M}\eta = 0{,}5$; $D\eta = 1{,}05$; $cov(\xi,\eta) = -0{,}1$.

Тоді

$\mathrm{M}\zeta = \mathrm{M}(2\xi - 5\eta + 8) = 2\mathrm{M}\xi - 5\mathrm{M}\eta + 8 = 2\cdot 1{,}2 - 5\cdot 0{,}5 + 8 = 2{,}4 - 2{,}5 + 8 = 7{,}9$;

$D\zeta = D(2\xi - 5\eta + 8) = 4D\xi + 25D\eta + 2\cdot 2\cdot(-5)cov(\xi,\eta) = 4\cdot 0{,}16 + 25\cdot 1{,}05 - 20\cdot(-0{,}1) = 0{,}64 + 26{,}25 + 2 = 28{,}89$.

Приклад 8.3 За даною в прикладі 8.1 кореляційною матрицею знайти ρ_{ξ_1,ξ_2}; ρ_{ξ_3,ξ_4}.

За означенням 8.2:

$\rho_{\xi_1,\xi_2} = \frac{cov(\xi_1,\xi_3)}{\sqrt{D\xi_1 D\xi_3}} = \frac{-0{,}2}{\sqrt{9\cdot 4}} = \frac{-0{,}2}{6} = -\frac{1}{30} \approx -0{,}33$;

$\rho_{\xi_2,\xi_4} = \frac{cov(\xi_2,\xi_4)}{\sqrt{D\xi_2 D\xi_4}} = \frac{1}{\sqrt{25\cdot 16}} = \frac{1}{20} = 0{,}05$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Дано закон розподілу ймовірностей

ξ	-2	2	4	8	10
p	0,1	2a	0,3	0,1	3a

Обчислити: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$. Знайти M_0. Побудувати функцію розподілу випадкової величини ξ.

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ a\sqrt[4]{x^3}, & 0 < x \le 16, \\ 0, & x > 16 \end{cases}$$

Знайти: a, $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, Me, $P\{0 < \xi < 1\}$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$.

3. Дано щільність випадкової величини (ξ, η)

$$p\,(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin H, \\ a, & (x, y) \in H \end{cases}$$

де $H = \{(x, y) : -6 \le x \le 2, -3 \le y \le 5\}$.
Знайти: a, $\rho(\xi, \eta)$, $P\{-4 < \xi < 1, -2 < \eta < 4\}$, $F(x, y)$.

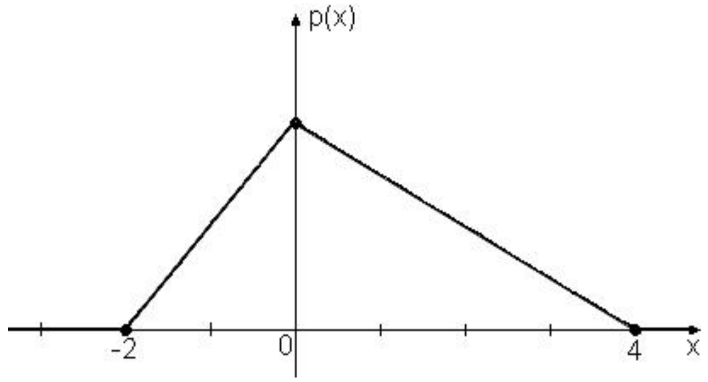
4. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами $a = 4$, $\sigma = \sigma$. Знайти таке σ, щоб $P\{0 < \xi < 8\} = 0{,}9906$. Записати щільність випадкової величини ξ.

Варіант 2

1. Четверо студентів складають іспит з теорії ймовірностей. Імовірність того, що перший з них складе іспит дорівнює 0,9; для другого і третього ця ймовірність дорівнює 0,8; а для четвертого – 0,7. Побудувати закон розподілу

величини ξ – числа студентів, котрі складуть зазначений іспит, і обчислити $M\xi$, $\sigma\xi$, As. Знайти моду.

2. Дано графік щільності



Знайти: $p(x)$, $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, $P\{\xi \geq 2\}$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$.

3. Дано закон розподілу випадкової величини (ξ, η)

$\xi \backslash \eta$	2	4	6	8
-6	0,1a	0,5a	0,4a	a
-4	0,9a	0,4a	0,5a	0,2a
-2	a	2,1a	1,1a	1,8a

Знайти: a, $\rho(\xi,\eta)$, $M(\xi / \eta = 4)$, $M(\eta / \xi = -2)$, $P\{\xi < -2, \eta > 4\}$.

4. Випадкові величини ξ_1, ξ_2, ξ_3 розподілені нормально і є незалежними, причому $M\xi_1 = 3$, $D\xi_1 = 1$, $M\xi_2 = -5$, $D\xi_2 = 2$, $M\xi_3 = 8$, $D\xi_3 = 1$. Записати щільність випадкової величини $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$. Записати ймовірність $P\{5 < \eta < 9\}$.

Варіант 3

1. Маємо три ящики. У першому з них міститься 6 стандартних і 4 браковані однотипні деталі, у другому – 8 стандартних і 2 бракованих й у третьому – 5 стандартних і 5 бракованих деталей. Із кожного ящика навмання беруть по одній деталі.

Обчислити $M\xi$, $\sigma\xi$, As для випадкової величини ξ – числа появи стандартних виробів серед трьох навмання взятих деталей. Знайти M_0.

2. Дано функцію розподілу випадкової величини ξ

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \dfrac{(x+1)^2}{16}, & -1<x\le 3,\\ 1, & x>3\end{cases}$$

Знайти: $p(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, Me, $P\{\xi>0\}$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$.

3. Дано щільність випадкової величини (ξ,η)

$$p\,(x,y)=\begin{cases}a\cos(x-y), & (x,y)\in H,\\ a, & (x,y)\notin H\end{cases}$$

де $H=\left\{(x,y):0\le x\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$. Знайти: a, $\rho(\xi,\eta)$.

4. Дисперсія геометричного розподілу дорівнює $\dfrac{10}{9}$. Записати закон розподілу в.в. ξ. Знайти: $M\xi$, $P\{\xi<4\}$.

Варіант 4

1. Дано функцію розподілу випадкової величини ξ

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 8;\\ 0{,}1, & -8<x\le -6;\\ 0{,}3, & -6<x\le -4;\\ 0{,}4, & -4<x\le -2;\\ 0{,}7, & -2<x\le 0;\\ 1, & x>0;\end{cases}$$

Знайти: закон розподілу випадкової величини ξ, $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, M_0. Побудувати многокутник розподілу.

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax^4, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Знайти: a, $F_\xi(x)$, початкові і центральні моменти перших чотирьох порядків, As, Es. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$.

3. Дано щільність випадкової величини (ξ, η)

$$p\,(x, y) = \frac{a}{\pi^2 (16 + x^2)(25 + y^2)}.$$

Знайти: a, $F(x, y)$, $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$. Чи незалежні ξ та η?

4. Дано функцію розподілу показникового закону

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-0,2}x, & x \ge 0; \end{cases}$$

5. Знайти: $p(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P\{|\xi - M\xi| < 2\sigma\xi\}$, Me. Побудувати графік $F(x)$.

Варіант 5

1. П'ять приладів перевіряють на надійність. Кожен наступний прилад підлягає перевірці лише в тому разі, якщо перед цим перевірений прилад виявиться надійним. Ймовірність того, що прилад витримає перевірку на надійність, дорівнює 0,8 для кожного з них. Обчислити $M\xi$, $\sigma\xi$ дискретної випадкової величини ξ – числа приладів, що пройшли перевірку. Знайти Mo.

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p\,(x, y) = \begin{cases} 0, & x \le -\dfrac{3}{2}, \\ a\sqrt{2x+3}, & -\dfrac{3}{2} < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти: a, $F_{\xi}(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, $P\left\{-\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}\right\}$, Me, Mo. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$.

3. Дано закон розподілу випадкової величини (ξ,η)

$\xi \backslash \eta$	0,01	0,02	0,03	0,04
0,002	0,01	0,02	0,04	0,04
0,004	0,03	0,24	0,15	0,06
0,006	0,04	0,10	0,08	0,08
0,008	0,02	0,04	0,03	0,02

Знайти: $\rho(\xi,\eta)$, $M(\xi/\eta=0{,}03)$, $M(\eta/\xi=0{,}004)$.

4. Випадкова величина ξ має щільність

$$p(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-10)^2}{32}}$$

5. Знайти: $M\xi$, $D\xi$, $P\{\xi>20\}$; інтервал (симетричний відносно $M\xi$), в який з ймовірністю 0,9876 потрапить можливе значення ξ.

Варіант 6

1. При підкиданні трьох гральних кубиків гравець може виграти 18 грн., якщо на трьох кубиках випаде цифра 6; 1 грн. 40 коп., якщо на двох кубиках з трьох випаде цифра 6, і 20 коп., якщо лише на одному кубику з трьох випаде цифра 6. Який у середньому буде виграш гравця? Знайти $F_{\xi}(x)$ і побудувати її графік?

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^2, & 0<x\le 1,\\ a(2-x)^2, & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Знайти: a, $M\xi$, $D\xi$, $Me\xi$. Побудувати графік $p(x)$.

