ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ І МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА ЗАГАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ ІНФОРМАТИКИ

Лариса Ройко

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації до модульних контрольних робіт

ЛУЦЬК, 2021

УДК 51-024.71(072)
Р 65

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
Волинського національного університету імені Лесі Українки
(протокол № 6 від 17 лютого 2021 року)

Рецензенти:
Гуда О.В. – кандидат технічних наук, доцент кафедри фундаментальних наук Луцького національного технічного університету
Гембарська С.Б. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теорії функцій та методики навчання математики

Ройко Л.Л.
Р 65 Вища математика: методичні рекомендації до модульних контрольних робіт. Луцьк: ПП Іванюк, 2021. 66 с.

Навчально-методичне видання призначене для підготовки студентів факультету хімії, екології та фармації до написання модульних контрольних робіт з курсу «Вища математика». Містить розв’язки типових завдань з основ лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії та математичного аналізу, числових та функціональних рядів, диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей та математичної статистики. Завдання підібрані відповідно до кожного модуля освітньо-професійних програм (Хімічні технології та інженерія; Хімія; Середня освіта. Хімія) підготовки фахівців з рівнем вищої освіти бакалавр та галуззю знань: 16 – Хімічна та біоінженерія; 10 – Природничі науки; 01 – Освіта / Педагогіка.

УДК 51-024.71(072)

Вступ

Метою викладання навчальної дисципліни **«Вища математика»** є – надання студентам фундаментальних знань з математики, які дозволяють у подальшому засвоювати спеціальні дисципліни, котрі базуються на математичних поняттях. При цьому значна увага надається виробленню практичних навиків при розв'язуванні фахових задач, вмінню застосовувати математичні методи для дослідження реальних процесів і прийняття оптимальних рішень.

Основними **завданнями** вивчення дисципліни **«Вища математика»** є засвоєння основних теоретичних відомостей і набуття практичних вмінь і навичок розв'язування основних типів задач; набуття вміння використовувати отриманні знання для розв'язання прикладних задач; опанування навичками самостійної роботи над матеріалом, моніторингу та аналізу наукових джерел інформації та фахової літератури; отримання навичок аналізу та відображення результатів обробки експериментальних даних, комп'ютерних обчислень та інших математичних розрахунків.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні:

знати :

– елементи матричного числення та основні методи розв'язування систем лінійних рівнянь;

– векторну алгебру і методи аналітичної геометрії;

– методи диференціального і інтегрального числення функцій однієї та кількох змінних;

– методи розв'язування диференціальних рівнянь і рівнянь у частинних похідних;

– методи дослідження числових і функціональних рядів;

– основні поняття, формули та теореми теорії ймовірностей.

вміти :

– застосовувати математичний апарат у навчальному процесі і науково-дослідній діяльності;

– визначати межу можливих застосувань математичних методів;

– досліджувати питання коректності постановки задач і існування розв'язків.

<u>ОСНОВНІ ТЕМИ ПРОГРАМНОГО МАТЕРІАЛУ</u>

Тема 1. Матриці та дії над ними. Визначники та їх основні властивості. Основні методи розв'язування систем лінійних рівнянь.

Поняття матриці, види матриць. Дії над матрицями та їх властивості. Визначники другого та третього порядку; їх властивості та основні методи обчислення. Визначники вищих порядків. Мінори та алгебраїчні доповнення. Обернена матриця. Властивості невироджених матриць. Ранг матриці. Метод елементарних перетворень.

Поняття системи лінійних рівнянь. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гауса. Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом. Дослідження систем лінійних рівнянь на сумісність та визначеність.

Тема 2. Вектори та дії над ними. Скалярний добуток векторів. Векторний та мішаний добутки векторів. Лінійна залежність векторів. Розклад вектора по базису.

Скалярні та векторні величини. Означення, геометричне зображення та позначення вектора. Лінійні операції над векторами. Лінійні операції в координатах. Означення та властивості скалярного добутку векторів. Скалярний добуток в координатах. Кут між векторами.

Означення та властивості векторного добутку. Векторний добуток в координатах. Площа трикутника. Площа паралелограма. Означення та властивості мішаного добутку. Мішаний добуток в координатах. Об'єм паралелепіпеда.

Лінійна залежність векторів. Розклад вектора по базису.

Тема 3. Пряма на площині та у просторі. Різні рівняння прямої. Площина у просторі, її рівняння. Криві другого порядку.

