

**Лариса РОЙКО**

кандидат педагогічних наук, доцент кафедри загальної математики та методики навчання інформатики  
Волинський національний університет імені Лесі Українки, м. Луцьк  
<https://orcid.org/0000-0002-7318-0925>  
e-mail: Royko.Larisa@vnu.edu.ua

**ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЕКОНОМІЧНОГО ЗМІСТУ В КУРСІ «МАТЕМАТИКА ТА СТАТИСТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ»**

**Анотація.** Фундаментальну основу професійної підготовки здобувачів освіти за спеціальністю 292 «Міжнародні економічні відносини», освітньо-професійної програми «Міжнародний бізнес» складає освітній компонент «Математика та статистика для економістів», основними завданнями якого є надання знань з базових розділів вищої математики та статистики, їх прикладної спрямованості, отримання необхідної математичної підготовки для вивчення освітніх компонент економічного циклу. Метою дослідження є теоретичне обґрунтування і практична ілюстрація застосування методів диференціального числення до розв'язування професійно зорієнтованих задач з економічним змістом. Для досягнення поставленої мети у статті використано теоретичні та емпіричні методи дослідження: вивчення та узагальнення науково-методичної літератури з окресленої проблеми; аналіз, синтез, порівняння, систематизація; узагальнення власного педагогічного досвіду. Проілюстровано вивчення теми «Елементи диференціального числення» в курсі «Математика та статистика для економістів». Наведено приклади розв'язання задач економічного змісту з використанням похідної.

**Ключові слова:** професійно зорієнтовані задачі, прикладні задачі, диференціальне числення, економічний зміст похідної, математика для економістів.

**Royko L. L. Application of differential calculus methods for solving problems of economic content in the course «Mathematics and statistics for economists».** The educational component «Mathematics and Statistics for Economists», the main tasks of which are to provide knowledge of the basic sections of higher mathematics and statistics, their applied orientation, obtaining the necessary mathematical training for studying the educational components of the economic cycle. The purpose of the study is the theoretical justification and practical illustration of the application of differential calculus methods to solving professionally oriented problems with an economic content. To achieve the goal, the article uses theoretical and empirical research methods: study and generalization of scientific and methodological literature on the outlined problem; analysis, synthesis, comparison, systematization; own pedagogical experience generalization. The study of the topic «Elements of differential calculus» in the course «Mathematics and Statistics for Economists» has been illustrated. Examples of solving economic content problems using the derivative are given.

**Keywords:** professionally oriented tasks, applied tasks, differential calculus, economic content of the derivative, mathematics for economists.

**АКТУАЛЬНІСТЬ ПРОБЛЕМИ.** Сучасний ринок праці потребує фахівців, які вміють аналізувати будь-яку ситуацію, чітко визначати мету своєї діяльності, знаходити альтернативні рішення при складних умовах ринкової економіки. Фахівці сьогодення, повинні не тільки володіти теорією та практичними навичками певних освітніх компонент, але й, вміти самостійно мислити та приймати оптимальні рішення у складних ситуаціях.

Підготовка здобувачів освіти за спеціальністю 292 «Міжнародні економічні відносини» передбачає здобуття ґрунтовних знань з математики і вміння їх застосовувати у майбутній професійній діяльності. Дедалі зростає роль формально-логічного апарату математики, математичного моделювання, статистико-ймовірнісних методів у мікро- й макроекономіці. Математичні закономірності широко використовуються в економіці виробництва, у конкретних економічних процесах і явищах. Тому, при підготовці здобувачів освіти даного профілю особливе місце має займати математична підготовка, яка надасть їм змогу оцінювати та прогнозувати процеси, що відбуваються в економіці, правильно моделювати та досліджувати економічні ситуації. Окрім того, математика необхідна для успішного засвоєння фундаментальних та професійно спрямованих освітніх компонент, які забезпечують базові економічні знання та закладають основи для подальшого вивчення спеціальних економічних дисциплін [5].

Освітній компонент «Математика та статистика для економістів» у Волинському національному університеті імені Лесі Українки передбачений для здобувачів першого

(бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 292 «Міжнародні економічні відносини» (освітньо-професійної програми «Міжнародний бізнес», 2022). Курс викладається у 2 семестрах і складає 8 кредитів/240 годин.

