Волинський національний університет імені Лесі Українки
Факультет інформаційних технологій і математики
Кафедра загальної математики та методики навчання інформатики

Вікторія ПАСТЕРНАК

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

з дисципліни

«ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ»

для студентів спеціальності 014 Середня освіта (Інформатика)
першого (бакалаврського) рівня

Луцьк 2023

УДК 519.61(072)
П 19

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Волинського національного університету імені Лесі Українки (протокол № 8 від 26 квітня 2023 року)

Рецензенти:
О.В. Гуда, кандидат технічних наук, доцент кафедри фізики та вищої математики Луцького національного технічного університету;

О.В. Федуник-Яремчук, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри математичного аналізу та статистики Волинського національного університету імені Лесі Українки.

Укладач: В.В. Пастернак
П 19 Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Обчислювальні методи»: методичні вказівки / Вікторія Валентинівна Пастернак. Луцьк: ВНУ ім. Лесі Українки, 2023. 60 с.

Анотація: Методичне видання складене відповідно до діючої програми курсу «Обчислювальні методи» з метою подання основних теоретичних положень та практичних навичок. У методичній розробці викладені основні базові поняття, що стосуються обчислювальних (чисельних) методів, обчислювального експерименту, розв’язку нелінійних рівнянь та систем лінійних та нелінійних алгебраїчних рівнянь, інтерполяція та апроксимація табличних залежностей та функцій. А також, чисельного інтегрування функцій. Слід відмітити, що подані основи теоретичного матеріалу з курсу «Обчислювальні методи», а також наведені приклади розв’язку задач та практичних розрахунків для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (Інформатика).

УДК 519.61(072)
© Пастернак В.В., 2023
© Волинський національний
університет імені Лесі Українки, 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Суспільство вступило у важливий період свого розвитку – еру інформатизації. Використання електронних обчислювальних машин перейшло у сферу безпосереднього виробництва. Для вирішення теоретичних і практичних задач, що виникають при діяльності людини у різних галузях науки, техніки та виробництва з метою звільнення людини від надмірного інтелектуального навантаження великий ефект дає використання обчислювальної техніки при умові достатнього програмного забезпечення й ефективного його використання. Тому освітня компонента ОК «Обчислювальні методи» у підготовці фахівців високої кваліфікації набуває особливо великого значення.

Мета вивчення дисципліни «Обчислювальні методи»:

- надання основних знань з методів обчислень, а також практичних навичок використання методів та засобів сучасних інформаційних технологій у повсякденній практичній діяльності;
- підготувати студентів до ефективного використання сучасних комп'ютерних технологій при розв'язуванні фахових завдань.

Прослухавши курс ОК «Обчислювальні методи», студент повинен вміти обґрунтувати вибір чисельного методу розв'язування математичної задачі, знати особливості його реалізації на ЕОМ, володіти алгоритмом методу, провести необхідні обчислення і аналіз отриманих результатів, а також мати навички практичного використання програмного забезпечення ЕОМ для розв'язання математичних задач.

В результаті вивчення даного курсу студент повинен

Знати:

- етапи розв'язування задач з використанням ЕОМ;
- суть математичного моделювання; схему обчислювального експерименту;
- основні групи методів, які використовуються для розв'язування математичних задач;
- вимоги до чисельних методів;
- джерела похибок, їх класифікацію;
- означення абсолютної і відносної похибок, правильної, сумнівної, значущої цифр наближеного числа;
- правила округлення;
- загальні формули для похибок;
- правила підрахунку цифр;
- формули подання і способи округлення чисел в ЕОМ;
- способи зменшення обчислювальних похибок;

- суть методів, особливості їх машинної реалізації, швидкість і умови збіжності;
- суть методу Жордана-Гауса і його модифікацій, особливості їх машинної реалізації;
- методи простих ітерацій і Зейделя, умови збіжності методів;
- особливості методу квадратного кореня і особливості його реалізації;
- особливості розв'язування систем із погано обумовленими матрицями;
- постановку задачі наближення функцій, суть методів наближення (інтерполювання, середньоквадратичне наближення, рівномірне), як оптимально вибрати вузли інтерполювання, найпростіші інтерполяційні методи для розв'язування рівнянь з одним невідомим, особливості реалізації методів на ЕОМ;
- особливості задач чисельного диференціювання та інтегрування, різні підходи до побудови формул чисельного інтегрування, особливості машинної реалізації диференціювання та інтегрування;
- постановку задачі, класифікацію методів і суть методів Рунге-Кутта та Ейлера;
- геометричну інтерпретацію різновидів методу Ейлера;
- підходи до оцінки точності методів;
- методи розв'язування задач про власні значення;
- метод скінчених різниць;
- особливості розв'язування крайових задач;
- метод скінчених елементів;
- чисельні методи розв'язування інтегральних рівнянь.

Вміти:

- будувати математичні моделі найпростіших об'єктів;
- вивести загальну формулу для обчислення похибок (абсолютної, відносної) функції;
- виконувати дії з наближеними числами;
- оцінювати похибки результатів і обґрунтовувати правила підрахунку цифр;
- виконувати обчислення без точного врахування похибок і розв'язувати пряму і обернену задачі теорії похибок;
- оцінювати похибки округлень при виконанні арифметичних операцій на ЕОМ;
- наводити приклади задач, які чутливі до похибок вхідних даних; наводити приклади стійких і нестійких методів;
- обґрунтовувати збіжність методів, давати їм геометричну інтерпретацію;
- записувати алгоритми і програми, застосовувати їх для знаходження із заданою точністю коренів нелінійних рівнянь;
- розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь методами виключення, обчислювати визначники, ранги матриць, обернені матриці, підрахувати число арифметичних дій, необхідних для розв'язування системи

методами виключення, використовувати бібліотечні програми методів типу Жордана-Гаусса;

- обґрунтовувати методи простих ітерацій і Зейделя для розв’язування систем лінійних рівнянь, записувати відповідні алгоритми і програми методів, обґрунтовувати збіжність, оцінювати похибку наближення до розв’язку;
- розв’язувати системи лінійних рівнянь із симетричними матрицями методом квадратного кореня;
- обґрунтовувати існування і єдиність розв’язку задачі інтерполювання;
- виводити формули інтерполяційних многочленів Лагранжа і Ньютона;
- оцінювати похибку інтерполювання;
- будувати інтерполяційні многочлени і кубічні сплайни;
- обчислювати значення функцій за допомогою інтерполяційних многочленів;
- застосувати інтерполяційні многочлени для обчислення значень функцій і розв’язування рівнянь;
- обґрунтувати умову лінійної і квадратичної інтерполяції;
- знаходити найкращу середньоквадратичну апроксимацію функції, що задана на відрізку;
- здійснювати аналіз методом найменших квадратів наближення таблично заданих функцій;
- будувати емпіричні формули, а також виконувати згладжування таблично заданих функцій;
- будувати формули чисельного диференціювання та інтегрування, давати їм геометричну інтерпретацію, оцінювати похибки, обчислювати похідні й означені інтеграли, записувати відповідні алгоритми і програми, використовувати різноманітні додатки програмування;
- обґрунтовувати методи типу Ейлера, Рунге-Кутта;
- розв’язувати задачу Коші (для одного рівняння і системи першого і вищих порядків) за допомогою формули Тейлора, методами типу Ейлера, Рунге-Кутта;
- розв’язувати задачі на власні значення;
- застосовувати різницеві методи та метод скінчених елементів до розв’язування крайових задач;
- розв’язувати інтегральні рівняння чисельними методами;
- записувати відповідні алгоритми і програми;
- використовувати бібліотечні програми.

Слід відмітити, що освітня компонента «Обчислювальні методи» є логічним продовженням курсів «Математичний аналіз», «Лінійна алгебра» та «Інформатика» і змістовно пов’язана з базовими дисциплінами. Засвоєння студентами основних положень цієї дисципліни має і науково-прикладне значення на початковому етапі навчання і формування професійного фахівця загалом.

Навчальним планом передбачається: вивчення дисципліни на лекційних та лабораторних заняттях, самостійна робота студентів; перевірка основних теоретичних знань та практичних умінь студентів за допомогою тестових завдань та контрольної роботи; складання іспиту (заліку).

Основними труднощами при вивченні даної дисципліни є багатоплановість матеріалу, який розглядається, і його великий об'єм. Тому успішне засвоєння курсу не можливе без регулярної самостійної роботи з літературою і творчого відношення до виконання лабораторних робіт.

Слід також зазначити, що під час викладання дисципліни використовуються комп'ютерні навчальні програми, інтернет-програми та додатки, практичні завдання та вправи. А також, усі лабораторні роботи виконуються на ЕОМ.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

Тема: ТЕОРІЯ ПОХИБОК

Мета: Ознайомлення з елементами теорії похибок. Набуття практичних навичок обчислення похибок (абсолютна похибка та відносна похибка).

Завдання:

1) Визначити, яка рівність точніша;

2) Округлити сумнівні цифри числа, залишивши вірні знаки: а) у вузькому розумінні; б) у широкому розумінні;

3) Знайти граничні абсолютні та відносні похибки чисел, якщо вони мають лише вірні цифри: а) у вузькому розумінні; б) у широкому розумінні.

№1. 1) $\sqrt{44}=6.63$; $19/41=0.463$.

2) а) 22.553 (± 0.016);

б) 2.8546; $\delta=0.3\%$.

3) а) 0.2387; б) 42.884.

№2. 1) $\sqrt{73}=8.54$; $7/15=0.467$.

2) а) 6.4257 (± 0.0024);

б) 17.2834; $\delta=0.3\%$.

3) а) 3.751; б) 0.537.

№3. 1) $\sqrt{10.5}=3.24$; $4/17=0.235$.

2) а) 0.5748 (± 0.0034);

б) 34.834; $\delta=0.1\%$.

3) а) 11.445; б) 2.043.

№4. 1) $\sqrt{10}=3.16$; $15/7=2.14$.

2) а) 2.3485 (± 0.0042);

б) 0.34484; $\delta=0.4\%$.

3) а) 2.3445; б) 0.745.

№5. 1) $\sqrt{4.8}=2.19$; $6/7=0.857$.

2) а) 5.435 (± 0.0028);

б) 10.8441; $\delta=0.5\%$.

3) а) 8.345; б) 0.288.

№6. 1) $\sqrt{74}=8.60$; $12/11=1.091$.

2) а) 0.12356 (± 0.00036);

б) 8.24163; $\delta=0.2\%$.

3) а) 12.45; б) 3.4453.

№7. 1) $\sqrt{22}=4.69$; $2/21=0.095$.

2) а) 2.4543 (± 0.0032);

б) 24.5643; $\delta=0.1\%$.

3) а) 0.374; б) 4.348.

№8. 1) $\sqrt{9.8}=3.13$; $23/15=1.53$.

2) а) 8.3445 (± 0.0022);

б) 23.574; $\delta=0.2\%$.

3) а) 20.43; б) 0.576.

№9. 1) $\sqrt{83} = 9.11$; $6/11 = 0.545$.

2) а) $3.7834\ (\pm 0.0041)$;

б) 21.68563; $\delta = 0.3\%$.

3) а) 41.72; б) 0.678.

№10. 1) $\sqrt{52} = 7.21$; $17/19 = 0.895$.

2) а) $13.537\ (\pm 0.0026)$;

б) 7.521; $\delta = 0.12\%$.

3) а) 5.634; б) 0.0748.

№11. 1) $\sqrt{21} = 4.58$; $21/29 = 0.723$.

2) а) $13.6253\ (\pm 0.0021)$;

б) 0.3567; $\delta = 0.042\%$.

3) а) 18.357; б) 2.16.

№12. 1) $\sqrt{28} = 5.29$; $50/19 = 2.63$.

2) а) $1.784\ (\pm 0.0063)$;

б) 0.85637; $\delta = 0.021\%$.

3) а) 0.5746; б) 236.58.

№13. 1) $\sqrt{61} = 7.81$; $13/17 = 0.764$.

2) а) $3.6878\ (\pm 0.0013)$;

б) 15.873; $\delta = 0.042\%$.

3) а) 14.862; б) 8.73.

№14. 1) $\sqrt{62} = 7.87$; $7/22 = 0.318$.

2) а) $27.1548\ (\pm 0.0016)$;

б) 0.3945; $\delta = 0.016\%$.

3) а) 0.3648; б) 21.7.

№15. 1) $\sqrt{18} = 4.24$; $17/11 = 1.545$.

2) а) $0.8647\ (\pm 0.0013)$;

б) 24.3618; $\delta = 0.22\%$.

3) а) 2.4516; б) 0.863.

№16. 1) $\sqrt{38} = 6.16$; $5/3 = 1.667$.

2) а) $0.98351\ (\pm 0.00042)$;

б) 3.7542; $\delta = 0.32\%$.

3) а) 62.74; б) 0.389.

№17. 1) $\sqrt{14} = 3.74$; $49/13 = 3.77$.

2) а) $5.6483\ (\pm 0.0017)$;

б) 83.736; $\delta = 0.085\%$.

3) а) 5.6432; б) 0.00858.

№18. 1) $\sqrt{3} = 1.73$; $13/7 = 1.857$.

2) а) $32.7486\ (\pm 0.0012)$;

б) 2.8867; $\delta = 0.043\%$.

3) а) 0.0384; б) 63.745.

№19. 1) $\sqrt{12} = 3.46$; $19/12 = 1.58$.

2) а) $4.88445\ (\pm 0.00052)$;

б) 0.096835; $\delta = 0.32\%$.

3) а) 12.688; б) 4.636.

№20. 1) $\sqrt{75} = 8.66$; $51/11 = 4.64$.

2) а) $38.4258\ (\pm 0.0014)$;

б) 0.66385; $\delta = 0.34\%$.

3) а) 6.743; б) 0.543.

№21. 1) $\sqrt{88} = 9.38$; $18/7 = 2.57$.