Канонічне рівняння прямої. Параметричне рівняння прямої. Рівняння пучка прямих. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої через дві точки. Рівняння прямої у відрізках на осях. Рівняння прямої через точку перпендикулярно до вектора. Загальне рівняння прямої та його дослідження. Нормальне рівняння прямої. Зведення загального рівняння прямої до нормального виду. Кут між двома прямими. Відхилення і відстань точки від прямої.

Канонічне та параметричне рівняння прямої у просторі. Пряма лінія як перетин двох площин. Умова перетину двох прямих у просторі. Перетин прямої з площиною. Кут між прямою і площиною.

Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора. Загальне рівняння площини та його дослідження. Рівняння площини у відрізках на осях. Нормальне рівняння площини. Зведення загального рівняння площини до нормального виду. Рівняння площини, заданої початковою точкою і напрямними векторами. Параметричне рівняння. Кут між площинами. Відхилення і відстань точки від площини.

Криві другого порядку, їхня форма і рівняння: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Спільне означення та спільне рівняння кривих другого порядку.

Тема 4. Основні числові системи. Границя числової послідовності. Границя функції в точці. Неперервність функції.

Поняття множини, операції над множинами. Множина дійсних чисел. Модуль дійсного числа. Межі числових множин. Послідовності. Границя числової послідовності. Властивості збіжних послідовностей. Нескінченно малі та великі числові послідовності, зв’язок між ними. Властивості нескінченно малих послідовностей. Монотонні послідовності. Теорема про дії над збіжними послідовностями.

Означення Коші та Гейне границі функції в точці, їх геометрична інтерпретація.

Правостороння і лівостороння границя функції в точці. Неперервність функції. Класифікація точок розриву. Теорема про дії над неперервними функціями. Властивості неперервної функції, заданої на відрізку.

Тема 5. Похідна першого та вищих порядків. Диференціал. Застосування похідної до дослідження функцій. Функції багатьох змінних.

Задачі, які приводять до поняття похідної. Геометричний та механічний зміст похідної. Основні правила диференціювання. Похідна складної функції. Похідні вищих порядків. Диференціал функції, його властивості та застосування до наближених обчислень. Диференціали вищих порядків.

Розкриття невизначеностей з допомогою правил Лопіталя. Проміжки монотонності та точки екстремуму. Опуклість і вгнутість кривих, Точки перегину. Асимптоти графіка функцій Поняття функцій багатьох змінних, дослідження їх на екстремум. Найбільше і найменше значення функції багатьох змінних на проміжку.

Тема 6. Первісна функції та невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування невизначених інтегралів.

Поняття первісної. Теорема про структуру первісних. Невизначений інтеграл та його властивості. Таблиця основних інтегралів. Основні методи інтегрування (метод безпосереднього інтегрування, метод підстановки, інтегрування частинами).

Тема 7. Інтегрування раціональних та ірраціональних функцій.

Інтегрування простих алгебраїчних дробів. Допоміжні теореми при інтегруванні раціональних функцій. Алгоритм інтегрування раціональних функцій. Основні методи інтегрування ірраціональних функцій.

Тема 8. Інтегрування тригонометричних функцій.

Універсальна підстановка та інші методи інтегрування тригонометричних функцій.

Тема 9. Визначений інтеграл та його застосування. Невласні інтеграли.

Задачі, які приводять до поняття визначеного інтегралу. Визначений інтеграл. Теорема існування. Властивості визначеного інтегралу. Похідна від визначеного інтегралу по змінній верхній межі. Формула Ньютона-Лейбніца. Основні методи інтегрування визначеного інтегралу. Невласні інтеграли, дослідження їх на збіжність.

Тема 10. Числові та функціональні ряди.

Числові ряди. Збіжність та сума ряду. Необхідна умова збіжності ряду. Ряди з додатними членами. Ознаки порівняння, Даламбера, Коші, інтегральна. Ряди з членами різних знаків. Абсолютна та умовна збіжність. Ряди, члени яких чергуються. Теорема Лейбніца. . Функціональні ряди. Означення та приклади області збіжності.

Тема 11. Диференціальні рівняння першого та другого порядків. Основні поняття.

Основні поняття теорії диференціальних рівнянь. Задача Коші. Диференціальні рівняння першого порядку: із відокремлюваними змінними; однорідні; лінійні.

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Структура загального розв'язку. Лінійні однорідні рівняння. Фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння другого порядку.

Тема 12. Основні поняття, формули та теореми теорії ймовірностей.