3. Дано щільність випадкової величини (ξ,η)

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x+y), & (x,y)\in H,\\ 0, & (x,y)\notin H\end{cases}$$

де $H=\left\{(x,y):0\le x\le\frac{\pi}{2}, 0\le y\le\frac{\pi}{2}\right\}$. Знайти: 1) кореляційну матрицю; 2) $F_{\xi\eta}(x,y)$.

4. Знайти середнє квадратичне відхилення числа появ події в 200 повторних незалежних випробуваннях, якщо математичне сподівання числа появ цієї події у двох випробуваннях дорівнює 0,4.

Варіант 7

1. Садівник восени посадив три саджанці: одну яблуню, одну грушу й одну вишню. Ймовірність того, що саджанець яблуні весною прийметься дорівнює 0,7. Для саджанців груші та вишні ця ймовірність становить відповідно 0,9 і 0,8. Обчислити математичне сподівання і дисперсію числа саджанців, які приймуться весною. Чому дорівнює M_0? Побудувати многокутник розподілу.

2. Дано функцію розподілу випадкової величини ξ

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le\frac{\pi}{2},\\ 1, & x>\frac{\pi}{2},\end{cases}$$

Знайти: $p(x)$, $P\left\{\xi \geq \frac{\pi}{3}\right\}$, $M\xi$, $D\xi$, $Me\xi$. Побудувати графік $p(x)$ і $F(x)$.

3. Дано щільність випадкової величини (ξ, η)

$$p\,(x, y) = \begin{cases} a, & (x, y) \in H, \\ 0, & (x, y) \notin H \end{cases}$$

де $H = \{(x, y) : 0 < x \leq 1, 0 < y \leq x^2\}$. Знайти: a, $\rho(\xi, \eta)$, $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$.

4. Виріб вважається вищого ґатунку, якщо відхилення його розмірів від номіналу не перевищує по модулю 2,37 мм. Випадкові відхилення розміру виробу від номіналу мають нормальний закон розподілу із $\sigma = 3\,мм$, при цьому систематична похибка відсутня. Знайти середнє число виробів вищого ґатунку серед десяти виготовлених.

Варіант 8

1. Статистична обробка інформації службою автодорожних катастроф дала такі наслідки: в інтервалі часу від 16 год. 30 хв. до 18 год. 30 хв. у робочі дні може відбутися 0, одна, дві або 3 автомобільні катастрофи з ймовірністю відповідно 0,92; 0,04; 0,03; 0,01. Обчислити математичне сподівання, дисперсію числа катастроф у зазначений проміжок часу. Побудувати функцію розподілу випадкової величини ξ і накреслити її графік.

2. Дано функцію розподілу

$$F\,(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq \frac{1}{4}, \\ 8x^2, & \frac{1}{4} < x \leq \frac{\sqrt{2}}{4}, \\ 1, & x > \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

Знайти: $p(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $Me\xi$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$.

3. Дано закон розподілу випадкової величини (ξ, η)

ξ \ η	2,2	4,2	6,2	8,2

2,5	0,02	a	0,08	0,1
3,5	a	0,04	0,06	0,2
4,5	0,08	0,06	$0{,}6a$	0,1

Знайти: p_{21}, p_{12}, p_{33}; кореляційну матрицю; $M\left(\eta/\xi = 4{,}5\right)$.

4. Випадкова величина ξ розподілена нормально і має нульове математичне сподівання. Задано проміжок $[5;18)$. Визначити значення середнього квадратичного відхилення, при якому ймовірність попадання випадкової величини на заданий проміжок найбільша.

Варіант 9

1. Фермер очікує, що в наступному році кури на його фермі нанесуть 10000 яєць. Фермер розраховує вилучити не більш як 16 грн. за десяток яєць і витратити на них не більше як 8 грн. Ймовірність можливих виграшів і втрат така:

ціна за 10 яєць, грн.	16	14	12	0	-8
p	0,2	0,5	0,2	0,04	0,06

Визначити: $M\xi$, $D\xi$. Побудувати многокутник розподілу. Визначити очікуваний прибуток від продажу 10000 яєць.

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x - \dfrac{x^3}{4}, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти: $M\xi$, $D\xi$, $Me\xi$, $P\{\xi > 1\}$, M_0, $F_\xi(x)$. Побудувати графік $p(x)$ і $F(x)$.

3. Дано щільність випадкової величини (ξ, η)

$$p(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-0,5(x^2+2xy+5y^2)}.$$

Знайти: $p_{\xi}(x)$, $p_{\eta}(y)$. Чи незалежні ξ і η? Знайти умовні щільності $p_{\xi}\left(x/y \right)$ і $p_{\eta}\left(y/x \right)$.

4. Записати закон розподілу числа появ грані з п'ятьма очками в результаті п'яти кидань грального кубика. Знайти $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, ймовірність того, що п'ять очок з'явиться більше двох раз.

Варіант 10

1. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа дільників (випадкова величина ξ) навмання вибраного натурального числа з множини $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Обчислити $P\{\xi \geq 2\}$, знайти $F_{\xi}(x)$.

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p\,(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ a\sqrt[3]{x+2}, & -2 < x \leq 6, \\ 0, & x > 6. \end{cases}$$

Знайти: a, $F_{\xi}(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, Me, $P\{-2 < \xi < 0\}$. Побудувати графік $p(x)$ і $F(x)$.

3. Дано щільність випадкової величини (ξ, η)

$$p(x, y) = ae^{-\frac{(x+3)^2}{8} - \frac{(y-1)^2}{2}}.$$

Знайти: a, $(M\xi, M\eta)$, σ_{ξ}, σ_{η}, $\rho(\xi, \eta)$.

4. Нехай ξ – випадкова величина із щільністю $p(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Знайти: $P\{|\xi| \geq \varepsilon\}$, $M\left(\min\{|\xi|, 1\}\right)$.

Варіант 11

1. Чотири однакові електролампочки тимчасово викрутили з відповідних патронів і поклали в один ящик. Потім із ящика навмання взяли по одній

лампочці і навмання вкрутили в патрони. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини ξ – числа лампочок, які вкручені в ті патрони з яких вони були викручені.

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p\,(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ a\,(x+2), & -2 < x \le 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Знайти: a, $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, $Me\xi$, $P\{0 < \xi < 2\}$. Побудувати графік $p(x)$ і $F(x)$.

3. Дано функцію розподілу випадкової величини (ξ, η)

$F(x, y) = (1 - e^{-4x})(1 - e^{-5y})$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Знайти: $P\{2 \le \xi \le 4, 1 \le \eta \le 2\}$, $p_{\xi\eta}(x, y)$ і $\rho(\xi, \eta)$.

4. Банк отримує пакети грошових знаків. Середнє число пакетів, які містять недостатню або надлишкову кількість знаків дорівнює 0,4. В.в. ξ – число помилково запакованих пакетів – має розподіл Пуассона.

Знайти: а) ймовірність того, що під час перевірки буде знайдено хоча б один помилково запакований пакет; б) ймовірність того, що під перевірки буде знайдено не більше трьох помилково запакованих пакетів; в) $M\xi$ і $D\xi$.

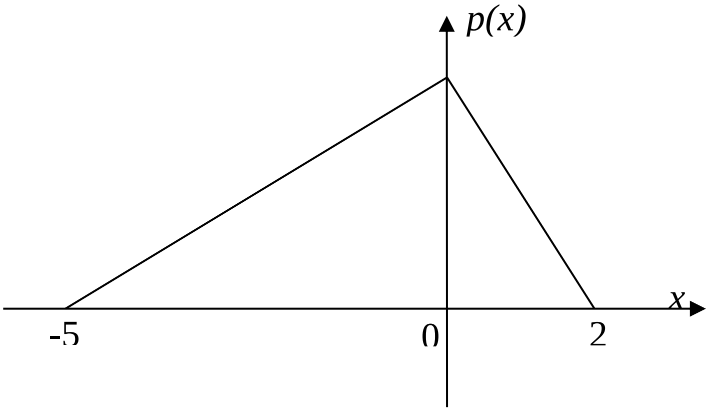
Варіант 12

1. Дано закон розподілу ймовірностей

ξ	-5	-2	1	2	5
p	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1

Знайти: $M(2\xi - 3)$, $D(2\xi - 3)$, $F_{\xi}(x)$. Побудувати графік $F(x)$.

2. Дано графік щільності випадкової величини ξ.



Знайти: $p(x)$, $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$. Обчислити: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, Me, $P\{|\xi| < 1\}$, M_0.

