Волинський національний університет імені Лесі Українки
Факультет інформаційних технологій і математики
Кафедра математичного аналізу та статистики

Бушев Д.М., Федуник−Яремчук О.В., Соліч К.В.

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОЛІМПІАДНИХ І КОНКУРСНИХ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ:

методичні вказівки

Луцьк 2023

УДК 511.1 (072)

Б 94

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
Волинського національного університету імені Лесі Українки
(протокол № 10 від 21 червня 2023 року)

Рецензенти:
Кальчук Інна Володимирівна − кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теорії функцій та методики навчання математики Волинського національного університету імені Лесі Українки
Луньов Сергій Валентинович − доктор фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики та вищої математики Луцького національного технічного університету

Б 94

Бушев Д.М., Федуник−Яремчук О.В., Соліч К.В. Методи розв'язування олімпіадних і конкурсних задач з математики: методичні вказівки з дисципліни "Методи розв'язування олімпіадних і конкурсних задач з математики" для студентів, які навчаються за спеціальностями 014 Середня освіта (Математика), 111 Математика/ Дмитро Миколайович Бушев, Оксана Володимирівна Федуник-Яремчук, Катерина Василівна Соліч. Луцьк: ВНУ ім. Лесі Українки, 2023. 70 с.

Методичні вказівки призначені для методичного забезпечення лекційних, практичних занять, самостійної та дистанційної роботи студентів в рамках курсу ,,Методи розв'язування олімпіадних і конкурсних задач з математики".

Викладено найпростіші та основні методи розв'язання задач на подільність та приклади їх застосування.

Мета розробки – підготовка студентів до викладання математики в класах, де цей предмет є профілюючим, навчання умінням і навичкам розв'язувати задачі, які найчастіше пропонуються для розв'язання на олімпіадах і турнірах.

УДК 511.1 (072)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Дана розробка призначена для підготовки студентів до викладання математики в класах, де цей предмет є профілюючим, навчання умінням і навичкам розв’язувати задачі, які найчастіше пропонуються для розв’язання на олімпіадах і турнірах. Потреба в класифікації методів розв’язання таких задач особливо гостро стоїть для вчителів, яким необхідно підтверджувати відповідність сучасним вимогам до результатів навчання та високий науково-методичний рівень викладання. Підготовка учасників і переможців олімпіад і турнірів є основним показником якості та успішності викладання предмету та престижності навчального закладу.

В програмі шкільного курсу математики не забезпечується в достатній мірі часу для вивчення та класифікації методів розв’язування задач на подільність, але вони найчастіше, в порівнянні з іншими, пропонуються для розв’язання на олімпіадах і турнірах різного рівня (міських, обласних, всеукраїнських, всесвітніх). Формулювання цих задач в переважній більшості дуже просте та зрозуміле навіть для учнів п’ятого класу.

Для розв’язання задач на подільність потрібно засвоїти основні типи та методи розв’язання цих задач. Разом з методами, застосування яких не виходить за межі програми шкільного курсу математики, будемо використовувати теорему Ферма і наслідок до неї. Ця теорема просто формулюється, але є необхідною і значно спрощує розв’язання багатьох задач.

В методичній розробці наведемо найпростіші та основні методи розв’язання задач на подільність та приклади їх застосування. Розробка містить достатню завдань, які можна розв’язувати на практичних заняттях та завдань для самостійного розв’язання (домашніх завдань, які позначені як ДЗ). Всі приклади та завдання підібрані з різних джерел. Їх узагальнення, які пропонуються в основному для самостійної роботи, сприяють більш глибокому засвоєнню відповідних методів розв'язання. Різноманітні узагальнення дають можливість створювати достатнє число задач для індивідуальних завдань, самостійних і контрольних робіт. Індивідуальні завдання, самостійні і контрольні роботи особливо актуальні і необхідні при дистанційному навчанні для контролю і об'єктивності оцінки отриманих студентами знань, умінь і навичок.

Для кожної олімпіадної задачі створені додаткові простіші завдання, які використовуються і полегшують розв'язок олімпіадної.

Методичні вказівки можуть бути використані для проведення занять з дисциплін "Методи розв'язування олімпіадних і конкурсних задач з математики", "Вибрані питання алгебри", "Вибрані питання елементарної математики", "Методи розв'язування задач на подільність та їх використання", викладання яких проводиться кафедрою математичного аналізу та статистики.

Підібрані в методичній розробці завдання автори використовували при проведенні занять на курсах підвищення кваліфікації вчителів, для підготовки учнів до олімпіад і турнірів, написанні науково- дослідницьких робіт учнями МАН.

Методичні вказівки складаються з шести розділів і списку використаної літератури. Останні два розділи необхідні для покращення ефективності дистанційного навчання, контролю якості підготовки і оцінки знань студентів.

1. Використання методу розкладу на множники в задачах на подільність

Через $\mathbb{N}$ і $\mathbb{Z}$ будемо позначати відповідно множини всіх натуральних і цілих чисел.

Означення. Ціле число a ділиться на ціле число m, відмінне від нуля, якщо $a = mq$, де $q -$ ціле число. При цьому записують $a \vdots m$.

Означення і властивості подільності будемо формулювати при необхідності їх використання.

Наведемо формули скороченого множення, які дозволяють розкласти на множники двочлен:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}),$$

де $n -$ довільне натуральне число.

Останню рівність можна довести, використовуючи метод математичної індукції і формулу суми членів геометричної прогресії.

Приклад 1.1. Довести за допомогою формули суми членів геометричної прогресії рівність

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \cdots + b^{2n}).$$

Розв'язання. Для суми членів геометричної прогресії маємо, що

$$S_{2n+1} = 1 - q + q^2 - \cdots - q^{2n-1} + q^{2n} = \frac{1 - (-q)^{2n+1}}{1+q} = \frac{1 + q^{2n+1}}{1+q}.$$

Звідси $1 + q^{2n+1} = (1+q)(1 - q + q^2 - \cdots - q^{2n-1} + q^{2n})$.

Використовуючи останню рівність і заміну $q = \frac{b}{a}$ отримаємо:

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = a^{2n+1}\left(1 + \frac{b^{2n+1}}{a^{2n+1}}\right) = a^{2n+1}\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}\right) = \left|\frac{b}{a} = q\right| =$$

$$= a^{2n+1}(1 + q^{2n+1}) = a^{2n+1}(1+q)(1 - q + q^2 - \cdots + q^{2n}) =$$

$$= a^{2n+1}\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2-\cdots+\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}\right)=$$

$$= a^{2n}(a+b)\left(1-\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2-\cdots+\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}\right)=$$

$$=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\cdots+b^{2n}).$$

Формула доведена.

Завдання 1.1. Доведіть, що $(4^n+15n-1) \vdots 9$, де $n \in \mathbb{N}$.

Завдання 1.2. Доведіть, що

$\left(5^n(5^n+1)-6^n(3^n+2^n)\right) \vdots 91$, де $n \in \mathbb{N}$.

Завдання 1.3. Доведіть, що $(4^{2n}-3^{2n}-7) \vdots 84$, де $n \in \mathbb{N}$.

Завдання 1.4. Доведіть, що $(5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}) \vdots 23$, де $n \in \mathbb{N}$.

ДЗ 1.1. Доведіть, що $(3^{2n+3}+40n-27) \vdots 64$, де $n \in \mathbb{N}$.

ДЗ 1.2. Доведіть, що $(11^{n+2}+12^{2n+1}) \vdots 133$, де $n \in \mathbb{N}$.

ДЗ 1.3. Доведіть, що $(2903^n-803^n-464^n+261^n) \vdots 1897$, де $n \in \mathbb{N}$.

ДЗ 1.4. Доведіть, що $(5^{2n+1}+3^{n+2}\cdot 2^{n-1}) \vdots 19$, де $n \in \mathbb{N}$.

ДЗ 1.5. Доведіть, що $(5^{n+2}+6^{2n+1}) \vdots 31$, де $n \in \mathbb{N}$.

ДЗ 1.6. Доведіть, що $(7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^2) \vdots 19$, де $n \in \mathbb{N}$.

ДЗ 1.7. Доведіть, що $(14\cdot 3^n+9\cdot 7^{2n}) \vdots 23$, де $n \in \mathbb{N}$.

Приклад 1.2. Доведіть, що $\forall n \in \mathbb{N}$ і $n \geq 2$ вираз

$$2(2^{1987}+3^{1987}+\ldots+n^{1987}) \vdots (n+2).$$

Розв’язання. Використаємо формулу розкладу на множники

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\cdots+b^{2n}).$$

Потрібно розглянути два випадки: $n=2k+1$ і $n=2k$.

1. Нехай $n=2k+1$, тоді

$$2^{1987}+3^{1987}+\cdots+n^{1987}=$$

$$=2^{1987}+3^{1987}+\ldots+(2k)^{1987}+(2k+1)^{1987}=$$

$$=(2^{1987}+(2k+1)^{1987})+(3^{1987}+(2k)^{1987})+\cdots+$$

$$+((k+1)^{1987}+(k+2)^{1987})=$$
$$=(2+2k+1)(2^{1986}-2^{1985}(2k+1)+2^{1987}(2k+1)^2-\cdots$$
$$-2(2k+1)^{1985}+(2k+1)^{1986})+$$
$$+(3+2k)(3^{1986}-3^{1985}\cdot 2k+3^{1984}\cdot(2k)^2-\cdots$$
$$-3(2k)^{1985}+(2k)^{1986})+\ldots+$$
$$+(k+1+k+2)((k+1)^{1986}-(k+1)^{1985}\cdot(k+2)+$$
$$+(k+1)^{1984}\cdot(k+2)^2-\ldots-(k+1)(k+2)^{1985}+(k+2)^{1986})=$$
$$=(2k+3)\cdot S_k \,\vdots\, (2k+3), \tag{1}$$

де $2k+3=n+2$,

$$S_k=(k+1)^{1986}-(k+1)^{1985}\cdot(k+2)+$$
$$+(k+1)^{1984}\cdot(k+2)^2-\ldots-(k+1)(k+2)^{1985}+(k+2)^{1986}.$$

2. Нехай $n=2k$, тоді

$$2(2^{1987}+3^{1987}+\cdots+n^{1987})=2((2k)^{1987}+2^{1987})+$$
$$+((2k-1)^{1987}+3^{1987})+\cdots+(k^{1987}+(k+2)^{1987})+(k+1)^{1987})=$$
$$=2\Big(\big((2k+2)(2k^{1986}-2k^{1985}\cdot 2+\cdots-2k\cdot 2^{1985}+2^{1986})\big)+$$
$$+\big((2k+2)((2k-1)^{1986}-(2k-1)\cdot 3^{1985}+\cdots-(2k-1)\cdot 3^{1985}$$
$$+3^{1986})\big)+\cdots+$$
$$+\big((2k+2)(k^{1986}-k^{1985}\cdot(k+2)+\cdots-k(k+2)^{1985}+(k+2)^{1986})\big)\Big)$$
$$+2(k+1)^{1987}=$$
$$=2(2k+2)A_k+2(k+1)^{1987}=2(2k+2)A_k+2(k+1)(k+1)^{1986}=$$
$$=\big((2k+2)(2A_k+(k+1)^{1986})\big) \,\vdots\, (2k+2), \tag{2}$$

де $2k+2=n+2$,

$$A_k=\Big(\big((2k+2)(2k^{1986}-2k^{1985}\cdot 2+\cdots-2k\cdot 2^{1985}+2^{1986})\big)+$$
$$+\big((2k+2)((2k-1)^{1986}-(2k-1)\cdot 3^{1985}+\cdots-(2k-1)\cdot 3^{1985}$$
$$+3^{1986})\big)+\cdots+$$
$$+\big((2k+2)(k^{1986}-k^{1985}\cdot(k+2)+\cdots-k(k+2)^{1985}+(k+2)^{1986})\big)\Big).$$

Із (1) та (2) випливає потрібне нам твердження.

ДЗ 1.8. Узагальнити результат прикладу 1.2.

Довести, що $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ і $n \geq 2$ виконується:

$$2(2^{2m+1} + 3^{2m+1} + \ldots + n^{2m+1}) \vdots (n+2).$$

Приклад 1.3. Довести, що $\forall n \in \mathbb{N}$ і $n \geq 2$ виконується:

$$(n^{n-1} + n^{n-2} + \cdots + n + 1 - n) \vdots (n-1).$$

Розв'язання. Використаємо формулу розкладу на множники двочлена $n^k - 1$. Маємо:

$$n^{n-1} + n^{n-2} + \cdots + n + 1 - n =$$

$$= \big((n^{n-1} - 1) + (n^{n-2} - 1) + \cdots + (n-1) + (1-1)\big) =$$

$$= \big((n-1)(n^{n-2} + \cdots + n + 1) + (n-1)(n^{n-3} + \cdots + n + 1) + \cdots$$
$$+ (n-1)\big) =$$

$$= (n-1)(n^{n-2} + \cdots + n + 1 + n^{n-3} + \cdots + n + 1 + \cdots + 1) \vdots (n-1).$$

ДЗ 1.9. Довести, що $\forall n \in \mathbb{N}$ і $n \geq 2$ виконується:

$$(n^n + n^2 + n - n) \vdots (n-1)^2.$$

Завдання 1.5. Довести, що $\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ і $\forall a \in \mathbb{Z}$ виконується:

$$(a^{3k_1} + a^{3k_2+1} + a^{3k_3+2}) \vdots (a^2 + a + 1).$$

Завдання 1.6. При якому $n \in \mathbb{N}$ вираз $n^{1988} + n^{1987} + 1$ є простим числом. Узагальнити.

Розглянемо узагальнення до завдання 1.6.

Приклад 1.4. Довести, що $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ і $n \geq 2$ вираз $n^{3k+2} + n^{3k+1} + 1$ є складеним числом.

Розв'язання. Доведемо, що $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ і $n \geq 2$ виконується:

$$(n^{3k+2} + n^{3k+1} + 1) \vdots (n^2 + n + 1) \text{ і}$$

$$n^{3k+2} + n^{3k+1} + 1 > n^2 + n + 1.$$

Отже, $(n^{3k+2} + n^{3k+1} + 1)$ – складене число.

Маємо

$$n^{3k+2} + n^{3k+1} + 1 = (n^3)^k \cdot n^2 + (n^3)^k \cdot n + 1 =$$

$$= n^2((n^3)^k - 1) + n((n^3)^k - 1) + 1 + n + n^2 =$$
$$= n^2(n^3 - 1)((n^3)^{k-1} + (n^3)^{k-2} + \cdots + 1) +$$
$$+n(n^3 - 1)((n^3)^{k-1} + (n^3)^{k-2} + \cdots + 1) + 1 + n + n^2 =$$
$$= n^2(n-1)(n^2+n+1)((n^3)^{k-1} + (n^3)^{k-2} + \cdots + 1) +$$
$$+n(n-1)(n^2+n++1)((n^3)^{k-1} + (n^3)^{k-2} + \cdots + 1) + n^2 + n + 1 =$$
$$= (n^2+n+1)(n^2(n-1)((n^3)^{k-1} + (n^3)^{k-2} + \cdots + 1) +$$
$$+n(n-1)((n^3)^{k-1} + (n^3)^{k-2} + \cdots + +1) + 1) \vdots (n^2+n+1).$$

Окрім того, $n^{3k+2} + n^{3k+1} + 1 > n^2 + n + 1$.

Отже, при $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$ і $n \geq 2$ вираз $n^{3k+2} + n^{3k+1} + 1$ є складеним числом.

Завдання 1.7. Довести, що $\forall k \in \mathbb{N}$ і $\forall a \in \mathbb{Z}$ виконується:

$$((a^2)^{3k+1} + a^{3k+1} + 1) \vdots (a^2 + a + 1),$$
$$((a^2)^{3k+2} + a^{3k+2} + 1) \vdots (a^2 + a + 1).$$

Завдання 1.8. Довести, що $(9^{3n+2} + 3^{3n+2} + 1) \vdots 13$, де $n \in \mathbb{N}$.

ДЗ 1.10. Довести, що $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ виконується:

$$((13a+3)^{3n+2} + (13b+9)^{3n+2} + 1) \vdots 13.$$

Завдання 1.9. Довести, що $\forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall k \in \mathbb{N}$ виконується:

$$\left(1 + 2^{3^n(3k+1)} + 4^{3^n(3k+1)}\right) \vdots \left(1 + 2^{3^n} + 4^{3^n}\right) \text{ і}$$
$$\left(1 + 2^{3^n(3k+2)} + 4^{3^n(3k+2)}\right) \vdots \left(1 + 2^{3^n} + 4^{3^n}\right).$$

ДЗ 1.11. Довести, що якщо число $1 + 2^m + 4^m$ при деякому $m \in \mathbb{N}$ є простим, то $m = 3^n$.

Завдання 1.10. Довести, що $\forall k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ виконується:

$$(2^{4n+1} - 2) \vdots 5 \quad \text{і} \quad (3^{5k+2} - 9) \vdots 11.$$

Завдання 1.11. При яких натуральних n число $3^{2^{4n+1}} + 2$ є просте?

ДЗ 1.12. При яких натуральних n число $2^{3^{4n+1}} + 3$ є просте?

Завдання 1.12. Довести, що $\forall k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ виконується:

$$(19 \cdot 8^{2n} + 17) \vdots 3, \qquad (8^{4k+3} - 2) \vdots 5, \qquad (19 \cdot 8^{4k+3} + 17) \vdots 5,$$

$$(8^{4k}-1) \vdots 13, \qquad (19 \cdot 8^{4k+1}+17) \vdots 13.$$

ДЗ 1.13. При якому натуральному m число $19 \cdot 8^m + 17$ просте?