2) а) $0.39642\ (\pm 0.00022)$;

б) 46.453; $\delta = 0.015\%$.

3) а) 15.644; б) 6.125.

№22. 1) $\sqrt{17} = 4.12$; $19/9 = 2.11$.

2) а) $0.66385\ (\pm 0.00042)$;

б) 5.8425; $\delta = 0.23\%$.

3) а) 0.3825; б) 24.6.

№23. 1) $\sqrt{92} = 9.59$; $16/7 = 2.28$.

2) а) 0.75244 (± 0.00013);

б) 24.3872; $\delta = 0.34\%$.

3) а) 16.383; б) 5.734.

№24. 1) $\sqrt{55} = 7.41$; $20/13 = 1.54$.

2) а) 2.3684 (± 0.0017);

б) 45.7832; $\delta = 0.18\%$.

3) а) 0.573; б) 3.6761.

№25. 1) $\sqrt{65} = 8.06$; $12/7 = 1.71$.

2) а) 0.38725 (± 0.00112);

б) 72.354; $\delta = 0.24\%$.

3) а) 18.275; б) 0.00644.

№26. 1) $\sqrt{41} = 6.40$; $6/7 = 0.857$.

2) а) 0.36127 (± 0.00034);

б) 46.7843; $\delta = 0.32\%$.

3) а) 3.425; б) 7.38.

№27. 1) $\sqrt{56} = 7.48$; $23/9 = 2.56$.

2) а) 4.57633 (± 0.00042);

б) 23.7564; $\delta = 0.44\%$.

3) а) 3.75; б) 6.8343.

№28. 1) $\sqrt{42} = 6.48$; $27/31 = 0.872$.

2) а) 15.8372 (± 0.0026);

б) 0.088748; $\delta = 0.56\%$.

3) а) 3.643; б) 72.385.

№29. 1) $\sqrt{66} = 8.12$; $7/3 = 2.33$.

2) а) 13.5726 (± 0.0072);

б) 3.87683; $\delta = 0.33\%$.

3) а) 26.3; б) 4.8556.

№30. 1) $\sqrt{53} = 7.28$; $14/17 = 0.823$.

2) а) 0.66835 (± 0.00115);

б) 23.3748; $\delta = 0.27\%$.

3) а) 43.813; б) 0.64

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Абсолютна та відносна похибки

Мірою точності наближеного числа є ***похибка***. Розрізняють *абсолютну* та *відносну* похибку наближеного числа.

Нехай *x* – це наближене подання числа *X*. Тоді величину $\Delta x = |x - X|$ називають ***абсолютною похибкою*** подання числа *X* за допомогою числа *x*. Як правило, ця величина має лише теоретичний інтерес, оскільки точне значення *X* зазвичай невідоме. На практиці використають максимально можливе значення Δx – число $\overline{\Delta x}$, що задовольняє нерівність $\Delta x \le \overline{\Delta x}$.

Слід відмітити, що $\overline{\Delta x}$ називають ***максимальною***, або ***граничною абсолютною похибкою***. При цьому, має виконуватися умова, що $\overline{\Delta x} \ll |x|$

(знак << означає «значно менше»).

Проте, абсолютна похибка не демонструє якості обчислення або вимірювання – важливе значення абсолютної похибки, що припадає на одиницю вимірювання.

Величину $\delta x = \left|\frac{\Delta x}{X}\right|$ називають ***відносною похибкою*** подання числа X числом *x*. Так само як і у випадку з абсолютною похибкою, вводять поняття ***максимальної***, або ***граничної відносної похибки*** $\overline{\delta x}$, що задовольняє наступну нерівність $\delta x \le \overline{\delta x}$.

На практиці використовують формулу: $\overline{\delta x} = \left|\frac{\overline{\Delta x}}{x}\right|$.

Очевидно, що $\overline{\delta x}$ << 1.

Відносну похибку зазвичай вимірюють у відсотках. Крім того, відносну похибку завжди округлюють із надлишком.

Треба зауважити, що наведені оцінки похибок наближених чисел справедливі лише, якщо запис цих чисел містить всі *значущі* цифри.

Значущою цифрою наближеного числа називають всяку цифру в його десятковому поданні починаючи з першої зліва ненульової цифри.

Проте, точність наближеного числа залежить не від кількості значущих цифр, а від кількості *вірних значущих цифр*.

Кажуть, що число *x* є наближенням точного числа X з ***n вірними десятковими знаками у вузькому розумінні***, якщо абсолютна похибка цього числа Δx не перевершує половини одиниці *n*-го розряду в запису числа *x*.

У деяких випадках зручно говорити, що число *x* є наближенням точного числа X з ***n вірними десятковими знаками в широкому розумінні***, якщо абсолютна похибка цього числа Δx не перевищує одиниці десяткового розряду, що виражається *n*-ою значущою цифрою запису числа x.

Похибки округлення

У тих випадках, коли наближене число містить зайву кількість невірних значущих цифр необхідно наближатися до округлення.

При округленні використовують наступне ***правило округлення***. Якщо в старшому з розрядів, що відкидаються, стоїть цифра менша п'яти, то вміст розрядів, що зберігається, не міняється. У противному випадку, в молодший розряд, що зберігається, додається одиниця.

Очевидно, що абсолютна похибка округлення не перевершує половини одиниці молодшого розряду, що залишається.

При округленні наближеного числа його абсолютна похибка збільшується з урахуванням похибки округлення.

Зразок виконання завдання

Завдання:

1) Визначити, яка рівність точніша: $\sqrt{18} \approx 4.24$ чи $\dfrac{9}{11} \approx 0.818$.

2) Округлити сумнівні цифри, залишивши вірні знаки: а) числа 72.353 ± 0.026 у вузькому розумінні; б) числа 2.3544; δ=0.2% у широкому розумінні;

3) Знайти граничні абсолютні та відносні похибки чисел: а) 0.4357; б) 12.384, якщо вони мають лише вірні цифри: а) у вузькому розумінні; б) у широкому розумінні.

Розв'язування:

1) Знаходимо значення даних виразів із більшою кількістю десяткових знаків, ніж наявні наближення: $x_1 \approx \sqrt{18} \approx 4.2426$, $x_2 \approx \dfrac{9}{11} = 0.81818$.

Обчислюємо граничні абсолютні похибки, округляючи їх із надлишком:

$\Delta x_1 = |4.24 - 4.2426| \le 0.0027 = \overline{\Delta x_1}$,

$\Delta x_2 = |0.818 - 0.81818| \le 0.00019 = \overline{\Delta x_2}$.

Граничні відносні похибки становитимуть:

$$\overline{\delta x_1} = \left|\frac{\overline{\Delta x_1}}{x_1}\right| = \frac{0.0027}{4.24} \approx 0.0006367 \approx 0.00064\ (0.064\%)$$

$$\overline{\delta x_2} = \left|\frac{\overline{\Delta x_2}}{x_2}\right| = \frac{0.00019}{0.818} \approx 0.0002322 \approx 0.00024\ (0.024\%).$$

Оскільки $\overline{\delta x_2} < \overline{\delta x_1}$, то рівність $\frac{9}{11} \approx 0.818$ є більш точною.

Відповідь: Рівність $\frac{9}{11} \approx 0.818$ точніша.

2) а) Нехай $72.353 \pm 0.026 = x$. За умовою $\Delta x = 0.026 < 0.05$. Це означає, що у числі 72.353 вірними у вузькому розумінні є три цифри 7, 2, 3.

За правилом округлення знайдемо наближене значення числа: $x^* = 72.4$. Отримаємо:

$$\Delta x^* = \Delta x + \Delta_{окр} = 0.026 + 0.047 = 0.073.$$

$\Delta x^* > 0.05$, отже, потрібно зменшити кількість цифр у наближеному числі до двох: $x^{**}=72$. Тоді

$$\Delta x^{**} = \Delta x + \Delta_{окр} = 0.026 + 0.353 = 0.379.$$

Оскільки $\Delta x^{**} < 0.5$, то в округленому числі 72 обидві цифри, що залишилися, вірні у вузькому розумінні.

Відповідь: $x = 72$.

б) Нехай $x = 2.3544$; $\delta x = 0.2\%$.

Абсолютна похибка дорівнює: $\Delta x = x \cdot \delta x = 2.3544 \cdot 0.002 = 0.00471$.

Слід відмітити, що $\Delta x < 0.01$. Це означає, що у числі 2.3544 вірними у широкому розумінні є три цифри, тому округлюємо його, залишаючи ці три цифри: $x^* = 2.35$. Отримаємо:

$$\Delta x^* = \Delta x + \Delta_{окр} = 0.0044 + 0.00471 = 0.00911.$$

Оскільки $\Delta x^* < 0.01$, то в округленому числі 2.35 всі три цифри вірні у широкому розумінні.

Відповідь: x = 2.35.

3) а) Оскільки всі чотири цифри числа x = 0.4357 вірні у вузькому розумінні, то гранична абсолютна похибка Δx = 0.00005, а гранична відносна похибка дорівнює:

$$\overline{\delta x} = \frac{0.00005}{0.4357} \approx 0.00011476 \approx 0.00012 \ \ (0.012\%).$$

Відповідь: Δx = 0.00005; $\overline{\delta x} = 0.00012 \ \ (0.012\%)$.

б) Оскільки всі п'ять цифр числа x = 12.384 вірні у широкому розумінні, то гранична абсолютна похибка Δx = 0.001, а гранична відносна похибка дорівнює:

$$\overline{\delta x} = \frac{0.001}{12.384} \approx 0.0000807 \approx 0.000081 \ (0.0081\%).$$

Відповідь: Δx = 0.001; $\overline{\delta x} = 0.000081 (0.0081\%)$.

Контрольні питання

1) Яку величину називають абсолютною похибкою наближеного числа?

2) Яку величину називають граничною абсолютною похибкою наближеного числа?

3) Яку величину називають відносною похибкою наближеного числа?

4) Яку величину називають граничною відносною похибкою наближеного числа?

5) Яку цифру називають значущою цифрою наближеного числа?

6) Яку цифру в десятковому поданні наближеного числа називають вірною значущою цифрою у вузькому розумінні?

7) Яку цифру в десятковому поданні наближеного числа називають вірною значущою цифрою у широкому розумінні?

8) Наведіть основне правило округлення наближених чисел.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2

Тема: НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ БАГАТОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

Мета: засвоїти послідовність етапів алгоритму інтерполяційного багаточлена Лагранжа. А також, набути практичних навичок у побудові інтерполяційних функцій (залежностей) за наявними шуканими точками.

Завдання:

Побудувати інтерполяційний багаточлен Лагранжа $L_n(x)$ для функції $f(x)$, що задана таблицею, та обчислити значення функції у заданих точках. Побудувати графік інтерполяційної функції $y = L_n(x)$ за наявним набором точок.

Варіант	Задана таблиця значень функції				Задані точки			
№1	x_i	-2	-1	0	1	-3	-1,5	0,5	1,5
	$f(x_i)$	-7	4	1	2	?	?	?	?
№2	x_i	-1	0	2	3	-0,5	0,5	1,5	2,5
	$f(x_i)$	-16	-7	-1	20	?	?	?	?
№3	x_i	-2	-1	1	2	-0,5	0,5	1,5	2,5
	$f(x_i)$	-26	-5	1	10	?	?	?	?
№4	x_i	-1	0	1	2	-0,5	0,5	1,5	2,5
	$f(x_i)$	-20	-5	6	25	?	?	?	?
№5	x_i	-2	-1	2	3	-1,5	-0,5	1,5	2,5
	$f(x_i)$	-22	-10	-10	-2	?	?	?	?
№6	x_i	-2	0	1	2	-1,5	-0,5	0,5	2,5
	$f(x_i)$	-11	-3	-11	5	?	?	?	?
№7	x_i	-3	-2	1	3	-1,5	0,5	1,5	2
	$f(x_i)$	-4	19	-8	14	?	?	?	?
№8	x_i	-3	-2	0	2	-4	-1,5	-1	1,5
	$f(x_i)$	-22	-13	-7	23	?	?	?	?
№9	x_i	-2	0	1	2	-1,5	-1	-0,5	1,5
	$f(x_i)$	30	-4	3	18	?	?	?	?
№10	x_i	-1	0	1	5	-0,5	2	3	4,5

	$f(x_i)$	11	4	7	-1	?	?	?	?
№11	x_i	-1	0	1	3	-0,5	1,5	2	2,5
	$f(x_i)$	1	-8	-3	25	?	?	?	?
№12	x_i	-1	0	1	2	-2	-0,5	0,5	1,5
	$f(x_i)$	5	-11	-3	23	?	?	?	?
№13	x_i	-4	-3	0	1	-2	-0,5	0,5	2
	$f(x_i)$	-7	10	-11	-22	?	?	?	?
№14	x_i	-4	0	3	4	-3	-2	2	3,5
	$f(x_i)$	-15	-11	-8	25	?	?	?	?
№15	x_i	-4	-3	-1	3	-3,5	-2	1,5	2
	$f(x_i)$	-15	5	3	-1	?	?	?	?
№16	x_i	-3	-1	0	2	-2,5	-2	-0,5	1
	$f(x_i)$	5	3	-7	-15	?	?	?	?
№17	x_i	-4	-2	0	3	-3,5	-3	-0,5	2
	$f(x_i)$	-18	8	-6	3	?	?	?	?
№18	x_i	-3	-1	1	2	-4	-2	-1,5	0,5
	$f(x_i)$	3	3	-13	-12	?	?	?	?
№19	x_i	-4	-1	1	2	-3	-2	-0,5	2,5
	$f(x_i)$	-6	3	-11	-6	?	?	?	?
№20	x_i	-3	-2	0	3	-4	-1,5	2	2,5
	$f(x_i)$	9	10	-6	15	?	?	?	?
№21	x_i	-4	-2	1	3	-3	-1	0,5	2,5
	$f(x_i)$	-8	10	-8	20	?	?	?	?
№22	x_i	-3	-1	0	2	-2	-1,5	-0,5	1
	$f(x_i)$	8	4	-4	-2	?	?	?	?
№23	x_i	-2	0	2	4	-1,5	-1	3	3,5
	$f(x_i)$	-5	1	-9	13	?	?	?	?
№24	x_i	-2	-1	0	3	-1,5	-0,5	1	2
	$f(x_i)$	-4	3	2	11	?	?	?	?
№25	x_i	-3	-2	0	2	-2,5	-1	1,5	3
	$f(x_i)$	-13	3	5	7	?	?	?	?
№26	x_i	-2	0	2	3	-1,5	-1	0,5	1,5
	$f(x_i)$	-5	7	11	25	?	?	?	?
№27	x_i	-2	1	2	3	-3	-1	0,5	1,5
	$f(x_i)$	11	-4	-1	26	?	?	?	?
№28	x_i	-3	-1	0	2	-2	-1,5	-0,5	1
	$f(x_i)$	-16	14	5	-1	?	?	?	?