3. Дано щільність випадкової величини (ξ, η)

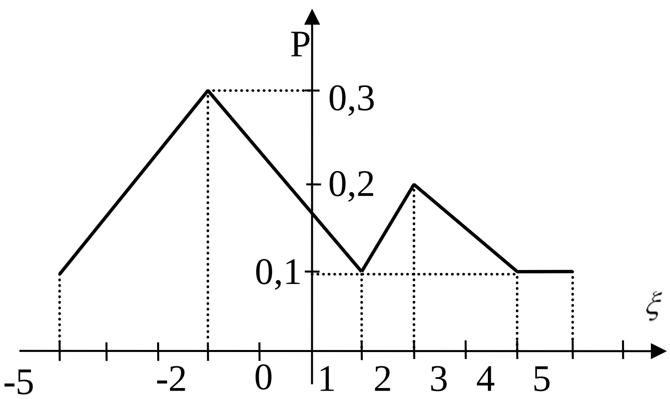
$$p(x, y) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} e^{-4x^2 - 6xy - 9y^2}$$

Знайти: $p\left(\xi/\eta\right)$, $p\left(\eta/\xi\right)$, $M\left(\xi/\eta\right)$, $M\left(\eta/\xi\right)$.

4. Неперервна випадкова величина ξ розподілена рівномірно в інтервалі $(2;7)$. Знайти: щільність $p(x)$, функцію розподілу $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P\{\xi < 4\}$, $P\{\xi > 8\}$, $P\{|\xi| < 3\}$.

Варіант 13

1. За даними многокутника розподілу обчислити $M(-4\xi + 1)$, $D(-4\xi + 1)$, $M_0\xi$, $P\{\xi \geq 0\}$.



2. Випадкова величина ξ має щільність

$$p(x)=\begin{cases} a(4x-x^2), & x\in[0;4], \\ 0, & x\notin[0;4] \end{cases}$$

Знайти: a, $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P\{|\xi|<2\}$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$.

3. Незалежні випадкові величини ξ і η мають щільності

$$p_\xi(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 3e^{-3x}, & x>0 \end{cases} \quad p_\eta(x)=\begin{cases} 0, & y\le 0, \\ 5e^{-5y}, & y>0 \end{cases}$$

Знайти: $p_{\xi\eta}(x,y)$, $F_{\xi\eta}(x,y)$, $P\{\xi\ge 4, 2\le\eta\le 4\}$, $(M\xi, M\eta)$, $M(\xi\cdot\eta)$ і $D(\xi\cdot\eta)$.

4. Маємо сім урн. В кожній з них міститься по 7 чорних та 3 сині кулі. З кожної урни навмання беруть по одній кулі. Записати закон розподілу в.в ξ – числа чорних куль серед семи вибраних. Обчислити: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, $P\{\xi\ge 6\}$.

Варіант 14

1. Дано закон розподілу дискретної випадкової величини ξ:

ξ	-4	-1	2	5	8	10
p	a	$1{,}5a$	$0{,}5a$	$3{,}5a$	$2{,}5a$	a

Знайти a. Обчислити: $P\{\xi<2\}$, $P\{-4<\xi\le 8\}$, $M\xi$, $D\xi$. Побудувати $F_\xi(x)$.

2. Дано щільність випадкової величини ξ:

$$p(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \ \ \textit{або} \ \ x>3 \\ ax^2-\dfrac{2}{9}x, & 0<x\le 3. \end{cases}$$

Знайти: a, $F(x)$, $P\{1<\xi<2\}$, $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, $Me\xi$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$.

3. Дано закон розподілу випадкової величини $(\xi;\eta)$:

ξ \ η	0	0,1	0,2	0,3
2	0,05	0,2	0,1	0,05

3	0	0,1	0,15	0,15
4	0	0,15	0	0,05

Знайти: $(M\xi; M\eta)$, кореляційну матрицю, $P\{\xi > 2, \eta \geq 0{,}2\}$. Чи залежні ξ і η ? Знайти: $M(\xi/\eta = 0{,}3)$ і $M(\eta/\xi = 2)$.

4. Дано функцію розподілу випадкової величини ξ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -9, \\ \dfrac{x+9}{10}, & -9 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти: $p(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, $P\{\xi < 0\}$, $P\{|\xi| < 2\}$. Який це розподіл? Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$.

Варіант 15

1. Дано функцію розподілу ймовірностей:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 4, \\ 0{,}1 & -4 < x \leq -1, \\ 0{,}3 & -1 < x \leq 2, \\ 0{,}5 & 2 < x \leq 5, \\ 0{,}8 & 5 < x \leq 8, \\ 1 & x > 8 \end{cases}$$

За допомогою функції розподілу обчислити: $P\{\xi \geq 2\}$, $P\{-4 \leq \xi < 1\}$, $P\{\xi < 3\}$. Побудувати закон розподілу в.в. ξ, знайти: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, $M_0\xi$, As.

2. Випадкова величина ξ має щільність:

$$p(x) = \begin{cases} cxe^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Знайти: c, $F(x)$, $P\{|\xi| < 1\}$, $P\{\xi > 2\}$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$. Обчислити: $M\xi$, $D\xi$.

3. Дано функцію розподілу випадкового вектора $(\xi;\eta)$:

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x\le -6 \ \ y\le 2, \\ \dfrac{x+6}{8}, & -6<x\le 2, \ y>4, \\ \dfrac{(x+6)(y+2)}{48}, & -6<x\le 2, \ -2<y\le 4, \\ \dfrac{y+2}{6}, & x>2, \ -2<y\le 4, \\ 1, & x>2, \ y>2. \end{cases}$$

Знайти: $P\{-2\le\xi<1, \ -1\le y<3\}$, $p_{\xi\eta}(x,y)$, $\rho(\xi,\eta)$. Чи залежні ξ і η?

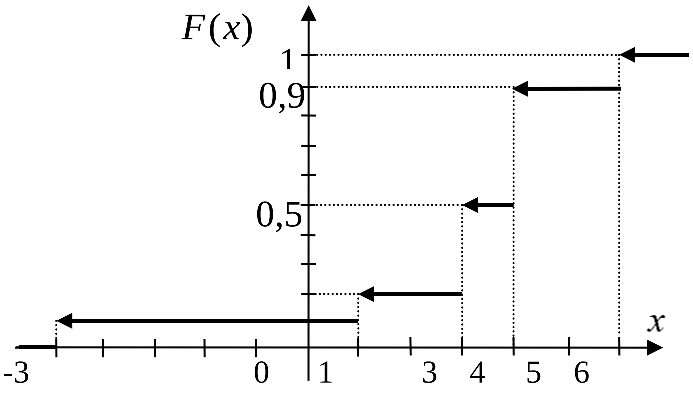
4. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл із щільністю

$$p(x)=ce^{-\frac{x^2}{4}+4x-16}.$$

Знайти: c, $M\xi$, $D\xi$, $P\{2<\xi<8\}$.

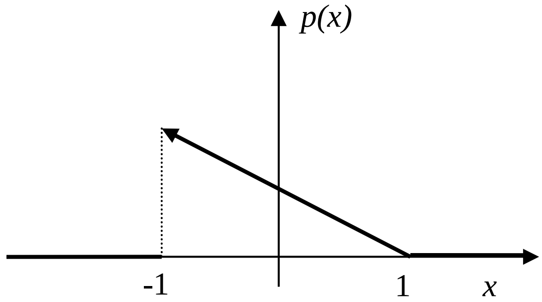
Варіант 16

1. Дано графік функції розподілу ймовірностей:



Обчислити: $P\{\xi\ge 3\}$, $P\{\xi\le 3\}$, $P\{1\le\xi<6\}$ за допомогою $F(x)$. Побудувати закон розподілу випадкової величини ξ. Знайти: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, $M_0\xi$.

2. Дано графік щільності випадкової величини ξ:



Знайти: $p(x)$, $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $Me\xi$, $P\left\{\xi > \frac{1}{2}\right\}$.

3. Визначити кореляційну матрицю випадкової величини $(\xi;\eta)$, якщо дано щільність:

$$p_{\xi\eta}(x,y) = \frac{2}{\pi\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2}.$$

4. В урні міститься 100 кульок, із них 80 білі, а решта – чорні. Кульки з урни виймають по одній з поверненням. В.в. ξ – число експериментів до появи перший раз чорної кульки. Знайти: $M\xi$, $\sigma\xi$, $P\{\xi \le 10\}$.

Варіант 17

1. Троє складають іспит з математичного аналізу. Ймовірність того, що перший студент складе екзамен, становить 0,9, для другого і третього студентів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,85; 0,8. Побудувати закон розподілу ймовірностей випадкової величини ξ – числа студентів, які складуть іспит з математичного аналізу. Побудувати $F(x)$ і накреслити її графік. Обчислити $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$.

2. Дано щільність випадкової величини ξ:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \dfrac{c}{x^4}, & x \ge 1. \end{cases}$$

Знайти: c, $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$. Визначити $a : P\{\xi \ge a\} = 0{,}6$. Побудувати графік $p(x)$.

3. Дано щільність випадкової величини $(\xi;\eta)$:

$$p(x,y)=\begin{cases} a\left(xy+x^2\right), & (x,y)\in H, \\ 0, & (x,y)\notin H. \end{cases}$$

Знайти: a, кореляційну матрицю, $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$, якщо

$$H=\left\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\right\}.$$

4. Тролейбуси приходять на зупинку з інтервалом 4хв. Припускаючи, що час чекання тролейбуса має рівномірний розподіл, знайти: 1) $p_\xi(x)$; 2) $F_\xi(x)$; 3) $P\{\xi\le 1хв.\}$. Побудувати графік $F_\xi(x)$.