Завдання 1.13. Довести, що якщо виконуються умови:

$$p - \text{просте}, p > 2, \qquad m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, \qquad (m+n) \vdots p, \qquad (m^2+n^2) \vdots p,$$

то $m \vdots p$ і $n \vdots p$.

ДЗ 1.14. Довести, що за умов $k \in \{1,2\}$, $a, b \in \mathbb{N}$, $(a^{2k}+b^{2k}) \vdots 179$, виконується:

$$a \vdots 179, \qquad b \vdots 179, \qquad (a^{1995}+b^{1995}) \vdots 179.$$

Завдання 1.14. Довести, що добуток будь – яких k послідовних натуральних чисел ділиться на $k!$, тобто $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ і $k \geq 2$ виконується:

$$(n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot (n+k) \vdots k! \ .$$

Завдання 1.15. Довести, що добуток будь – яких k послідовних цілих чисел ділиться на $k!$, тобто $\forall m \in \mathbb{Z}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ і $k \geq 2$ виконується:

$$(m+1)(m+2) \cdot \ldots \cdot (m+k) \vdots k!\,.$$

ДЗ 1.15. Довести, що $\forall m \in \mathbb{Z}$ виконується:

$$(m^5 - 5m^3 + 4m) \vdots 120.$$

Приклад 1.5. Довести, що $\forall n \in \mathbb{N}$ вираз $(1978^n - 1)$ не ділиться на $(1000^n - 1)$.

Розв'язання. Покажемо, що

$1978^n - 1 = (2^n(989^n - 500^n) + 1000^n - 1) \not\vdots\, (1000^n - 1)$.

Використаємо метод від супротивного. Припустимо що існує n для якого

$$(2^n(989^n - 500^n) + 1000^n - 1) \vdots (1000^n - 1).$$

Маємо, що НСД $(2^n, (1000^n - 1) = 1)$ і

$$((2^n(989^n - 500^n) + 1000^n - 1) \vdots (1000^n - 1)).$$

Отже, $(989^n - 500^n) \vdots (1000^n - 1)$, але $(989^n - 500^n) < (1000^n - 1)$.

Одержуємо суперечність, яка полягає в тому, що менше число націло ділиться на більше. Отже, припущення не правильне, тому істинне твердження $(1978^n - 1) \not\vdots (1000^n - 1)$.

Зауваження. При доведенні використано наступне твердження:

Якщо один доданок суми ділиться на число, а другий доданок не ділиться на число, то сума не ділиться на число.

ДЗ 1.16. Узагальнити результат прикладу 1.5.

ДЗ 1.17. Розкладіть на множники вираз:

1) $x^4 - 5x^2 + 4$; 3) $4x^4 - 12x^2 + 1$; 5) $x^4 + 4$;

2) $x^4 - x^2 + 1$; 4) $x^5 + x + 1$; 6) $x^3 + x^4 - 2$.

ДЗ 1.18. Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $x^4 + 5x^2 + 9$; 2) $x^4 - 8x^2 + 4$.

ДЗ 1.19. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n, відмінному від 1, значення виразу $n^4 + n^2 + 1$ є складеним числом.

Завдання 1.16. Розкладіть на множники вираз

$$x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y).$$

Завдання 1.17. Розкладіть на множники вираз

$$x\,(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2).$$

ДЗ 1.20. Розкладіть на множники вирази

1) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$;

2) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$;

3) $9x^4 - 12x^3y - 21x^2y^2 - 40xy^3 - 16y^4$;

4) $4x^4 + 4x^3y + 13x^2y^2 + 6xy^3 + 9y^4$.

Використання методу розкладу на множники для розв'язання рівнянь в цілих і натуральних числах.

Розв'язати в натуральних та цілих числах наступні завдання.

Завдання 1.18. $\begin{cases} 2^n + 3^n = 11^n, \\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

ДЗ 1.21. $\begin{cases} 5^n + 11^n = 12^n, \\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Завдання 1.19. 1) $\begin{cases} x^2 + x = y^2, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} t^2 - t = y^2, \\ t, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ 2 способи.

ДЗ 1.22. $\begin{cases} x^2 - x = y^2, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Завдання 1.20. $\begin{cases} u^2 = v(v+1), \\ u, v \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

ДЗ 1.23. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = x^2y^2, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Завдання 1.21. $\begin{cases} y^2 = t^2 + 3t + 1, \\ t, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

ДЗ 1.24. $\begin{cases} x^6 + 3x^3 + 1 = z^4, \\ x, z \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Завдання 1.22. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3xy - x + y = 0, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ 2 способи.

ДЗ 1.25. $\begin{cases} 6x^2 - xy - y^2 + 7x + 4y - 3 = 0, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Завдання 1.23.

1) $\begin{cases} (x-y)^2 + y^2 = 1, \\ x, y \in \mathbb{N}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = p, \\ x, y \in \mathbb{N}, \\ p - \text{ просте.} \end{cases}$

ДЗ 1.26. $\begin{cases} x^4 + 4y^4 = p, \\ x, y \in \mathbb{N}, \\ p - \text{ просте.} \end{cases}$

ДЗ 1.27. $\begin{cases} (2t-1)^4 + 4^{2t-1} = p, \\ t \in \mathbb{N}, p - \text{просте.} \end{cases}$

ДЗ 1.28. $\begin{cases} x^4 + 4^x = p, \\ x \in \mathbb{N}, \\ p - \text{просте.} \end{cases}$

Завдання 1.24.

1) $\begin{cases}(x-y)^2(x+2y)=5,\\ x,y\in\mathbb{N}.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(x-y)^2(x+2y)=7,\\ x,y\in\mathbb{N}.\end{cases}$

3) $\begin{cases}(x-y)^2(x+2y)=11,\\ x,y\in\mathbb{N}.\end{cases}$

ДЗ 1.29. $\begin{cases}x^3+2y^3=3xy^2+5,\\ x,y\in\mathbb{N}.\end{cases}$

ДЗ 1.30. $\begin{cases}x^3+2y^3=3xy^2+7,\\ x,y\in\mathbb{N}.\end{cases}$

ДЗ 1.31. $\begin{cases}x^3+2y^3=3xy^2+p,\\ x,y\in\mathbb{N},\\ p-\text{ просте.}\end{cases}$

Завдання 1.25.

1) $\begin{cases}3\cdot 11=y^2-(2^n)^2,\\ n,y\in\mathbb{N}.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2^{2n}+33=y^2,\\ n,y\in N.\end{cases}$

ДЗ 1.32. 1) $\begin{cases}2^{2n}+33=y^2,\\ n\in\mathbb{N},\\ y\in\mathbb{Z}.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}9^n+55=y^2,\\ n\in\mathbb{N},\\ y\in\mathbb{Z}.\end{cases}$

2. Застосування методу математичної індукції для розв'язання задач на подільність

Розглянемо метод математичної індукції.

Принцип математичної індукції. Нехай $T(n)$ – твердження, яке залежить від натурального числа n. Якщо:

1. виконується $T(1)$, тобто твердження $T(n)$ правильне при $n=1$;
2. з припущення, що виконується $T(k)$, $k\in N$, випливає, що виконується $T(k+1)$;

то твердження $T(n)$ правильне для будь-якого натурального числа n.

ДЗ 2.1. Довести методом математичної індукції, що при всіх $n\in\mathbb{N}$ мають місце формули скороченого множення:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}),$$
$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \cdots + b^{2n}).$$

Завдання 2.1. Довести для всіх $n \in \mathbb{N}$ подільність методом математичної індукції:

$$(11^{n+2} + 12^{2n+1}) \vdots 133.$$

ДЗ 2.2. Довести для всіх $n \in \mathbb{N}$ подільність методом математичної індукції:

1) $(4^n + 15n - 1) \vdots 9;$
2) $(5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}) \vdots 19;$
3) $(5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}) \vdots 23;$
4) $(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3) \vdots 9;$
5) $(5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}) \vdots 19;$
6) $(6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}) \vdots 11.$

Завдання 2.2. Довести, що число яке складається з 3^n цифр рівних 1 ділиться на 3^n і не ділиться на 3^{n+1}, тобто

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(A_n = \underbrace{1\ldots1}_{3^n} \vdots 3^n\right) \wedge \left(A_n \not\vdots\, 3^{n+1}\right).$$

Критерій подільності числа на 9. Натуральне число ділиться на 9 тоді і тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 9.

Тобто $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1} \vdots 9 \Leftrightarrow (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1) \vdots 9.$

ДЗ 2.3. Довести, що при всіх $n \in \mathbb{N}$

$B_n = \sqrt{\underbrace{11\ldots11}_{2\cdot3^n} - \underbrace{2\ldots2}_{3^n}} \vdots 3^{n+1}$ і $B_n \not\vdots\, 3^{n+2}$.

ДЗ 2.4. Довести, що $(3^{2^n} - 1) \vdots 2^{n+2}$ і $(3^{2^n} - 1) \not\vdots\, 2^{n+3}$ при всіх $n \in \mathbb{N}$.

ДЗ 2.5. Довести, що $(5^{2^n} - 1) \vdots 2^{n+2}$ і $(3^{2^n} - 1) \not\vdots\, 2^{n+3}$ при всіх $n \in \mathbb{N}$.

ДЗ 2.6. Довести, що при $a_0 = 0, a_1 = b \in \mathbb{N}$ і $a_{n+2} = b^2 a_{n+1} - a_n, n \geq 0$ виконується:

$$({a_{n+1}}^2 + {a_n}^2) \vdots \left(b^2(a_n a_{n+1} + 1)\right).$$

3. Застосування теореми про ділення з остачею в задачах на подільність

Теорема про ділення з остачею. Для довільного цілого числа a і довільного натурального числа b існує єдина пара цілих чисел q і r, таких що $a = qb + r$, де $0 \leq r < b$.

Отже, щоб знайти ділене, треба дільник помножити на неповну частку і додати остачу.

У буквеному вигляді це правило записують так: $a = bq + r$, де a – ділене, b – дільник, q – неповна частка, r – остача, $r < b$.

Дайте відповіді на запитання:

1. Яку властивість має неповна частка при діленні з остачею?
2. Порівняйте остачу і дільник.
3. Сформулюйте правило знаходження діленого при діленні з остачею.
4. Як записують у буквеному вигляді правило знаходження діленого при діленні з остачею?
5. У яких випадках говорять, що одне натуральне число ділиться націло на друге?

Завдання 3.1. При всіх $n,\ m \in \mathbb{N}$ довести подільність**:**

1) $(n^3 - n) \vdots 6$; 2) $(nm(n^2 - m^2)) \vdots 6$;

3) $(n^5 - n) \vdots 30$.

ДЗ 3.1. При всіх $n,\ m \in \mathbb{N}$ довести подільність**:**

1) $nm(n^4 - m^4) \vdots 30$; 2) $(n^7 - n) \vdots 42$.

Завдання 3.2. При всіх $n \in \mathbb{N}$ і $n \neq 5k, k \in \mathbb{N}$, довести, що

$$(n^8 + 3n^4 - 4) \vdots 50.$$

Завдання 3.3. Довести, що добуток трьох послідовних цілих чисел, з яких середнє є кубом цілого числа, ділиться на 504, тобто довести, що

$(n^3-1)n^3(n^3+1) \vdots 504$, де $n \in \mathbb{Z}$.

Завдання 3.4. Нехай $p -$ просте число, $p \geq 5$.

Довести, що $(p^2-1) \vdots 24$.

ДЗ 3.2. Нехай $p -$ просте число, $p \geq 7$. Довести, що

$(p^2-1) \vdots 30$ і $(p^2-19) \vdots 30$.

Завдання 3.5. Знайти всі p такі, що $p^2+4,\ p^2+6 -$ прості числа.

ДЗ 3.3. Знайти всі p такі, що $p,\ 2p^2+1 -$ прості числа.

ДЗ 3.4. Відомо, що число a– ділене, число b – дільник, причому $a < b$. Знайдіть неповну частку й остачу при діленні числа a на число b.

ДЗ 3.5. Доведіть, що остання цифра числа a дорівнює остачі при діленні цього числа на 10.

ДЗ 3.6. Придумайте буквений вираз, при підстановці в який замість букви будь-якого натурального числа буде отримано числовий вираз, значення якого при діленні на 3 дає в остачі 1.

Згідно із теоремою про ділення з остачею

$(\forall\ n \in \mathbb{Z}) \wedge (\forall\ \ m \in \mathbb{N}) \Rightarrow (n = mq + r) \wedge (r \in \{0,1,\ldots,m-1\})$.

$n -$ ділене, $m -$ дільник, q- неповна частка, $r -$ остача.

Належність остачі $r \in \{0,1,\ldots,m-1\}$ вказаній множині суттєво використовується при розв'язанні задач на подільність.

Якщо $m = 2$, то $\forall\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = \left[\begin{smallmatrix} 2q, \\ 2q+1. \end{smallmatrix}\right.$

Множина всіх цілих чисел $\mathbb{Z}$ є об'єднанням множин парних і непарних чисел. За теоремою про ділення з остачею при діленні на 2 довільного цілого числа $n \in \mathbb{Z}$ можливі лише два випадки: $r = 0$ або $r = 1$.

Приклад 3.1. Довести, що добуток двох будь-яких послідовних цілих чисел ділиться на 2.

Розв'язання. Доведемо подільність: $n(n+1) \vdots 2$, де $n \in \mathbb{Z}$.

За теоремою про ділення з остачею на 2 для довільного цілого числа $n \in \mathbb{Z}$ можливі лише два випадки: $n = \left[\begin{smallmatrix} 2q, \\ 2q+1. \end{smallmatrix}\right.$

1. Нехай $n = 2q$. Тоді $n(n+1) = 2q(2q+1) \vdots 2$.
2. Нехай $n = 2q+1$. Тоді

$$n(n+1) = (2q+1)(2q+2) = (2q+1)2(q+1) \vdots 2.$$

Інших випадків, згідно з теоремою про ділення з остачею на 2, бути не може.

Отже, добуток двох послідовних цілих чисел ділиться на 2.

Нехай дільник $m = 3$. Тоді $\forall\, n \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow n = \left[\begin{array}{l} 3q, \\ 3q+1, \\ 3q+2. \end{array}\right.$

За теоремою про ділення з остачею при діленні на 3 довільного цілого числа $n \in \mathbb{Z}$ можливі лише три випадки:

$$r = 0, r = 1 \text{ або } r = 2.$$

Нехай дільник $m = 4$. Тоді $\forall\, n \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow n = \left[\begin{array}{l} 4q, \\ 4q+1, \\ 4q+2, \\ 4q+3. \end{array}\right.$

За теоремою про ділення з остачею при діленні на 4 довільного цілого числа $n \in \mathbb{Z}$ можливі лише 4 випадки: $r = 0,\ r = 1,\ r = 2$ або $r = 3$.

ДЗ 3.7. Записати можливі остачі для $m = 7$.

Завдання 3.6. Довести подільність**:** $a_n = (n^3 - n) \vdots 6$, де $n \in \mathbb{Z}$.

Вказівки.

1 спосіб. Якщо $a_n \vdots 2$ і $a_n \vdots 3$, то $a_n \vdots 2 \cdot 3 = 6$.

2. спосіб. Добуток трьох послідовних цілих чисел ділиться на $3! = 6$. Тому

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1) = (n-1)n(n+1) \vdots 6.$$

Завдання 3.7. Для всіх $n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}$ довести подільність:

$$nm(n^2 - m^2) \vdots 6.$$

Завдання 3.8. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ довести подільність:

$$a_n = (n^5 - n) \,\vdots\, 30.$$

ДЗ 3.8. Для всіх $n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}$ довести подільність:

$$nm(n^4 - m^4) \,\vdots\, 30.$$

ДЗ 3.9. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ довести подільність:

$$a_n = (n^7 - n) \,\vdots\, 42 = 6 \times 7.$$

Приклад 3.2. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $n \neq 5k$ довести подільність:

$$(n^8 + 3n^4 - 4) \,\vdots\, 50.$$

Розв'язання. $50 = 25 \cdot 2$ і НСД$(25,2) = 1$.

$$a_n = (n^8 + 3n^4 - 4) \,\vdots\, 50 \Leftrightarrow (a_n \,\vdots\, 2) \wedge (a_n \,\vdots\, 25).$$

Маємо

$$a_n = (n^8 + 3n^4 - 4) = (n^4 + 4)(n^4 - 1) = (n^4 + 4)(n^2 - 1)(n^2 + 1) =$$
$$= (n^4 + 4)(n^2 + 1)(n - 1)(n + 1).$$

За теоремою про ділення з остачею на 2 для довільного цілого числа n можливі лише два випадки: $n = \left[\begin{matrix} 2q, \\ 2q+1. \end{matrix}\right.$

1. Нехай $n = 2q$. Тоді

$$n^4 + 4 = (2q)^4 + 4 = 4(4(q)^4 + 1) \,\vdots\, 2 \Rightarrow$$
$$a_n = (n^4 + 4)(n^4 - 1) \,\vdots\, 2.$$

2. Нехай $n = 2q + 1$. Тоді $n - 1 = 2q \,\vdots\, 2$ і

$$a_n = (n^4 + 4)(n^2 + 1)(n - 1)(n + 1) \,\vdots\, 2.$$

Інших випадків, згідно з теоремою про ділення з остачею на 2, бути не може.