**АНАЛІЗ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ.** Методологічну базу дослідження склали ідеї: застосування методів математичного моделювання в економіці (І. Діденко, В. Здрок, С. Коломієць, Н. Лепа, В. Осипов, С. Прокопов, Є. Слущкий та інші); проблеми розробки та впровадження активних методів навчання (В. Буркова, Г. Ковальчук, В. Петрук, І. Смолін та інші); дидактичні проблеми і перспективи використання інформаційних технологій (М. Головань, Р. Гуревич, А. Єршов, М. Жалдак, М. Кадемія, Е. Кузнецов, Ю. Машбиць, Є. Полат, М. Шкіль та інші), різні аспекти підготовки фахівців економічного профілю (Н. Ванжа, Г. Дутка, Н. Захарченко, Т. Коваль, Л. Нічуговська, Т. Поясок, О. Смілянець, Ю. Ткач та інші).

Прикладна спрямованість курсу вищої математики для економістів представлена у наукових доробках А. Алілуйко, З. Бондаренко [1], Н. Блащак, О. Вільчинської [6], С. Кирилашук [1], В. Мацкула [2], К. Рум'янцевої [6].

Реалізацію професійної спрямованості навчання математики здобувачів освіти, зокрема і економічного профілю розглянуто у дисертаційних дослідженнях В. Зінченко, Л. Гусак, А. Савіної, Н. Самарук, І. Коновалової, О. Попової, К. Словак та інших.

**Мета дослідження** – теоретичне обґрунтування і практична ілюстрація застосування методів диференціального числення до розв'язування професійно зорієнтованих задач економічного змісту.

**ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ Й ОБґРУНТУВАННЯ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ.** У результаті опанування освітнього компонента «Математика та статистика для економістів» здобувачі освіти отримують знання, розуміння та вміння використовувати математичні інструменти для дослідження економічних явищ та процесів. Тому важливо показати, яким чином теоретичний матеріал можна застосувати до побудови економіко-математичних моделей та розв'язування задач прикладного характеру. І це дозволяє дати відповідь на запитання: навіщо майбутньому фахівцю економісту-міжнароднику вивчати ті чи інші розділи освітнього компоненту «Математика та статистика для економістів»?

Практично кожен розділ математики у тій чи іншій мірі можна застосувати до розв'язування задач прикладного характеру з економічним змістом. У межах нашого дослідження зупинимось і покажемо використання елементів диференціального числення до розв'язування професійно зорієнтованих задач при вивченні освітнього компонента «Математика та статистика для економістів».

На нашу думку, мета сучасної математичної підготовки здобувачів-міжнародників полягає у розв'язанні трьох рівноправних завдань:

- опанування змістом основних тем математики і статистики на основі методів, форм і засобів навчання, що сприяють розвитку аналітичного мислення, формують творчий підхід до вирішення проблем максимально наближених до майбутньої професійної діяльності;
- вироблення у здобувачів освіти системного уявлення про застосування математичних знань в економіці, математичного мислення, виховання математичної культури;
- формування вмінь розв'язувати завдання інтегрованого змісту, що містять знання з математичних і економічних освітніх компонент, з використанням сучасних інформаційно-комунікаційних технологій.

Методи диференціального числення мають широке використання в економічній теорії. Оскільки похідна характеризує швидкість (миттєву, тобто, у певний момент) зміни значень функції, то є природним застосування диференціального числення при моделюванні динамічних процесів. Окрім того, методи диференціального числення використовуються у дослідженнях характеру поведінки функцій – моделей явищ, особливо, їх екстремальних (або оптимальних) значень. При моделюванні економічних явищ функції – моделі часто називають кривими зростання, першу похідну (що характеризує швидкість) називають темпом росту, а другу похідну (що характеризує прискорення) – темпом приросту [3].

Після вивчення даної теми здобувачі освіти будуть:

- розуміти економічний зміст похідної та її застосування при проведенні граничного аналізу;
- знати методи диференціювання функцій;
- застосовувати інструменти диференціального числення до розв’язання реальних економічних задач;
- вміти знаходити еластичність функцій в економіці та давати інтерпретацію отриманих результатів;
- мати навички застосування похідних при дослідженні функцій та побудові їх графіків;
- виконувати найпростіші розрахунки для оптимізації виробництва та максимізації прибутку підприємства.

Економічний зміст похідної виражають: задача про продуктивність праці, задача про граничний (маржинальний) аналіз. У практиці економічних досліджень широке застосування отримали виробничі функції, які використовують для встановлення різноманітних економічних залежностей (наприклад, випуску продукції від витрат ресурсів, витрат виробництва від обсягу продукції, доходу від продажу товару тощо). У припущенні диференційованості виробничих функцій важливе значення набувають їхні диференціальні характеристики, пов’язані з поняттям похідної. Аналіз, що базується на використанні граничних величин для дослідження економічних процесів, називається граничним, або маржинальним аналізом.