Варіант 18

1. У першому ящику міститься 7 стандартних і 3 браковані деталі, у другому – 6 стандартних і 4 браковані. Навмання з першого ящика беруть чотири деталі, а з другого – одну. Побудувати закон розподілу випадкової величини ξ – числа появи стандартних деталей серед п'яти навмання взятих. Знайти $M\xi$, $D\xi$, $Mo\xi$.

2. Дано щільність випадкової величини ξ:

$$p(x)=\begin{cases} 0, & |x|\ge 3, \\ c\sqrt{9-x^2}, & |x|<3. \end{cases}$$

Знайти: c, $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P\{\,|\xi|<2\,\}$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$.

3. Дано щільність випадкової величини $(\xi;\eta)$:

$$p(x,y)=\begin{cases} a(1+xy)x, & (x,y)\in H, \\ 0, & (x,y)\notin H. \end{cases}$$

де $H=\left\{(x,y):0\le x\le 1, x\le y\le\sqrt{x}\right\}$.

Знайти: a, кореляційну матрицю, $p_\xi(x)$ і $p_\eta(y)$.

4. Випадкова величина ξ має функцію розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0{,}2x, & 0<x\le 5,\\ 1, & x>5\end{cases}$$

Знайти: 1) щільність (тип розподілу); 2) ймовірність того, що випадкова величина ξ набере значення з інтервалу: $(0;3)$, $(0;5)$, $(1{,}4;5)$, $(6;10)$; 3) $M\xi$ і $D\xi$.

Варіант 19

1. Під час виготовлення деталі робітникові треба виконувати чотири залежні між собою технологічні операції. Якщо підчас виконання першої операції робітник не допустить браку, то виконує наступну операцію і т.д. Ймовірність того, що при виконанні першої операції робітник не допустить дефекту, дорівнює 0,95; для другої, третьої і четвертої операції ця ймовірність становить відповідно 0,9; 0,85; 0,8. Побудувати закон розподілу випадкової величини ξ – числа операцій, під час виконання яких робітник не допустить дефекту. Знайти: $M\xi$, $D\xi$, $Mo\xi$.

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a(6x-x^2), & 0<x\le 6,\\ 0, & x>6.\end{cases}$$

Знайти: a, $F(x)$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$. Обчислити $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, $P\{\xi\le 2\}$. Знайти Me, Mo.

3. Випадкова величина $(\xi;\eta)$ має щільність:

$$p(x,y)=\begin{cases}B\cos x\cos y, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \quad 0<y\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \textit{в інших випадках.}\end{cases}$$

Знайти: B, $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$, $p_\eta\left(y/x\right)$, $(M\xi, M\eta)$, $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$, $P\left\{|\xi|<\dfrac{\pi}{6};\xi>\dfrac{\pi}{3}\right\}$.

4. Під час штампування валиків ймовірність відхилення кожного валика від стандартного розміру дорівнює 0,15. За робочу зміну робітником було проштамповано 800 валиків. Знайти: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, де ξ – число валиків, що не відповідають стандартному розміру. $P\{\xi>150\}$ – ?

Варіант 20

1. П’ять приладів потрібно перевірити на надійність. Кожний наступний прилад підлягає перевірці лише в тому разі, якщо перевірений прилад перед цим виявляється надійним. Ймовірність того, що прилад витримає перевірку на надійність, для кожного з них дорівнює 0,8. Побудувати закон розподілу випадкової величини ξ – числа приладів, що пройшли випробування. Знайти: $M\xi$, $F_\xi(x)$. Накреслити графік $F(x)$.

2. Дано щільність випадкової величини ξ:

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ a\sqrt[3]{x+1}, & -1<x\le 7,\\ 0, & x>7.\end{cases}$$

Знайти: a, $F_\xi(x)$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$. Обчислити $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, $P\{\xi\ge 0\}$.

3. Задано закон розподілу випадкової величини $(\xi;\eta)$:

ξ \ η	3	4	5
0	0,02	0,12	0,06
1	0,03	0,18	0,09
2	0,05	0,3	0,15

Знайти: кореляційну матрицю; умовні закони розподілу випадкової величини η при $\xi=1$ і випадкової величини ξ при умові $\eta=3$; $P\{\xi\ge 0{,}5;\eta<5\}$.

4. Відомо, що випадкові величини ξ і η є незалежними і мають нормальний закон розподілу із значеннями параметрів відповідно: $a_1=-1$, $\sigma_1=4$ і $a_2=5$, $\sigma_2=3$. Знайти коваріацію і коефіцієнт кореляції випадкових величин $\zeta=3\xi-2\eta+5$ і $\chi=-4\xi-\eta+2$.

Варіант 21

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини ξ задано таблицею

ξ	-6	-4	-2	2	4	6	8	10	12
p	$3a$	$2a$	a	a	$2a$	$3a$	$5a$	$6a$	$4a$

Знайти: a. Побудувати $F_{\xi}(x)$ і накреслити її графік. Обчислити: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$. Чому дорівнює Mo?

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ \dfrac{a}{x}, & 1<x\le e, \\ 0, & x>e. \end{cases}$$

Знайти: a, $F(x)$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$. Обчислити $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, Me, $P\{\xi<2\}$, Mo.

3. Задано функцію розподілу випадкової величини $(\xi;\eta)$:

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x\le -3\ \ y\le -7, \\ \dfrac{x+5}{5}, & -3<x\le 2,\ y>3, \\ \dfrac{(x+3)(y+7)}{50}, & -3<x\le 2,\ -7<y\le 3, \\ \dfrac{y+7}{10}, & x>2,\ -7<y\le 3, \\ 1, & x>2,\ y>3. \end{cases}$$

Знайти: $p(x;y)$, $p_{\xi}(x)$, $p_{\eta}(y)$, $p_{\xi}\left(x/y\right)$, $p_{\eta}\left(y/x\right)$, $\rho(\xi;\eta)$, $M\left(\xi/\eta\right)$, $M\left(\eta/\xi\right)$.

4. Підкидають гральний кубик доти, поки випаде шість очок, випадкової величини ξ – число підкидань. Знайти: $P\{\xi>3\}$, $P\{\xi=M\xi\}$, $D\xi$.

Варіант 22

1. Маємо два ящики. В першому ящику знаходиться 7 стандартних і 3 браковані деталі, в другому ящику – 5 стандартних і 5 бракованих. Із кожного ящика навмання беруть по дві деталі. Побудувати закон розподілу ймовірностей випадкової величини ξ – кількості стандартних деталей серед вибраних. Обчислити: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$. Побудувати многокутник ймовірностей.

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\sin\dfrac{x}{2}, & 0<x\le\pi,\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Знайти: a та $F_\xi(x)$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$. Обчислити $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, Me, $P\left\{\xi\le\dfrac{\pi}{3}\right\}$.

3. Випадкова величина $(\xi;\eta)$ рівномірно розподілена всередині трапеції $ABCD$ з координатами вершин $A(-4{,}0)$, $B(-6{,}4)$, $C(0{,}4)$, $D(0{,}0)$. Знайти: $p_{\xi\eta}(x,y)$, $p_\eta(y)$, $p_\eta\left(y/x\right)$, $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$, $P\{(\xi,\eta)\in G\}$, де

$$G=\{(x,y):(x+6)^2+(y-4)^2\le 9\}.$$

4. Випадкова величина ξ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda=0{,}5$. Знайти ймовірності подій: $\xi=2$, $\xi<2$, $\xi\ge 3$.

Варіант 23

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини ξ задано таблицею

ξ	-3	-1	1	3	5	7	9	11	13
p	0,1	a	3a	0,1	0,2	$3a$	$2a$	$4a$	a

Знайти: a. Побудувати $F(x)$ і накреслити її графік. Обчислити: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$. Чому дорівнює Mo?

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ a(1-x^2), & -1<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Знайти: a, $F_\xi(x)$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$. Обчислити $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, Me, $P\{0\le\xi<1\}$. Чому дорівнює Mo?

3. Задано функцію розподілу випадкової величини $(\xi;\eta)$:

ξ \ η	1	2	3	4
2	0,05	0,10	0,04	0,01
5	0,02	0,08	0,07	0,03
8	0,13	0,22	0,19	0,06

Знайти: кореляційну матрицю $\rho(\xi;\eta)$, $M\left(\xi/_{\eta=3}\right)$, $M\left(\eta/_{\xi=8}\right)$, $F_{\xi\eta}(3;6)$.

4. Відомо,що випадкові величини ξ і η є незалежними і мають нормальний закон розподілу зі значеннями параметрів: $a_1=-2$, $\sigma_1=4$ і $a_2=2$, $\sigma_2=2$. Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин $\zeta=2\xi+3\eta$, $\chi=2\xi-3\eta$.

Варіант 24

1. Імовірність того, що при виготовлені однієї деталі буде допущено брак, стала і рівна 0,05. Із партії деталей вибираємо шість штук для перевірки. Якщо навмання вибрана деталь із шести виявляється нестандартною, то партія затримується; якщо деталь виявиться стандартною, то навмання вибираємо наступну деталь для перевірки і т.д., але всього контролер перевіряє 6 деталей.