За теоремою про ділення з остачею на 5, враховуючи що $n \neq 5k$, матимемо: $n = \left[\begin{matrix} 5q, \\ 5q + 1, \\ 5q + 2, \\ 5q + 3, \\ 5q + 4. \end{matrix}\right.$

Розглянемо вираз

$$n^4 + 4 = ((n^2)^2 + 4n^2 + 4) - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 =$$

$$= (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n) = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2).$$

Тоді

$$a_n = (n^4 + 4)(n^2 + 1)(n - 1)(n + 1) =$$

$$= (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)(n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2).$$

1. Нехай $n = 5q + 1$. Тоді

$$a_n = 5q(5q + 2)((5q + 1)^2 + 1)(25q^2 + 10q + 1 - 20q) \times$$

$$\times (25q^2 + 10q + 1 + 20q + 2 + 2) =$$

$$= 25q(5q^2 + 6q + 1)(5q + 2)((5q + 1)^2 + 1)(25q^2 - 10q + 1) \vdots 25.$$

2. Нехай $n = 5q + 2$. Тоді

$$a_n = (5q + 1)(5q + 3)((5q + 2)^2 + 1) \times$$

$$\times ((5q + 2)^2 - 2(5q + 2) + 2)((5q + 2)^2 + 2(5q + 2) + 2) =$$

$$= (5q + 1)(5q + 3)(25q^2 + 20q + 5) \times$$

$$\times (25q^2 + 10q + 2)(25q^2 + 30q + 10) =$$

$$= 25(5q + 1)(5q + 3)(5q^2 + 4q + 1)(25q^2 + 10q + 2)(5q^2 + 6q + 2) \vdots 25.$$

3. Нехай $n = 5q + 3$. Тоді

$$(n^2 + 1)(n^2 - 2n + 2) = ((5q + 3)^2 + 1) \times$$

$$\times ((5q + 3)^2 - 2(5q + 3) + 2) = (25q^2 + 30q + 10)(25q^2 + 20q + 5) =$$

$$= 25(5q^2 + 6q + 2)(5q^2 + 4q + 1) \vdots 25\,,$$

і $a_n = (n^2 + 1)(n^2 - 2n + 2)(n - 1)(n + 1)(n^2 + 2n + 2) \vdots 25.$

4. Нехай $n = 5q + 4$. Тоді

$$(n + 1)(n^2 - 2n + 2) = (5q + 5)((5q + 4)^2 - 2(5q + 4) + 2) =$$

$$= 5(q + 1)(25q^2 + 30q + 10) = 25(q + 1)(5q^2 + 6q + +2) \vdots 25,$$

і $a_n = (n + 1)(n^2 - 2n + 2)(n - 1)(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2) \vdots 25.$

ДЗ 3.10. Довести, що добуток трьох послідовних цілих чисел, з яких середнє є кубом цілого числа, ділиться на 504.

Тобто при всіх $n \in \mathbb{Z}$ довести, що $a_n = (n^3 - 1)n^3(n^3 + 1) \vdots 504.$

Вказівки. $a_n = (n^3 - 1)n^3(n^3 + 1) \vdots 504 = 7 \cdot 8 \cdot 9,\ n \in \mathbb{Z},$

$$\Leftrightarrow (a_n \vdots 9) \wedge (a_n \vdots 8) \wedge (a_n \vdots 7).$$

ДЗ 3.11. Нехай $p -$ просте число і $p \geq 5$. Довести, що

$a_p = (p^2 - 1) \vdots 24$.

Вказівки. $a_p = (p^2 - 1) \vdots 24 = 3 \cdot 8,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left(a_p \vdots 3\right) \wedge \left(a_p \vdots 8\right)$.

ДЗ 3.12. Нехай $p -$ просте число і $p \geq 5$. Довести, що

$$(p^2 - 1) \vdots 30\ \vee (p^2 - 19) \vdots 30.$$

ДЗ 3.13. Знайти всі p, такі що $p, p^2 + 4, p^2 + 6$ – прості числа.

ДЗ 3.14. Знайти всі p, такі що p і $2p^2 + 1$ – прості числа.

4. Застосування теореми про ділення з остачею для розв'язання рівнянь в натуральних і цілих числах

Формула остачі від ділення на m алгебраїчної суми n чисел.

$O_m(a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n) = O_m(O_m(a_1) \pm O_m(a_2) \pm \cdots \pm O_m(a_n))$.

Доведення. Використовуючи теорему про ділення з остачею на m отримаємо:

$$a_1 = mq_1 + r_1\,; \qquad O_m(a_1) = r_1;$$

$$a_2 = mq_2 + r_2\,; \qquad O_m(a_2) = r_2;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_n = mq_n + r_n\,; \qquad O_m(a_n) = r_n;$$

$$O_m(a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n) = O_m(m(q_1 \pm q_2 \pm \cdots \pm q_n) + r_1 \pm r_2 \pm \cdots \pm r_n) =$$

$$= O_m(r_1 \pm r_2 \pm \cdots \pm r_n) = O_m(O_m(a_1) \pm O_m(a_2) \pm \cdots \pm O_m(a_n)).$$

Формула остачі від ділення на m добутку двох чисел.

$$O_m(ab) = O_m\big(O_m(a) \cdot O_m(b)\big).$$

Доведення.

$$a = mq_1 + r_1; \qquad O_m(a) = r_1;$$

$$b = mq_2 + r_2; \qquad O_m(b) = r_2;$$

$$O_m(ab) = O_m\big((mq_1 + r_1)(mq_2 + r_2)\big) =$$

$$= O_m(m^2 q_1 q_2 + mq_1 r_2 + mq_2 r_1 + r_1 r_2) =$$

$$= O_m(r_1 r_2) = O_m\big(O_m(a)O_m(b)\big).$$

Отже, $O_m(ab) = O_m(O_m(a) \cdot O_m(b))$.

З одержаної формули випливає:

$$O_m\,(a^n) = O_m\left(\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}\right) = O_m\,(O_m^n\,(a)).$$

Зауваження. Для доведення цих властивостей остач можна використати означення і властивості конгруенцій. З досвіду роботи з учнями ці, введені означення і властивості, засвоюються учнями не складніше ніж конгруенції.

Завдання 4.1. Записати означення подільності числа a на число m і критерій подільності та довести його.

Приклад 4.1. Чи можна у виразах замість знаку «$*$» поставити «$+$» або «$-$», щоб отримати правильні рівності?

1. $1 * 2 * 3 * \ldots * 1996 * 1997 = 1 * 9 * 9 * 7.$
2. $1 * 2 * 3 * \ldots * 2012 * \ 2013 = 2 * 0 * 1 * 3.$
3. $1 * 2 * 3 * \ldots * 2016 * 2017 = 2 * 0 * 1 * 7.$

Узагальнити це завдання.

Розв'язання.

$$a = 1 * 2 * 3 * \ldots * 4n * (4n + 1) = a_1 * a_2 * a_3 * a_4 = b.$$

$$O_2(a) = O_2\big(O_2(1) \pm O_2(2) \pm O_2(3) \pm \cdots \pm O_2(4n) \pm O_2(4n+1)\big) =$$

$$= O_2\big(O_2(1) \pm O_2(3) \pm \cdots \pm O_2(4n+1)\big) = O_2(1 \pm 1 \pm \cdots \pm 1) =$$

$$= O_2\,\underbrace{(1 \pm 1 \pm \cdots \pm 1)}_{2n+1} = 1. \qquad (1)$$

$$O_2(b) = O_2(O_2(a_1) * O_2(a_2) * O_2(a_3) * O_2(a_4)) =$$

$$= O_2(O_2(a_1) \pm O_2(a_2) \pm O_2(a_3) \pm O_2(a_4)) = 0. \qquad (2)$$

З співвідношень (1) і (2) випливає $O_2(a) \neq O_2(b)$.

Отже, у виразах замість знаку «$*$» не можна поставити «$+$» або «$-$», щоб отримати правильні рівності.

ДЗ 4.1. Скільки всіх трицифрових чисел $a_1a_2a_3$, сума цифр яких непарна?

ДЗ 4.2. Скільки всіх чотирицифрових непарних чисел $a_1a_2a_3a_4$, сума цифр яких парна?

Завдання 4.2. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$(x+1)^2+3=5y^2-5x-5.$$

ДЗ 4.3. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^2-5y^2+7x+9=0$.

ДЗ 4.4. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^4-y^4-5x^2+13=0$.

ДЗ 4.5. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^3-y^3=1999$.

ДЗ 4.6. Розв'язати рівняння в цілих числах

$$x^2+y^2+z^2-2000t=1999.$$

ДЗ 4.7. Розв'язати рівняння в цілих числах

$$x^{2001}+y^{2001}+z^{2001}=2000^{2000}.$$

Результат узагальнити, розв'язавши в цілих числах рівняння

$$\begin{cases} x^{3n}+y^{3n}+z^{3n}=(9k+2)^{6m+2}, \\ x,y,z\in\mathbb{Z},\ \ m,n,k\in\ \mathbb{N}\cup\{0\}. \end{cases}$$

ДЗ 4.8. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^2-16xy=7^z+1$

ДЗ 4.9. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^2-2y^2+8z=3$.

ДЗ 4.10. Розв'язати в цілих числах рівняння $19x^3-98y^2=1998$.

ДЗ 4.11. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^2-2002y=1999$.

ДЗ 4.12. Розв'язати рівняння в цілих числах

$$x^{1996}+y^{1996}=1998^{1997}.$$

ДЗ 4.13. Розв'язати рівняння в цілих числах

$$x^{2000}+y^{2000}=1998^{2001},$$

$$x^{2016}+y^{2016}=2018^{2017}.$$

Результат узагальнити. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$\begin{cases} x^{4n}+y^{4m}=(5z+3)^{4k+1}, \\ x,y,z\in\mathbb{Z},\ \ m,n,k\in\ \mathbb{N}\cup\{0\}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{4m}+y^{4n}=(5z+3)^{4k+2}, \\ x,y,z\in\mathbb{Z},\ \ m,n,k\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \end{cases}$$

В наступних завданнях потрібно розв'язати в натуральних числах рівняння.

Завдання 4.3. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} 2^x + 7^y = 19^z, \\ x, y, z \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

ДЗ 4.14. Розв'язати рівняння

1) $\begin{cases} 2^x + 25^t = 19^z, \\ x, t, z \in \mathbb{N}; \end{cases}$ $\begin{cases} 2 + 25^t \cdot 5 = 19^z, \\ t, z \in \mathbb{N}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2^2 + 25^t \cdot 5 = 19^z, \\ t, z \in \mathbb{N}. \end{cases}$ $\begin{cases} 2^x + 5^y = 19^z, \\ x, y, z \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Завдання 4.4. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} 2^{2k+1} + 9 \cdot 2^k + 5 = n^2, \\ k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Завдання 4.5. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} a2^{2k+1} + (4b+1)2^k + 3 = n^2, \\ a, b, n, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

де $a, b -$ задані натуральні числа.

ДЗ 4.15. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} a2^{2k+1} + (4b+3)2^k - 1 = n^2, \\ a, b, n, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

ДЗ 4.16. Розв'язати рівняння

$a \cdot 2^{2k+1} + b \cdot 2^k + c = n^2$, де $a, b, c -$ задані натуральні числа,

$a \cdot 2^3 + b \cdot 2 + c \neq n^2, \quad a \cdot 2^5 + b \cdot 2^2 + c \neq n^2$, $O_8(c) \notin \{0; 1; 4\}$.

Завдання 4.6. Розв'язати рівняння

1) $\begin{cases} 9a + (3b+1)3 + 4 = x^3, \\ a, b, x \in \mathbb{N}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} a3^{k+1} + (3b+1)3^k + 4 = x^3, \\ a, b, x, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

ДЗ 4.17. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} a3^{k+1} + (3b+2)3^k + 5 = x^3, \\ a, b, x, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Результат узагальнити, розв'язавши рівняння

$a \cdot 3^{k+1} + b \cdot 3^k + c = n^3$, де a, b, c – задані натуральні числа.

Завдання 4.7. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = m^3 + 3, \\ n, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

ДЗ 4.18. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 - 4 = m^3, \\ n, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

ДЗ 4.19. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = m^3 + 5, \\ n, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

ДЗ 4.20. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 - 6 = m^3, \\ n, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Завдання 4.7. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} 2^{2p} - 2^p + 1 = q, \\ p, q - \text{прості числа}. \end{cases}$$

Завдання 4.8. Узагальнити результат завдання 4.7, розв'язавши в натуральних числах рівняння

$$\begin{cases} 2^{2(2n+1)} - 2^{2n+1} = 3m, \\ m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

ДЗ 4.21. Узагальнити результат завдання 4.7, розв'язавши в натуральних числах рівняння

$$\begin{cases} (3k+2)^{2(2n+1)} - (3k+2)^{2n+1} = 3m + 1 \\ m, n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases},$$

Завдання 4.8. Розв'язати рівняння

1) $\begin{cases} 2^{2k+1} + 33 = y^2, \\ y, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^{2k+1} + 33 = y^2, \\ k \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2^{2n} + 33 = y^2, \\ n \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2^{m} + 33 = y^2, \\ m \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

ДЗ 4.22. Розв'язати рівняння

1) $\begin{cases} 3^{2k+1} + 55 = y^2, \\ y, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{2k+1} + 55 = y^2, \\ k \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^{2n} + 55 = y^2, \\ n \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3^{m} + 55 = y^2, \\ m \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

5. Розв'язки завдань для самостійної роботи та дистанційного навчання

5.1. Використання методу розкладу на множники в задачах на подільність.

ДЗ 1.9. Довести, що $\forall n \in \mathbb{N}$ і $n \geq 2$ виконується:

$$(n^n + n^2 + n - n) \vdots (n-1)^2.$$

Розв'язання. Маємо, що

$$(n^n - n^2 + n - 1) = (n^n - 1) - n(n-1) =$$
$$= (n-1)(n^{n-1} + n^{n-2} + \cdots + n + 1) - n(n-1) =$$
$$= (n-1)(n^{n-1} + n^{n-2} + \cdots + n + 1 - n) =$$
$$= (n-1)\big((n^{n-1} - 1) + (n^{n-2} - 1) + \cdots + (n-1) + (1-1)\big) =$$
$$= (n-1)\big((n-1)(n^{n-2} + \cdots + n + 1) + (n-1)(n^{n-3} + \cdots + n + 1) + \cdots$$
$$+ \cdots + (n-1)\big) =$$
$$= (n-1)^2(n^{n-2} + \cdots + n + 1 + n^{n-3} + \cdots + n + 1 + \cdots + 1) \vdots (n-1)^2.$$

При розв'язанні цього завдання можна використати приклад 1.3. Тоді запис розв'язку буде коротшим.

$$(n^n - n^2 + n - 1) = (n^n - 1) - n(n-1) =$$
$$= (n-1)(n^{n-1} + n^{n-2} + \cdots + n + 1) - n(n-1) =$$

$$= (n-1)(n^{n-1} + n^{n-2} + \cdots + n + 1 - n) \,\vdots\, (n-1)^2.$$

Завдання 1.1. Довести, що $(4^n \ + 15n - 1) \,\vdots\, 9$, де $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання. Маємо, що

$$4^n + 15n - 1 = (4^n - 1) + 15n =$$
$$= (4-1)(4^{n-1} + 4^{n-2} + \cdots + 4 + 1) + 15n =$$
$$= 3(4^{n-1} + 4^{n-2} + \cdots + 4 + 1 + 5n) =$$
$$= 3\big((4^{n-1} - 1) + (4^{n-2} - 1) + \cdots + (4-1) + (1-1) + (5n + n)\big) =$$
$$= 3((4-1)(\ 4^{n-2} + 4^{n-3} + \cdots + 4 + 1) +$$
$$+(4-1)(\ 4^{n-3} + 4^{n-4} + \cdots + 4 + 1) + \cdots + \ (4-1) + 6n) =$$
$$= 3 \cdot 3((4^{n-2} + 4^{n-3} + \cdots + 4 + 1) +$$
$$+(\ 4^{n-3} + 4^{n-4} + \cdots + 4 + 1) + \cdots + 1 + 2n)) \ \vdots\, 9.$$

ДЗ 1.1. Доведіть, що $(3^{2n+3} + 40n - 27) \,\vdots\, 64$, де $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання аналогічне до розв'язання задання 1.1.

Завдання 1.2. Доведіть, що

$\big(5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n)\big) \,\vdots\, 91 = 13 \cdot 7$, де $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання. Використаємо властивість подільності. Якщо вираз ділиться на кожне з простих чисел, то цей вираз ділиться на їх добуток.

$A_n \,\vdots\, 7$ і $A_n \,\vdots\, 13$, 13 і 7 – прості числа, то за попередньою властивістю $A_n \,\vdots\, 91$.

Використаємо формулу розкладу на множники двочлена $a^n - b^n$.

$$A_n = 25^n + 5^n - 18^n - 12^n = (25^n - 18^n) - (12^n - 5^n) =$$
$$= (25-18)(25^{n-1} + 25^{n-2}18 + 25^{n-3}18^2 + \cdots + 25 \cdot 18^{n-2} + 18^{n-1}) =$$
$$= 7(25^{n-1} + 25^{n-2}18 + 25^{n-3}18^2 + \cdots + 25 \cdot 18^{n-2} + 18^{n-1}) -$$
$$-7(12^{n-1} + 12^{n-2}5 + \cdots + 12 \cdot 5^{n-2} + 5^{n-1}) =$$
$$= 7((25^{n-1} + 25^{n-2}18 + 25^{n-3}18^2 + \cdots + 25 \cdot 18^{n-2} + 18^{n-1}) -$$
$$-(12^{n-1} + 12^{n-2}5 + \cdots + 12 \cdot 5^{n-2} + 5^{n-1})) \,\vdots\, 7.$$
$$A_n = (25^n - 12^n) - (18^n - 5^n) =$$
$$= (25-12)(25^{n-1} + 25^{n-2}12 + 25^{n-3}12^2 + \cdots + 25 \cdot 12^{n-2} + 12^{n-1}) -$$

$$-(18-5)(18^{n-1}+18^{n-2}5+\dots+18\cdot 5^{n-2}+5^{n-1})=$$
$$=13((25^{n-1}+25^{n-2}12+25^{n-3}12^2+\dots+25\cdot 12^{n-2}+12^{n-1})-$$
$$-(18^{n-1}+18^{n-2}5+\ldots+18\cdot 5^{n-2}+5^{n-1}))\ \vdots\ 13.$$

ДЗ 1.3. Доведіть, що $(2903^n-803^n-464^n+261^n)\ \vdots\ 1897$, де $n\in\mathbb{N}$.