№29	x_i	-4	-2	0	1	-3	-1,5	-1	1,5
	$f(x_i)$	-6	4	-2	4	?	?	?	?
№30	x_i	-3	-2	-1	0	-4	-3,5	0,5	1
	$f(x_i)$	4	4	0	-2	?	?	?	?

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Нехай відомі значення функції f в $n+1$ різних точках: $x_0, x_1, x_2 \dots x_n$. ($x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$): $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$. Наприклад, ці значення знайдені експериментально або отримані у результаті розрахунків. Виникає задача наближено відбудувати функцію f у довільній точці x.

Для розв'язання цієї задачі будується алгебраїчний багаточлен $L_n(x)$ степеня n, який в точках x_i приймає ті ж значення y_i, що й функція $f(x)$, тобто:

$$L_n(x_i) = f(x_i),\ (i = 0, 1, 2, 3, \dots, n).$$

Такий багаточлен називають ***інтерполяційним***. Точки x_i $(i = 0, 1, 2, 3, \dots, n)$ називають ***вузлами інтерполяції***

Будемо шукати інтерполяційний багаточлен у вигляді лінійної комбінації багаточленів степеня n:

$$L_n(x) = y_0 \cdot l_0(x) + y_1 \cdot l_1(x) + \dots + y_n \cdot l_n(x) \tag{1}$$

При цьому вимагатимемо, щоб кожен багаточлен $l_i(x)$ обертався в нуль в усіх вузлах інтерполяції, за винятком одного *i*-го вузла, де він повинен дорівнювати одиниці. Легко перевірити, що цим умовам задовольняється багаточлен наступного вигляду:

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \tag{2}$$

Підставляючи вираз (2) у вираз (1), отримаємо:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \tag{3}$$

Інтерполяційний багаточлен, представлений у вигляді (3), називають

інтерполяційним багаточленом Лагранжа, а функції $l_i(x)$, представлені у вигляді (3), – ***лагранжевими коефіцієнтами***.

Окремі випадки:

Лінійна інтерполяція. За $n=1$ (інтерполюємо за двома точками), отримаємо:

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Квадратична інтерполяція. За $n=2$ (інтерполюємо за трьома точками), отримаємо:

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Зразок виконання завдання

Завдання:

Побудувати інтерполяційний багаточлен Лагранжа $L_n(x)$ для функції $f(x)$, що задана таблицею:

x_i	0	2	3	5
$f(x_i)$	1	3	2	5

Знайти значення функції у заданій точці *x* = 4. Побудувати графік інтерполяційної функції $y = L_n(x)$ за наявним набором точок.

Розв’язування:

У випадку, якщо *n* = 3, то розрахункова формула матиме наступний вигляд:

$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 +$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3.$$

Отже:

$$L_3(x)=1\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)}+3\cdot\frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)}+$$

$$+2\cdot\frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)}+5\cdot\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)}=$$

$$=\frac{x^3-10x^2+31x-30}{-30}+\frac{x^3-8x^2+15x}{2}+\frac{x^3-7x^2+10x}{-3}+\frac{x^3-5x^2+6x}{6}=$$

$$=\frac{3}{10}x^3-\frac{13}{6}x^2+\frac{62}{15}x+1.$$

$$f(4)\approx\frac{3}{10}\cdot 4^3-\frac{13}{6}4^2+\frac{62}{15}\cdot 4+1\approx 2.067.$$

Побудуємо графік інтерполяційної функції $y=L_3(x)$, який представлений на (Рис. 1):

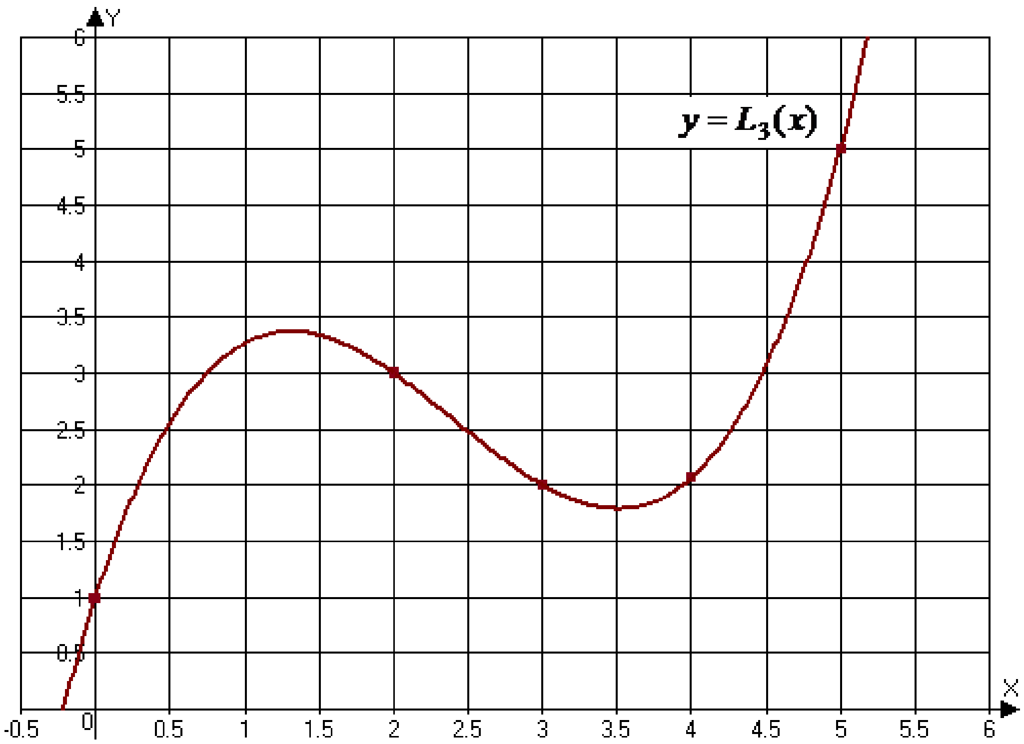


Рис. 1. Графік інтерполяційної функції $y=L_3(x)$

Відповідь: $L_3(x)=\frac{3}{10}x^3-\frac{13}{6}x^2+\frac{62}{15}x+1$, $f(4)\approx 2.067$.

Контрольні питання

1) Сформулюйте задачу апроксимації (наближення) функції.
2) Яке наближення називають точковою апроксимацією?
3) Яке наближення називають неперервною апроксимацією?
4) Яке наближення називають інтегральною апроксимацією?
5) Сформулюйте задачу інтерполяції функції.
6) Наведіть геометричну інтерпретацію задачі інтерполяції.
7) Що таке глобальна інтерполяція?
8) Що таке локальна інтерполяція?
9) Яке наближення називають екстраполяцією?
10) Які точки називають вузлами інтерполяції?
11) Який багаточлен називають інтерполяційним багаточленом Лагранжа?
12) Які багаточлени називають лагранжевими коефіцієнтами?
13) Наведіть формулу інтерполяційного багаточлена Лагранжа.
14) Наведіть формулу інтерполяційного багаточлена Лагранжа для випадку лінійної інтерполяції.
15) Наведіть формулу інтерполяційного багаточлена Лагранжа для випадку квадратичної інтерполяції.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3

Тема: ЧИСЛОВЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Мета: засвоїти основну задачу числового диференціювання. А також, за допомогою інтерполяційних формул Ньютона навчитись обґрунтовувати значення першої та другої похідних для функції $y = f(x)$.

Завдання:

За допомогою інтерполяційних формул Ньютона знайти значення першої та другої похідних за даних значень аргумента для функції $y = f(x)$, що задана таблицею:

Таблиця 1

x_i	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4
y_i	3.526	3.782	3.945	4.043	4.104	4.155
x_i	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4	4.6
y_i	4.222	4.331	4.507	4.775	5.159	5.683

Для ***n* = 1, 3, 5, …, 27, 29**: $x_1 = 2.4 + 0.05\,n$, $x_2 = 4.04 - 0.04\,n$, де ***n* – номер варіанта**.

Таблиця 2

x_i	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y_i	10.517	10.193	9.807	9.387	8.977	8.637
x_i	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0
y_i	8.442	8.482	8.862	9.701	11.132	13.302

Для ***n* = 2, 4, 6, 8, …, 28, 30**: $x_1 = 1.6 + 0.08\,n$, $x_2 = 6.3 - 0.12\,n$, де ***n* – номер варіанта**.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Один із способів розв'язування задачі диференціювання – це використання інтерполяційних багаточленів.

Для виведення формул наближеного диференціювання дану функцію $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ замінюють інтерполяційною функцією $\varphi(x)$ та покладають, що

$$f'(x) = \varphi'(x) \text{ за } a \le x \le b.$$

Аналогічно поступають для знаходження значення похідних функції $y = f(x)$ вищих порядків.

Розглянемо числове диференціювання на основі *інтерполяційної формули Ньютона*, тобто покладемо, що функція $y = f(x)$ задана у вигляді таблиці з постійним кроком $h = x_{i+1} - x_i$.

Запишемо для функції $y = f(x)$ перший інтерполяційний багаточлен Ньютона. Отримаємо:

$$y \approx N_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \dots .$$

Перепишемо, розкриваючи дужки:

$$y \approx N(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24}\Delta^4 y_0 + \dots .$$

Враховуючи правило диференціювання складної функції, отримаємо:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dy}{dq}$$

матимемо наступне співвідношення:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2q^3 - 9q^2 + 11q - 3}{12}\Delta^4 y_0 + \dots\right). \quad (1)$$

Аналогічно, враховуючи, що

$$y''(x) = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{d(y')}{dq},$$

отримаємо:

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2 - 18q + 11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right). \qquad (2).$$

У такий самий спосіб за необхідністю можна розрахувати похідні функції $y = f(x)$ будь-якого порядку.

Проте кожного разу, обчислюючи значення похідної у фіксованій точці x за формулами (1) та (2), в якості x_0 слід обирати найближче зліва вузлове значення аргумента.

Формули (1) та (2) значно спрощуються, якщо шуканим значенням x виявляється один із вузлів таблиці. Оскільки у цьому випадку кожне табличне значення можна вважати за початкове, то, покладаючи $x = x_0$, отримуємо $q = 0$. Тоді формули матимуть наступний вигляд:

$$y'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - \ldots\right),$$

$$y''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \ldots\right).$$

Аналогічно виводяться формули для числового диференціювання на основі другої інтерполяційної формули Ньютона.

Запишемо для функції $f(x)$ другий інтерполяційний багаточлен Ньютона. Отримаємо:

$$y \approx N_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{4!}\Delta^4 y_{n-4} + \ldots$$

Перепишемо цей поліном, розкриваючи дужки:

$$y \approx N(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q^2+q}{2}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q^3+3q^2+2q}{6}\Delta^3 y_{n-3} + \frac{q^4+6q^3+11q^2+6q}{24}\Delta^4 y_{n-4} + \ldots.$$

Враховуючи правило диференціювання складної функції матимемо:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_{n-1} + \frac{2q+1}{2}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{3q^2+6q+2}{6}\Delta^3 y_{n-3} + \frac{2q^3+9q^2+11q+3}{12}\Delta^4 y_{n-4} + \ldots\right). \qquad (3)$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{n-2} + (q+1)\Delta^3 y_{n-3} + \frac{6q^2+18q+11}{12}\Delta^4 y_{n-4} + \ldots\right). \qquad (4)$$

У вузлових точках формули (3) та (4) матимуть вигляд:

$$y'(x_n) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_{n-1} + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2} + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3} + \frac{\Delta^4 y_{n-4}}{4} + \frac{\Delta^5 y_{n-5}}{5} + \ldots\right),$$

$$y''(x_n) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \frac{11}{12}\Delta^4 y_{n-4} + \frac{5}{6}\Delta^5 y_{n-5} + \ldots\right).$$

Зразок виконання завдання

Завдання:

За допомогою інтерполяційних формул Ньютона знайти значення першої та другої похідних для функції $y = f(x)$, що задана таблицею, в точці $x = 0.1$.

Розв'язання:

Складемо для заданої функції таблицю кінцевих різниць:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	0	1.2733	0.5274	0.0325	0.0047	0.0002	0
1	0.1	1.8007	0.5599	0.0372	0.0049	0.0002	
2	0.2	2.3606	0.5971	0.0421	0.0051		
3	0.3	2.9577	0.6392	0.0472			
4	0.4	3.5969	0.6864				
5	0.5	4.2833					

За умовою крок таблиці $h = 0.1$. Шукане значення x співпадає з вузлом таблиці. Тобто табличне значення x_1 можна вважати за початкове: $x_0 = x_1 = 0.1$. Тоді $q = 0$.