Побудувати закон розподілу випадкової величини ξ – числа перевірених деталей. Обчислити $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$. Побудувати многокутник розподілу.

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\sin\dfrac{x}{4}, & 0<x\le\pi,\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Знайти: a, $F_\xi(x)$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$. Обчислити $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, Me, $P\left\{\xi\le\dfrac{\pi}{3}\right\}$.

3. Випадкова величина $(\xi;\eta)$ задана щільністю:

$$p(x,y)=\begin{cases}a, & x^2+y^2\le 9,\\ 0, & x^2+y^2>9\end{cases}$$

Знайти: a, $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$, $p_\xi\left(x/y\right)$, $P\{|\xi|<4\}$. Чи корельовані в.в. ξ і η?

4. Неперервна випадкова величина ξ має функцію розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-7x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Знайти: $p(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P\{|\xi|<2\}$, Me. Побудувати графік $F(x)$.

Варіант 25

1. Дано закон розподілу ймовірностей випадкової величини ξ

ξ	-10	-5	5	10	15	20	25	30	35
p	a	a	3a	2a	3a	4a	5a	a	a

Знайти: a. Побудувати $F_\xi(x)$ та накреслити її графік. Обчислити: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$. Чому дорівнює M_0.

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p=\begin{cases}0, & x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ a\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$$

Знайти: a, $F_\xi(x)$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$. Обчислити: $M\xi$, $\sigma\xi$, $Me\xi$, $P\left\{-\dfrac{\pi}{3}<\xi<0\right\}$.

3. Дано щільність випадкової величини (ξ,η)

$$p\,(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\in D\end{cases}$$

де $D=\{(x,y):0<x\le 1,\,0<y\le 1\}$.

Знайти: $p_\xi(x)$, $p_\xi\left(x/y\right)$, кореляційну матрицю, $M\left(\xi/\eta=y\right)$, $\rho(\xi,\eta)$.

4. Ймовірність появи події в кожному із випробувань є коренем рівняння $5p^2-7p+1{,}2=0$. Скласти закон розподілу випадкової величини ξ – числа появ події в трьох випробуваннях (у вигляді таблиці), а також знайти $\sigma\xi$.

Варіант 26

1. В урні міститься 2 стандартних та 5 бракованих деталей. Деталі з ящика дістають по одній без повернення до появи стандартної деталі. Побудувати закон розподілу випадкової величини ξ – числа витягнутих деталей. Обчислити: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$. Побудувати многокутник розподілу.

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\,(4x-x^2), & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Знайти: a, $F_\xi(x)$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$. Обчислити: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, Me, $P\{\xi<1\}$, Mo.

3. Дано закон розподілу випадкової величини (ξ, η)

$\xi \backslash \eta$	1	1,5	2,0	2,5
4	0,01	0,04	0,11	0,09
5	0,07	0,13	0,15	0,05
6	0,12	0,08	0,09	0,06

Знайти: $\rho_{\xi\eta}$, $P\{\xi \geq 5, \eta \geq 2\}$, $M\left(\eta / \xi = 4\right)$.

4. Довжина ξ виготовленої верстатом-автоматом деталі є випадкова величина, що має щільність:

$$p(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-100)^2}{8}}.$$

Знайти: 1) ймовірність браку відібраної деталі, якщо розмір допускають рівним $100 \pm 0{,}4$ (мм); 2) яку точність довжини деталі, виготовленої станком-автоматом, можна гарантувати із ймовірністю 0,95.

Варіант 27

1. Дано закон розподілу ймовірностей

ξ	-4	-3	3	4	6	10	15	20	30
p	a	$4a$	a	$4a$	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1

Знайти: a. Побудувати $F(x)$ та накреслити її графік. Обчислити: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, $P\{-3 \leq \xi < 10\}$.

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ ax^2 + bx + c, & -1 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти сталі: a, b, c та $F(x)$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$. Обчислити: $M\xi$, $\sigma\xi$, $Me\xi$, $P\{-1<\xi<0\}$. Чому дорівнює Mo?

3. Випадкова величина (ξ,η) рівномірно розподілена в ΔAOB: $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(0,4)$. Знайти: $p(x,y)$, $p_\eta(y)$, $p_\eta\left(y/x\right)$, $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$.

4. Комп'ютерна система містить 45 однакових мікроелементів. Ймовірність того, що будь-який мікроелемент буде працювати в заданий час, рівна 0,8. В.в. ξ – число працюючих елементів. Знайти: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$. Для виконання деякої операції треба, щоб хоча б 30 мікроелементів були в робочому стані. Чому рівна ймовірність, що операція буде виконана успішно?

Варіант 28

1. Маємо дві урни. В першій урні міститься 6 чорних та 3 білих кулі, в другій – 4 білих та 5 чорних кулі. З кожної кулі навмання беруть по три кулі. Побудувати закон розподілу випадкової величини ξ – числа чорних куль серед 6 витягнутих. Обчислити $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$. Побудувати многокутник розподілу.

2. Дано функцію розподілу випадкової величини ξ

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -3,\\ \dfrac{(x+3)^2}{16}, & -3<x\le 1,\\ 1, & x>1\end{cases}$$

Знайти: $p(x)$, $M\xi$, $\sigma\xi$, Me, $P\{|\xi|\le 1\}$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$.

3. Двовимірна випадкова величина (ξ,η) задана щільністю:

$$p(x,y)=\begin{cases}a, & x^2+y^2\le 25,\\ 0, & x^2+y^2>25/\end{cases}$$

Знайти: a, $p_\eta(y)$, $P\{(\xi,\eta)\in G\}$, де G: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}\le 1$, $(M\xi, M\eta)$.

4. Середній термін служби коробки передач до капітального ремонту автомобіля певної марки становить 56 місяців зі стандартним відхиленням 16 місяців. Виробник хоче дати гарантію на цей вузол, і обіцяє робити безкоштовно

будь-яку кількість ремонтів коробки передач нового автомобіля у випадку її поломки до певного терміну. Нехай термін служби коробки передач підпорядковується нормальному закону. На скільки місяців в такому випадку виробник повинен дати гарантію на цю деталь, щоб число безкоштовних ремонтів не перевищувало 2,275% проданих автомобілів.

Варіант 29

1. Дано закон розподілу дискретної в.в. ξ задано таблицею:

ξ	-7	-4	-1	7	10	12	15	18	20
p	$2a$	$3a$	3a	2a	0,1	0,2	a	0,1	a

Знайти: a. Побудувати $F_\xi(x)$ та накреслити її графік. Обчислити: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, $P\{\xi > 7\}$.

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ a\sqrt{x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти: a, $F_\xi(x)$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$. Обчислити: $M\xi$, $\sigma\xi$, $Me\xi$, $P\{\xi \ge 0{,}5\}$.

3. Дано закон розподілу випадкової величини (ξ, η)

ξ \ η	0,5	1,0	1,5	2,0
2	0,01	0,04	0,09	0,16
3	0,06	0,11	0,23	0,10
5	0,03	0,05	0,08	0,04

Знайти: кореляційну матрицю, $\rho(\xi,\eta)$, $M\left(\eta / \xi = 3\right)$, $P\{\xi > 2{,}5; \eta < 1\}$, $F(1{,}5;3)$.

4. Вага товарів, розміщених у контейнері певного розміру, – нормально розподілена випадкова величина. Відомо, що 65% контейнерів мають чисту вагу більшу ніж 4,9 т. і 25% – мають вагу меншу ніж 4,2 т. Знайти очікувану середню вагу і середнє квадратичне відхилення чистої ваги контейнера.

Варіант 30

1. Робітник обслуговує чотири незалежно працюючих верстати. Ймовірність того, що протягом зміни верстат не вимагатиме уваги робітника для першого дорівнює 0,95; для другого – 0,85; для третього – 0,8; четвертого – 0,75.

Побудувати закон розподілу випадкової величини ξ – числа верстатів, які не вимагатимуть уваги робітника протягом зміни. Обчислити $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$. Побудувати многокутник розподілу.

2. Дано функцію розподілу випадкової величини ξ

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -5,\\ \dfrac{(x+5)^2}{16}, & -5<x\le 0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

Знайти: $p(x)$, $M\xi$, $\sigma\xi$, Me, $P\{-2<\xi<0\}$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$.

3. Випадкова величина $(\xi;\eta)$ рівномірно розподілена всередині трапеції з вершинами: $A(0,4)$, $B(3,4)$, $C(6,0)$, $D(0,0)$. Знайти: $p(x,y)$, $p_\eta(y)$, $p\{\eta>2\}$, $p_\eta\left(y/x\right)$, $(M\xi;M\eta)$.

4. Щільність розподілу неперервної випадкової величини ξ задана формулою:

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ ce^{-5x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Знайти: c, $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P\{\xi>2\}$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$.