Різні означення ймовірності (класичне, статистичне, геометричне). Елементи комбінаторики (означення, приклади). Правило суми, правило добутку. Основні теореми теорії ймовірностей (теореми додавання ймовірностей, теореми множення ймовірностей).Формула повної ймовірності. Формула Баєса.Теорема Бернулі. Найімовірніше число настання події. Зв'язок теореми Бернулі з теоремами Лапласа. Формула Пуассона.

Тема 13. Випадкові величини їх закони розподілу та числові характеристики.

Випадкові величини, їх види. Поняття закону розподілу для дискретних випадкових величин. Числові характеристики дискретних випадкових величин, їх властивості. Неперервні випадкові величини. Їх закони розподілу. Інтегральна функція розподілу та її властивості. Диференціальна функція розподілу та її властивості. Рівномірний, показниковий і нормальний закони розподілу, їх характеристики та геометрична ілюстрація. Числові характеристики неперервних випадкових величин. Числові характеристики рівномірного, показникового та нормального законів розподілу.

***Тема 14.* Поняття про статистику та її методи. Генеральна сукупність. Поняття вибірки, види вибірок.**

Поняття про статистику та її методи. Генеральна сукупність. Поняття вибірки, види вибірок. Способи відбору. Статистичний розподіл вибірки. Емпірична функція озподілу. Поняття полігону і гістограми. Характеристики варіаційного ряду. Числові рактеристики вибірки (вибіркове середнє, вибіркова дисперсія, середнє квадратичне відхилення вибірки, мода медіана, розмах варіації, коефіцієнт варіації).

МОДУЛЬНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА №1
Елементи лінійної алгебри

1. Знайти лінійну комбінацію $5A+3B$, якщо $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\\ 0 & 4 & -4\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 1 & -5 & 3\end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$5A+3B=5\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\\ 0 & 4 & -4\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 1 & -5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 15 & -5\\ 0 & 20 & -20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0 & -9\\ 3 & -15 & 9\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-7 & 15 & -14\\ 3 & 5 & -11\end{pmatrix}$$

Відповідь: $\begin{pmatrix}-7 & 15 & -14\\ 3 & 5 & -11\end{pmatrix}$

2. Знайти добуток матриць $\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

Розв'язання

Перший множник – матриця розмірності (3×3), а другий множник – матриця розмірності (3×1). Добуток існує, так як кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої. Результативна матриця матиме розмірність (3×1), тобто буде матрицею-стовпцем.

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2+1\cdot 0+3\cdot 1\\ 0\cdot 2+1\cdot 0+2\cdot 1\\ 0\cdot 2+1\cdot 0+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

Відповідь: $\begin{pmatrix}7\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$

3. Знайти добуток матриць $A\times B$ і $B\times A$, якщо $A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

Розв'язання

Обидві матриці мають розмірність (2×2). Отже, їх можна множити і результативна матриця теж матиме розмірність (2×2).

$$A\times B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-2)\cdot 1+4\cdot 2 & (-2)\cdot(-3)+4\cdot 2\\ 1\cdot 1+(-1)\cdot 2 & 1\cdot(-3)+(-1)\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 14\\ -1 & -5\end{pmatrix}.$$

$$B\times A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+(-3)\cdot 1 & 1\cdot 4+(-3)\cdot(-1)\\ 2\cdot(-2)+2\cdot 1 & 2\cdot 4+2\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 7\\ -2 & 6\end{pmatrix}.$$

Даний приклад ілюструє, що операція множення матриць **некомутативна**, тобто $A\times B\neq B\times A$.

Відповідь: $A\times B\neq B\times A$

4. Знайти значення многочлена $f(A)$, якщо $f(x)=3x^2-4$, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$f(A)=3\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}^2-4\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}4+0 & 2+3\\ 0+0 & 0+9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=3\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\ 0 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 15\\ 0 & 27\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 15\\ 0 & 23\end{pmatrix}.$$

Отже, $f(A)=\begin{pmatrix}8 & 15\\ 0 & 23\end{pmatrix}$

Відповідь: $\begin{pmatrix}8 & 15\\ 0 & 23\end{pmatrix}$

5. Розв'язати рівняння:

$$\begin{vmatrix}-2 & x-3\\ x & x-3\end{vmatrix}=0$$

Розв'язання

Розписуючи визначник другого порядку отримуємо:

$$-2(x-3)-x(x-3)=0\Rightarrow-(x-3)(2+x)=0\Rightarrow x_1=3;\quad x_2=-2$$

Відповідь: $x_1=3;\quad x_2=-2$

6. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix}3 & x & -x\\ 2 & -1 & 3\\ x+10 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$