Обчислення проводимо за формулами:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_1 - \frac{\Delta^2 y_1}{2} + \frac{\Delta^3 y_1}{3} - \frac{\Delta^4 y_1}{4}\right), y''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_1 - \Delta^3 y_1 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_1\right).$$

Отже

$$y'(0.1) \approx \frac{1}{0.1}\left(0.5599 - \frac{0.0372}{2} + \frac{0.0049}{3} - \frac{0.0002}{4}\right) = 10(0.5599 - 0.0186 +$$

$+0.00163-0.00005)\approx 5.4288$.

$$y''(0.1)\approx\frac{1}{0.1^2}\left(0.0372-0.0049+\frac{11}{12}\cdot 0.0002\right)=100(0.0372-0.0049+$$

$+0.000183)\approx 3.2483$.

Відповідь: $y'(0.1)\approx 5.4288,\ y''(0.1)\approx 3.2483$.

Контрольні питання

1) Сформулюйте задачу числового диференціювання.

2) Назвіть похибки числового диференціювання.

3) Наведіть геометричну інтерпретацію похибки апроксимації похідної.

4) Наведіть формули числового диференціювання на основі першого інтерполяційного багаточлена Ньютона.

5) Наведіть формули числового диференціювання на основі другого інтерполяційного багаточлена Ньютона.

6) Наведіть формули числового диференціювання на основі інтерполяційних багаточленів Ньютона для випадку співпадіння шуканого значення x з одним із вузлів таблиці значень функції.

7) Наведіть формули числового диференціювання для випадку екстраполяції.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

Тема: ЧИСЛОВЕ ІНТЕГРУВАННЯ

Мета: засвоїти основні етапи розв’язку задачі числового інтегрування. А також, ознайомитися із геометричною інтерпретацією методу прямокутників, геометричною інтерпретацією методу Сімпсона та геометричною інтерпретацією методу трапецій.

Завдання:

З точністю до 0.0001 обчислити значення визначених інтегралів:

1) методом прямокутників за умови n = 10;

2) методом Сімпсона за умови n = 8;

3) методом трапецій за умови n = 20.

№1. 1) $\int_{0.8}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$ 2) $\int_{1.2}^{2} \frac{\lg(x+2)}{x}dx$ 3) $\int_{0.32}^{0.66} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2.3}}$

№2. 1) $\int_{1.2}^{2.7} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3.2}}$ 2) $\int_{1.6}^{2.4} (x+1)\sin x dx$ 3) $\int_{0.5}^{2.3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

№3. 1) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1.3}}$ 2) $\int_{0.2}^{1} \frac{tg(x^2)}{x^2+1}dx$ 3) $\int_{0.15}^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1.6}}$

№4. 1) $\int_{0.2}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ 2) $\int_{0.6}^{1.4} \frac{\cos x}{x+1}dx$ 3) $\int_{1.4}^{2.6} \frac{dx}{\sqrt{1.5x^2+0.7}}$

№5. 1) $\int_{0.8}^{1.4} \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$ 2) $\int_{0.4}^{1.2} \sqrt{x}\cos(x^2)dx$ 3) $\int_{1.3}^{2.1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-0.4}}$

№6. 1) $\int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{0.5x+2}}$ 2) $\int_{0.8}^{1.2} \frac{\sin(2x)}{x^2}dx$ 3) $\int_{0.6}^{1.4} \frac{dx}{\sqrt{12x^2+0.5}}$

№7. 1) $\int_{1.4}^{2.1} \frac{dx}{\sqrt{3x-1}}$ 2) $\int_{0.8}^{1.6} \frac{\lg(x^2+1)}{x}dx$ 3) $\int_{1.3}^{2.5} \frac{dx}{\sqrt{0.2x^2+1}}$

№8. 1) $\int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{x+0.5}}$ 2) $\int_{0.4}^{1.2} \frac{\cos x}{x+2}dx$ 3) $\int_{2.1}^{3.6} \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$

№9. 1) $\int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$ 2) $\int_{0.4}^{1.2} (2x+0.5)\sin x dx$ 3) $\int_{1.2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{0.5x^2+1.5}}$

№10. 1) $\int_{0.6}^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$ 2) $\int_{0.4}^{0.8} \frac{tg(x^2+0.5)}{1+2x^2}dx$ 3) $\int_{0.8}^{1.7} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0.3}}$

№11. 1) $\int_{2}^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ 2) $\int_{0.18}^{0.98} \frac{\sin x}{x+1}dx$ 3) $\int_{3.2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{0.5x^2+1}}$

№12. 1) $\int_{0.5}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$ 2) $\int_{0.2}^{1.8} \sqrt{x+1}\cos(x^2)dx$ 3) $\int_{1.4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0.7}}$

№13. 1) $\int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{0.5x+2}}$ 2) $\int_{1.4}^{3} x^2 \lg x dx$ 3) $\int_{1.2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1.2}}$

№14. 1) $\int_{1.4}^{2.2} \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ 2) $\int_{1.4}^{2.2} \frac{\lg(x^2+2)}{x+1}dx$ 3) $\int_{0.6}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0.8}}$

№15. 1) $\int_{0.8}^{1.8} \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$ 2) $\int_{0.4}^{1.2} \frac{\cos(x^2)}{x+1}dx$ 3) $\int_{1.6}^{2.2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2.5}}$

№16. 1) $\int_{1.6}^{2.2} \frac{dx}{\sqrt{x+2.5}}$ 2) $\int_{1.3}^{2.1} (x^2+1)\sin(x-0.5)dx$ 3) $\int_{0.8}^{1.8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

№17. 1) $\int_{3.2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{0.5x+1}}$ 2) $\int_{0.6}^{1.4} x^2 \cos x dx$ 3) $\int_{1.4}^{2.2} \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$

№18. 1) $\int_{1.2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{0.5x+1.5}}$ 2) $\int_{1.2}^{2} \frac{\lg(x^2+3)}{2x}dx$ 3) $\int_{1.2}^{2.6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0.6}}$

№19. 1) $\int\limits_{1.3}^{2.5} \frac{dx}{\sqrt{0.2x+1}}$ 2) $\int\limits_{2.5}^{3.3} \frac{\lg(x^2+0.8)}{x-1}dx$ 3) $\int\limits_{0.5}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$

№20. 1) $\int\limits_{0.15}^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{2x+1.6}}$ 2) $\int\limits_{0.5}^{1.2} \frac{tg(x^2)}{x+1}dx$ 3) $\int\limits_{2}^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

№21. 1) $\int\limits_{0.6}^{1.4} \frac{dx}{\sqrt{12x+0.5}}$ 2) $\int\limits_{1.3}^{2.1} \frac{\sin(x^2-1)}{2\sqrt{x}}dx$ 3) $\int\limits_{0.6}^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$

№22. 1) $\int\limits_{1.3}^{2.1} \frac{dx}{\sqrt{3x-0.4}}$ 2) $\int\limits_{0.2}^{1} (x+1)\cos(x^2)dx$ 3) $\int\limits_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$

№23. 1) $\int\limits_{1.4}^{2.6} \frac{dx}{\sqrt{1.5x+0.2}}$ 2) $\int\limits_{0.8}^{1.2} \frac{\sin(x^2-0.4)}{x+2}dx$ 3) $\int\limits_{1.2}^{2.4} \frac{dx}{\sqrt{0.5+x^2}}$

№24. 1) $\int\limits_{0.5}^{2.3} \frac{dx}{\sqrt{0.5x+4}}$ 2) $\int\limits_{0.15}^{0.63} \sqrt{x+1}\lg(x+3)dx$ 3) $\int\limits_{1.4}^{2.1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$

№25. 1) $\int\limits_{0.6}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{x+0.8}}$ 2) $\int\limits_{1.2}^{2.8} \frac{\lg(x^2+1)}{2x-1}dx$ 3) $\int\limits_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{2+0.5x^2}}$

№26. 1) $\int\limits_{1.2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x+1.2}}$ 2) $\int\limits_{0.6}^{0.72} (\sqrt{x}+1)tg2xdx$ 3) $\int\limits_{0.8}^{1.4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$

№27. 1) $\int\limits_{2.1}^{3.6} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$ 2) $\int\limits_{0.8}^{1.2} \frac{\cos x}{x^2+1}dx$ 3) $\int\limits_{0.2}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

№28. 1) $\int\limits_{0.5}^{2.3} \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$ 2) $\int\limits_{1.2}^{2.8} (\frac{x}{2}+1)\sin\frac{x}{2}dx$ 3) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1.3}}$

№29. 1) $\int\limits_{0.32}^{0.66} \frac{dx}{\sqrt{x+2.5}}$ 2) $\int\limits_{0.8}^{1.6} \frac{\lg(x^2+1)}{x+1}dx$ 3) $\int\limits_{1.2}^{2.7} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3.2}}$

№30. 1) $\int\limits_{0.32}^{0.66} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2.3}}$ 2) $\int\limits_{1.6}^{3.2} \frac{x}{2}\lg(\frac{x^2}{2})dx$ 3) $\int\limits_{0.8}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана функція $y = f(x)$. За допомогою точок x_0, x_1, …, x_n розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n елементарних відрізків $[x_{i-1};x_i]$ ($i = 1,2,...n$), причому $x_0 = a$, $x_n = b$. Слід відмітити, що на кожному з цих відрізків виберемо довільну точку ξ_i $(x_{i-1} \le \xi \le x_i)$. На Рис. 2 представлено геометричну інтерполяцію методом прямокутників.

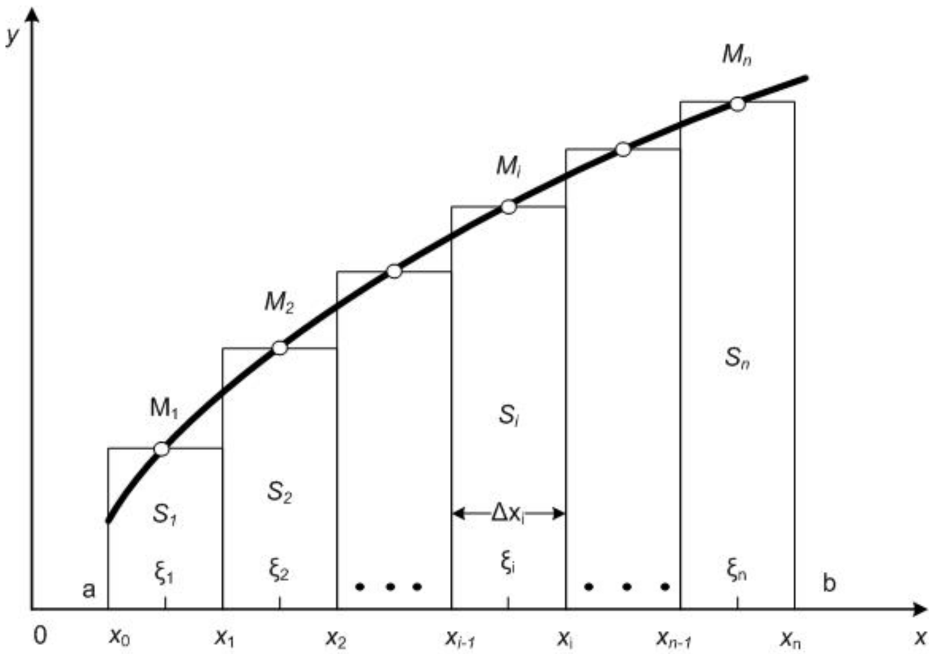


Рис. 2. Геометрична інтерпретація методу прямокутників

Знайдемо добутки s_i значення функції в цій точці $f(\xi_i)$ на довжину елементарного відрізка, отримаємо: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$:

$$s_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i. \tag{1}$$

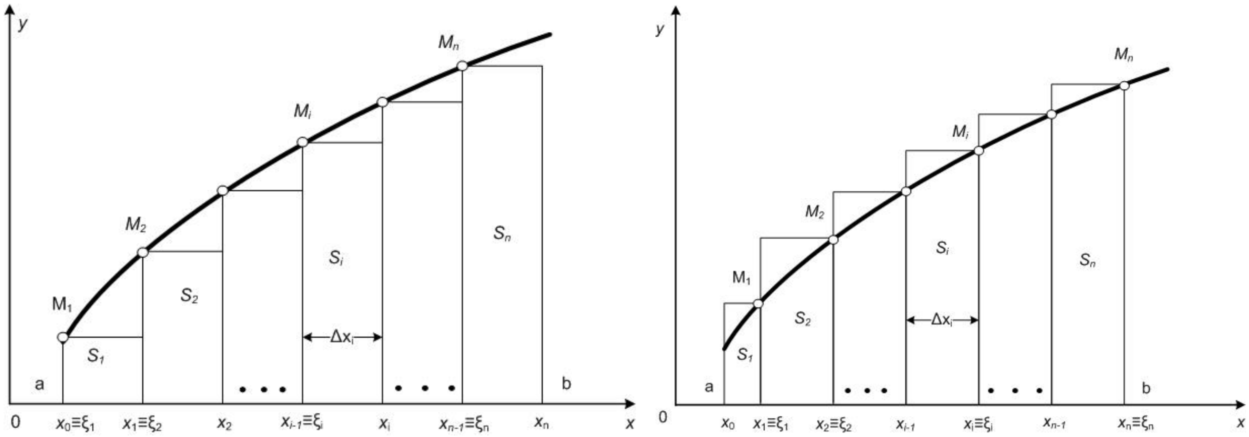
Складемо суму всіх таких добутків:

$$S_n = s_1 + s_2 + ... + s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \tag{2}$$

Суму S_n називають ***інтегральною сумою.***

Метод прямокутників

Метод прямокутників використовує заміну визначеного інтеграла інтегральною сумою (2). В якості точок ξ_i можуть обиратися ліві $(\xi_i = x_{i-1})$ чи праві $(\xi_i = x_i)$ межі елементарних відрізків (Рис. 3).



а б

Рис. 3. Геометрична інтерпретація, де:

а) методу лівих прямокутників; б) методу правих прямокутників

Позначивши $f(x_i) = y_i$, $\Delta x_i = h_i$, отримуємо *формули методу прямокутників.*

Формула лівих прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx = h_1 y_0 + h_2 y_1 + \ldots + h_n y_{n-1}.$$

Формула правих прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx = h_1 y_1 + h_2 y_2 + \ldots + h_n y_n.$$

Проте, більш точним є вигляд формули прямокутників, що використовує значення функції в середніх точках елементарних відрізків.