Розв'язання аналогічне до попереднього завдання.

Нагадаємо наступну властивість подільності.

Якщо всі прості числа, які не перевищують кореня квадратного з числа не є дільниками цього числа, то число просте.

Маємо: $1897=7\cdot 271$. Оскільки $\sqrt{271}<17$ і 271 не ділиться на прості числа $2,3,5,7,11,13$, то за властивостями подільності $271-$ просте число.

$$a_n=(2903^n-803^n-464^n+261^n)\ \vdots\ 1897\Leftrightarrow(a_n\ \vdots\ 7\ )\wedge\ (a_n\ \vdots\ 271).$$

Число ділиться на добуток простих чисел тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на кожне із чисел. Отже,

$$a_n\ \vdots\ 7\Leftrightarrow((2903^n-803^n)-(464^n-261^n))\ \vdots\ 7\,.$$

Маємо, що

$$2903^n-803^n=(2903-803)\times$$
$$\times(2903^{n-1}+2903^{n-2}\cdot 803+\dots+2903\cdot 803^{n-2}+803^{n-1}).$$

Оскільки $2903-803=2100\ \vdots\ 7$, то

$$(2903^n-803^n)\ \vdots\ 7\,. \qquad (1)$$

$$464^n-261^n=(464-261)\times$$
$$\times(464^{n-1}+464^{n-2}\cdot 261+\dots+464\cdot 261^{n-2}+261^{n-1}).$$

Оскільки $464-261=203\ \vdots\ 7$, то

$$464^n-261^n\ \vdots\ 7. \qquad (2)$$

Якщо кожний доданок алгебраїчної суми ділиться на число, то і ця сума ділиться на це число. Тому з (1) і (2) випливає

$$((2903^n-803^n)-(464^n+261^n))\ \vdots\ 7.$$

$$a_n \vdots 271 \Leftrightarrow ((2903^n - 464^n) - (803^n - 261^n)) \vdots 271.$$

$$2903^n - 464^n = (2903 - 464) \times$$

$$\times (2903^{n-1} + 2903^{n-2} \cdot 464 + \cdots + 2903 \cdot 464^{n-2} + 464^{n-1}) \vdots 271. \qquad (3)$$

$$803^n - 261^n = (803 - 261) \times$$

$$\times (803^{n-1} + 803^{n-2} \cdot 261 + \cdots + 803 \cdot 261^{n-2} + 261^{n-1}) \vdots 271. \qquad (4)$$

З (3) і (4) випливає, що $((2903^n - 464^n) - (803^n - 261^n)) \vdots 271$.

Завдання 1.3. Довести, що $(4^{2n} - 3^{2n} - 7) \vdots 84$, де $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання. Потрібно врахувати, що $84 = 3 \cdot 4 \cdot 7$ і використати властивості подільності.

Якщо число ділиться на кожне з попарно взаємнопростих чисел, то це число ділиться і на їх добуток.

Якщо кожний доданок алгебраїчної суми ділиться на число, то і ця сума ділиться на це число.

Нагадаємо, що числа називають взаємно простими, якщо їх найбільший спільний дільник дорівнює одиниці.

Завдання 1.4. Довести для всіх $n \in \mathbb{N}$ подільність:

$$(5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}) \vdots 23.$$

Розв'язання.

$$5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1} = 25^n \cdot 5 + 2^n \cdot 16 + 2^n \cdot 2 =$$

$$25^n \cdot 5 + 2^n \cdot 18 = 5(25^n - 2^n) + 2^n \cdot 5 + 2^n \cdot 18 =$$

$$= 5(25 - 2)(25^{n-1} + \cdots + 2^n) + 23 \cdot 2^n =$$

$$= 23(5(25^{n-1} + \cdots + 2^n) + 2^n) \vdots 23.$$

ДЗ 1.4. Доведіть, що $(5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}) \vdots 19$, де $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання аналогічне до розв'язання завдання 1.4.

ДЗ 1.2. Доведіть, що $(11^{n+2} + 12^{2n+1}) \vdots 133$, де $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання.

$$11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^n \cdot 121 + 144^n \cdot 12 =$$

$$= 12(144^n - 11^n) + 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 11^n =$$

$$= 12(144 - 11)(144^{n-1} + \cdots + 11^n + 1) + 133 \cdot 11^n =$$
$$= 133(12(144^{n-1} + \cdots + 11^n) + 11^n) \vdots 133.$$

Завдання 1.6. При якому $n \in \mathbb{N}$ вираз $n^{1988} + n^{1987} + 1$ є простим числом. Узагальнити.

Розв'язання.

$$n = 1 \implies n^{1988} + n^{1987} + 1 = 3 - \text{просте число.}$$

Доведемо, що при $n \geq 2$ вираз $n^{1988} + n^{1987} + 1$ є складеним числом, бо ділиться на менше число відмінне від 1, тобто

$$n \geq 2 \Longrightarrow (n^{1988} + n^{1987} + 1) \vdots (n^2 + n + 1).$$
$$n^{1988} + n^{1987} + 1 = n^{3\cdot 662+2} + n^{3\cdot 662+1} + 1 =$$
$$= (n^3)^{662} \cdot n^2 + (n^3)^{662} \cdot n + 1 =$$
$$= n^2((n^3)^{662} - 1) + n((n^3)^{662} - 1) + 1 + n + n^2 =$$
$$= n^2(n^3 - 1)((n^3)^{661} + +(n^3)^{660} + \cdots + 1) +$$
$$+n(n^3 - 1)((n^3)^{661} + (n^3)^{660} + \cdots + 1) + 1 + n + n^2 =$$
$$= n^2(n - 1)(n^2 + n + 1)((n^3)^{661} + (n^3)^{660} + \cdots + 1) +$$
$$+n(n - 1)(n^2 + n + 1)((n^3)^{661} + (n^3)^{660} + \cdots + 1) + n^2 + n + 1 =$$
$$= (n^2 + n + 1)(n^2(n - 1)((n^3)^{661} + (n^3)^{660} + \cdots + 1) +$$
$$+n(n - 1)((n^3)^{661} + (n^3)^{660} + \cdots + 1) + 1) \vdots (n^2 + n + 1).$$

Отже, при $n \geq 2$ вираз $n^{1988} + n^{1987} + 1$ є складеним числом.

Узагальнення. Доведемо, що

$$(\forall n \geq 2) \wedge (n \in N) \wedge (k \in N) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (n^{3k+2} + n^{3k+1} + 1) \vdots (n^2 + n + 1) \wedge (n^{3k+2} + n^{3k+1} + 1 > n^2 + n + 1).$$

Отже, $(n^{3k+2} + n^{3k+1} + 1) -$ складене число.

$$n^{3k+2} + n^{3k+1} + 1 = (n^3)^k \cdot n^2 + (n^3)^k \cdot n + 1 =$$
$$= n^2((n^3)^k - 1) + n((n^3)^k - 1) + 1 + n + n^2 =$$
$$= n^2(n^3 - 1)((n^3)^{k-1} + (n^3)^{k-2} + \cdots + 1) +$$
$$+n(n^3 - 1)((n^3)^{k-1} + (n^3)^{k-2} + \cdots + 1) + 1 + n + n^2 =$$
$$= n^2(n - 1)(n^2 + n + 1)((n^3)^{k-1} + (n^3)^{k-2} + \cdots + 1) +$$

$$+n(n-1)(n^2+n++1)((n^3)^{k-1}+(n^3)^{k-2}+\dots+1)+n^2+n+1=$$
$$=(n^2+n+1)(n^2(n-1)((n^3)^{k-1}+(n^3)^{k-2}+\dots+1)+$$
$$+n(n-1)((n^3)^{k-1}+(n^3)^{k-2}+\dots+1)+1)\ \vdots\ (n^2+n+1).$$
$$n^{3k+2}+n^{3k+1}+1>n^2+n+1.$$

Отже, при $n \geq 2$ і $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ вираз $n^{3k+2}+n^{3k+1}+1$ є складеним числом.

Завдання 1.7. Довести, що $\forall k \in \mathbb{N}$ і $\forall a \in \mathbb{Z}$ виконується:

$$((a^2)^{3k+1}+a^{3k+1}+1)\ \vdots\ (a^2+a+1),$$
$$((a^2)^{3k+2}+a^{3k+2}+1)\ \vdots\ (a^2+a+1).$$

Розв'язання. Маємо:

$$(a^2)^{3k+1}+a^{3k+1}+1=(a^3)^{2k}\cdot a^2+(a^3)^k\cdot a+1=$$
$$=a^2((a^3)^{2k}-1)+a((a^3)^k-1)+(a^2+a+1).$$
$$a^2((a^3)^{2k}-1)=a^2(a^3-1)(a^{2k-1}+a^{2k-2}+\dots+1)=$$
$$=a^2(a-1)(a^2+a+1)(a^{2k-1}+a^{2k-2}+\dots+1)\ \vdots\ (a^2+a+1). \quad (1)$$
$$a((a^3)^k-1)=a(a^3-1)(a^{k-1}+a^{k-2}+\dots+1)=$$
$$=a^2(a-1)(a^2+a+1)(a^{k-1}+a^{k-2}+\dots+1)\ \vdots\ (a^2+a+1). \quad (2)$$
$$(a^2+a+1)\ \vdots\ (a^2+a+1). \quad (3)$$

Якщо кожен доданок суми ділиться на число, то сума ділиться на число. Із співвідношень $(1)-(3)$ маємо, що

$$((a^2)^{3k+1}+a^{3k+1}+1)\ \vdots\ (a^2+a+1).$$
$$(a^2)^{3k+2}+a^{3k+2}+1=(a^3)^{2k+1}\cdot a+(a^3)^k\cdot a^2+1=$$
$$=a((a^3)^{2k+1}-1)+a^2((a^3)^k-1)+(a+a^2+1).$$
$$a((a^3)^{2k+1}-1)=a(a^3-1)(a^{2k}+a^{2k-1}+\dots+1)=$$
$$=a(a-1)(a^2+a+1)(a^{2k}+a^{2k-1}+\dots+1)\ \vdots\ (a^2+a+1). \quad (4)$$
$$a^2((a^3)^k-1)=a^2(a^3-1)(a^{k-1}+a^{k-2}+\dots+1)=$$
$$=a^2(a-1)(a^2+a+1)(a^{k-1}+a^{k-2}+\dots+1)\ \vdots\ (a^2+a+1). \quad (5)$$

З співвідношень $(4)-(5)$ маємо, що

$$((a^2)^{3k+2} + a^{3k+2} + 1) \vdots (a^2 + a + 1).$$

Отже, $\forall k \in \mathbb{N}$ і $\forall a \in \mathbb{Z}$ виконується:

$$((a^2)^{3k+1} + a^{3k+1} + 1) \vdots (a^2 + a + 1),$$

$$((a^2)^{3k+2} + a^{3k+2} + 1) \vdots (a^2 + a + 1).$$

2 спосіб. Завдання 1.7. можна розв'язати простіше, використавши рівність $(a^2)^{3k+2} = (a^3)^{2k+1}a$.

ДЗ 1.10. Довести, що $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ виконується:

$$((13a + 3)^{3n+2} + (13b + 9)^{3n+2} + 1) \vdots 13.$$

Розв'язання. Маємо:

$$((13a + 3)^{3n+2} + (13b + 9)^{3n+2} + 1) = ((13a + 3)^{3n+2} - 3^{3n+2}) +$$
$$+((13b + 9)^{3n+2} - 9^{3n+2}) + (9^{3n+2} + 3^{3n+2} + 1) =$$
$$= (13a + 3 - 3)((13a + +3)^{3n+1} + (13a + 3)^{3n} \cdot 3 + \cdots + 3^{3n+1}) +$$
$$+(13b + 9 - 9)((13b + 9)^{3n+1} + (13b + 9)^{3n} \cdot 9 + \cdots + 9^{3n+1}) +$$
$$+(9^{3n+2} + 3^{3n+2} + 1) =$$
$$= 13a((13a + 3)^{3n+1} + (13a + 3)^{3n} \cdot 3 + \cdots + 3^{3n+1}) +$$
$$+13b((13b + 9)^{3n+1} + (13b + 9)^{3n} \cdot 9 + \cdots + 9^{3n+1}) +$$
$$+(9^{3n+2} + 3^{3n+2} + 1). \tag{1}$$

$$\left(13a((13a + 3)^{3n+1} + (13a + 3)^{3n} \cdot 3 + \cdots + 3^{3n+1})\right) \vdots 13. \tag{2}$$

$$\left(13b((13b + 9)^{3n+1} + (13b + 9)^{3n} \cdot 9 + \cdots + 9^{3n+1})\right) \vdots 13. \tag{3}$$

$$(9^{3n+2} + 3^{3n+2} + 1) \vdots 13. \tag{4}$$

Сума ділиться на число, коли кожен із її доданків ділиться на це число, тому з $(1) - (4)$ випливає, що $((13a + 3)^{3n+2} + (13b + 9)^{3n+2} + 1) \vdots 13$, що і потрібно було довести.

ДЗ 1.11. Довести, що якщо число $1 + 2^m + 4^m$ при деякому $m \in \mathbb{N}$ є простим, то $m = 3^n$.

Розв'язання. Використаємо метод від супротивного. Припустимо, що $m \neq 3^n$. Тоді, згідно з теоремою про ділення з остачею на 3,

$$(m \neq 3^n) \Leftrightarrow \big(m = 3^n(3k+1)\big) \vee \big(m = 3^n(3k+2)\big).$$

Використовуючи завдання 1.9 маємо

$$1 + 2^m + 4^m = \left(1 + 2^{3^n(3k+1)} + 4^{3^n(3k+1)}\right) \vdots \left(1 + 2^{3^n} + 4^{3^n}\right) \vee$$

$$1 + 2^m + 4^m = \left(1 + 2^{3^n(3k+2)} + 4^{3^n(3k+2)}\right) \vdots \left(1 + 2^{3^n} + 4^{3^n}\right).$$

Отже, $1 + 2^{3^n(3k+1)} + 4^{3^n(3k+1)}$ – складене число і

$1 + 2^{3^n(3k+2)} + 4^{3^n(3k+2)}$ – складене число, що суперечить умові.

Отже, якщо число $1 + 2^m + 4^m$ при деякому $m \in \mathbb{N}$ є простим, то $m = 3^n$.

ДЗ 1.12. При яких натуральних n число $2^{3^{4n+1}} + 3$ є просте?

Розв'язання. При $n = 0$ маємо $2^{3^1} + 3 = 11 \vdots 11$.

Доведемо, що $\forall n \in \mathbb{N}$ вираз $\left(2^{3^{4n+1}} + 3\right) \vdots 11 < 2^{3^{4n+1}} + 3$.

Отже, для будь-якого натурального числа n число $2^{3^{4n+1}} + 3$, згідно із означенням складеного числа, є складене.

$$2^{3^{4n+1}} + 3 = \left(2^{3^{4n+1}} - 2^3\right) + 11. \tag{1}$$

$$2^{3^{4n+1}} - 2^3 = 2^3\left(2^{3^{4n+1}-3} - 1\right). \tag{2}$$

$$3^{4n+1} - 3 = 3(3^{4n} - 1) = 3(81^n - 1) =$$

$$= 3 \cdot 8 \cdot 10(81^{n-1} + 81^{n-2} + \cdots + 81 + 1) \vdots 10.$$

Згідно із означенням подільності на 10 маємо

$$3^{4n+1} - 3 = 10k. \tag{3}$$

З $(2) - (3)$ випливає, що

$$2^{3^{4n+1}-3} - 1 = 2^{10k} - 1 =$$

$$= (2^{10} - 1)((2^{10})^{k-1} + (2^{10})^{k-2} + \cdots + 1) \vdots 11. \tag{4}$$

Із $(1), (4)$ маємо $\forall n \in \mathbb{N}$ вираз $\left(2^{3^{4n+1}} + 3\right) \vdots 11 < 2^{3^{4n+1}} + 3$.

ДЗ 1.13. При якому натуральному m число $19 \cdot 8^m + 17$ просте?

Розв'язання. За теоремою про ділення з остачею на 4 для числа m можливі тільки такі випадки:

1. $m = 4n$,
2. $m = 4n + 1$,
3. $m = 4n + 2$,
4. $m = 4n + 3$.

Для випадків 1 і 3 маємо, що $m = 2k$. Тоді

$$19 \cdot 8^m + 17 = 19 \cdot 8^{2k} + 17 = (18 \cdot 8^{2k} + 18) + (8^{2k} - 1) =$$

$$= (18(8^{2k} + 1) + (64 - 1)(64^{k-1} + 64^{k-2} + \cdots + 1) \vdots 3.$$

Якщо $m = 4n + 1$, то

$$19 \cdot 8^m + 17 = 19 \cdot 8^{4n+1} + 17 = 19 \cdot 8(8^{4n} - 1) + (17 + 19 \cdot 8) =$$

$$= 19 \cdot 8(8^{4n} - 1) + 169. \qquad (2.1)$$

$$8^{4n} - 1 = (8^4 - 1)((8^4)^{n-1} + (8^4)^{n-2} + \cdots + 8^4 + 1) =$$

$$= (8^2 - 1)(8^2 + 1)((8^4)^{n-1} + (8^4)^{n-2} + \ldots + 8^4 + 1) =$$

$$= 63 \cdot 65((8^4)^{n-1} + (8^4)^{n-2} + \ldots + 8^4 + 1) \vdots 13. \qquad (2.2)$$

Із $(2), (2.1), (2.2)$ випливає, що при $m = 4n + 1$ число $(19 \cdot 8^m + 17) \vdots 13$.