Варіант 31

1. Закон розподілу випадкової величини ξ задано таблицею:

ξ	-4	-2	2	4	5	10	20	30	40
p	a	$4a$	$4a$	a	0,2	a	0,1	$2a$	0,1

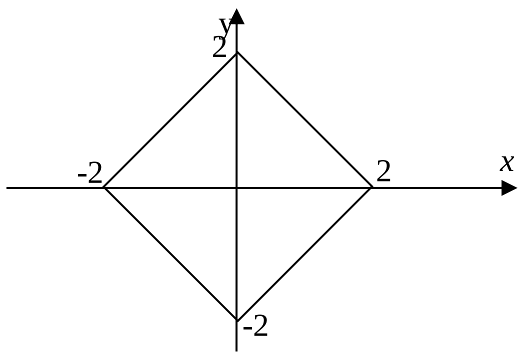
Знайти: a. Побудувати $F_\xi(x)$ та накреслити її графік. Обчислити $\sigma\xi$. Чому дорівнює M_0?

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\sqrt[4]{x^3}, & 0<x\le 16,\\ 0, & x>16\end{cases}$$

Знайти: a, $F_\xi(x)$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$. Обчислити: ймовірність $P\{0<\xi<4\}$, $M\xi$, $\sigma\xi$, Me.

3. Випадкова величина (ξ,η) рівномірно розподілена в середині квадрата



Знайти: $p(x,y)$, $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$, $p_\xi\left(x/y\right)$, $p_\eta\left(y/x\right)$, $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$.

4. Дисперсія числа появ події у двох незалежних випробуваннях дорівнює 3/8. Знайти середнє квадратичне відхилення числа появ події в 400 таких випробуваннях; знайти ймовірність появи події в одному випробуванні, якщо вона більша за ймовірність не появи.

Варіант 32

1. В ящику міститься 5 деталей 1-го ґатунку, 4 деталі 2-го ґатунку та 3 браковані. Навмання беруть чотири деталі. Побудувати закон розподілу випадкової величини ξ – числа якісних деталей серед взятих чотирьох. Обчислити: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$. Побудувати многокутник розподілу.

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\sqrt[4]{x^3}, & 0<x\le 16,\\ 0, & x>16\end{cases}$$

Знайти: a, $F_\xi(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, Me, $P\{0<\xi<1\}$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$.

3. Дано закон розподілу випадкової величини (ξ,η):

ξ \ η	4	6	8
10	0,03	0,07	0,2
20	0,27	0,23	0,2

Знайти: $M\Psi$, $D\Psi$, якщо:
а) $\Psi=-9\xi+2\eta-5$,
б) $\Psi=-3\xi-2\eta+5$,
в) $\Psi=\xi\cdot\eta$.

4. Гранична міцність виготовленої партії стального дроту діаметром 1,4 мм є нормально розділена випадкова величина ξ з математичним сподіванням 150 кг/мм^2 і середнім квадратичним відхиленням 6 кг/мм^2. Знайти: 1) щільність випадкової величини ξ; 2) $P\{\xi\in(145;160)\}$; 3) визначити, яке граничне відхилення в один бік від математичного сподівання можна чекати з ймовірністю 0,9901.

Варіант 33

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини ξ задано таблицею:

ξ	-12	-8	-6	-4	-2	2	4	6	8
p	$4a$	0,1	a	$3a$	$2a$	$2a$	a	$3a$	0,1

Знайти: a. Побудувати многокутник розподілу. Обчислити $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, $Mo\xi$, $P\{|\xi| \le 4\}$.

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{4} x e^{-\frac{1}{8}x^2}, & x \ge 0, \end{cases}$$

Знайти: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, $Me\xi$, $Mo\xi$.

3. Дано кореляційну матрицю випадкової величини $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$:

Знайти: $D\xi$, якщо:

1) $\Psi = 2\xi_1 - 3\xi_2 - \xi_4 + 2$,

2) $\Psi = -3\xi_1 - 5\xi_2 + \xi_3 - 6\xi_4 - 1$. Знайти $\rho(\xi_2, \xi_4)$ і $\rho(\xi_3, \xi_1)$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -0{,}8 & 0{,}4 & 1 \\ -0{,}8 & 1 & 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 9 & -1 \\ 1 & 0{,}5 & -1 & 16 \end{pmatrix}$$

4. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на $(1;3]$. Знайти:

1) функцію розподілу і побудувати її графік;

2) $M\xi$ і $\sigma\xi$;

3) $P\{\xi \in (1;2)\}$.

Варіант 34

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини ξ задано таблицею:

ξ	-4	4	6	10	12	18	22	25	28	30
p	$4a$	$4a$	a	a	0,1	0,1	0,2	$3a$	a	0,1

Знайти: a. Побудувати $F_\xi(x)$ та накреслити її графік. Обчислити $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$. Чому дорівнює Mo?

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{m!}x^{b}e^{-x}, & x\geq 0,\end{cases}$$

Знайти: $M\xi$, $D\xi$, Mo. Побудувати графік $p(x)$ для $m=2$

3. Дано закон розподілу випадкової величини $(\xi;\eta)$:

$\xi \backslash \eta$	2	2,5	3	3,5
2,5	0,10	0,04	0,07	0,09
3,5	0,20	0,01	0,03	0,01
4,5	0,30	0,05	0,05	0,05

Знайти: $(M\xi, M\eta)$, кореляційну матрицю, $\rho(\xi,\eta)$, $M\left(\xi / \eta=2{,}5\right)$

4. Випадкова величина ξ розподілена нормально з щільністю $p(x)=ce^{-2x^2-4x-2}$. Знайти: c, $M\xi$, $D\xi$, $P\{|\xi|<2\}$, $P\{|\xi|>1\}$

Варіант 35

1. Два гральні кубики підкидають по одному разу. Побудувати закон розподілу випадкової величини ξ – суми випавши очок на двох кубиках. Обчислити: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$. Побудувати многокутник розподілу.

2. Дано функцію розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq -1,\\ a+b\arcsin x, & -1<x<1,\\ 1, & x\geq 1.\end{cases}$$

Знайти: a, b, $p(x)$, $M\xi$, $D\xi$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$.

3. Дано щільність випадкової величини (ξ,η):

$$p(x,y)=\frac{a}{1+x^2+y^2+x^2y^2}$$

Знайти: a, $p_{\xi}(x)$, $p_{\eta}(y)$, $F_{\xi\eta}(x,y)$. Чи залежні ξ і η?

4. Із гвинтівки виконуються постріли по цілі до першого влучення. Ймовірність попадання для кожного пострілу дорівнює 0,6. Скласти закон розподілу випадкової величини ξ – числа витрачених набоїв. Знайти: $M\xi$, $D\xi$, $P\{\xi > 7\}$.

Варіант 36

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини ξ задано таблицею:

ξ	-3	2	3	5	8	12	18	20	25
p	$2a$	0,1	$2a$	0,1	$3a$	0,1	$4a$	0,1	$5a$

Знайти: a. Побудувати $F_{\xi}(x)$ та накреслити її графік. Обчислити $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$. Чому дорівнює Mo?

2. Дано щільність випадкової величини ξ

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax^2 e^{-x^2}, & x > 0, \end{cases}$$

Знайти: a, $M\xi$, $D\xi$, Mo.

3. Незалежні випадкові величини ξ і η мають щільності:

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \quad \text{або} \quad x > 4; \\ 0{,}2\,, & -1 < x \le 4; \end{cases}$$

$$p_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \quad \text{або} \quad y > 3; \\ \dfrac{1}{3}, & 0 < y \le 3; \end{cases}$$

Знайти: $p_{\eta}(x,y)$, $F_{\eta}(x,y)$, $P\{-1 < \xi \le 0; 0 < \eta \le 2\}$, $M\xi$, $M\eta$, $D\xi$, $D\eta$, $\operatorname{cov}(\xi;\eta)$.

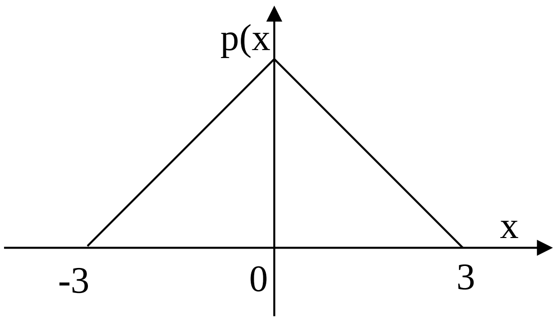
4. Середнє число звернень, що надходять на АТС за 1 хв. дорівнює трьом. Знайти ймовірність, що за 1 хв., надійде: 1) чотири виклики; 2) менше трьох викликів; 3) не менше трьох викликів.

Варіант 37

1. Чотири стрільці вистрілили по одній мішені. Відомі ймовірності влучення у мішень при одному пострілі для кожного стрільця, які відповідно дорівнюють: 0,9; 0,6; 0,8; 0,7.

Побудувати закон розподілу випадкової величини ξ – числа влучень в ціль. Обчислити: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$. Побудувати многогранник розподілу.

2. Випадкова величина ξ має щільність, графік якої зображений на малюнку:



Знайти: $p(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, $F_\xi(x)$. Побудувати графік $F(x)$.

3. Дано закон розподілу випадкової величини (ξ, η):

ξ \ η	3	4	5
0	0,02	0,12	0,06
1	0,03	0,18	0,09
2	0,05	0,30	0,15

Знайти: кореляційну матрицю, $\rho(\xi, \eta)$, $M\left(\xi / \eta = 4\right)$, $M\left(\eta / \xi = 0\right)$, $F(2;1)$, $F(1;3)$, $F(2;5)$.