Формула середніх прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} h_i f\left(x_i + \frac{h_i}{2}\right).$$

Важливим окремим випадком розглянутих формул є їхнє застосування під час числового інтегрування з постійним кроком, отримаємо:

$$h_i = h = \frac{b-a}{n}, \ (i = 1, 2, ..., n).$$

У такому випадку формули прямокутників спрощуються.

Формула лівих прямокутників: $\int\limits_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$

Формула правих прямокутників: $\int\limits_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} y_i$.

Формула середніх прямокутників: $\int\limits_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$.

Метод Сімпсона

Метод Сімпсона використовує квадратичну інтерполяцію. Відрізок інтегрування $[a;b]$ розбивається на парне число n рівних частин із кроком h. На кожному відрізку $[x_0;x_2]$, $[x_2;x_4]$, …, $[x_{n-2};x_n]$ підінтегральну функцію $y = f(x)$ замінюють інтерполяційним багаточленом $\varphi(x)$ другого степеня (наприклад, багаточленом Лагранжа). Геометрично – замінюють параболою, що проходить через наступні точки $M_{i-1}(x_{i-1};y_{i-1})$, $M_i(x_i;y_i)$ та $M_{i+1}(x_{i+1};y_{i+1})$, $(i = 1, 3, 5, ..., n-1)$.

На Рис. 4 представлено геометричну інтерпретацію методу Сімпсона.

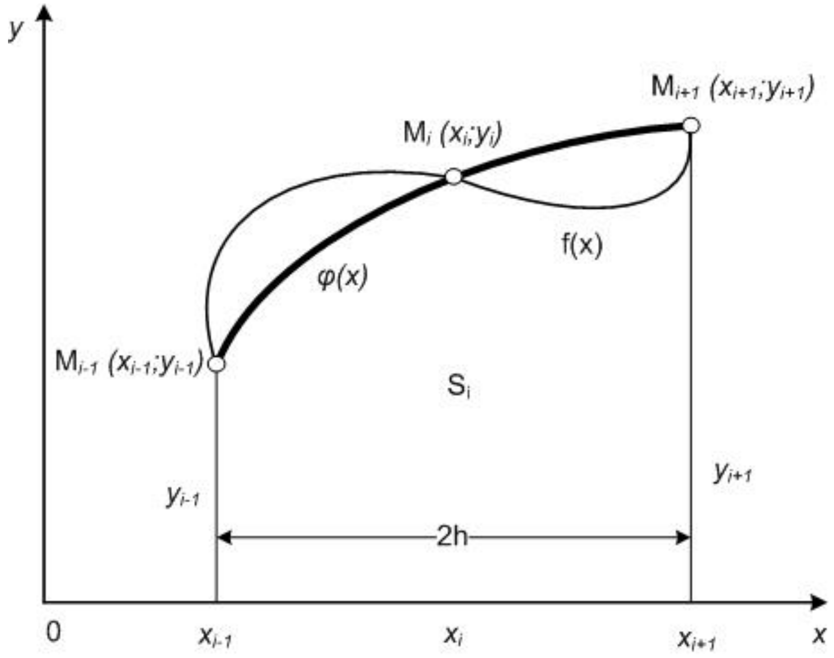


Рис. 4. Геометрична інтерпретація методу Сімпсона

На відрізку $[x_0;x_2]$ елементарна площа s_1 може бути обчислена за допомогою визначеного інтеграла, отримаємо:

$$s_1 = \int_{x_0}^{x_2} \varphi_1(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right).$$

Враховуючи, що n – парне, провівши такі ж самі обчислення для кожного елементарного відрізка $[x_{i-1};\, x_{i+1}]$, $(i = 1, 3, 5, ..., n-1)$ та додавши отримані вирази матимемо:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + ... + y_{n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + y_6 + ... + y_{n-2}\right) + y_n\right].$$

Цю формулу називають ***формулою Сімпсона***.

Метод трапецій

Метод трапецій використовує лінійну інтерполяцію. Геометрично графік функції $y = f(x)$ представляється у вигляді ламаної, що з'єднує точки $M_i\left(x_i;y_i\right)$, $\left(i = 0, 1, 2, ..., n\right)$. На Рис. 5 представлено геометричну інтерпретацію методу трапецій.

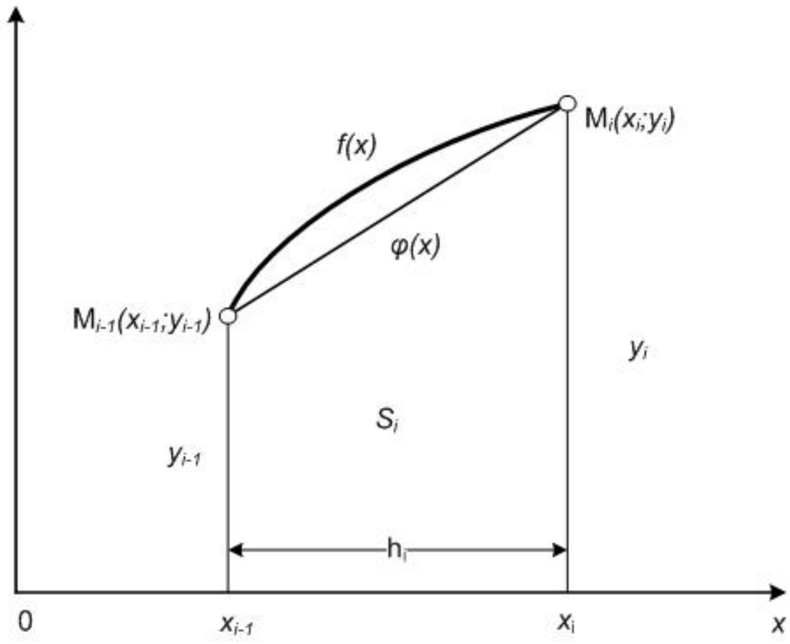


Рис. 5. Геометрична інтерпретація методу трапецій

В цьому випадку площа всієї фігури (криволінійної трапеції) складається з площ елементарних прямолінійних трапецій.

Площа кожної такої трапеції дорівнює добутку півсуми основ на висоту, отримаємо:

$$s_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} h_i, \; i = 1, 2, ..., n.$$

Додавши отримані вирази, отримуємо ***формулу трапецій*** для числового інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i (y_{i-1} + y_i).$$

Важливим частковим випадком розглянутих формул є їхнє застосування для числового інтегрування з постійним кроком, отримаємо наступне математичне співвідношення: $h_i = h = \dfrac{b-a}{n}, \; (i = 1, 2, ..., n)$.

Формула трапецій в цьому випадку приймає наступний вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right).$$

Зразок виконання завдання

Завдання:

1) з точністю до 0.0001 обчислити значення визначеного інтегралу $\int_{1.5}^{2.3} \sqrt{0.3x + 1.2}dx$ за формулами лівих, правих та середніх прямокутників із-за умови, якщо n = 10.

Розв'язання:

Для обчислення інтегралу методом прямокутників за умови $n = 10$ розіб'ємо відрізок інтегрування $[1.5; 2.3]$ на 10 рівних частин з кроком $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2.3-1.5}{10} = 0.08$.

Складемо таблицю значень підінтегральної функції в точках ділення відрізка:

i	x_i	$\sqrt{0.3x_i + 1.2} = y_i$
0	1.5	1.2845
1	1.58	1.2938
2	1.66	1.3031
3	1.74	1.3122
4	1.82	1.3214
5	1.90	1.3304
6	1.98	1.3394
7	2.06	1.3483
8	2.14	1.3572
9	2.22	1.3660
10	2.30	1.3748

За формулою лівих прямокутників, отримаємо: $\int\limits_a^b f(x)dx = h\sum\limits_{i=0}^{9} y_i$.

Отже

$$\int\limits_{1.5}^{2.3} \sqrt{0.3x+1.2}dx \approx 0.08(1.2845+1.2938+1.3031+1.3122+1.3214+1.3304+1.3394+$$

$$+1.3483+1.3572+1.3660) \approx 0.08 \cdot 13.2563 \approx 1.060504.$$

За формулою правих прямокутників, отримаємо: $\int\limits_a^b f(x)dx = h\sum\limits_{i=1}^{10} y_i$.

Отже

$$\int\limits_{1.5}^{2.3} \sqrt{0.3x+1.2}dx \approx 0.08(1.2938+1.3031+1.3122+1.3214+1.3304+1.3394+1.3483+$$

$$+1.3572+1.3660+1.3748) \approx 0.08 \cdot 13.3466 \approx 1.067728$$

Складемо таблицю значень підінтегральної функції у середніх точках відрізків ділення, отримаємо:

i	$x_i+\frac{h}{2}$	$y_i = f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$
0	1.54	1.2892
1	1.62	1.2985
2	1.70	1.3077
3	1.78	1.3168
4	1.86	1.3259
5	1.94	1.3349
6	2.02	1.3439
7	2.10	1.3528
8	2.18	1.3616
9	2.26	1.3704

За формулою середніх прямокутників, отримаємо: $\int\limits_a^b f(x)dx = h\sum\limits_{i=0}^{9} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right).$

Отже

$$\int\limits_{1.5}^{2.3} \sqrt{0.3x+1.2}dx \approx 0.08(1.2892+1.2985+1.3077+1.3168+1.3259+1.3349+1.3439+$$

$$+1.3528+1.3616+1.3704) \approx 0.08 \cdot 13.3017 \approx 1.064136.$$

Відповідь: $\int\limits_{1.5}^{2.3} \sqrt{0.3x+1.2}dx \approx 1.0605$ (за формулою лівих прямокутників),

$\int\limits_{1.5}^{2.3} \sqrt{0.3x+1.2}dx \approx 1.0677$ (за формулою правих прямокутників),

$\int\limits_{1.5}^{2.3} \sqrt{0.3x+1.2}dx \approx 1.0641$ (за формулою середніх прямокутників).

2) з точністю до 0.0001 обчислити значення визначеного інтегралу $\int\limits_{1.2}^{1.6} \frac{\sin(2x-2.1)}{x^2+1}dx$ методом Сімпсона за умови n = 8.

Розв'язання:

Для обчислення інтеграла методом Сімпсона за умови $n=8$ розіб'ємо відрізок інтегрування $[1.2; 1.6]$ на 8 рівних частин з кроком $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1.6-1.2}{8} = 0.05$.

Після чого складемо таблицю значень підінтегральної функції у точках ділення відрізка. Отримаємо:

i	x_i	y_0, y_8	y_1, y_3, y_5, y_7	y_2, y_4, y_6
0	1.20	0.1211		

1	1.25		0.1520	
2	1.30			0.1782
3	1.35		0.2000	
4	1.40			0.2176
5	1.45		0.2312	
6	1.50			0.2410
7	1.55		0.2473	
8	1.60	0.2503		
$\sum$		0.3713	0.8305	0.6368

Обчислення проводитимемо за наступною формулою, отримаємо:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + y_7\right) + 2\left(y_2 + y_4 + y_6\right) + y_8\right].$$

Отже:

$$\int_{1.2}^{1.6} \frac{\sin\left(2x - 2.1\right)}{x^2 + 1} dx \approx \frac{0.05}{3}\left(0.3714 + 4 \cdot 0.8305 + 2 \cdot 0.6368\right) \approx \frac{0.05}{3} \cdot 4.9670 \approx 0.08278$$

Відповідь: $\int_{1.2}^{1.6} \frac{\sin\left(2x - 2.1\right)}{x^2 + 1} dx \approx 0.0828$.

3) з точністю до 0.0001 обчислити значення визначеного інтегралу $\int_{0.7}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0.3}}$ методом трапецій за умови $n = 20$.

Розв'язання:

Для обчислення інтеграла методом трапецій за умови $n = 20$ розіб'ємо відрізок інтегрування $\left[0.7; 1.3\right]$ на 20 рівних частин з кроком $h = \frac{b - a}{n} = \frac{1.3 - 0.7}{20} = 0.03$.

Після чого складемо таблицю значень підінтегральної функції у точках ділення відрізка. Отримаємо:

i	x_i	y_i		i	x_i	y_i
0	0.7	0.88386		11	1.03	0.64259
1	0.73	0.85572		12	1.06	0.62657
2	0.76	0.82898		13	1.09	0.61140
3	0.79	0.80366		14	1.12	0.59669
4	0.82	0.77973		15	1.15	0.58272
5	0.85	0.75700		16	1.18	0.56935
6	0.88	0.73546		17	1.21	0.55658
7	0.91	0.71501		18	1.24	0.54431
8	0.94	0.69551		19	1.27	0.53253
9	0.97	0.67700		20	1.30	0.52129
10	1.00	0.65937				

Обчислення проводитимемо за наступною формулою. Отримаємо:

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0 + y_{20}}{2} + \sum_{i=1}^{19} y_i\right).$$

Отже

$$\int_{0.7}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0.3}} \approx 0.03\left(\frac{0.88386 + 0.52129}{2} + 12.77022\right) \approx 0.40418.$$

Відповідь: $\int_{0.7}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0.3}} \approx 0.4042$.

Контрольні питання

1) Що називають визначеним інтегралом від функції $f(x)$?

2) Дайте визначення: «геометрична інтерпретація», «визначений інтеграл». Відповідь обґрунтуйте.

3) Яку фігуру називають криволінійною трапецією?

4) Сформулюйте основну задачу числового інтегрування.

5) Представте геометричну інтерпретацію методу лівих прямокутників.

6) Представте геометричну інтерпретацію методу правих прямокутників.

7) Представте геометричну інтерпретацію методу середніх прямокутників.

8) Наведіть формулу лівих прямокутників для числового інтегрування.

9) Наведіть формулу правих прямокутників для числового інтегрування.