Розв'язання

Розписуючи визначник третього порядку отримуємо:

$3\cdot(-1)\cdot1+(-x)\cdot2\cdot1+(x+10)\cdot3\cdot x-(-x)(-1)\cdot(x+10)-3\cdot1\cdot3-1\cdot2\cdot x=0\Rightarrow$

$-3-2x+3x(x+10)-x(x+10)-9-2x=0\Rightarrow$

$-12-4x+(x+10)\cdot2x=0\Rightarrow$

$-12-4x+2x^2+20x=0\Rightarrow$

$2x^2+16x-12=0\Rightarrow x^2+8x-6=0$

$x_{1,2}=-4\pm\sqrt{22}$

Відповідь: $x_{1,2}=-4\pm\sqrt{22}$

7. Розв'язати нерівність $\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & x & -2\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}<0.$

Розв'язання

Розписуючи визначник третього порядку отримаємо:

$$\begin{array}{l}-3x+2-4+x+12-2<0\\ -2x+8<0\Rightarrow x>4\end{array}\quad\text{, тобто } x\in(4;+\infty)$$

Відповідь: $x\in(4;+\infty)$

8. Обчислити визначник, розклавши його за елементами будь-якого рядка або стовпця

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

Розв'язання

Зробимо перетворення над елементами даного визначника, користуючись властивістю. Помножимо елементи першого стовпця на (–1) і додамо до відповідних елементів четвертого стовпця.

Отримаємо

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -4 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -8 \end{vmatrix} = |A|$$

В отриманому визначнику всі елементи третього рядка, крім одного a_{31}, дорівнюють нулю. Тому, розкладаючи за елементами третього рядка, отримаємо:

$$|A| = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{34} \cdot A_{34},$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -4 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -9 \\ 2 & -1 & -8 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = 12$$

Відповідь: 12

9. Обчислити визначник методом зведення до трикутного вигляду

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

Розв'язання

Додамо до кожного рядка, починаючи з другого перший рядок.

Тоді

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Відповідь: 120

10. Розв'язати систему лінійних рівнянь за: а) формулами Крамера; б) матричним способом (з допомогою оберненої матриці); в) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

а) формулами Крамера

Розв'язання

За формулами Крамера:

$x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}$; $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}$; $x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta}$

Визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 2 + 1 - 1 + 8 = 6 \neq 0$.

Шукаємо Δx_1, а для цього у визначнику Δ замість першого стовпця ставимо стовпець вільних членів:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 6 + 3 - 1 + 8 = 12.$$

Шукаємо Δx_2, а для цього у визначнику Δ замість другого стовпця ставимо стовпець вільних членів:

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 6 - 1 - 2 + 3 - 4 = 6.$$

Шукаємо Δx_3, а для цього у визначнику Δ замість третього стовпця ставимо стовпець вільних членів:

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 - 4 + 1 + 2 + 12 = 6.$$

Підставляємо отримані значення у формули Крамера:

$x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta} = \dfrac{12}{6} = 2$; $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta} = \dfrac{6}{6} = 1$; $x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta} = \dfrac{6}{6} = 1$

Відповідь: (2; 1; 1)

б) матричним способом (з допомогою оберненої матриці)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

Утворюємо матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Задана система набере вигляду $A \cdot X = B$. Запишемо розв'язок системи в матричній формі:

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (1)$$

Знайдемо матрицю A^{-1}. Обчислимо визначник матриці A.

$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 2 + 1 - 1 + 8 = 6 \neq 0$, існує єдина обернена матриця A^{-1}.

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A.

$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$ $\quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(-4 + 1) = 3$ $\quad A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3$

$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 1) = -5$ $\quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$ $\quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 2) = 3$

$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1$ $\quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 + 2) = -1$ $\quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 = 3$

Обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Підставимо отримані дані

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Підставляємо отримані дані в рівність (1)

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ або } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{6} + \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Звідси x_1=2; x_2=1; x_3=1

Відповідь: (2; 1; 1)

в) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

З допомогою першого рівняння виключаємо невідомі x_1 з другого та третього рівнянь. Отримаємо рівносильну систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Далі необхідно за допомогою другого рівняння виключити невідоме x_2 з третього рівняння. Дістанемо систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_2 - 3x_3 = 0, \\ -6x_3 = 6. \end{cases}$$

З третього рівняння знаходимо $x_3 = 1$. Підставляючи це значення у друге рівняння дістанемо

$3x_2 - 3 = 0$, тобто $x_2 = 1$.