4. Ціна деяких акцій розподілена нормально. Протягом останнього року 20% робочих днів ціна була меншою 20 грн., а 75% робочих днів вона була більше 25 грн. Знайти математичне сподівання і дисперсію ціни цієї акції.

Варіант 38

1. Задано закон розподілу випадкової величини ξ в табличній формі:

ξ	-5	-3	2	3	5	10	15	20	25
p	2a	3a	0,1	3a	2a	0,1	4a	0,1	5a

Знайти: a. Побудувати $F_\xi(x)$ і накреслити її графік. Обчислити: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$. Визначити Mo.

2. Дано щільність випадкової величини ξ:

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ a(x+1)(x-5), & -1<x\le 5,\\ 0, & x>5\end{cases}$$

Знайти: a, Me, Mo, As. Побудувати графік $p(x)$.

3. Випадкова величина $(\xi;\eta)$ рівномірно розподілена в трикутнику ABC з координатами вершин $A(-2;0)$, $B(2;0)$, $C(0;3)$. Знайти: $p(x,y)$, $p_\eta(y)$, $p_\eta\left(y/x\right)$, $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$, $P\{-1<\xi<3\}$.

4. Тривалість міжміських телефонних розмов розподілена приблизно за показниковим розподілом, розмова триває в середньому 3хв. Знайти ймовірність, що чергова розмова буде тривати більше ніж 3хв. Визначити частку розмов, які тривають менше 1хв. Знайти ймовірність, що розмова, яка триває вже 10хв., закінчиться протягом найближчої хвилини, а також дисперсію тривалості розмови.

Варіант 39

1. В коробці 7 мікросхем. З них 4 підходять за параметрами для даного приладу. Навмання взято 3 мікросхеми. Побудувати розподіл випадкової величини ξ – числа мікросхем серед відібраних, що підходять за параметрами. Знайти: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, $P\{\xi<2\}$. Побудувати многокутник розподілу.

2. Випадкова величина ξ має щільність:

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \alpha x e^{-x^2}, & x>0,\end{cases}$$

Знайти: α, $M\xi$, $\sigma\xi$, Me, $F(x)$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$

3. Дано закон розподілу випадкової величини $(\xi;\eta)$

ξ \ η	2	2,5	3	5,5
0,5	0,10	0,04	0,07	0,09
3,5	0,20	0,01	0,03	0,01
4,0	0,30	0,05	0	0,1

Знайти: кореляційну матрицю; $\rho(\xi;\eta)$, $M\left(\xi/_{\eta=3}\right)$, $M\left(\eta/_{\xi=4,0}\right)$, $F(2;2)$, $F(4;4)$, $F(6;4)$, $F(3;5)$.

4. Поточна ціна акції може бути наближена нормальним розподілом з математичним сподіванням 15,28 грн. і середнім квадратичним відхиленням 0,12 грн. Розрахувати ймовірність, що ціна акції виявиться: а) не нижче 15,50 грн; б) не вище 15,00 грн; в) між 15,10 грн. і 15,40 грн.; г) між 15,05 грн. і 15,10 грн.

Варіант 40

1. Дано закон розподілу випадкової величини ξ:

ξ	-7	-4	-4	1	4	7
p	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1

Знайти початкові і центральні моменти перших чотирьох порядків, As, Es. Побудувати многокутник розподілу, функцію розподілу і її графік.

2. Дано функцію розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ 1+x(\ln x-1), & 1<x\le \varepsilon.\\ 1, x>\varepsilon\end{cases}$$

Знайти: $p(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $Me\xi$. Побудувати графіки $p(x)$.

3. Дано щільність випадкової величини $(\xi;\eta)$

$$p(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\notin H\\ a, & (x,y)\in H\end{cases}$$

де $H=\{(x,y): -4<x\le 5, -3<y\le 5\}$.

Знайти: a, $F(x,y)$, $P\{-1<\xi<4,\ -2<\eta<3\}$, $(M\xi, M\eta)$.

4. Серед автомобілів, які випускає завод, 80% некомплектні. Визначити, скільки автомобілів повинен оглянути покупець (в середньому), щоб вибрати комплектний автомобіль. Яка ймовірність, що йому прийдеться оглянути більше, ніж 10 автомобілів.

Варіант 41

1. Випадкова величина ξ може набирати два можливі значення: x_1 з ймовірністю 0,8 і x_2 з ймовірністю 0,2, при цьому $x_2>x_1$. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ, якщо відомо, що $M\xi=2{,}4$, $D\xi=0{,}64$. Побудувати функцію розподілу і накреслити її графік.

2. Дано щільність випадкової величини ξ:

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le -3\\ \dfrac{1}{4\sqrt{x+3}}, & -3<x\le 1,\\ 1, x>1.\end{cases}$$

Знайти: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, Me, $F(x)$ Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$

3. Випадкова величина $(\xi;\eta)$ рівномірно розподілена в трапеції $ABCD$ з координатами вершин $A(-6{,}0)$, $B(-3{,}4)$, $C(3{,}4)$, $D(6{,}0)$. Знайти: $p(x,y)$, $p_\xi(x)$, $p_\eta\left(y/x\right)$, $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$, $P\{|\xi|<4\}$.

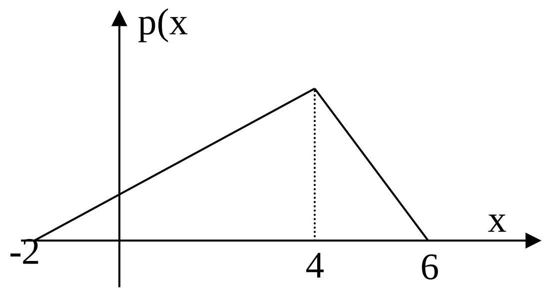
4. Випадкова величина ξ задана на всій осі функцією розподілу $F(x) = A + B\,arctg\,\dfrac{x}{2}$ (розподіл Коші). Знайти A і B. Знайти значення x_1, яке задовольняє умові: з ймовірністю $\dfrac{1}{4}$ випадкова величина ξ набуде значення, більшого за x_1. Знайти:щільність розподілу; $P\{|\xi| < 2\}$; $P\{\xi = 2\}$; $P\{\xi > 2\}$.

Варіант 42

1. Стартовий капітал підприємця становить 10000 грн. Досвідчені колеги сказали йому, що після кожної поїздки капітал з ймовірністю ½ збільшиться в півтора рази, з ймовірністю 1,4 залишиться без змін і з ймовірністю ¼ зменшиться в півтора рази. Скласти ряд розподілу капіталу підприємця після двох поїздок. Обчислити: $M\xi$, $D\xi$. Знайти $Mo\xi$.

2. Дано графік щільності:

Знайти: $p(x)$, $M\xi$, $\sigma\xi$, Mo, Me, $F_\xi(x)$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$



3. Дано закон розподілу випадкової величини $(\xi;\eta)$

ξ \ η	-6	-4	-2	-3
2	0,028	0,022	0,05	0,1
4	0,022	0,028	0,05	0,1
6	0,05	0,05	0,05	0,1
8	0,1	0,1	0,05	0,1

Знайти: $\rho(\xi,\eta)$, $M\left(\xi / \eta = -6\right)$, $M\left(\eta / \xi = 4\right)$, $P\{2 < \xi < 8, \quad \eta > -3\}$.

4. Прогноз стосовно величини банківської відсоткової ставки в поточному році підпорядковується нормальному закону з середнім значенням $a = 9\%$ та стандартним відхиленням $\sigma = 2{,}6\%$. Знайти ймовірність того, що згідно прогнозу рівень відсоткової ставки: а) перевищить 11%; б) виявиться меншим 14%; в) буде в межах від 12 до 15%.

Варіант 43

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини ξ заданий таблицею:

ξ	2	3	5	6	8
p	0,2	0,3	0,1	0,1	0,3

Знайти: $M\xi$, $D\xi$, As, $F(x)$. Побудувати графік $F(x)$ і многокутник розподілу.

2. Дано щільність випадкової величини ξ:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ \frac{1}{18}\sqrt{x+2}, & -2 < x \le 7, \\ 0, & x > 7 \end{cases}$$

Знайти: $M\xi$, $D\xi$, Me, $F_\xi(x)$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$

3. Дано щільність випадкової величини $(\xi;\eta)$

$$p(x,y) = \begin{cases} a(xy + x^2), & (x,y) \in H, \\ 0, & (x,y) \notin H \end{cases}$$

де $H = \{(x,y): 0 < x \le 1, \quad 0{,}5x < y \le x\}$.

Знайти: a, $(M\xi, M\eta)$, кореляційну матрицю, $\rho(\xi,\eta)$.

4. Нафторозвідувальна компанія отримала фінансування для проведення 6 нафторозробок. Ймовірність успішної нафторозвідки 0,05. Припустимо, що нафторозвідку здійснюють незалежні одна від одної розвідувальні партії. Складіть закон розподілу числа успішних нафто розвідок. Знайдіть числові характеристики цього розподілу. Яка ймовірність, що як мінімум 2 нафторозвідки будуть успішними?