10) Наведіть формулу середніх прямокутників для числового інтегрування.

11) Представте геометричну інтерпретацію методу трапецій.

12) Наведіть формулу трапецій для числового інтегрування.

13) Представте геометричну інтерпретацію методу Сімпсона.

14) Наведіть формулу Сімпсона для числового інтегрування.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5

Тема: НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Мета: навчитися обґрунтовувати задачу числового розв’язування нелінійних рівнянь, а також засвоїти етапи відокремлення коренів нелінійного рівняння. Ознайомитися з геометричною інтерпретацією методу бісекції та геометричною інтерпретацією методу Ньютона (дотичних).

Завдання:

Розв’язати нелінійне алгебраїчне рівняння *f(x)* = 0 з точністю до 0.0001. Відокремлення коренів виконати аналітично. Уточнення коренів провести методом Ньютона (дотичних) та методом бісекції.

Вар.	***Рівняння***	***Вар.***	***Рівняння***
1	$9x^4 + 8x^3 + 1.5x^2 + 2x - 10 = 0$	2	$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$
3	$6x^4 + 4x^3 + x^2 + x - 10 = 0$	4	$x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0$
5	$4.5x^4 - 4x^3 + 1.5x^2 - 2x - 7 = 0$	6	$6x^4 + 8x^3 - 24x^2 - 7 = 0$
7	$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x - 5 = 0$	8	$x^4 - 12x^3 - 9 = 0$
9	$6x^4 + 4x^3 - x^2 - x - 10 = 0$	10	$x^4 - 108x + 7 = 0$
11	$3x^4 + 2x^3 + x^2 + x - 5 = 0$	12	$9x^4 + 12x^3 - 36x^2 - 2 = 0$
13	$3x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x - 5 = 0$	14	$3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x - 1 = 0$
15	$3x^4 - 10x^3 + x^2 - 5x - 3 = 0$	16	$2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 6x + 5 = 0$
17	$4x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 3x - 9 = 0$	18	$2x^4 - 8x^3 - 16x^2 - 1 = 0$
19	$3x^4 - x^3 + 10x^2 - 5x - 3 = 0$	20	$4x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 9x - 1 = 0$
21	$3x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$	22	$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x - 3 = 0$
23	$2x^4 + 4x^3 + x^2 + 3x - 6 = 0$	24	$3x^4 - 2x^3 - x^2 + x - 4 = 0$
25	$6x^4 - 4x^3 - x^2 + x - 7 = 0$	26	$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 1 = 0$

27	$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = 0$	28	$3x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$
29	$2x^4 + 4x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$	30	$x^4 - 4x - 1 = 0$

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Найчастіше для розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь вигляду $f(x) = 0$ (де $f(x)$ – деяка неперервна нелінійна функція) застосовують ітераційні методи, т. б. методи послідовних наближень.

Алгоритм знаходження коренів рівняння складається з двох етапів:

а) *відокремлення* коренів, т. б. знаходження наближеного значення кореня або відрізка, що містить його;

б) *уточнення* наближеного розв'язку із деякою заданою мірою точності.

Наближене значення кореня (початкове наближення) може бути знайдене у різний спосіб: з фізичних міркувань, з розв'язування аналогічної задачі за інших вихідних даних, за допомогою графічних методів. Якщо такі оцінки початкового наближення провести не вдається, то знаходять якомога малий проміжок [a ; b], на кінцях якого неперервна функція $f(x)$ приймає значення різних знаків, т. б. $f(a)f(b) < 0$. У цьому випадку між точками a і b існує принаймні одна точка, в якій $f(x) = 0$.

Ітераційний процес полягає у послідовному уточненні початкового наближення.

Метод бісекції

Нехай задано неперервну функцію $f(x)$ і необхідно знайти корінь рівняння $f(x) = 0$.

Припустимо, що нам вдалося знайти відрізок $[a;b]$, в якому розташоване шукане значення кореня. В якості початкового наближення кореня x_0 приймаємо середину цього відрізка, т. б. $x_0 = (a+b)/2$. Далі досліджуємо значення функції $f(x)$ на кінцях відрізків $[a, x_0]$ та $[x_0, b]$, т. б. у точках $a,\ x_0, b$. Той з них, на кінцях якого $f(x)$ приймає значення різних знаків, містить шуканий корінь. Тому його приймаємо в якості нового відрізка. Другу половину $[a;b]$, на якій знак $f(x)$ не змінюється, відкидаємо. У якості першої ітерації кореня x_1 приймаємо середину нового відрізка й проводимо ті ж міркування.

Загальна *формула методу бісекції* має наступний вигляд, отримаємо:

$$x_n = (a_n + b_n) / 2 .$$

Ітераційний процес продовжуємо до тих пір, поки не буде отримано відрізок $[a_n;\ b_n]$ такий, що $|b_n - a_n| \le 2\varepsilon$. За наближене значення кореня беруть середину цього відрізка: $\xi \approx (a_n+b_n)/2$. Або ж до тих пір, поки значення функції $f(x)$ після *n*-тої ітерації не стане меншим за модулем заданого малого числа ε, т. б. $|f(x_n)| < \varepsilon$.

Метод бісекції – надійний, але порівняно повільний метод: після кожної ітерації відрізок, на якому розташований корінь, зменшується у двічі, тобто після n ітерацій він скорочується в 2^n рази. Однак, він завжди збіжний, тобто при використанні методу бісекції розв’язок отримується завжди.

Метод Ньютона (метод дотичних)

Нехай нам вдалося відокремити відрізок $[a;b]$, в якому розташоване шукане значення кореня рівняння $f(x)=0$. За початкове наближення x_0 обираємо точку $B(b;\ f(b))$. Проводимо у цій точці дотичну до кривої $y = f(x)$ (Рис. 6), що задається рівнянням

$$y - f(b) = f'(b)(x - b) .$$

Перше наближенням кореня x_1 знаходимо як абсцису точки перетину цієї дотичної з віссю *Ox*. Для цього потрібно підставити у рівняння дотичної $y = 0$, $x = x_1$. Отримаємо:

$$-f(b) = f'(b)(x_1 - b) .$$

Звідки:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Очевидно, що тепер корінь ξ знаходиться на відрізку $[a;\, x_1]$. Проводимо наступну дотичну у точці $B_1(x_1;\, f(x_1))$ і друге наближення кореня x_2 знаходимо як абсцису точки перетину цієї дотичної з віссю *Ox*. Отримаємо:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Аналогічно знаходимо й наступні наближення кореня.

Загальна *формула методу дотичних* має наступний вигляд:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

У якості критерію закінчення ітераційного процесу може бути використана умова:

$$\left|f(x_n)\right| < \varepsilon.$$

Можна також оцінювати близькість двох послідовних наближень:

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon.$$

Послідовні наближення $x_0 = b, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ утворюють обмежену монотонно спадаючу послідовність, причому $a < \xi < \ldots < x_{n+1} < x_n < \ldots < x_1 < x_0$, тобто виходять наближені значення кореня ξ із надлишком.

Слід відмітити, що якщо перша дотична проводиться до кривої $y = f(x)$ у точці $A_0(a;\, f(a))$, то отримаємо послідовні наближення $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, які утворюють обмежену монотонно зростаючу послідовність, причому $x_0 < x_1, < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < \xi < b$, тобто виходять наближені значення кореня ξ із нестачею.

На Рис. 6 представлено геометричну інтерпретацію методу Ньютона.

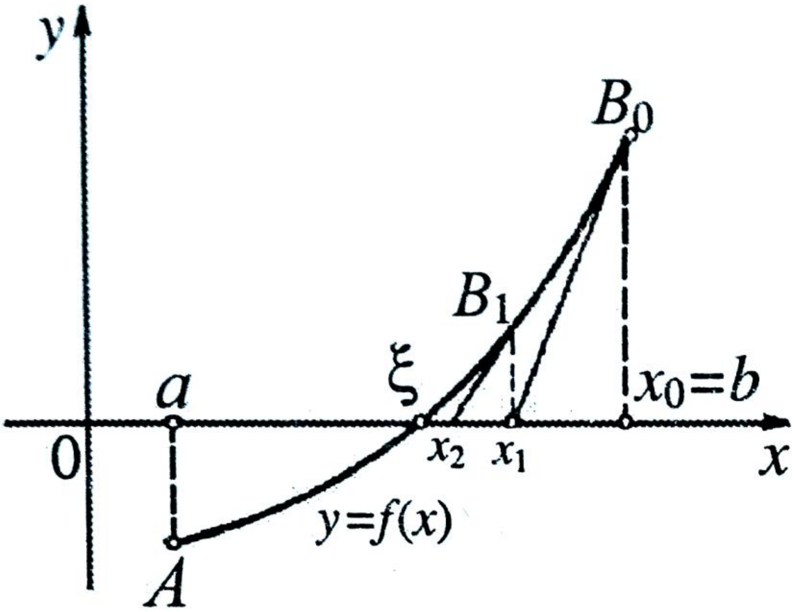


Рис. 6. Геометрична інтерпретація методу Ньютона

Для того, щоб визначити, до якого з кінців відрізка $[a, b]$ проводити першу дотичну, треба скористатися одним з наступних правил:

- у методі Ньютона першу дотичну проводять до того кінця відрізка $[a;b]$, для якого знак функції співпадає зі знаком другої похідної, тобто за початкове наближення беремо точку *a*, якщо $f(a)\cdot f''(x)>0$; за початкове наближення беремо точку *b*, якщо $f(b)\cdot f''(x)>0$;

- якщо в інтервалі $[a;b]$ знаки першої і другої похідних функції *f (x)* співпадають, тобто для всіх $x\in[a;b]$ справедлива нерівність $f'(x)\cdot f''(x)>0$, то першу дотичну у методі Ньютона слід проводити в правому кінці відрізка $[a;b]$; якщо знаки похідних різні, тобто для всіх $x\in[a;b]$ виконується нерівність $f'(x)\cdot f''(x)<0$, то перша дотична проводиться у лівому кінці.

Зразок виконання завдання

Завдання:

Розв'язати нелінійне алгебраїчне рівняння $x^4-x^3-2x^2+3x-3=0$ з точністю до 0.01.

Розв'язання:

1) Відокремлення коренів рівняння проводимо аналітично.

Позначимо $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3$

Знаходимо похідну $f'(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 4x + 3$$

Знаходимо корені похідної $f'(x) = 0$:

$$4x^3 - 3x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$4x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1) = 0$$
$$(x^2 - 1)(4x - 3) = 0$$
$$x_1 = -1; \qquad x_2 = 1; \qquad x_3 = 3/4$$

Складаємо таблицю знаків функції $f(x)$, покладаючи x рівним кореням похідної (критичним значенням функції) та граничним значенням області визначення. Отримаємо:

x	$-\infty$	-1	$3/4$	1	$+\infty$
$sign\, f(x)$	+	–	–	–	+

Оскільки відбуваються дві зміни знаків, то робимо висновок, що рівняння має два дійсних кореня. Отримаємо:

$$x_1 \in (-\infty;\ -1],\ x_2 \in [1,\ +\infty)$$

Після чого зменшимо проміжки, в яких знаходяться корені. Отримаємо:

x	-2	-1	1	2
$sign\, f(x)$	+	–	–	+

Отже, маємо

$$x_1 \in [-2; -1],\ x_2 \in [1; 2].$$

2) Корінь $x_1 \in [-2; -1]$ уточнимо методом Ньютона.

За початкове наближення кореня беремо лівий кінець відрізка [-2; -1], оскільки в точці -2 знак функції співпадає зі знаком другої похідної.

Обчислення проводимо за формулою $x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) / f'(x_{n-1})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ й заносимо до таблиці. Отримаємо:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	-2	7	-33	
1	-1.787879	1.1759957	-22.29791	0.21212121
2	-1.735139	0.061515	-19.987533	0.05274018
3	-1.732061	0.0002012	-19.856836	0.00307767

Оскільки $\lvert x_3 - x_2 \rvert = 0.0030777 < \varepsilon$, а також $\lvert f(x_3) \rvert = 0.0002012 < \varepsilon$, то ітераційний процес зупиняємо. Можемо прийняти $x_1 \approx -1.73$.

Методом бісекції уточнимо другий корінь $x_2 \in [1;2]$.

Обчислення проводимо за наступною формулою: $x_n = (a_n + b_n) / 2$ і заносимо дані до таблиці. Отримаємо:

n	a_n^-	b_n^+	$x_n = (a_n + b_n)/2$	$f(x_n)$	$\lvert a_n - b_n \rvert$
0	1	2	1.5	-1.3125<0	1
1	1.5	2	1.75	0.144531>0	0.5
2	1.5	1.75	1.625	-0.72437<0	0.25
3	1.625	1.75	1.6875	-0.32909<0	0.125
4	1.6875	1.75	1.71875	-0.1026<0	0.0625
5	1.71875	1.75	1.734375	0.018318>0	0.03125
6	1.71875	1.734375	1.726563	-0.04279<0	0.015625

Оскільки $\lvert a_6 - b_6 \rvert = \lvert 1.71875 - 1.734375 \rvert = 0.015625 < 2\varepsilon$, то ітераційний процес зупиняємо. За наближене значення кореня можемо прийняти середину відокремленого проміжку, отримаємо:

$$x_2 \approx \frac{1}{2}(1.71875 + 1.734375) \approx 1.7265625 \approx 1.73.$$

Відповідь: $x_1 \approx -1.73$, $x_2 \approx 1.73$.

Контрольні питання

1) Сформулюйте основну задачу числового розв'язування нелінійних рівнянь.

2) Наведіть алгоритм числового розв'язування нелінійного рівняння.

3) У чому полягає етап відокремлення коренів нелінійного рівняння?

4) У чому полягає етап уточнення коренів нелінійного рівняння?

5) Наведіть умови відокремлення коренів нелінійного рівняння.

6) Назвіть відомі вам методи відокремлення коренів нелінійного рівняння.