Далі аналогічно

$x_1 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$, тобто $x_1 = 2$.

Отже, єдиним розв'язком системи є вектор (2; 1; 1)

11. Дослідити систему на сумісність. У випадку сумісності знайти її розв'язок :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

Розв'язання

Зайдемо ранги основної та розширеної матриць, причому знайдемо це одночасно. Маємо:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -7 & 16 \\ 5 & 2 & 1 & 16 \end{array}\right)$$

Отримана матриця A системи розміщена ліворуч від вертикальної прямої. Розширена матриця B отримається дописуванням до матриці A стовпця вільних членів. Не переставляючи основний стовпець, можна методом елементарних перетворень знайти одночасно ранги матриць B і A. Маємо:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -7 & 16 \\ 5 & 2 & 1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 11 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Бачимо, що $RgA=RgB=3$. Отже система сумісна і має єдиний розв'язок тому, що ранг дорівнює розмірності системи. Зведеня матриці до трикутного вигляду з одиницями по головній діагоналі еквівалентне "прямому ходу" методу Гауса. Запишемо систему, а потім виконаємо "обернений хід" (знаходження невідомих, починаючи з останньої до першої):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 = 4 + 3x_3 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Відповідь: (3; 1;-1).

12. Дослідити систему на сумісність

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Розв'язання

Знайдемо ранги останньої та розширеної матриць. Маємо:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Бачимо, що *RgA*=2, а *RgB*=3 (якщо переставити третій та четвертий стовпчики місцями, то по головній діагоналі буде три нульові елементи). Отже, система несумісна.

13. Дослідити на сумісність систему рівнянь. У випадку сумісності знайти її розв'язок

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

Розв'язання

Шукаємо ранги основної та розширеної матриць:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

RgA=*RgB*=2

Ранги рівні, а значить, система сумісна. Вона має безліч розв'язків, бо ранг менший, ніж кількість невідомих. Запишемо відповідну систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Перенесемо одне з невідомих, наприклад x_3, в праві частини рівнянь і через нього виразимо дві інші невідомі. Тоді:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 + 4x_3, \\ x_2 = 1 + x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 4x_3 - 2x_2 = 2x_3 - 1, \\ x_2 = 1 + x_3, x_3 \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 - 1, \\ x_2 = 1 + x_3, x_3 \in R \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 1, \\ x_2 = 1 + x_3, x_3 \in R \end{cases}$

Елементи векторної алгебри

1. Дано три точки *A (1, 1, 1), B (2, 2, 1) і C (2, 1, 2)*. Знайти кут φ =∠ *BAC*.

Розв'язання

Знайдемо вектори $\vec{AB}$= (1, 1, 0), $\vec{AC}$= (1, 0, 1). Згідно з формулою скалярного добутку маємо:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{AC}\right|} = \frac{1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+0}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{2}$$, отже, φ = 60°.

Відповідь: φ = ∠ *BAC* =60°

2. Дано три послідовні вершини паралелограма: $A(-3;-2;0)$, $B(3;-3;1)$, $C(5;0;2)$. Знайти його четверту вершину D і кут між діагоналями.

Розв'язання

Нехай шукана вершина має координати $D(x,y,z)$. Діагоналі паралелограма у точці перетину діляться навпіл. Знайдемо координати точки О, яка є серединою діагоналі *AC*:

$$x=\frac{-3+5}{2}=1;\ y=\frac{-2+0}{2}=-1;\ z=\frac{0+2}{2}=1$$

Отже, *O(1;-1;1)*. Точка *O* є серединою діагоналі *ВД*, знайдемо координати точки *Д*:

$$\frac{3+x}{2}=1;\ \frac{-3+y}{2}=-1;\ \frac{1+z}{2}=1;$$
$$x=-1;\ y=1;\ z=1$$

$D(-1;1;1)$.

Діагоналі паралелограма дорівнюють відповідно сумі і різниці векторів-сторін $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=(8;2;2)$; $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-AB=(-4;4;0)$. Кут між діагоналями знайдемо за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|} = \frac{-32+8}{\sqrt{72}\cdot\sqrt{32}} = -\frac{1}{2};$$ отже, $\varphi=120^\circ$.