Якщо $m = 4n + 3$, то

$$19 \cdot 8^m + 17 = 19 \cdot 8^{4n+3} + 17 =$$

$$= 19(8^{4n+3} - 2) + (17 + 19 \cdot 2) = (19(8^{4n+3} - 2) + 55). \qquad (4.1)$$

$$8^{4n+3} - 2 = 2^{3(4n+3)} - 2 = 2(2^{12n+9-1} - 1) =$$

$$= 2(2^{12n+8} - 1) = 2\left(2^{4(3n+2)} - 1\right) =$$

$$= 2(16 - 1)(16^{3n+1} + 16^{3n} + \ldots + 1) \vdots 5. \qquad (4.2)$$

З $(2), (2.1), (2.2)$ випливає, що при $m = 4n + 3$ число

$(19 \cdot 8^m + 17) \vdots 5$.

З співвідношень (1), (2), (4) випливає, шо для будь-якого натурального числа m число $19 \cdot 8^m + 17$, згідно з означенням складеного числа, складене.

Завдання 1.13. Довести, що якщо виконуються умови:

$p -$ просте, $p > 2$, $\qquad m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$, $\qquad (m + n) \vdots p$, $\qquad (m^2 + n^2) \vdots p$,

то $m \vdots p$ і $n \vdots p$.

Розв'язання. Використовуючи тотожність

$(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$, знайдемо, що

$2mn = \ ((m+n)^2 - (m^2+n^2)) \vdots p$, отже, $2mn \vdots p$. Оскільки $p > 2$, то $m \vdots p$ або $n \vdots p$.

Нехай $m \vdots p$ і $(m+n) \vdots p$, тоді $n \vdots p$. Отже, $(m \vdots p) \wedge (n \vdots p)$.

Нехай $n \vdots p$ $(m+n) \vdots p$, тоді $m \vdots p$. Отже, $(m \vdots p) \wedge (n \vdots p)$.

Тут ми використали властивості подільності.

Якщо кожний доданок суми (алгебраїчної суми) ділиться на число, то і сума ділиться на це число.

Якщо добуток чисел ділиться на просте число, то принаймні один з множників ділиться на це число.

Наведемо наслідок з попередньої властивості.

Наслідок. Натуральне число m в степені k, де $k-$ будь-яке натуральне число, ділиться на просте число p тоді і тільки тоді коли m ділиться на p. Символічно записують: $m^k \vdots p \Leftrightarrow m \vdots p$.

ДЗ 1.14. Довести, що за умов $k \in \{1,2\}$, $a, b \in \mathbb{N}$, $(a^{2k} + b^{2k}) \vdots 179$, виконується:

$$a \vdots 179, \qquad b \vdots 179, \qquad (a^{1995} + b^{1995}) \vdots 179.$$

Розв'язання. Використаємо таку властивість подільності:

Якщо всі прості числа, які не перевищують кореня квадратного з числа, не є дільниками цього числа, то число просте.

Маємо: $\sqrt{1}79 < 14$. Оскільки число 179 не ділиться на $2, 3, 5, 7, 11$ та 13, то за попередньою властивістю число 179 є простим. Далі, після потрібних замін a та b можна використати попередній приклад.

ДЗ 1.15. Довести, що $\forall m \in \mathbb{Z}$ виконується:

$$(m^5 - 5m^3 + 4m) \vdots 120.$$

Розв'язання.

$m^5 - 5m^3 + 4m = m(m^4 - 5m^2 + 4) = m(m^2-1)(m^2-4) =$

$$= m(m-1)(m+1)(m-2)(m+2) =$$
$$= (m-2)(m-1)m(m+1)(m+2).$$

Оскільки $120 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5!$, і $(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)$ – добуток п'яти послідовних цілих чисел, то використовуючи завдання 1.15 маємо, що

$$(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) \vdots 5!$$

Отже, $\forall m \in \mathbb{Z}$ вираз $(m^5 - 5m^3 + 4m) \vdots 120$.

ДЗ 1.16. Узагальнити результат прикладу 1.5, тобто узагальнити твердження, що $\forall n \in \mathbb{N}$ вираз $(1978^n - 1)$ не ділиться на $(1000^n - 1)$.

Розв'язання. Можна замінити число 989 довільним натуральним числом a, де $501 \leq a \leq 999$. Тоді при $501 \leq a \leq 999$ маємо, що
$501^n \leq a^n \leq 999^n$ і

$$(2a)^n - 1 = \left(2^n(a^n - 500^n)\right) + (1000^n - 1)) \not\vdots (1000^n - 1). \qquad (5)$$

Використаємо метод від супротивного. Припустимо, що існує n для якого

$$\left(2^n(a^n - 500^n)\right) + (1000^n - 1)) \vdots (1000^n - 1).$$

Маємо, що $(1000^n - 1) \vdots (1000^n - 1)$, НСД$(2^n, 1000^n - 1) = 1$ і

$$(2^n(a^n - 500^n) + 1000^n - 1) \vdots (1000^n - 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a^n - 500^n) \vdots (1000^n - 1) \ \wedge (a^n - 500^n) < (1000^n - 1).$$

Тоді одержуємо, що менше число ділиться на більше, що неможливо. Отже, припущення не вірне. Тому істинне твердження (5).

Якщо один доданок суми ділиться на число, а другий доданок не ділиться на число, то сума не ділиться на число.

ДЗ 1.17. Розкласти на множники:

4) $x^5 + x + 1$.

Розв'язання. Маємо:

$$x^5 + x + 1 = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 =$$
$$= x^2(x^3 - 1) + x^2 + x + 1 = x^2(x-1)(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1 =$$

$$= (x^2+x+1)(x^2(x-1)+1) = (x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$$

ДЗ 1.17. Розкласти на множники:

5) x^4+4.

Розв'язання. Маємо:

$$x^4+4 = x^4+4x^2+4-4x^2 = (x^2+2)^2-(2x)^2 =$$
$$= (x^2+2-2x)(x^2+2+2x).$$

ДЗ 1.20. Розкладіть на множники вирази

2) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$;

Розв'язання. Маємо:

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3 =$$
$$= (x+y+z-x)((x+y+z)^2+(x+y+z)\cdot x+x^2)-(y^3+z^3) =$$
$$= (y+z)((x+y+z)^2+(x+y+z)\cdot x+x^2)-(y+z)(y^2-yz+z^2) =$$
$$= (y+z)((x+y+z)^2+(x+y+z)\cdot x+x^2-y^2+yz-z^2) =$$
$$= (y+z)(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz+x^2+xy+xz+$$
$$+x^2-y^2+yz-z^2) =$$
$$= (y+z)(3x^2+3xy+3yz+3xz) =$$
$$= (y+z)\cdot 3\cdot(x^2+xy+yz+xz) = 3\cdot(y+z)\big(x(x+y)+z(x+y)\big) =$$
$$= 3\cdot(y+z)(x+y)(x+z).$$

При доведенні використали тотожність

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz.$$

ДЗ 1.20. Розкладіть на множники вираз

3) $9x^4-12x^3y-21x^2y^2-40xy^3-16y^4$;

Розв'язання. Використаємо, що

$$(3t^2-2t)^2-(5t+4)^2 = (3t^2-7t-4)(3t^2+3t+4) =$$
$$= 9t^4-12t^3-21t^2-40t-16.$$

ДЗ 1.20. Розкладіть на множники вирази

4) $4x^4+4x^3y+13x^2y^2+6xy^3+9y^4$.

Розв'язання.

$$4x^4 + 4x^3y + 13x^2y^2 + 6xy^3 + 9y^4 =$$
$$= y^4\left(4\left(\frac{x}{y}\right)^4 + 4\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 13\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 6\left(\frac{x}{y}\right) + 9\right) =$$
$$= \left|\frac{x}{y} = t\right| = y^4(4t^4 + 4t^3 + 13t^2 + 6t + 9) =$$
$$= y^4(4t^4 + 4t^3 + 13t^2 + 6t + 9) =$$
$$= y^4\big(((2t^2)^2 + 2 \cdot 2t^2 \cdot t + (t)^2) + 2(2t^2 + t) \cdot 3 + (3)^2\big) =$$
$$= y^4(2t^2 + t + 3)^2 = y^4\left(2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 3\right)^2 =$$
$$= \left(y^2\left(2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 3\right)\right)^2 = (2x^2 + xy + 3y^2)^2.$$

Останню рівність одержати використавши підстановку $\frac{x}{y} = t.$

Використання методу розкладу на множники для розв’язання рівнянь в цілих і натуральних числах.

ДЗ 1.22. Розв’язати рівняння

$$\begin{cases} x^2 - x = y^2, \\ \quad x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Розв’язання.

$$x^2 - x = y^2 \Leftrightarrow x^2 - x - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} - y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - (2y)^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x - 1)^2 - (2y)^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$(2x - 1 - 2y)(2x - 1 + 2y) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 1 - 2y = 1, \\ 2x - 1 + 2y = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2 = 2, \\ \quad 4y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 1 - 2y = -1, \\ 2x - 1 + 2y = -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2 = -2, \\ \quad 4y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь:$\{(1,0), (0,0)\}$.

ДЗ 1.32. Розв’язати рівняння

1) $\begin{cases} 2^{2n} + 33 = y^2, \\ n \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 9^{n} + 55 = y^2, \\ n \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

ДЗ 1.23. Розв’язати рівняння

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = x^2y^2, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Для розв’язання потрібно використати завдання 1.20 $\begin{cases} u^2 = v(v+1), \\ u, v \in \mathbb{Z}. \end{cases}$
і відповідні заміни.

ДЗ 1.24. Розв’язати рівняння

$$\begin{cases} x^6 + 3x^3 + 1 = z^4, \\ x, z \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Для розв’язання потрібно використати завдання 1.21.

$\begin{cases} y^2 = t^2 + 3t + 1, \\ t, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ і відповідні заміни.

ДЗ 1.26. Розв’язати рівняння

$$\begin{cases} x^4 + 4y^4 = p, \\ x, y \in \mathbb{N}, \\ p - \text{ просте.} \end{cases}$$

Для розв’язання потрібно використати приклад 1.23

2) $\begin{cases} (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = p, \\ x, y \in N, \\ p - \text{ просте.} \end{cases}$

ДЗ 1.27. Розв’язати рівняння

$$\begin{cases} (2t-1)^4 + 4^{2t-1} = p, \\ t \in \mathbb{N}, p - \text{просте.} \end{cases}$$

Для розв’язання потрібно використати приклад із ДЗ 1.26

$\begin{cases} x^4 + 4y^4 = p, \\ x, y \in N, \\ p - \text{ просте.} \end{cases}$

ДЗ 1.28. Розв’язати рівняння

$$\begin{cases} x^4 + 4^x = p, \\ x \in \mathbb{N}, \\ p - \text{просте}. \end{cases}$$

Для розв'язання потрібно використати приклад із ДЗ 1.27

$$\begin{cases} (2t-1)^4 + 4^{2t-1} = p, \\ t \in \mathbb{N}, p - \text{просте}. \end{cases}$$

ДЗ 1.29. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} x^3 + 2y^3 = 3xy^2 + 5, \\ x, y \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Для розв'язання потрібно використати завдання 1.24

1) $\begin{cases} (x-y)^2(x+2y) = 5, \\ x, y \in \mathbb{N}. \end{cases}$

ДЗ 1.30. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} x^3 + 2y^3 = 3xy^2 + 7, \\ x, y \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Для розв'язання потрібно використати завдання 1.24

2) $\begin{cases} (x-y)^2(x+2y) = 7, \\ x, y \in \mathbb{N}. \end{cases}$

ДЗ 1.31. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} x^3 + 2y^3 = 3xy^2 + p, \\ x, y \in \mathbb{N}, \\ p - \text{ просте}. \end{cases}$$

Вказівки. $p - \text{просте} \Rightarrow (p-1) \vdots 3 \;\vee\; (p-2) \vdots 3.$

ДЗ 1.32. Розв'язати рівняння

1) $\begin{cases} 2^{2n} + 33 = y^2, \\ n \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Вказівки. Використати завдання 1.25.

2) $\begin{cases} 2^{2n} + 33 = y^2, \\ n, y \in \mathbb{N}. \end{cases}$

ДЗ 1.32. Розв'язати рівняння

2) $\begin{cases} 9^n + 55 = y^2, \\ n \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Вказівки. Використати розклад на множники $y^2 - 9^n$.

5.2. Застосування методу математичної індукції для розв'язання задач на подільність.

ДЗ 2.1. Довести методом математичної індукції, що при всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце формула:

$$a^{2n-1} + b^{2n-1} = (a+b)(a^{2n-2} - a^{2n-3}b + a^{2n-4}b^2 - \cdots - ab^{2n-3} + b^{2n-2}).$$

Розв'язання. Використаємо принцип математичної індукції.

1. Перевіримо, чи рівність істинна при $n = 2$.

Дійсно, в цьому випадку одержуємо відому формулу скороченого множення:

$$(a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

2. Припустимо, що рівність істинна при $n = k$.

$$(a^{2k-1} + b^{2k-1}) =$$
$$= (a+b)(a^{2k-2} - a^{2k-3}b + a^{2k-4}b^2 - \cdots - ab^{2k-3} + b^{2k-2}).$$

3. Доведемо, використовуючи припущення, що рівність правильна при $n = k+1$. Тобто покажемо, що

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \cdots - ab^{2k-1} + b^{2k}).$$

Маємо:

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = a^{2k-1} \cdot a^2 + b^{2k-1} \cdot b^2 =$$
$$= a^2(a^{2k-1} + b^{2k-1}) + (b^{2k+1} - a^2 b^{2k-1}) =$$
$$= a^2(a+b)(a^{2k-2} - a^{2k-3}b + \cdots - ab^{2k-3} + \cdots + b^{2k-2}) -$$
$$-b^{2k-1}(a^2 - b^2) = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + \cdots - a^3b^{2k-3} + a^2b^{2k-2}) -$$
$$-b^{2k-1}(a+b)(a-b) =$$
$$= (a+b)((a^{2k} - a^{2k-1}b + \cdots - ab^{2k-3} + a^2\, b^{2k-2}) - b^{2k-1}(a-b)) =$$
$$= (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + \cdots - ab^{2k-1} + b^{2k}).$$

Отже, згідно принципу математичної індукції рівність істинна при будь-якому натуральному n.

ДЗ 2.2. Довести методом математичної індукції, що для всіх $n \in \mathbb{N}$

1) $(4^n + 15n - 1) \vdots 9$.

Розв'язання.

1. Перевіримо, чи твердження істинне при $n = 1$.

Якщо $n = 1$, то $4^n + 15n - 1 = 4 + 15 - 1 = 18 \vdots 9$.

2. Припустимо, що твердження істинне при $n = k$. Тобто якщо $n = k$, то $(4^k + 15k - 1) \vdots 9$.

3. Доведемо, використовуючи припущення, що твердження істинне при $n = k + 1$. Тобто покажемо, що при $n = k + 1$ виконується:

$$(4^{k+1} + 15(k + 1) - 1) \vdots 9.$$

Маємо:

$$4^{k+1} + 15(k + 1) - 1 = 4^{k+1} + 15k + 14 =$$
$$= 4(4^k + 15k - 1) - 4 \cdot 15k + 4 + 15k + 14 =$$
$$= 4(4^k + 15k - 1) - 15k(4 - 1) + 18 =$$
$$= 4(4^k + 15k - 1) - 45k + 18 =$$
$$= 4(4^k + 15k - 1) - 9 \cdot (5k - 2).$$

Оскільки за припущенням $(4^k + 15k - 1) \vdots 9$, то і

$(4^{k+1} + 15(k + 1) - 1) \vdots 9$.

Отже, за принципом математичної індукції твердження істинне при будь-якому натуральному n.

ДЗ 2.2. Довести методом математичної індукції, що для всіх $n \in \mathbb{N}$

3) $(5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}) \vdots 23$.

Розв'язання.

1. Перевіримо, чи твердження істинне при $n = 1$.

Якщо $n = 1$, то $5^3 + 2^5 + 2^2 = 125 + 32 + 4 = 161 \vdots 23$.

2 Припустимо, що твердження істинне при $n = k$. Тобто якщо

$n = k$, то$(5^{2k+1} + 2^{k+4} + 2^{k+1}) \vdots 23$.

3. Доведемо, використовуючи припущення, що твердження істинне при $n = k + 1$. Тобто покажемо, що при $n = k + 1$ виконується:

$$(5^{2k+3} + 2^{k+5} + 2^{k+2}) \vdots 23.$$

Маємо:

$$(5^{2k+3} + 2^{k+5} + 2^{k+2}) = 5^2(5^{2k+1} + 2^{k+4} + 2^{k+1}) -$$
$$-25 \cdot 2^{k+1} - 25 \cdot 2^{k+4} + 2^{k+5} + 2^{k+2} =$$
$$= 25(5^{2k+1} + 2^{k+4} + 2^{k+1}) + 2^{k+1}(2 + 16 - 25 - 200) =$$
$$= (25(5^{2k+1} + 2^{k+4} + 2^{k+1}) - 207 \cdot 2^{k+1}) \vdots 23.$$

Отже, за принципом математичної індукції твердження істинне при будь-якому натуральному n.

ДЗ 2.2. Довести методом математичної індукції, що для всіх $n \in \mathbb{N}$

6) $(6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}) \vdots 11$.

Вказівки. Потрібно здійснити перетворення $6^{2n-2} = 36^{n-1}$.

ДЗ 2.2. Довести методом математичної індукції, що для всіх $n \in \mathbb{N}$

5) $(5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}) \vdots 19$.

Вказівки. Потрібно здійснити перетворення $2^{3n-2} = 2 \cdot 8^{n-1} 3^{3n-1}$.