7) Назвіть відомі вам методи уточнення коренів нелінійного рівняння.

8) Наведіть алгоритм уточнення коренів нелінійного рівняння методом бісекції.

9) Представте геометричну інтерпретацію методу бісекції.

10) Наведіть розрахункову формулу методу бісекції.

11) Наведіть критерій зупинки ітераційного процесу методу бісекції.

12) Наведіть алгоритм уточнення коренів нелінійного рівняння методом Ньютона (дотичних).

13) Представте геометричну інтерпретацію методу Ньютона (дотичних).

14) Наведіть розрахункову формулу методу Ньютона (дотичних).

15) Наведіть критерій зупинки ітераційного процесу методу Ньютона (дотичних).

16) Наведіть правила вибору початкового наближення методу Ньютона (дотичних).

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №6

Тема: ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ. ЗАДАЧА КОШІ

Мета: засвоїти основні аспекти та алгоритм знаходження розв'язку задачі Коші для звичайного диференційного рівняння, навчитися будувати екстраполяційну залежність (ламану) Ейлера.

Завдання:

З точністю до 0.0001 скласти розв'язок задачі Коші для звичайного диференційного рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ на відрізку $[a, b]$ з кроком h = 0.1 за початкових умов $y(x_0) = y_0$: а) методом Ейлера; б) методом Ейлера-Коші. Побудувати ламану Ейлера для знайденого розв'язку.

Вар.	$y' = f(x, y)$	$y(x_0) = y_0$	$[a;b]$
1	а) $y' = x + \cos(y/\sqrt{5})$	y(1.8)=2.6	[1.8;2.8]
	б) $y' = x + \sin(y/3)$	y(1.6)=4.6	[1.6;2.6]
2	а) $y' = x + \cos(y/3)$	y(1.6)=4.6	[1.6;2.6]
	б) $y' = x + \sin(y/\sqrt{5})$	y(1.8)=2.6	[1.8;2.8]
3	а) $y' = x + \cos(y/\sqrt{10})$	y(0.6)=0.8	[0.6;1.6]
	б) $y' = x + \sin(y/2.8)$	y(1.4)=2.2	[1.4;2.4]
4	а) $y' = x + \cos(y/\sqrt{7})$	y(0.5)=0.6	[0.5;1.5]
	б) $y' = x + \cos(y/\pi)$	y(1.7)=5.3	[1.7;2.7]
5	а) $y' = x + \cos(y/\pi)$	y(1.7)=5.3	[1.7;2.7]
	б) $y' = x + \cos(y/\sqrt{7})$	y(0.5)=0.6	[0.5;1.5]
6	а) $y' = x + \cos(y/2.25)$	y(1.4)=2.2	[1.4;2.4]
	б) $y' = x + \sin(y/\sqrt{10})$	y(0.6)=0.8	[0.6;1.6]
7	а) $y' = x + \cos(y/e)$	y(1.4)=2.5	[1.4;2.4]

	б) $y' = x + \sin(y/\sqrt{7})$	y(0.5)=0.6	[0.5;1.5]
8	а) $y' = x + \cos(y/\sqrt{2})$	y(0.8)=1.4	[0.8;1.8]
	б) $y' = x + \sin(y/\pi)$	y(1.7)=5.3	[1.7;2.7]
9	а) $y' = x + \cos(y/\sqrt{3})$	y(1.2)=2.1	[1.2;2.2]
	б) $y' = x + \sin(y/\sqrt{2})$	y(0.8)=1.3	[0.8;1.8]
10	а) $y' = x + \cos(y/\sqrt{11})$	y(2.1)=2.5	[2.1;3.1]
	б) $y' = x + \sin(y/e)$	y(1.4)=2.5	[1.4;2.4]
11	а) $y' = x + \sin(y/\sqrt{5})$	y(1.8)=2.6	[1.8;2.8]
	б) $y' = x + \cos(y/3)$	y(1.6)=4.6	[1.6;2.6]
12	а) $y' = x + \sin(y/3)$	y(1.6)=4.6	[1.6;2.6]
	б) $y' = x + \cos(y/\sqrt{5})$	y(1.8)=2.6	[1.8;2.8]
13	а) $y' = x + \sin(y/\sqrt{10})$	y(0.6)=0.8	[0.6;1.6]
	б) $y' = x + \cos(y/2.25)$	y(1.4)=2.2	[1.4;2.4]
14	а) $y' = x + \sin(y/\sqrt{7})$	y(0.5)=0.6	[0.5;1.5]
	б) $y' = x + \cos(y/e)$	y(1.4)=2.5	[1.4;2.4]
15	а) $y' = x + \sin(y/\pi)$	y(1.7)=5.3	[1.7;2.7]
	б) $y' = x + \cos(y/\sqrt{2})$	y(0.8)=1.4	[0.8;1.8]
16	а) $y' = x + \sin(y/2.8)$	y(1.4)=2.2	[1.4;2.4]
	б) $y' = x + \cos(y/\sqrt{10})$	y(0.6)=0.8	[0.6;1.6]
17	а) $y' = x + \sin(y/e)$	y(1.4)=2.5	[1.4;2.4]
	б) $y' = x + \cos(y/\sqrt{11})$	y(2.1)=2.5	[2.1;3.1]
18	а) $y' = x + \sin(y/\sqrt{2})$	y(0.8)=1.3	[0.8;1.8]
	б) $y' = x + \cos(y/\sqrt{3})$	y(1.2)=2.1	[1.2;2.2]
19	а) $y' = x + \sin(y/\sqrt{3})$	y(1.1)=1.5	[1.1;2.1]

	б) $y' = x + \cos(y/\sqrt{1.25})$	$y(0.4)=0.8$	[0.4; 1.4]
20	а) $y' = x + \sin(y/\sqrt{11})$	$y(0.6)=1.2$	[0.6;1.6]
	б) $y' = x + \sin(y/\sqrt{0.7})$	$y(1.2)=1.4$	[1.2; 2.2]
21	а) $y' = x + \sin(y/1.25)$	$y(0.5)=1.8$	[0.5; 1.5]
	б) $y' = x + \cos(y/\sqrt{1.3})$	$y(1.2)=1.8$	[1.2; 2.2]
22	а) $y' = x + \sin(y/\sqrt{15})$	$y(0.2)=1.1$	[0.2; 1.2]
	б) $y' = x + \cos(y/\sqrt{1.5})$	$y(0.3)=0.9$	[0.3; 1.3]
23	а) $y' = x + \sin(y/\sqrt{1.3})$	$y(0.1)=0.8$	[0.1; 1.1]
	б) $y' = x + \cos(y/\sqrt{0.7})$	$y(0.9)=1.7$	[0.9; 1.9]
24	а) $y' = x + \sin(y/\sqrt{0.3})$	$y(0.5)=0.6$	[0.5; 1.5]
	б) $y' = x + \cos(y/\sqrt{0.3})$	$y(0.7)=2.1$	[0.7; 1.7]
25	а) $y' = x + \sin(y/\sqrt{0.7})$	$y(1.2)=1.4$	[1.2; 2.2]
	б) $y' = x + \sin(y/\sqrt{11})$	$y(0.6)=1.2$	[0.6;1.6]
26	а) $y' = x + \cos(y/\sqrt{1.25})$	$y(0.4)=0.8$	[0.4; 1.4]
	б) $y' = x + \sin(y/\sqrt{3})$	$y(1.1)=1.5$	[1.1;2.1]
27	а) $y' = x + \cos(y/\sqrt{1.5})$	$y(0.3)=0.9$	[0.3; 1.3]
	б) $y' = x + \sin(y/\sqrt{15})$	$y(0.2)=1.1$	[0.2; 1.2]
28	а) $y' = x + \cos(y/\sqrt{1.3})$	$y(1.2)=1.8$	[1.2; 2.2]
	б) $y' = x + \sin(y/1.25)$	$y(0.5)=1.8$	[0.5; 1.5]
29	а) $y' = x + \cos(y/\sqrt{0.3})$	$y(0.7)=2.1$	[0.7; 1.7]
	б) $y' = x + \sin(y/\sqrt{0.3})$	$y(0.5)=0.6$	[0.5; 1.5]
30	а) $y' = x + \cos(y/\sqrt{0.7})$	$y(0.9)=1.7$	[0.9; 1.9]
	б) $y' = x + \sin(y/\sqrt{1.3})$	$y(0.1)=0.8$	[0.1; 1.1]

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Найпростішим звичайним диференційним рівнянням є рівняння *першого порядку*:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

Розв'язком диференційного рівняння (1) називають деяку функцію $y = \varphi(x)$, яка після її підстановки у рівняння перетворює його у тотожність.

Основна задача, пов'язана з диференційними рівняннями, відома як **задача Коші**: необхідно знайти функцію $Y = Y(x)$, яка задовольняється рівнянням $Y' = f(x, Y)$ та яка приймає за $x = x_0$ задане значення Y_0 (задовольняє початкову умову): $Y(x_0) = Y_0$.

Метод Ейлера

Найпростішим числовим методом розв'язування задачі Коші для звичайних диференційних рівнянь є ***метод Ейлера***.

Для розв'язання задачі Коші введемо послідовність точок $x_0, x_1, x_2, \ldots$ $(i = 0,1,2,\ldots)$, які називають *вузлами*. Будемо вважати для простоти, що вузли рівновіддалені, т. б. $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = const$ $(i = 0,1,2,\ldots)$. Замість значень функції $Y(x_i)$ в кожній точці x_i введемо числа y_i, що апроксимують точний розв'язок Y на даній множині точок. Функцію y, задану у вигляді таблиці $\{x_i, y_i\}$ $(i = 0,1,2,\ldots)$, називають *сітковою функцією*.

Метод Ейлера заснований на розкладанні шуканої функції $Y(x)$ в ряд Тейлора навколо вузлів $x = x_i$ $(i = 0,1,2,\ldots)$, з якого викидаються усі члени, що містять похідні другого й вищих порядків. Запишемо це розкладання у наступному математичному вигляді, отримаємо:

$$Y(x_i + h) = Y(x_i) + Y'(x_i)h + \frac{Y''(x_i)}{2!}(h^2) + \ldots + \frac{Y^{(n)}(x_i)}{n!}(h^n). \tag{2}$$

Замінимо значення функції Y у вузлах x_i значеннями сіткової функції y_i.

Крім того, згідно умови задачі Коші, покладемо

$$Y'(x_i) = f(x_i, Y(x_i)) = f(x_i,\ y_i).$$

Враховуючи введені позначення та нехтуючи членами, що містять похідні другого й вищих порядків, з рівняння (2) отримуємо формулу:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \qquad i = 0,1,2,... \tag{3}$$

Покладаючи $i = 0,$ знаходимо значення сіткової функції y_1 за $x = x_1$:

$$y_1 = y_0 + hf\left(x_0, y_0\right).$$

Необхідне тут значення y_0 задане початковою умовою $y_0 = Y\left(x_0\right) = Y_0$.

Аналогічно можуть бути знайдені значення сіткової функції в інших вузлах:

$$y_2 = y_1 + hf\left(x_1, y_1\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = y_{n-1} + hf\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right).$$

Різницева схема методу Ейлера, представлена співвідношеннями (3), має вигляд рекурентних формул, за допомогою яких значення сіткової функції y_{i+1} у будь-якому вузлі x_{i+1} обчислюється за її значенням y_i у попередньому вузлі x_i. У зв’язку з цим метод Ейлера відносять до одно крокових методів.

Із геометричної точки зору отримані рекурентні формули є нічим іншим, як рівняннями дотичних у точках $M_i\left(x_i, y_i\right)$ ($i = 0,1,2,...$) до інтегральної кривої, яка зображена на (Рис. 7):

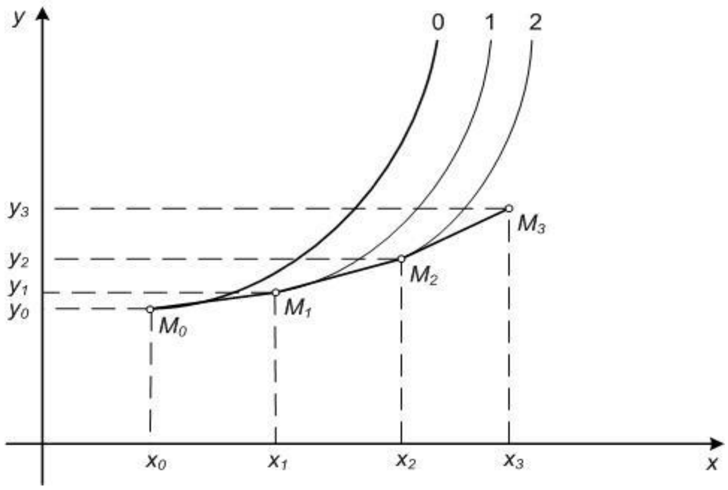


Рис. 7. Геометрична інтерпретація методу Ейлера

Слід відмітити, що крива 0 описує точний розв’язок задачі Коші, оскільки вона проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$. Відрізок M_0M_1 - це відрізок дотичної до кривої 0 в точці M_0, її нахил характеризується значенням похідної $y_0' = f(x_0, y_0)$. Дотична M_1M_2 вже проводиться до іншої інтегральної кривої 1.

Таким чином, похибка методу Ейлера призводить до того, що на кожному кроці розв'язок переходить на іншу інтегральну криву. Тобто метод Ейлера володіє малою точністю.