Після вивчення відповідного теоретичного матеріалу здобувачам освіти пропонується розв’язати наступні задачі:

➤ Обсяг продукції  $u$ , виробленої бригадою робітників, описується рівнянням

$$u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50 \quad (\text{одиниць}), \quad 1 < t < 8, \quad \text{де } t - \text{робочий час у годинах.}$$

Обчислити продуктивність праці, швидкість і темпи її зміни через годину після початку роботи і за годину до її закінчення [4].

*Розв’язання.* Застосуємо похідну до дослідження функцій, які є математичною моделлю даної прикладної задачі.

Продуктивність праці виражається похідною:

$$z(t) = u'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100.$$

Швидкість і темп зміни продуктивності праці – виражаються відповідно з допомогою похідної:  $z'(t)$  і  $T_z(t) = (\ln z(t))'$ .

$$z'(t) = -5t + 15.$$

$$T_z(t) = \left( \ln \left( -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100 \right) \right)' = \frac{-5t + 15}{-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100} = \frac{2t - 6}{t^2 - 6t - 40}.$$

У задані моменти часу  $t_1 = 1$  і  $t_1 = 8 - 1 = 7$  відповідно маємо:

$$z(1) = 112,5 \text{ (од/год)};$$

$$z'(1) = 10 \text{ (од/год}^2\text{)};$$

$$T_z(1) = 0,09 \text{ (од/год)}.$$

$$z(7) = 82,5 \text{ (од/год)};$$

$$z'(7) = -20 \text{ (од/год}^2\text{)};$$

$$T_z(7) = -0,24 \text{ (од/год)}.$$

*Висновок:* на кінець роботи продуктивність праці суттєво знижується; при цьому зміна знаків  $z'(t)$  і  $T_z(t)$  із плюса на мінус свідчить про те, що швидкість і темп зміни продуктивності праці знижуються в останні години.

➤ Залежність витрат виробництва від обсягу продукції задана функцією

$y = -0,025x^3 + 18750x + 115$ . При якому обсязі продукції витрати виробництва почнуть спадати?

*Розв'язання.* Застосуємо похідну до дослідження на монотонність функції, яка є математичною моделлю прикладної задачі.

$$y' = -0,075x^2 + 18750; \quad y' = 0; \quad x^2 = 250000; \quad x = \pm 500.$$

$(-\infty; -500)$  – функція спадає ( $y' < 0$ ),

$(-500; 500)$  – функція зростає ( $y' > 0$ ),

$(500; +\infty)$  – функція спадає ( $y' < 0$ ).

Враховуючи, що  $x > 0$ , отримаємо:  $x > 500$ .

*Висновок:* витрати почнуть спадати, якщо обсяг виробництва  $x > 500$ .

➤ Нехай функція  $C = 8q - \frac{q^2}{10}$  характеризує залежність витрат фірми від кількості виготовленої продукції, а  $q = 40 - 2p$  – залежність попиту від ціни. Знайти максимальний обсяг виробництва. Порівняти оптимальну ціну з граничними витратами.

*Розв'язання.* Прибуток фірми складає:  $Z = pq - C$ , де  $p$  – ціна одиниці продукції;  $q$  – кількість виготовленої продукції;  $C$  – відповідні витрати.

З рівняння  $q = 40 - 2p$  отримаємо, що

$$p = \frac{40 - q}{2} = 20 - \frac{q}{2}.$$

Функція прибутку набуде вигляду:

$$Z = \left(20 - \frac{q}{2}\right)q - 8q + \frac{q^2}{10} = 20q - \frac{q^2}{2} - 8q + \frac{q^2}{10} = 12q - \frac{2q^2}{5}.$$

Застосуємо похідну до дослідження на екстремум функції, яка є математичною моделлю прикладної задачі.

$$Z' = 12 - \frac{4q}{5}, \quad Z' = 0, \quad 12 - \frac{4q}{5} = 0, \quad q = 15.$$

На проміжку  $(-\infty; 15)$  – функція зростає ( $Z' > 0$ ), а на проміжку  $(15; +\infty)$  – функція спадає ( $Z' < 0$ ). Отже,  $q = 15$  є точкою максимуму, що виражає максимальний обсяг виробництва.

Відповідно ціна:

$$p = 20 - \frac{15}{2} = 12,5 \text{ (умов. грош. одиниць)}.$$

Граничні витрати при цьому становлять:

$$C' = 8 - \frac{q}{5}, \quad C'(15) = 8 - \frac{15}{5} = 5.$$

Порівнюємо оптимальну ціну з граничними витратами:

$$\frac{12,5}{5} = 2,5$$

*Висновок:* максимальний обсяг продукції фірми складає 15 одиниць, відповідна ціна – 12,5 умов. грош. одиниць, найбільш вигідна ціна для фірми у 2,5 рази більша за граничні витрати.