ДЗ 2.3. Довести, що при всіх $n \in \mathbb{N}$

$B_n = \sqrt{\underbrace{11 \ldots 11}_{2 \cdot 3^n} - \underbrace{2 \ldots 2}_{3^n}} \vdots 3^{n+1}$ і $B_n \not\vdots\, 3^{n+2}$.

Вказівки. Для розв’язання потрібно використати результат завдання 2.2 – твердження, що число яке складається з 3^n цифр рівних 1 ділиться на 3^n і не ділиться на3^{n+1}, тобто

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(A_n = \underbrace{1 \ldots 1}_{3^n} \vdots 3^n\right) \wedge \left(A_n \not\vdots\, 3^{n+1}\right).$$

ДЗ 2.4. Довести, що $(3^{2^n} - 1) \vdots 2^{n+2}$ і $(3^{2^n} - 1) \not\vdots\, 2^{n+3}$ при всіх $n \in \mathbb{N}$.

Вказівки. Число $(3^{2^n} - 1)$ ділиться на 2 і не ділиться на 4.

ДЗ 2.5. Довести, що $(5^{2^n} - 1) \vdots 2^{n+2}$ і $(3^{2^n} - 1) \not\vdots\, 2^{n+3}$ при всіх $n \in \mathbb{N}$.

Вказівки. Число $(5^{2^n} - 1)$ ділиться на 2 і не ділиться на 4.

ДЗ 2.6. Довести, що при $a_0 = 0, a_1 = b \in \mathbb{N}$ і

$a_{n+2} = b^2 a_{n+1} - a_n, n \geq 0$ виконується:

$$({a_{n+1}}^2 + {a_n}^2) \vdots \left(b^2(a_n a_{n+1} + 1)\right).$$

Вказівки. Для розв'язання потрібно довести, що

$$({a_{n+1}}^2 + {a_n}^2) \vdots \left(b^2(a_n a_{n+1} + 1)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{{a_{n+1}}^2 + {a_n}^2}{a_n a_{n+1} + 1} = b^2 \Leftrightarrow \frac{{a_{n+1}}^2 + {a_n}^2}{a_n a_{n+1} + 1} - b^2 = 0.$$

Потрібно також врахувати, що

$$\frac{(b^2 a_{k+1} - a_k)^2 + {a_{k+1}}^2}{(b^2 a_{k+1} - a_k) a_{k+1} + 1} - b^2 = \frac{{a_{k+2}}^2 + {a_{k+1}}^2}{a_{k+2} a_{k+1} + 1} - b^2.$$

5.3. Застосування теореми про ділення з остачею в задачах на подільність.

ДЗ 3.7. Записати можливі остачі при діленні на $m = 7$.

Вказівки. $\forall\, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow\ n = \left[\begin{array}{l} 7q, \\ 7q+1, \\ 7q+2, \\ 7q+3, \\ 7q+4, \\ 7q+5, \\ 7q+6. \end{array}\right.$

За теоремою про ділення з остачею при діленні на 7 довільного цілого числа $n \in \mathbb{Z}$ можливі лише 7 випадків: $r = 0, r = 1, r = 2\,, r = 3,\ r = 4,$ $r = 5,$ або $r = 6.$

Завдання 3.7. Для всіх $n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}$ довести подільність:

$$nm(n^2 - m^2) \vdots 6.$$

Вказівки. Скористатись результатом завдання 3.6 та рівністю

$$nm(n^2 - m^2) = m(n^3 - n) - n(m^3 - m).$$

Завдання 3.8. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ довести подільність**:**

$$a_n = (n^5 - n) \vdots 30.$$

Вказівки. Скористатись властивістю подільності: якщо число ділиться на кожне із взаємно простих чисел, то воно ділиться і на їх добуток. Тобто, якщо $a_n \vdots 6$ і $a_n \vdots 5$, то $a_n \vdots 30$. Окрім того, потрібно скористатися рівністю $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$.

ДЗ 3.8. Для всіх $n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}$ довести подільність**:**

$$nm(n^4 - m^4) \vdots 30.$$

Вказівки. Скористатись результатом завдання 3.8 та рівністю

$$nm(n^4 - m^4) = mn^5 - nm^5 = m(n^5 - n) - n(m^5 - m).$$

ДЗ 3.9. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ довести подільність**:**

$$a_n = (n^7 - n) \vdots 42 = 6 \cdot 7.$$

Вказівки. Скористатись властивістю подільності: якщо $a_n \vdots 6$ і $a_n \vdots$ $7,$ то $a_n \vdots 42$, а також рівністю

$$n^7 - n = n(n-1)(n^2+n+1)(n+1)(n^2-n+1).$$

Оскільки $n^7 - n = (n^3 - n)\,(n^2+n+1)(n^2-n+1)$, то внаслідок результату завдання 3.6 $a_n = (n^7 - n) \vdots 6$.

За теоремою про ділення з остачею при діленні на 7 довільного цілого числа $n \in \mathbb{Z}$ можливі лише 7 випадків: $n = \left[\begin{array}{l} 7q, \\ 7q+1, \\ 7q+2, \\ 7q+3, \\ 7q+4, \\ 7q+5, \\ 7q+6. \end{array}\right.$

Нехай $n = 7q$. Тоді $a_n = 7q((7q)^3 - 1)((7q)^3 + 1) \vdots 7$.

Нехай $n = 7q + 1$. Тоді

$$a_n = (7q+1)7q(49q^2 + 14q + 1 + 7q + 2)((7q+1)^3 + 1) \vdots 7.$$

Розглянемо випадок $n = 7q + 2$. Тоді

$$a_n = (7q+2)(7q+1)(49q^2 + 35q + 7)(7q+3)(49q^2 + 14q + 3) \vdots 7.$$

Нехай $n = 7q + 3$. Тоді

$$a_n = (7q+3)(7q+2)(49q^2 + 49q + 13)(7q+4)(49q^2 + 35q + +7) \vdots 7.$$

Нехай $n = 7q + 4$. Тоді

$$a_n = (7q+4)(7q+3)(49q^2 + 63q + 21)(7q+5)(49q^2 + 49q + 13) \vdots 7.$$

Розглянемо випадок $n = 7q + 5$. Тоді

$$a_n = (7q+5)(7q+4)(49q^2 + 77q + 31)(7q+6)(49q^2 + 63q + 21) \vdots 7.$$

Нехай $n = 7q + 6$. Тоді

$$a_n = (7q+6)(7q+5)(49q^2 + 71q + 43)(7q+7)(49q^2 + 77q + 31) \vdots 7.$$

Отже, для будь-якого натурального n число $(n^7 - n) \vdots 7$.

ДЗ 3.10. Довести, що добуток трьох послідовних цілих чисел, з яких середнє є кубом цілого числа, ділиться на 504.

Тобто при всіх $n \in \mathbb{Z}$ довести, що $a_n = (n^3 - 1)n^3(n^3 + 1) \vdots 504$.

Розв'язання. $(a_n \vdots 504) \Leftrightarrow (a_n \vdots 9) \wedge (a_n \vdots 8) \wedge (a_n \vdots 7)$.

Використаємо теорему про ділення з остачею на $3, 2$ і 7. Маємо, що

$$a_n = (n^3 - 1)n^3(n^3 + 1) =$$

$$= (n-1)(n^2+n+1)n^3(n+1)(n^2-n+1).$$

За теоремою про ділення з остачею на 3, для будь-якого цілого числа n можливі тільки 3 випадки: $n = 3q \ \vee \ n = 3q+1 \ \vee \ n = 3q+2$.

1. Нехай $n = 3q$. Тоді

$$a_n = (n^3-1)n^3(n^3+1) = ((3q)^3-1)(3q)^3((3q)^3+1) \vdots 9.$$

2. Нехай $n = 3q+1$. Тоді

$$a_n = (n-1)(n^2+n+1)n^3(n^3+1) =$$
$$= 3q((3q+1)^2+3q+2)(3q+1)^3((3q+1)^3+1) =$$
$$= 3q(9q^2+9q+3)(3q+1)^3((3q+1)^3+1) =$$
$$= 9q(3q^2+3q+1)(3q+1)^3((3q+1)^3+1) \vdots 9.$$

3. Нехай тепер $n = 3q+2$. Тоді

$$a_n = (3q+1)((3q+2)^2+3q+3)(3q+2)^3 \times$$
$$\times (3q+3)((3q+2)^2-3q-1) =$$
$$= 3(q+1)(3q+1)(9q^2+15q+7)(3q+2)^3(9q^2+9q+3) =$$
$$= 9(q+1)(3q+1)(9q^2+15q+7)(3q+2)^3(3q^2+3q+1) \vdots 9.$$

Оскільки за теоремою про ділення з остачею на 3, інших випадків не існує, то $a_n \vdots 9$.

За теоремою про ділення з остачею на 2, для будь-якого цілого числа n можливі тільки 2 випадки: $n = 2q \ \vee \ n = 2q+1$.

1. Нехай $n = 2q$. Тоді

$$a_n = (n^3-1)n^3(n^3+1) = ((2q)^3-1)(2q)^3((2q)^3+1) \vdots 8.$$

2. Нехай $n = 2q+1$. Тоді

$$a_n = (n-1)(n^2+n+1)n^3(n+1)(n^2-n+1) =$$
$$= 2q((2q+1)^2+2q+2)(2q+1)^3(2q+2)((2q+1)^2-2q) =$$
$$= 4q(q+1)(4q^2+6q+3)(2q+1)^3(4q^2+2q) \vdots 8.$$

Тут використали подільність на 2 добутку двох послідовних цілих чисел, тобто $q(q+1) \vdots 2$. Оскільки за теоремою про ділення з остачею на 2 інших випадків не існує, то $a_n \vdots 8$.

За теоремою про ділення з остачею при діленні на 7 довільного цілого числа $n \in \mathbb{Z}$ можливі лише 7 випадків: $n = \left[\begin{array}{l} 7q, \\ 7q+1, \\ 7q+2, \\ 7q+3, \\ 7q+4, \\ 7q+5, \\ 7q+6. \end{array}\right.$

Нехай $n = 7q$. Тоді $a_n = ((7q)^3 - 1)(7q)^3((7q)^3 + 1) \vdots 7$.

Нехай $n = 7q + 1$. Тоді

$$a_n = (n-1)(n^2+n+1)n^3(n^3+1) =$$
$$= 7q(49q^2 + 21q + 2)(7q+1)^3((7q+1)^3 + 1) \vdots 7.$$

Нехай $n = 7q + 2$. Тоді $n^2 + n + 1 = ((7q+2)^2 + 7q + 2 + 1) =$ $= 7(7q^2 + 5q + 1) \vdots 7$, а, отже,

$$a_n = (n^3-1)n^3(n^3+1) = (n-1)(n^2+n+1)n^3(n^3+1) \vdots 7.$$

Нехай $n = 7q + 3$. Тоді $n^2 - n + 1 = ((7q+3)^2 - 7q - 3 + 1) =$ $= 7(7q^2 + 5q + 1) \vdots 7$, а, отже,

$$a_n = (n^3-1)n^3(n^3+1) = (n^3-1)n^3(n+1)(n^2-n+1) \vdots 7.$$

Нехай $n = 7q + 4$. Тоді $n^2 + n + 1 = ((7q+4)^2 + 7q + 4 + 1) =$ $= 7(7q^2 + 9q + 3) \vdots 7$, а, отже,

$$a_n = (n^3-1)n^3(n^3+1) = (n-1)(n^2+n+1)n^3(n^3+1) \vdots 7.$$

Нехай $n = 7q + 5$. Тоді $n^2 - n + 1 = ((7q+5)^2 - 7q - 5 + 1) =$ $= 7(7q^2 + 9q + 3) \vdots 7$, а, отже,

$$a_n = (n^3-1)n^3(n^3+1) = (n^3-1)n^3(n+1)(n^2-n+1) \vdots 7.$$

Нехай $n = 7q + 6$. Тоді

$$a_n = (n^3-1)n^3(n+1)(n^2-n+1) =$$
$$= 7(q+1)((7q+6)^3 - 1)(7q+6)^3(49q^2 + 77q + 31) \vdots 7.$$

Оскільки за теоремою про ділення з остачею на 7, інших випадків не існує, то $a_n \vdots 7$.

ДЗ 3.11. Нехай $p -$ просте число і $p \geq 5$. Довести, що $a_p = (p^2 - 1) \vdots 24$.

Вказівки. $a_p = (p^2 - 1) \vdots 24 = 3 \cdot 8 \Leftrightarrow (a_p \vdots 3) \wedge (a_p \vdots 8)$.

ДЗ 3.11. Нехай $p -$ просте число і $p \geq 5$. Довести, що

$a_p = (p^2 - 1) \vdots 24$.

Вказівки. Скористатись властивістю подільності: якщо число ділиться на кожне із взаємно простих чисел, то воно ділиться і на їх добуток. Тобто, якщо $a_p \vdots 3$ і $a_p \vdots 8$, то $a_p \vdots 24$. Окрім того, потрібно використати теорему про ділення з остачею на 3 і на 4.

ДЗ 3.12. Нехай $p -$ просте число і $p \geq 5$. Довести, що

$$(p^2 - 1) \vdots 30 \vee (p^2 - 19) \vdots 30.$$

Вказівки.

$$\big((p^2 - 1) \vdots 30\big) \vee ((p^2 - 19) \vdots 30) \Leftrightarrow (\big((p^2 - 1) \vdots 6\big) \wedge (\big((p^2 - 19) \vdots 6\big) \wedge$$

$$\wedge \Big(\big((p^2 - 1) \vdots 5\big) \vee \big((p^2 - 19) \vdots 5\big)\Big).$$

За теоремою про ділення з остачею на 5 для будь-якого цілого числа n маємо 5 можливих випадків, але враховуючи умову, $p -$ просте і $p \geq 7$, їх буде 4.

Нехай $p = 5q + 1$, тоді $(p^2 - 1) = (p - 1)(p + 1) = 5q(5q + 2) \vdots 5$.

Нехай $p = 5q + 2$, тоді

$$p^2 - 1 = 25q^2 + 20q + 4 - 1 = (25q^2 + 20q + 3) \not\vdots\, 5,$$

$$p^2 - 19 = 25q^2 + 20q + 4 - 19 = (25q^2 + 20q - 15) \vdots 5.$$

Нехай $p = 5q + 3$, тоді

$$p^2 - 1 = 25q^2 + 30q + 9 - 1 = (25q^2 + 30q + 8) \not\vdots\, 5,$$

$$p^2 - 19 = 25q^2 + 30q + 9 - 19 = (25q^2 + 30q - 10) \vdots 5.$$

Нехай $p = 5q + 4$, тоді

$$p^2 - 1 = 25q^2 + 40q + 16 - 1 = (25q^2 + 40q + 15) \vdots 5.$$

Інших випадків за теоремою про ділення з остачею на 5 і умовою бути не може, тому $\big((p^2 - 1) \vdots 5\big) \vee \big((p^2 - 19) \vdots 5\big)$, $p \geq 7$.

За теоремою про ділення з остачею на 6 для будь-якого цілого числа n маємо 6 можливих випадків, але враховуючи умову, їх буде 2:

$p = 6q + 1$ або $p = 6q + 5$.

Нехай $p = 6q + 1$, тоді

$$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1) = 6q(6q + 2) \,⋮\, 6 \ \wedge$$

$$p^2 - 19 = (p^2 - 1) - 18 = 6q(6q + 2) - 18 = 6(q(6q + 2) - 3) \,⋮\, 6.$$

Нехай $p = 6q + 5$, тоді

$$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1) = 6q(6q + 4) \,⋮\, 6 \ \wedge$$

$$p^2 - 19 = (p^2 - 1) - 18 = (6q + 4)(6q + 6) - 18 =$$

$$= 6((q + 1)(6q + 4) - 3) \,⋮\, 6.$$

Інших випадків за теоремою про ділення з остачею на 6 і умовою бути не може, тому $\big((p^2 - 1) \,⋮\, 6\big) \wedge \big((p^2 - 19) \,⋮\, 6\big),\ p \geq 7$.

Якщо число ділиться на попарно взаємно прості числа, то воно ділиться і на їх добуток.

Отже, якщо $(p - \text{просте}) \wedge (p \geq 7) \Rightarrow \big((p^2 - 1) \,⋮\, 30\big) \vee \big((p^2 - 19) \,⋮\, 30\big)$.

ДЗ 3.13. Знайти всі p, такі що $p, p^2 + 4, p^2 + 6$ – прості числа.

Вказівки. Використати теорему про ділення з остачею на 5.

ДЗ 3.14. Знайти всі p, такі що p і $2p^2 + 1$ – прості числа.

Вказівки. Використати теорему про ділення з остачею на 3.

5.4. Застосування теореми про ділення з остачею для розв'язання рівнянь в натуральних і цілих числах.

ДЗ 4.3. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^2 - 5y^2 + 7x + 9 = 0$.

Вказівка. Використати приклад із завдання 4.2:

$$\begin{cases} (x + 1)^2 + 3 = 5y^2 - 5x - 5 \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases},$$

ДЗ 4.4. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^4 - y^4 - 5x^2 + 13 = 0$.

Вказівка. Використати теорему про ділення з остачею на 5.

ДЗ 4.7. Розв'язати рівняння в цілих числах

$$x^{2001} + y^{2001} + z^{2001} = 2000^{2000}.$$

Результат узагальнити.

Розв'язання. 1 спосіб.

Доведемо що $O_7(t^3) = \{0; 1; 6\}$.