Варіант 44

1. Для виготовлення деталей використовують труби довжиною 4, 5 і 6 м. При цьому половина труб поставляється довжиною 6 м, а труби довжиною 4 і 5 м поступають у відношені 2:18. Знайти закон розподілу числа заготовок довжиною 0,5 м, одержаних із навмання взятої труби. Знайти математичне сподівання, дисперсію цієї випадкової величини. Побудувати функцію розподілу і її графік.

2. Дано щільність випадкової величини ξ:

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \frac{3}{64}(x+1)^2, & -1<x\le 3,\\ 0, & x>3\end{cases}$$

Знайти: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, Me, $F_\xi(x)$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$

3. Дано закон розподілу випадкової величини $(\xi;\eta)$

$\xi \backslash \eta$	-8	-4	4	8
-6	0,05	0,05	0,05	0,05
-4	0,016	0,034	0,05	0,1
-2	0,034	0,016	0,05	0,1
2	0,2	0,1	0,05	0,05

Знайти: $(M\xi, M\eta)$, $\rho(\xi,\eta)$, $M\left(\xi/_{\eta=4}\right)$, $M\left(\eta/_{\xi=2}\right)$, $P\{\xi>0,\eta<2\}$.

4. Вага тропічного грейпфрута, вирощеного в Криму – нормально розподілена випадкова величина ξ з дисперсією, рівною 0,04кг^2. Агрономи знають, що 65% фруктів важать менше, ніж 0,5 кг. Найти очікувану вагу випадково вибраного грейпфрута.

Варіант 45

1. В лотереї на кожні 100 білетів приходиться 15 виграшних. Кількість і розміри виграшу такі:

Розмір виграшу, грн	2000	500	100
Кількість білетів	1	4	10

В.в. ξ – розмір виграшу на один випадково вибраний білет. Скласти закон розподілу випадкової величини ξ. Знайти: $P\{\xi < 500\}$, $P\{\xi < 2100\}$, $P\{-100 < \xi \le 1000\}$, середній виграш, дисперсію виграшу. Знайти $F_{\xi}(x)$ і побудувати її графік.

2. Дано щільність випадкової величини ξ:

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 0, \\ \frac{2}{7}\cos\frac{2}{7}x, \quad 0 < x \le \frac{7}{4}\pi, \\ 0, \quad x > \frac{7}{4}\pi \end{cases}$$

Знайти: $M\xi$, $D\xi$, $F(x)$. Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$

3. Дано щільність випадкової величини $(\xi;\eta)$

$$p(x,y) = \begin{cases} a(x+y+xy), \quad (x,y) \in D, \\ 0, \quad (x,y) \notin D, \end{cases}$$

де $D = \{(x,y): 0 < x \le 1, \quad x^2 < y \le x\}$.

Знайти: a, $(M\xi, M\eta)$, $\rho(\xi,\eta)$.

4. В години пік у місті відбувається в середньому 2 дорожні пригоди за годину. Вранішній пік триває 1,5 год., а вечірній – 2 год. Складіть закони розподілу числа дорожніх пригод у вранішнійй та вечірні години (розподіл Пуассона). Чому дорівнює ймовірність, що в певний день під час вранішнього і вечірнього піків не буде жодної дорожньої пригоди, буде одна пригода?

Варіант 46

1. Дано закон розподілу дискретної випадкової величини ξ:

ξ	-1	1	2	4	5
p	0,05	0,15	0,3	0,4	0,1

Знайти: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, As, Es. Побудувати многокутник розподілу.

2. Задано:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 1 \\ (1 - \cos x), \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 1, \quad x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Знайти: $p_{\xi}(x), M\xi, Ds, Me\xi, Mo.$ Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$.

3. Дано щільність випадкової величини (ξ, η)

$$p(x, y) = \begin{cases} ax(1 + y), \quad (x, y) \in D \\ 0, \quad (x, y) \notin D, \end{cases}$$

де $D = \{(x, y) : 0 < x \le 3, \quad -1 < y \le 5\}$.

Знайти: a, $p_{\xi}(x)$, $p_{\eta}(y)$, $\rho(\xi;\eta)$, $F_{\xi\eta}(x, y)$, $P\{0 < \xi < 2, 0 < y < 4\}$.

4. Телевізійний канал рекламує новий вид дитячого харчування. Ймовірність того, що телеглядач побачить цю рекламу, оцінюється в 0,2. Випадковим чином вибрали 10 телеглядачів. Складіть розподіл випадкової величини ξ – числа осіб, які побачили рекламу. Знайдіть числові характеристики цього розподілу. Запишіть в загальному вигляді функцію розподілу випадкової величини ξ. Чому рівна ймовірність, що хоча б два телеглядачі цього каналу бачили рекламу нового дитячого харчування?

Додатки

Значення функції Гаусса $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{x^2}{2}}$

Таблиця 1

x	Соті долі x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17300
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687

1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04214	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01192	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3,1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3,2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3,3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3,4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3,5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3,6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3,7	00042	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00031	00030
3,8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3,9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014

x	Десяті долі x				
	0	2	4	6	8
4,	0,0001338	0000589	0000249	0000101	0000040
5,	0000015				

Значення функції $P(m;\lambda) = \dfrac{\lambda^m \cdot \ell^{-\lambda}}{m!}$

Таблиця 2

m	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,90484	81873	74082	67032	60653	54881	49659	44933	40657	36788
1	09048	16375	22225	26813	30327	32929	34761	35946	36591	36788
2	00452	01637	03334	05363	07582	09879	12166	14379	16466	19394
3	00015	00109	00333	00715	01264	01976	02839	03834	04940	06131
4		00005	00025	00072	00158	00296	00497	00767	01111	01533
5			00002	00006	00016	00036	00070	00123	00200	00307
6					00001	00004	00008	00016	00030	00051
7							00001	00002	00004	00007
8										00001
m	λ									
	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
0	0,22313	13534	08208	04979	03020	01832	01111	00674	00409	00248
1	33470	27067	20521	14936	10569	07326	04999	03369	02248	01487
2	25102	27067	25652	22404	18496	14653	11248	08422	06181	04462
3	12551	18045	21376	22404	21579	19537	16872	14037	11332	00924
4	04707	09022	13360	16803	18881	19537	18981	17547	15582	13385
5	01412	03609	06680	10082	13217	15629	17083	17547	17140	16062
6	00353	01203	02783	05041	07710	10420	12812	14622	15712	16062
7	00076	00344	00994	02160	03855	05954	08236	10444	12345	13768
8	00014	00086	00311	00810	01687	02977	04633	06528	08487	10326

9	00002	00019	00086	00270	00656	01323	02316	03627	05187	06884
10		00004	00022	00081	00230	00529	01042	01813	02853	04130
11		00001	00005	00022	00073	00192	00426	00824	01426	02253
12			00001	00006	00021	00064	00160	00343	00654	01126
13				00001	00006	00020	00055	00132	00277	00520
14					00001	00005	00018	00047	00109	00223
15						00002	00005	00016	00040	00089
16							00002	00005	00014	00033
17								00001	00004	00012
18									00001	00004
19										00001

Значення функції Лапласса $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \ell^{\frac{t^2}{2}} dt$

Таблиця 3

x	Соті долі x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524

Продовження таблиці 3

x	Соті долі x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37285	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	44352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807

2,9	49813	49819	49825	49831	49835	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997

x	Десяті долі x				
	0	2	4	6	8
4,	0,4999683	49999867	4999946	4999979	4999992
5,	4999997				

ЛІТЕРАТУРА

1. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика. К.: КНЕУ. 2001. 336 с.

2. Майборода Р. Є. *Комп'ютерна статистика* : *підручник*. К. : ВПЦ "Київський університет", 2019. 589 с.

3. Мішура Ю. С., Ральченко К. В., Сахно Л. М., Шевченко Г.М. "Випадкові процеси. Теорія. Статистика. Застосування". Видавничо-редакційний центр Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2019.

4. Савченко О.Г., Валько Н.В., Кавун Г.М., Кузьмич Л.В. Теорія ймовірностей та математична статистика: [базовий курс з прикладами і задачами]. Херсон: РВЦ «Колос», ХДАУ, 2017. 406 с.

5. Сеньо П.К. Теорія ймовірностей і математична статистика. К.: Центр навчальної літератури. 2004. 448 с.

6. Теорія ймовірностей. Збірник задач. Під редакцією А. В. Скорохода. К.: Вища школа. 1976. 383 с.

7. Тичинська Л.М., Черепащук А.А. Теорія ймовірностей // Електронний ресурс. Режим доступу: https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fitki/4tichinska_teoriya_jmovirnostej/v.htm.

8. Турчин В. М. Теорія ймовірностей. К.: Видавництво А.С.К., 2004. 208 с.

9. Шефтель З. Г. Теорія ймовірностей. К.: Вища школа. 1994. 192 с.

Навчально-методичне видання

Соліч Катерина Василівна,

Ковальчук Ігор Романович

Філозоф Леонтій Іванович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні рекомендації для студентів

факультету інформаційних технологій і математики

Ч. ІІ

Друкується в авторській редакції