➤ Мале підприємство виготовляє два види товарів у кількості  $x$  і  $y$  відповідно. Загальні щоденні витрати  $C$  умов. грош. од. виробництва задані функцією

$$C(x, y) = 250 - 4x - 7y + 0,2x^2 + 0,1y^2.$$

Визначити кількість  $x$  і  $y$  одиниць товарів, яку потрібно виготовляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними [2].

*Розв'язання:* Застосуємо похідну для дослідження на екстремум функції двох змінних, яка є математичною моделлю прикладної задачі.

$$C'_x(x, y) = (250 - 4x - 7y + 0,2x^2 + 0,1y^2)'_x = -4 + 0,4x$$

$$C'_y(x, y) = (250 - 4x - 7y + 0,2x^2 + 0,1y^2)'_y = -7 + 0,2y$$

За допомогою необхідної умови  $C'_x(x, y) = 0$  і  $C'_y(x, y) = 0$  знаходимо критичну точку

$$\begin{cases} C'_x = 0 \\ C'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 + 0,4x = 0 \\ -7 + 0,2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 35 \end{cases}$$

Впевнитись у тому, що  $M(10, 35)$  – є точкою екстремуму за допомогою достатніх умов.

Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$C''_{xx}(x, y) = (-4 + 0,4x)'_x = 0,4;$$

$$C''_{yy}(x, y) = (-7 + 0,2y)'_y = 0,2;$$

$$C''_{xy}(x, y) = (-4 + 0,4x)'_y = 0.$$

Із отриманих значень частинних похідних другого порядку складаємо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{vmatrix} = 0,08 > 0.$$

У точці  $M(10, 35)$  функція  $C(x, y)$  має екстремум, оскільки  $\Delta > 0$ .

Так, як  $C''_{xx}(x, y) = 0,4 > 0$ , то в точці  $M(10, 35)$  функція  $C(x, y)$  має локальний мінімум.

Обчислимо мінімальні витрати підприємства

$$C_{min}(10, 35) = 250 - 4 \cdot 10 - 7 \cdot 35 + 0,2 \cdot 10^2 + 0,1 \cdot 35^2 = 107,5.$$

**Висновок:** мале підприємство буде мати мінімальні щоденні витрати  $C_{min} = 107,5$  (умов. грош. од.), якщо продукцію першого виду буде випускати у кількості  $x = 10$  одиниць, а другого  $y = 35$  одиниць.

**ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ.** Наведені факти свідчать про те, що математика є фундаментальним освітнім компонентом для майбутніх фахівців міжнародних економічних відносин. Математичні знання допомагають не лише сприймати й засвоювати навчальний матеріал з курсів професійного циклу, а й розвивають мислительні функції. Використання прикладних (професійно зорієнтованих) задач під час вивчення освітнього компоненту (як показано у статті, на прикладі теми диференціального числення) дає позитивні результати, а саме:

- сприяє розвитку творчих здібностей здобувачів освіти;
- демонструє зв'язок теорії з практикою;
- викликає інтерес у здобувачів освіти нестандартною постановкою математичного завдання;
- сприяє застосуванню математичного апарату для дослідження процесів і явищ, що стосуються професійної діяльності;
- допомагає побудові моделей різного роду ситуацій;
- сприяє знаходженню математичних залежностей у реальних процесах.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бондаренко З. В., Кирилащук С. А., Прикладна спрямованість викладання вищої математики студентам економічного профілю ВНЗ. *Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка*. 2017. С.22-26
2. Мацкул В. М. Вища математика для економістів: Підручник. Одеса: ОНЕУ, 2018. 472с.
3. Миронюк Л. П., Ройко Л. Л. Формування професійних компетентностей студентів міжнародників у курсі «Математика та статистика для економістів». Проблеми та перспективи розвитку науки, освіти і технологій: збірник тез доп. міжнар. наук.-практ. конф. (м. Полтава, 27 січн. 2022 р.). Полтава, 2022. Ч. 2. С. 13-15
4. Ройко Л. Л. Реалізація професійної спрямованості математичної підготовки студентів економічного профілю. *Математика. Інформаційні технології. Освіта* : зб. статей V Міжнар. наук.-практ. конф. Луцьк : Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, 2016. №3. С. 135-142
5. Ройко Л. Л., Ройко О. О. Прикладна спрямованість курсу «Математика для економістів та економічне моделювання». Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. 2018. № 30-31 С. 263-268
6. Рум'янцева К. Є, Вільчинська О. М. Фахові завдання як засіб спрямованого вивчення дисциплін математичного циклу майбутніми економістами. *Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти*. 2016. Вип. 9(11). С.36-42