Метод Ейлера-Коші (з уточненням)

Розглянемо ще одну схему методу Ейлера. Значення правої частини рівняння $Y' = f(x,Y)$ у схемі (3) візьмемо рівним середньому арифметичному значенню між $f(x_i, y_i)$ та $f(x_{i+1}, y_{i+1})$, т. б. замість різницевої схеми (3) запишемо:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \quad i = 0,1,2,..., \tag{4}$$

Отримана схема є неявною, оскільки шукане значення сіткової функції y_{i+1} входить до обох частин співвідношення (4). Проте, y_{i+1} можна обчислити ітераційним методом. Покладаючи y_i за початкове наближення, перше наближення $\tilde{y}_{i+1}$ обчислюємо за формулою (3):

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Нове значення $\tilde{y}_{i+1}$ підставляємо замість y_{i+1} у праву частину (4) й отримуємо співвідношення:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})],$$

або

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))], \quad i = 0,1,2,...$$

Ці рекурентні співвідношення описують нову різницеву схему, яку називають **методом Ейлера-Коші** (методом Ейлера з уточненням). Цей метод має другий порядок точності.

Зразок виконання завдання

Завдання:

1) Методом Ейлера з точністю до 0.0001 скласти розв'язок задачі Коші для звичайного диференційного рівняння $y' = \sin(x) - \cos(y)$ на відрізку [0; 1] з кроком h = 0.2 за початкових умов $y(0) = 1$.

Розв'язання:

Розрахункові формули методу Ейлера матимуть наступний вигляд:

$x_0 = 0;$

$y_0 = 1;$

$x_{i+1} = x_i + 0.2;$

$y_{i+1} = y_i + 0.2\left(\sin x_i - \cos y_i\right),\ i = 0,1,2,3,4,5.$

Результати обчислень заносимо до таблиці. Отримаємо:

i	x_i	y_i
0	0	1
1	0.2	0.8919
2	0.4	0.8061
3	0.6	0.7455
4	0.8	0.7115
5	1	0.7035

Після чого побудуємо ламану Ейлера для знайденого розв'язку $Y = Y\left(x\right)$, яка зображена на (Рис. 8).

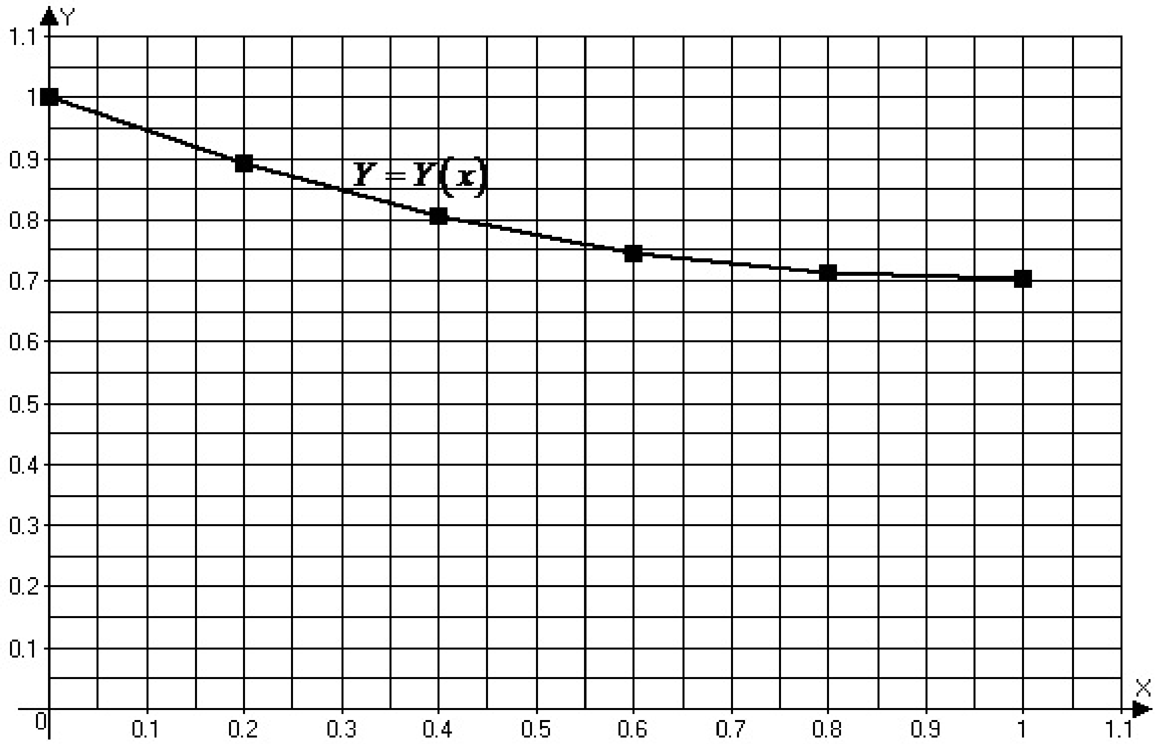


Рис. 8. Графічний розв'язок задачі Коші для методу Ейлера

2) Методом Ейлера-Коші з точністю до 0.0001 скласти розв'язок задачі Коші для звичайного диференційного рівняння $y' = \sin(x) - \cos(y)$ на відрізку [0; 1] з кроком h = 0.2 за початкових умов $y(0) = 1$.

Розв'язання:

Розрахункові формули методу Ейлера-Коші матимуть наступний вигляд:

$$x_0 = 0;$$

$$y_0 = 1;$$

$$x_{i+1} = x_i + 0.2;$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{0.2}{2}[\sin(x_i) - \cos(y_i) + \sin(x_{i+1}) - \cos(y_i + 0.2(\sin(x_i) - \cos(y_i)))],$$

$$i = 0,1,2,3,4,5.$$

Результати обчислень заносимо до таблиці. Отримаємо:

i	x_i	y_i
0	0	1
1	0.2	0.9030
2	0.4	0.8316
3	0.6	0.7882
4	0.8	0.7734
5	1	0.7862

Побудуємо ламану Ейлера для знайденого розв’язку $Y = Y(x)$, яка представлена на (Рис. 9):

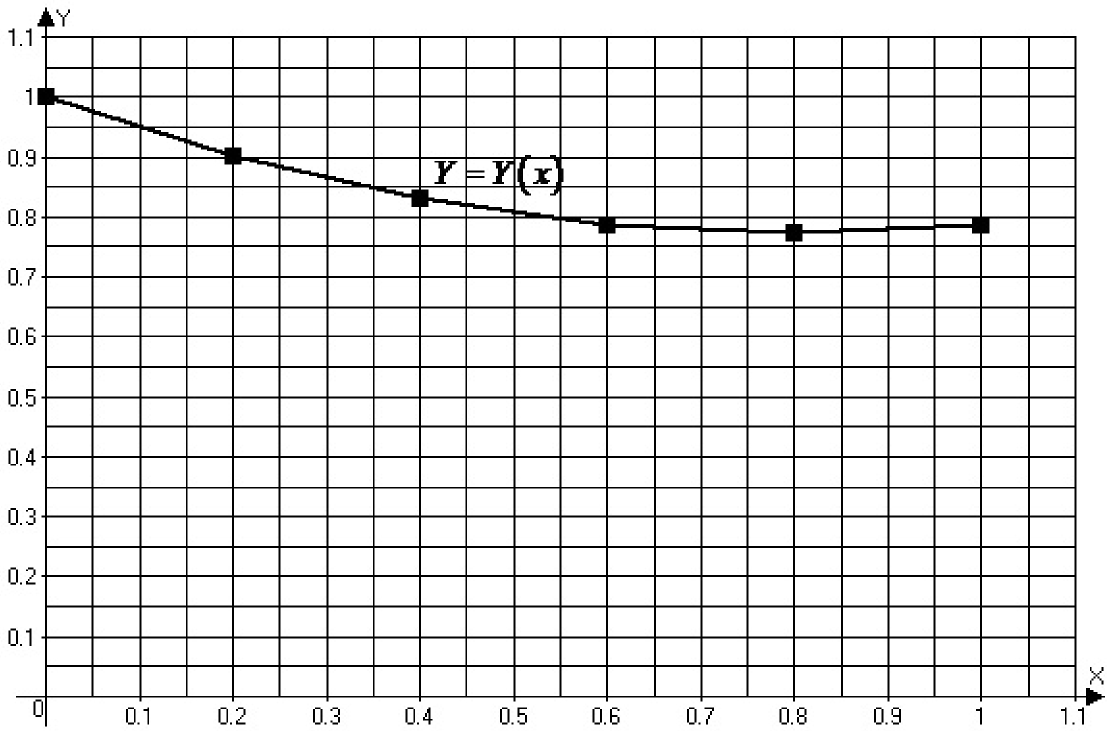


Рис. 9. Графічний розв’язок задачі Коші для методу Ейлера-Коші

Контрольні питання

1) На які основні групи поділяють наближені методи розв’язування диференційних рівнянь?

2) Що називають розв’язком диференційного рівняння?

3) Сформулюйте основну задачу Коші. Відповідь обґрунтуйте.

4) Наведіть алгоритм знаходження розв’язку задачі Коші для звичайного диференційного рівняння методом Ейлера?

5) У якій формі можна отримати розв’язок диференційного рівняння за методом Ейлера?

6) Наведіть алгоритм знаходження розв’язку задачі Коші для звичайного диференційного рівняння методом Ейлера з уточненням?

7) Чому метод Ейлера відносять до одно крокових методів розв’язування диференційних рівнянь? Відповідь обґрунтуйте.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Методичне забезпечення

1. Pasternak Ia., Pasternak V., Ilchuk N. Boundary Element Method for Defective Multifield Materials. *Lambert Academic Publishing*. 2018. 111 p. Режим доступу: https://www.amazon.com/Boundary-Element-Defective-Multifield-Materials/dp/6139935997

2. Sulym H., Pasternak Ia., Pasternak V. Boundary element modeling of pyroelectric solids with shell inclusions. *Mechanics and Mechanical Engineering*. 2018. P. 727-737.

3. Пастернак Я.М. Пастернак В.В. Об’єктно-орієнтована реалізація методу граничних елементів тривимірної термомагнітоелектро-пружності. *Комп’ютерно-інтегровані технології*: *освіта, наука, виробництво*. 2018. С. 107-112.

4. Мекуш О.Г., Соліч К.В., Федуник-Яремчук О.В. Обчислювальні методи: Теорія похибок. Наближені методи розв’язання рівнянь та систем рівнянь: методичні вказівки до вивчення курсу «Обчислювальні методи». Луцьк: ВНУ ім. Лесі Українки, 2018. 62 с.

5. Мекуш О.Г., Ханін О.Г. Інтерполяція та чисельне диференціювання функцій: Елементи теорії наближень: методичні вказівки до курсу «Обчислювальні методи». Луцьк: ВНУ ім. Лесі Українки, 2021. 60 с.

6. Мекуш О.Г., Ханін О.Г. Чисельне інтегрування функцій: Чисельні методи розв’язування звичайних диференціальних рівнянь: методичні вказівки до курсу «Обчислювальні методи». Луцьк: ВНУ ім. Лесі Українки, 2021. 36 с.

Рекомендована література та інтернет-джерела

1. Волонтир Л.О., Зелінська Л.В., Потапова Н.А., Чіков І.А. Чисельні методи: навчальний посібник / за редакцією Л.О. Волонтир. Вінниця: ВНАУ, 2020. 322 с. Режим доступу: file:///C:/Users/vikto/Downloads/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%96%20%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%20%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%B9%20%D0%BF%D0%BE%D1%81%D1%96%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA.pdf

2. Дзісь В.Г., Левчук О.В., Дячинська О.М. Прикладна математика на основі MathCAD: навчальний посібник / за редакцією В.Г. Дзісь. Вінниця: ВНАУ, 2020. 378 с.

3. Найко Д.А, Шевчук О.Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник / за редакцією Д.А. Найко. Вінниця: ВНАУ, 2020. 382 с. Режим доступу: http://socrates.vsau.org/repository/card.php?lang=en&id=24513

4. Гончаров О.А., Васильєва Л.В., Юнда А.М. Чисельні методи розв'язання прикладних задач: навчальний посібник / за редакцією О.А. Гончарова. Суми: Сумський державний університет, 2020. 142 с.

5. Андруник В.А., Висоцька В.А., Пасічник В.В., Чирун Л.Б, Чирун Л.В. Чисельні методи в комп'ютерних науках: навчальний посібник, Том 1 / за редакцією д.т.н., професора, Лауреата державної премії України у галузі науки та техніки В.В. Пасічника. Львів: Новий світ-2000, 2020. 470 с.

6. Андруник В.А., Висоцька В.А., Пасічник В.В., Чирун Л.Б, Чирун Л.В. Чисельні методи в комп'ютерних науках: навчальний посібник, Том 2 / за редакцією Лауреата державної премії України у галузі науки та техніки В.В. Пасічника. Львів: Новий світ-2000, 2020. 536 с.

7. Кодекс академічної доброчесності ВНУ імені Лесі Українки URL: https://ra.vnu.edu.ua/akademichna_dobrochesnist/kodeks_akademichnoi_dobrochesnosti/.

8. Положення про комітет з етики наукових досліджень Волинського національного університету імені Лесі Українки. 2020. URL: https://ra.vnu.edu.ua/wp-content/uploads/2020/11/Komitet-z-etyky-naukovyh-doslidzhen-.pdf.

9. Положення про організацію навчального процесу на першому (бакалаврському) та другому (магістерському) рівнях у Волинському національному університеті імені Лесі Українки. 2022. URL: https://bit.ly/3VMJPXA.

10. Положення про порядок формування індивідуальної траєкторії навчання здобувачів освіти Волинського національного університету імені Лесі Українки. 2022. URL: https://bit.ly/3PqWfSA.

11. Положення про систему запобігання та виявлення академічного плагіату Волинського національного університету імені Лесі Українки. 2021. URL: https://ra.vnu.edu.ua/wp-content/uploads/2021/03/Polozhennya-pro-systemu-zapobigannya-ta-vyyavlenya-akademichnogo-plagiatu.pdf.

УДК 519.61(072)
П 19

Електронне мережне навчальне видання

Вікторія ПАСТЕРНАК

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт

з дисципліни

«ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ»

для студентів спеціальності 014 Середня освіта (Інформатика)
першого (бакалаврського) рівня

Друкується в авторській редакції