За теоремою про ділення з остачею на 7 можливі лише 7 випадків:

$$\left[\begin{array}{l} t = 7q \Rightarrow O_7(t^3) = O_7((7q)^3) = 0; \\ t = 7q+1 \Rightarrow O_7(t^3) = O_7((7q+1)^3) = O_7(1^3) = 1; \\ t = 7q+2 \Rightarrow O_7(t^3) = O_7((7q+2)^3) = O_7(2^3) = 1; \\ t = 7q+3 \Rightarrow O_7(t^3) = O_7((7q+3)^3) = O_7(3^3) = 6; \\ t = 7q+4 \Rightarrow O_7(t^3) = O_7((7q+4)^3) = O_7(4^3) = 1; \\ t = 7q+5 \Rightarrow O_7(t^3) = O_7((7q+5)^3) = O_7(5^3) = 6; \\ t = 7q+6 \Rightarrow O_7(t^3) = O_7((7q+6)^3) = O_7(6^3) = 6. \end{array}\right.$$

$$O_7(x^{2001} + y^{2001} + z^{2001}) = O_7\big(O_7(x^{2001}) + O_7(y^{2001}) + O_7(z^{2001})\big) =$$

$$= O_7(O_7(x^3)^{667} + O_7(y^3)^{667} + O_7(z^3)^{667}) =$$

$$= O_7(\{0,1,6\} + \{0,1,6\} + \{0,1,6\}) = \{0,1,2,3,5,6\}. \quad (1)$$

$$O_7(2000^{2000}) = O_7\big(O_7^{2000}(2000)\big) = O_7(5^{2000}) = O_7((5^3)^{666} \cdot 5^2) =$$

$$= O_7\big(O_7(5^3)^{666} \cdot O_7(5^2)\big) = O_7(O_7(1)^{666} \cdot 4) = 4. \quad (2)$$

Із (1) і (2) випливає, що

$$(O_7(x^{2001} + y^{2001} + z^{2001}) \neq O_7(2000^{2000}).$$

Відповідь: рівняння немає розв'язків.

2 спосіб. Використати теорему про ділення з остачею на 9.

Узагальнення 1. $\begin{cases} x^{3n} + y^{3n} + z^{3n} = (9k+2)^{6m+2}, \\ x, y, z \in \mathbb{Z}, \ \ m, n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$

Узагальнення 2. $\begin{cases} x^{3n} + y^{3n} + z^{3n} = (9k+2)^{6m+4}, \\ x, y, z \in \mathbb{Z}, \ \ m, n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$

Узагальнення 3. $\begin{cases} x^{3n} + y^{3n} + z^{3n} = (9k+2)^{6m+5}, \\ x, y, z \in \mathbb{Z}, \ \ m, n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$

Узагальнення 4. $\begin{cases} x^{3n} + y^{3n} + z^{3n} = (9k+4)^{3m+1}, \\ x, y, z \in \mathbb{Z}, \ \ m, n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$

Узагальнення 5. $\begin{cases} x^{3n} + y^{3n} + z^{3n} = (9k+4)^{3m+2}, \\ x, y, z \in \mathbb{Z}, \;\; m, n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$

Узагальнення 6. $\begin{cases} x^{3n} + y^{3n} + z^{3n} = (9k+5)^{6m+1}, \\ x, y, z \in \mathbb{Z}, \;\; m, n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$

Узагальнення 7. $\begin{cases} x^{3n} + y^{3n} + z^{3n} = (9k+5)^{6m+2}, \\ x, y, z \in \mathbb{Z}, \;\; m, n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$

Узагальнення 8. $\begin{cases} x^{3n} + y^{3n} + z^{3n} = (9k+5)^{6m+4}, \\ x, y, z \in \mathbb{Z}, \;\; m, n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$

Узагальнення 9. $\begin{cases} x^{3n} + y^{3n} + z^{3n} = (9k+7)^{3m+1}, \\ x, y, z \in \mathbb{Z}, \;\; m, n, k \in N \cup \{0\}. \end{cases}$

Узагальнення 10. $\begin{cases} x^{3n} + y^{3n} + z^{3n} = (9k+7)^{3m+2}, \\ x, y, z \in \mathbb{Z}, \;\; m, n, k \in N \cup \{0\}. \end{cases}$

ДЗ 4.9. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^2 - 2y^2 + 8z = 3$.

Розв'язання. Доведемо, що

$$O_8(t^2) = \{0; 1; 4\}. \tag{1}$$

За теоремою про ділення з остачею на 8 для будь-якого цілого числа t існує лише 8 можливих випадків.

Нехай $t = 8q$, тоді $O_8(t^2) = O_8(64q^2) = 0$.

Нехай $t = 8q + 1$, тоді $O_8(t^2) = O_8((8q+1)^2) = O_8(1^2) = 1$.

Нехай $t = 8q + 2$, тоді $O_8(t^2) = O_8((8q+2)^2) = O_8(2^2) = 4$.

Нехай $t = 8q + 3$, тоді $O_8(t^2) = O_8((8q+3)^2) = O_8(3^2) = 1$.

Нехай $t = 8q + 4$, тоді $O_8(t^2) = O_8((8q+4)^2) = O_8(4^2) = 0$.

Нехай $t = 8q + 5$, тоді $O_8(t^2) = O_8((8q+5)^2) = O_8(5^2) = 1$.

Нехай $t = 8q + 6$, тоді $O_8(t^2) = O_8((8q+6)^2) = O_8(6^2) = 4$.

Нехай $t = 8q + 7$, тоді $O_8(t^2) = O_8((8q+7)^2) = O_8(7^2) = 1$.

Згідно з (1) маємо:

$$\begin{aligned} O_8(x^2 - 2y^2 + 8z) &= O_8(O_8(x^2) - O_8(2y^2) + 0) = \\ &= O_8(\{0; 1; 4\} - 2\{0; 1; 4\}) = \\ &= O_8(\{0; 1; 4\} - \{0; 2\}) = \{0; 1; 4; 2; 6; 7\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Оскільки $O_8(3) = 3$, то з врахуванням (2) маємо:

$$O_8(x^2 - 2y^2 + 8z) \neq O_8(3).$$

Отже, рівняння розв'язків немає.

ДЗ 4.11. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^2 - 2002y = 1999$.

Розв'язання. За теоремою про ділення з остачею на 11 можливі лише такі 11 випадків:

$t = 11q \ \Rightarrow \ O_{11}(t^2) = O_{11}((11q)^2) = 0.$

$t = 11q + 1 \ \Rightarrow \ O_{11}(t^2) = O_{11}((11q + 1)^2) = O_{11}(1^2) = 1.$

$t = 11q + 2 \ \Rightarrow \ O_{11}(t^2) = O_{11}((11q + 2)^2) = O_{11}(2^2) = 4.$

$t = 11q + 3 \ \Rightarrow \ O_{11}(t^2) = O_{11}((11q + 3)^2) = O_{11}(3^2) = 9.$

$t = 11q + 4 \ \Rightarrow \ O_{11}(t^2) = O_{11}((11q + 4)^2) = O_{11}(4^2) = 5.$

$t = 11q + 5 \ \Rightarrow \ O_{11}(t^2) = O_{11}((11q + 5)^2) = O_{11}(5^2) = 3.$

$t = 11q + 6 \ \Rightarrow \ O_{11}(t^2) = O_{11}((11q + 6)^2) = O_{11}(6^2) = 3.$

$t = 11q + 7 \ \Rightarrow \ O_{11}(t^2) = O_{11}((11q + 7)^2) = O_{11}(7^2) = 5.$

$t = 11q + 8 \ \Rightarrow \ O_{11}(t^2) = O_{11}((11q + 8)^2) = O_{11}(8^2) = 9.$

$t = 11q + 9 \ \Rightarrow \ O_{11}(t^2) = O_{11}((11q + 9)^2) = O_{11}(9^2) = 4.$

$t = 11q + 10 \ \Rightarrow \ O_{11}(t^2) = O_{11}((11q + 10)^2) = O_{11}(10^2) = 1.$

Отже, $O_{11}(x^2) = \{0; 1; 3; 4; 5; 9\}$.

$$O_{11}(x^2 - 2002y) = O_{11}\big(O_{11}(x^2) - O_{11}(2002y)\big) =$$
$$= O_{11}\big(O_{11}(x^2)\big) = \{0; 1; 3; 4; 5; 9\}. \qquad (1)$$

З іншого боку,

$$O_{11}(1999) = 8. \qquad (2)$$

З (1) і (2) слідує, що $(O_{11}(x^2 - 2002y) \neq O_{11}(1999)$.

Відповідь: рівняння не має розв'язку**.**

ДЗ 4.13. Розв'язати рівняння в цілих числах

$$x^{2000} + y^{2000} = 1998^{2001},$$
$$x^{2016} + y^{2016} = 2018^{2017}.$$

Результат узагальнити. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$\begin{cases} x^{4n} + y^{4m} = (5z+3)^{4k+1}, \\ x, y, z \in \mathbb{Z},\ \ m, n, k \in \ \mathbb{N} \cup \{0\}; \end{cases} \begin{cases} x^{4m} + y^{4n} = (5z+3)^{4k+2}, \\ x, y, z \in \mathbb{Z},\ \ m, n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Розв'язання. Розглянемо рівняння

$$x^{2000} + y^{2000} = 1998^{2001}.$$

Маємо, що $O_5(t^2) = \{0,1,4\}$.

Тоді $O_5(t^4) = O_5((O_5\,(t^2))^2) = \{0^2, 1^2, O_5(4^2)\} = \{0,1\}$.

$$O_5(x^{2000} + y^{2000}) = O_5(O_5(x^{2000}) + O_5(y^{2000})) =$$
$$= O_5(O_5((x^4)^{500}) + O_5((y^4)^{500})) =$$
$$= O_5(\{0;1\} + \{0;1\}) = \{0;1;2\}\,. \tag{1}$$
$$O_5(1998^{2001}) = O_5(O_5(1998^{2000})O_5(1998))$$
$$= O_5(O_5((1998^4)^{500}) \cdot O_5(1998)) =$$
$$= O_5(O_5((3^4)^{500}) \cdot 3) = O_5(1 \cdot 3) = 3. \tag{2}$$

З (1) і (2) слідує, що $O_5(x^{2000} + y^{2000}) \neq O_5(1998^{2001})$.

Отже, рівняння розв'язків немає.

Розглянемо тепер рівняння $x^{2016} + y^{2016} = 2018^{2017}$. Оскільки $O_5(t^4) = \{0,1\}$, то

$$O_5(x^{2016} + y^{2016}) = O_5(O_5(x^{2016}) + O_5(y^{2016})) =$$
$$= O_5(O_5((x^4)^{504}) + O_5((y^4)^{504})) = O_5(\{0;1\} + \{0;1\}) = \{0;1;2\}. \tag{3}$$
$$O_5(2018^{2017}) = O_5(O_5(2018^{2016}) \cdot O_5(2018)) =$$
$$= O_5(O_5((2018^4)^{504}) \cdot O_5(2018)) =$$
$$= O_5((O_5(3^4))^{504} \cdot 3) = O_5(1 \cdot 3) = 3. \tag{4}$$

З (3) і (4) слідує, що $O_5(x^{2016} + y^{2016}) \neq O_5(2018^{2017})$.

Отже, рівняння розв'язків немає.

Узагальнення. $\begin{cases} x^{4n} + y^{4m} = (5q+3)^{4k+1}, \\ x, y \in \mathbb{Z},\ \ q, n, k \in \ \mathbb{N} \cup \{0\}; \end{cases}$

Розв'язання. Оскільки $O_5(t^4) = \{0;1\}$, то

$$O_5(x^{4n} + y^{4n}) = O_5(O_5(x^{4n}) + O_5(y^{4n})) =$$
$$O_5(O_5((x^4)^n) + O_5((y^4)^n)) = O_5(\{0;1\} + \{0;1\}) = \{0;1;2\}. \tag{1}$$

$$O_5((5q+3)^{4k+1}) = O_5\big(O_5((5q+3)^{4k})O_5(5q+3)\big) =$$
$$= O_5(O_5(((5q+3)^4)^k)O_5(5q+3)) =$$
$$= O_5(O_5((3^4)^k)3) = O_5(1\cdot 3) = 3. \qquad (2)$$

З (1) і (2) випливає, що $O_5(x^{4n}+y^{4n}) \neq O_5((5q+3)^{4k+1})$.

Отже, рівняння розв'язків немає.

Узагальнення. $\begin{cases} x^{4m}+y^{4n} = (5z+3)^{4k+2}, \\ x,y,z\in\mathbb{Z},\;\; m,n,k\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \end{cases}$

Розв'язання. Оскільки $O_5(t^4) = \{0;1\}$, то

$$O_5(x^{4m}+y^{4n}) = O_5\big(O_5(x^{4m})+O_5(y^{4n})\big) =$$
$$= O_5(\{0,1\}+\{0,1\}) = \{0,1,2\}. \qquad (1)$$
$$O_5((5z+3)^{4k+2}) = O_5\big(O_5((5z+3)^{4k})\cdot O_5((5z+3)^2)\big) =$$
$$= O_5(4\cdot O_5((5z+3)^4)^k) = O_5(4\cdot(1)^k) = O_5(4) = 4. \qquad (2)$$

З (1) і (2) випливає, що $O_5(x^{4m}+y^{4n}) \neq O_5((5z+3)^{4k+2})$.

Отже, рівняння розв'язків немає.

ДЗ 4.14. Розв'язати в натуральних числах рівняння

1. $\begin{cases} 2^x+25^t = 19^z, \\ x,t,z\in\mathbb{N}; \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 2+25^t\cdot 5 = 19^z, \\ t,z\in\mathbb{N}; \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2^2+25^t\cdot 5 = 19^z, \\ t,z\in\mathbb{N}. \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 2^x+5^y = 19^z, \\ x,y,z\in\mathbb{N}. \end{cases}$

Розв'язання. Розглянемо рівняння

$$\begin{cases} 2^x+25^t = 19^z, \\ x,t,z\in\mathbb{N}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 19^z-25^t, \\ x,t,z\in\mathbb{N}. \end{cases} \qquad (1)$$
$$O_6(19^z-25^t) = O_6\big(O_6(19^z)-O_6(25^t)\big) = O_6\big(O_6(1^z)-O_6(1^t)\big) = 0. \qquad (2)$$
$$O_6(2^x) \neq 0. \qquad (3)$$

З $(1)-(3)$ випливає що рівняння не має розв'язків.

Розглянемо тепер рівняння

$$\begin{cases} 2^2+25^t\cdot 5 = 19^z, \\ t,z\in\mathbb{N}. \end{cases} \qquad (1)$$
$$O_6(2^2+25^t\cdot 5) = 3. \qquad (2)$$

$$O_6(19^z) = 1. \tag{3}$$

З $(2) - (3)$ випливає що рівняння не має розв'язків.

Розглянемо рівняння

$$\begin{cases} 2 + 25^t \cdot 5 = 19^z, \\ t, z \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1}$$

$$O_5(2 + 25^t \cdot 5) = 2. \tag{2}$$

$$O_5(19^z) = O_5((20-1)^z) = O_5(-1)^z) = \{1,4\}. \tag{3}$$

З $(1) - (3)$ випливає що рівняння не має розв'язків.

Розглянемо тепер рівняння

$$\begin{cases} 2^x + 5^y = 19^z, \\ x, y, z \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1}$$

Вказівки. 1 спосіб.

Якщо $x = 1,$ то $\begin{cases} 2^x + 25^t \cdot 5 = 2 + 25^t \cdot 5 = 19^z, \\ t, z \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Якщо $x = 2,$ то $\begin{cases} 2^x + 25^t \cdot 5 = 2^2 + 25^t \cdot 5 = 19^z, \\ t, z \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Використати попередні приклади.

2 спосіб. Знайти $O_8(2^x + 5^y)$.

ДЗ 4.15. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} a2^{2k+1} + (4b+3)2^k - 1 = n^2, \\ a, b, n, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

де a, b — задані натуральні числа.

Розв'язання. Маємо:

$a2^{2k+1} + 4b2^k + 3 \cdot 2^k - 1 = n^2$.

$$O_8(a2^{2k+1} + 4b2^k + 3 \cdot 2^k - 1) = O_8(3 \cdot 2^k - 1). \tag{1}$$

Використовуючи (1) отримаємо:

Якщо $k = 1,$ то $a \cdot 2^3 + 4b2^k + 3 \cdot 2 - 1 = a \cdot 2^3 + 4b2^k + 5,$ тому

$$O_8(a2^{2k+1} + 4b2^k + 3 \cdot 2^k - 1) = O_8(a \cdot 2^3 + 4b2^k + 5) = 5. \tag{2}$$

Якщо $k = 1,$ то $a \cdot 2^3 + 4b2^k + 3 \cdot 2^2 - 1 = a \cdot 2^3 + 4b2^k + 11,$ тому

$$O_8(a2^{2k+1} + 4b2^k + 3 \cdot 2^k - 1) = O_8(a \cdot 2^5 + 4b2^2 + 11) = 3. \tag{3}$$

$$O_8(n^2) = \{0; 1; 4\}. \qquad (4)$$

З $(1) - (4)$ випливає, що рівняння не має розв'язків.

ДЗ 4.16. Розв'язати рівняння

$a \cdot 2^{2k+1} + b \cdot 2^k + c = n^2$, де $a, b, c -$ задані натуральні числа,

$a \cdot 2^3 + b \cdot 2 + c \neq n^2, \quad a \cdot 2^5 + b \cdot 2^2 + c \neq n^2$, $O_8(c) \notin \{0; 1; 4\}$.

Розв'язання.

Якщо $k = 1$, то $a \cdot 2^{2k+1} + b \cdot 2^k + c = a \cdot 2^3 + b \cdot 2 + c \neq n^2$, тому

$O_8(a2^{2k+1} + 4b2^k + 3 \cdot 2^k - 1) = O_8(a \cdot 2^3 + 4b2^k + 5) = 5.$

$$k = 1 \Rightarrow a \cdot 2^{2k+1} + b \cdot 2^k + c = a \cdot 2^3 + b \cdot 2 + c \neq n^2. \qquad (1)$$

$$k = 2 \Rightarrow a \cdot 2^{2k+1} + b \cdot 2^k + c = a \cdot 2^5 + b \cdot 2^2 + c \neq n^2. \qquad (2)$$

Вище було встановлено, що

$$O_8(n^2) = \{0; 1; 4\}. \qquad (3)$$

При $k \geq 3$ маємо:

$$O_8(n^2) = O_8(a \cdot 2^{2k+1} + b \cdot 2^k + c) =$$
$$= O_8\big(O_8(a \cdot 2^{2k+1}) + O_8(b \cdot 2^k) + O_8(c)\big) =$$
$$= O_8\big(O_8(c)\big) = O_8(c) \notin \{0; 1; 4\}). \qquad (4)$$

З співвідношень $(1) - (4)$ випливає, що

$$O_8(a \cdot 2^{2k+1} + b \cdot 2^k + c) \neq O_8(n^2).$$

Отже, рівняння розв'язків не має.

ДЗ 4.17. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} a3^{k+1} + (3b + 2)3^k + 5 = x^3, \\ \qquad a, b, x, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Результат узагальнити, розв'язавши в цілих числах рівняння

$a \cdot 3^{k+1} + b \cdot 3^k + c = n^3$, де $a, b, c -$ задані натуральні числа.

Вказівки. Використати теорему про ділення з остачею на 9 і довести що $O_9(m^3) = \{0, 1, 8\}$.

ДЗ 4.18. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 - 4 = m^3, \\ n, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = m^3 + 4.$$

За теоремою про ділення з остачею на 9 і попередньо розв'язаними прикладами маємо, що $O_9(m^3) = \{0, 1, 8\}$. Тоді

$$O_9(m^3 + 4) = O_9\big(O_9(m^3) + O_9(4)\big) =$$

$$= O_9(\{0, 1, 8\} + 4) = \{4, 5, 3\}. \quad (1)$$

Використовуючи завдання 4.7 маємо, що

$$O_9(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) = \{0, 1\}. \quad (2)$$

Із співвідношень (1), (2) випливає що рівняння немає розв'язку.

ДЗ 4.19. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = m^3 + 5, \\ n, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Розв'язання. За теоремою про ділення з остачею на 9 і попередньо розв'язаними прикладами маємо, що $O_9(m^3) = \{0, 1, 8\}$.

$$O_9(m^3 + 5) = O_9\big(O_9(m^3) + O_9(5)\big) =$$

$$= O_9(\{0, 1, 8\} + 5) = \{5, 6, 4\}. \quad (1)$$

Використовуючи завдання 4.7 маємо, що

$$O_9(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) = \{0, 1\}. \quad (2)$$

Із співвідношень (1), (2) випливає що рівняння немає розв'язку.

ДЗ 4.20. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 - 6 = m^3, \\ n, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = m^3 + 6.$$

За теоремою про ділення з остачею на 9 і попередньо розв'язаними прикладами маємо, що $O_9(m^3) = \{0, 1, 8\}$.

$$O_9(m^3 + 6) = O_9\big(O_9(m^3) + O_9(6)\big) = O_9(\{0, 1, 8\} + 6) = \{6, 7, 5\}. \quad (1)$$

Використовуючи завдання 4.7 маємо, що

$$O_9(1^3+2^3+\cdots+n^3)=\{0,1\}. \qquad (2)$$

Із співвідношень (1), (2) випливає що рівняння немає розв'язку.

Завдання 4.7. Розв'язати в натуральних числах рівняння

$$\begin{cases} 2^{2p}-2^p+1=q, \\ p,q - \text{прості числа.} \end{cases}$$

Завдання 4.8. Узагальнити результат завдання 4.7, розв'язавши в натуральних числах рівняння

$$\begin{cases} 2^{2(2n+1)}-2^{2n+1}=3m, \\ m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \end{cases}$$

ДЗ 4.21. Узагальнити результат завдання 4.7, розв'язавши в натуральних числах рівняння

$$\begin{cases} (3k+2)^{2(2n+1)}-(3k+2)^{2n+1}=3m+1 \\ m,n,k\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \end{cases},$$

Вказівки. Використати результат завдання 4.8 і співвідношення $O_3((3k+2)^2)=1$.

Завдання 4.8. Розв'язати рівняння

$$2)\ \begin{cases} 2^{2k+1}+33=y^2, \\ k\in\mathbb{N}, \\ y\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вказівки. Використати, що $O_3(2^{2k+1}+33)\neq O_3(y^2)$. Рівняння не має розв'язків.

Завдання 4.8. Розв'язати рівняння

$$3)\ \begin{cases} 2^{2n}+33=y^2, \\ n\in\mathbb{N}, \\ y\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вказівки. Використати приклад ДЗ 1.32.1

Завдання 4.8. Розв'язати рівняння

4) $\begin{cases} 2^m + 33 = y^2, \\ m \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Вказівки. Використати завдання 4.8.2 і 4.8.3.

ДЗ 4.22. Розв’язати рівняння

2) $\begin{cases} 3^{2k+1} + 55 = y^2, \\ k \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Вказівки. Використати, що $O_4(3^{2k+1} + 55) \neq O_4(y^2)$. Рівняння не має розв'язків.

ДЗ 4.22. Розв’язати рівняння

3) $\begin{cases} 3^{2n} + 55 = y^2, \\ n \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Вказівки. Використати приклад ДЗ 1.32.

ДЗ 4.22. Розв’язати рівняння

4) $\begin{cases} 3^m + 55 = y^2, \\ m \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Вказівки. Використати приклади із ДЗ 4.22.2 і ДЗ 4.22.3.

6. Варіанти контрольних робіт

Контрольна робота 1

В 1

1. Довести, що для будь-якого натурального числа n вираз $1978^n - 1$ не ділиться на $1000^n - 1$. Узагальнити дане твердження.

2. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} u^2 = v(v+1), \\ u, v \in \mathbb{Z}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = x^2y^2, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

3. Довести, що $(14 \cdot 3^n + 9 \cdot 7^{2n}) \vdots 23$, де $n \in \mathbb{N}$.

В 2

1. Довести, що $(m^5 - 5m^3 + 4m) \vdots 120$, де $m \in \mathbb{Z}$.

2. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} y^2 = t^2 + 3t + 1, \\ t, y \in \mathbb{Z}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^6 + 3x^3 + 1 = z^4, \\ x, z \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

3. Довести, що $(3^{2n+3} + 40n - 27) \vdots 64$, де $n \in \mathbb{N}$.

В 3

1. При якому натуральному m число $19 \cdot 8^m + 17$ просте?

2. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} x^4 + 4y^4 = p, \\ x, y \in \mathbb{N}, \\ p - \text{просте}. \end{cases} \qquad \begin{cases} (2t-1)^4 + 4^{2t-1} = p, \\ t \in \mathbb{N}, \\ p - \text{просте}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^4 + 4^x = p, \\ x \in \mathbb{N}, \\ p - \text{просте}. \end{cases}$$

3. Довести, що $(11^{n+2} + 12^{2n+1}) \vdots 133$, де $n \in \mathbb{N}$.

В 4

1. Довести, що якщо число $1 + 2^m + 4^m$ при деякому натуральному m є простим, то $m = 3^n$.

2. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} x^3 + 2y^3 = 3xy^2 + 5, \\ x, y \in \mathbb{N}. \end{cases} \qquad \begin{cases} 5^n + 11^n = 12^n, \\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

3. Розкласти на множники вираз $x^5 + x + 1$.

В 5

1. Довести, що $((13a + 3)^{3n+2} + (13b + 9)^{3n+2} + 1) \vdots 13$, де $a, b \in \mathbb{Z}$.

2. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} x^3 + 2y^3 = 3xy^2 + 7, \\ x, y \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

3. Розкласти на множники вираз $x^8 + x^4 - 2$.

В 6

1. Довести, що якщо $k \in \{1; 2\}$, $a, b \in \mathbb{N}$ і $(a^{2k} + b^{2k}) \vdots 179$, то $a \vdots 179$, $b \vdots 179$ і $(a^{1995} + b^{1995}) \vdots 179$.

2. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} 2^{2n} + 33 = y^2, \\ n \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^{2k+1} + 33 = y^2, \\ k \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^m + 33 = y^2, \\ m \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

3. Розкласти на множники вираз $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

В 7

1. Довести, що при будь-яких $n \in \mathbb{N}$ і $n \geq 2$

$$2(2^{1987} + 3^{1987} + \ldots + n^{1987}) \,⋮\, (n + 2).$$

Результат узагальнити.

2. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} x^2 - x = y^2, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

3. Розкласти на множники вираз $x^5 + x + 1$.

В 8

1. Довести, що $(2903^n - 803^n - 464^n + 261^n) \,⋮\, 1897$, де $n \in \mathbb{N}$.

2. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} x^4 + 4y^4 = p, \\ x, y \in \mathbb{N}, \\ p - \text{ просте.} \end{cases} \quad \begin{cases} (2t - 1)^4 + 4^{2t-1} = p, \\ t \in \mathbb{N}, \\ p - \text{ просте.} \end{cases} \quad \begin{cases} x^4 + 4^x = p, \\ x \in \mathbb{N}, \\ p - \text{ просте.} \end{cases}$$

3. Довести, що $(5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}) \,⋮\, 19$, де $n \in \mathbb{N}$.

В 9

1. Довести, що $(n^n - n^2 + n - 1) \,⋮\, (n - 1)^2$, де $n \in \mathbb{N}$.

2. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} 3^{2k+1} + 55 = y^2, \\ k \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad \begin{cases} 3^{2n} + 55 = y^2, \\ n \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad \begin{cases} 3^m + 55 = y^2, \\ m \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

3. Розкласти на множники вираз

$4x^4 + 4x^3y + 13x^2y^2 + 6xy^3 + 9y^4$.

В 10

1. Довести, що $(7 \cdot 5^{n+1} + 20 \cdot 6^{2n+1}) \vdots 31$, де $n \in \mathbb{N}$.

2. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} 6x^2 - xy - y^2 + 7x + 4y - 3 = 0, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

3. Розкласти на множники вираз $x^4 + 5x^2 + 9$.

В 11

1. Довести, що $(7 \cdot 6^{n+1} + 3 \cdot 5^{2n+1}) \vdots 19$, де $n \in \mathbb{N}$.

2. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} x^3 + 2y^3 = 3xy^2 + p, \\ x, y \in \mathbb{N}, \quad p - \text{ просте.} \end{cases}$$

3. Розкласти на множники вираз $x^4 - 8x^2 + 4$.

Контрольна робота 2

В 1

1. Користуючись методом математичної індукції, довести, що при всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}).$$

2. Чи можна у виразах замість знаку «$*$» поставити «$+$» або «$-$», щоб отримати правильні рівності?

$$1 * 2 * 3 * \ldots * 1996 * 1997 = 1 * 9 * 9 * 7,$$

$$1 * 2 * 3 * \ldots * 2012 * 2013 = 2 * 0 * 1 * 3,$$

$$1 * 2 * 3 * \ldots * 2016 * 2017 = 2 * 0 * 1 * 7.$$

Результат узагальнити.

3. Розв'язати в натуральних числах рівняння

$\begin{cases} a2^{2k+1} + (4b + 3)2^k - 1 = n^2, \\ n, k \in \mathbb{N}, \end{cases}$ де $a, b -$ задані натуральні числа.

В 2

1. Довести методом математичної індукції, що

$(4^n + 15n - 1) \vdots 9$, де $n \in \mathbb{N}$.

2. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$\begin{cases} x^{4m} + y^{4n} = (5z+3)^{4k+2}, \\ x, y, z \in \mathbb{Z}, \quad m, n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

3. Розв'язати в натуральних числах рівняння

$$\begin{cases} 2^x + 25^t = 19^z, \\ x, t, z \in \mathbb{N}. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 + 25^t \cdot 5 = 19^z, \\ t, z \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^2 + 25^t \cdot 5 = 19^z, \\ t, z \in \mathbb{N}. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^x + 5^y = 19^z, \\ x, y, z \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

В 3

1. Довести методом математичної індукції, що

$(5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}) \vdots 23$, де $n \in \mathbb{N}$.

2. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^4 - y^4 - 5x^2 + 13 = 0$.

3. Розв'язати в натуральних числах рівняння

$a \cdot 2^{2k+1} + b \cdot 2^k + c = n^2$, де a, b, c —задані натуральні числа,

$a \cdot 2^3 + b \cdot 2 + c \neq n^2$, $a \cdot 2^5 + b \cdot 2^2 + c \neq n^2$, $O_8(c) \notin \{0; 1; 4\}$.

В 4

1. Довести методом математичної індукції, що

$(6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}) \vdots 11$, де $n \in \mathbb{N}$.

2. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$\begin{cases} x^2 - 5y^2 + 7x + 9 = 0, \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

3. Розв'язати в натуральних числах рівняння

$$\begin{cases} a3^{k+1} + (3b+2)3^k + 5 = x^3, \\ a, b, x, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Результат узагальнити, розв'язавши рівняння

$a \cdot 3^{k+1} + b \cdot 3^k + c = n^3$, де $a, b, c -$ задані натуральні числа. $O_9(c) \notin \{0; 1; 8\}$. $O_9(3b + c) \notin \{0; 1; 8\}$.

В 5

1. Довести, що вираз $5^{2^n} - 1$

а) ділиться на 2^{n+2},

б) не ділиться на 2^{n+3}.

2. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$x^{2001} + y^{2001} + z^{2001} = 2000^{2000}.$$

Результат узагальнити.

3. Розв'язати в натуральних числах рівняння

$$\begin{cases} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 - 4 = m^3, \\ n, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

В 6

1. Нехай $a_0 = 0, a_1 = b \in \mathbb{N}$, і $a_{n+2} = b^2 a_{n+1} - a_n, n \geq 0$.

Довести, що $({a_{n+1}}^2 + {a_n}^2) \vdots b^2(a_n a_{n+1} + 1)$.

2. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$\begin{cases} x^{3n} + y^{3n} + z^{3n} = (9k + 2)^{6m+2}, \\ x, y, z \in \mathbb{Z}, \quad m, n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

3. Розв'язати в натуральних числах рівняння

$$\begin{cases} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = m^3 + 5, \\ n, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

В 7

1. Довести, що число, яке складається з 3^n цифр рівних 1, ділиться на 3^n і не ділиться на 3^{n+1}, тобто якщо

$A_n = \underbrace{1 \dots 1}_{3^n}, \ n \in \mathbb{N}$, то $A_n \vdots 3^n$, $A_n \not\vdots\, 3^{n+1}$.

Записати критерій подільності числа на 9.

2. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$x^2 - 2y^2 + 8z = 3.$$

3. Розв'язати рівняння в натуральних числах

$$\begin{cases} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 - 6 = m^3, \\ n, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

В 8

1. Довести, що

$(n^5 - n) \vdots 30$, де $n \in \mathbb{N}$;

$nm(n^4 - m^4) \vdots 30$, де $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$.

2. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$x^2 - 2002y = 1999.$$

3. Розв'язати в натуральних числах рівняння

$$\begin{cases} (3k+2)^{2(2n+1)} - (3k+2)^{2n+1} = 3m+1 \\ m, n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases},$$

В 9

1. Довести, що $(n^7 - n) \vdots 42$, де $n \in \mathbb{N}$.

2. Знайти всі p такі, що p і $2p^2 + 1$ – прості числа.

3. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$\begin{cases} x^{4n} + y^{4m} = (5z+3)^{4k+1}, \\ x, y, z \in \mathbb{Z}, \quad m, n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

В 10

1. Довести, що число, яке складається з 3^n цифр рівних 1, ділиться на 3^n і не ділиться на 3^{n+1}, тобто якщо

$$A_n = \underbrace{1 \dots 1}_{3^n}, \ n \in \mathbb{N}, \text{ то } \ A_n \vdots 3^n, \ A_n \not\vdots 3^{n+1}.$$

Записати критерій подільності числа на 9.

2. Довести, що при будь-яких $n \in \mathbb{N}$ вираз

$$B_n = \sqrt{\underbrace{11\dots11}_{2\cdot 3^n} - \underbrace{2\dots2}_{3^n}} \vdots 3^{n+1} \quad \text{і} \quad B_n \not\vdots 3^{n+2}.$$

3. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$x^{2000} + y^{2000} = 1998^{2001}.$$

Результат узагальнити.

В 11

1. Довести, що якщо $p -$ просте число і $p \geq 7$, то $(p^2 - 1) \vdots 30$ і $(p^2 - 19) \vdots 30$.

2. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$x^{2016} + y^{2016} = 2018^{2017}.$$

Результат узагальнити.

3. Розв'язати рівняння

$$\begin{cases} 3^{2k+1} + 55 = y^2, \\ k \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{Z}. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3^{2n} + 55 = y^2, \\ n \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{Z}. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3^{m} + 55 = y^2, \\ m \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Назаренко О.М., Панченко Т.І. Елементи теорії чисел. Суми: Видавництво Сумського державного університету, 2003. 204 с.

2. Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокіцкій І.А. Алгебра і теорія чисел: Практикум. Частина 2. К.: Вища школа, 1986. 264 с.

3. Бельский А.А. Калужнин Л.А. Деление с остатком. К.: Вища школа, 1977. 71с.

4. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С./ Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія, 2018. 512 с.

5. А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський та ін. / Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія, 2019. 304 с.

Навчально-методичне видання

Бушев Дмитро Миколайович

Федуник-Яремчук Оксана Володимирівна

Соліч Катерина Василівна

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОЛІМПІАДНИХ І КОНКУРСНИХ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ:

методичні вказівки

Друкується в авторській редакції