Відповідь: $D(-1;1,1)$, $\varphi=120^\circ$

3. Знайти площу трикутника з вершинами $A(1;3;1), B(-2;4;1), C(-3;-2;2)$.

Розв'язання

Площа трикутника, з використанням векторного добутку шукається за формулою:

$$S=\frac{1}{2}\left|A\overline{B}\times A\overline{C}\right|$$

Знайдемо координати векторів:

$A\overline{B}(-2-1;4-3;1-1)=(-3;1;0)$

$A\overline{C}(-3-1;-2-3;2-1)=(-4;-5;1)$

Знайдемо векторний добуток цих векторів:

$$\bar{c}=A\overline{B}\times A\overline{C}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 1 & 0\\ 4 & -5 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -5 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 4 & -5\end{vmatrix}\vec{k}=1i+3\vec{j}+11\vec{k}$$

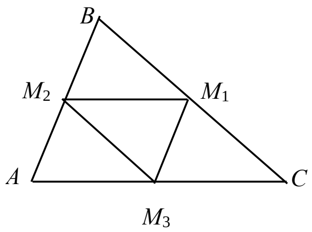
Тоді, $\bar{c}(1;3;11)$ $\qquad |\bar{c}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 11^2} = \sqrt{131}$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{131}(\text{од.кв.})$$

Відповідь: $S = \frac{1}{2}\sqrt{131}(\text{од.кв.})$

4. Дано трикутник A (4, 1), B (7, 5), C (– 4, 7). Знайти площу трикутника, вершини якого містяться в точках перетину бісектрис трикутника зі сторонами.

Розв'язання



Бісектриса трикутника поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам. Знайдемо довжину відрізків AB, BC і AC :

$$AB = \sqrt{(4-7)^2 + (1-5)^2} = 5, \quad BC = \sqrt{(7+4)^2 + (5+7)^2} = 15,$$

$$AC = \sqrt{(4+4)^2 + (1-7)^2} = 10.$$

Знайдемо відношення, в яких основи бісектрис точки M_1, M_2, M_3 поділяють відповідні відрізки:

$$\frac{|BM_1|}{|M_1C|} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}; \quad \frac{|AM_2|}{|M_2B|} = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{3}; \quad \frac{|AM_3|}{|M_3C|} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}.$$

Скориставшись формулами, знайдемо відповідно координати точок M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2), M_3 (x_3, y_3).

$$x_1 = \frac{7 - 4\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{10}{3}; \quad y_1 = \frac{5 + 7\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{17}{3}; \quad M_1\left(\frac{10}{3};\ \frac{17}{3}\right);$$

$$x_2 = \frac{4 + 7\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{26}{5}; \quad y_2 = \frac{1 + 5\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{13}{5}; \quad M_2\left(\frac{26}{5};\ \frac{13}{5}\right);$$

$$x_3 = \frac{4 - 4\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = 2; \quad y_3 = \frac{1 + 7\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{5}{2}; \quad M_3\left(2;\ \frac{5}{2}\right).$$

Площу трикутника $M_1\,M_2\,M_3$ обчислимо за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \frac{26}{5} - \frac{10}{3} & 2 - \frac{10}{3} \\ \frac{13}{2} - \frac{17}{3} & \frac{5}{2} - \frac{17}{3} \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \frac{28}{15} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{46}{15} & -\frac{19}{6} \end{matrix}\right\| = 50 \text{ кв. од.}$$

5. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ = (5,2, 7), $\vec{b}$ = (1, 2, 4) як на сторонах.

Розв'язання

Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = -6\vec{i} - 14\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Знайдемо $|\vec{c}| = \sqrt{6^2 + 14^2 + 8^2} = 2\sqrt{74}$ кв. од.

6. У просторі задано чотири точки *A(1,1,1),(4,4,4), C (3,5,5), D (2, 4, 7)*. Знайти об'єм піраміди *ABCD*.

Розв'язання

З елементарної математики відомо, що об'єм піраміди *ABCD* дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ і $\vec{AD}$, а останній, у свою чергу, дорівнює модулю мішаного добутку. Отже, маємо:

$$\vec{AB} = (3,\ 3,\ 3),\ \vec{AC} = (2,\ 4,\ 4),\ \vec{AD} = (1,\ 3,\ 6);$$

$$V_{\text{пр}} = \frac{1}{6}\left|\ \vec{AB}\left(\vec{AC}\cdot\vec{AD}\right)\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \text{ куб. од.}$$

7. Дано чотири вектори $\vec{a}(2;4;1), \vec{b}(1;3;6), \vec{c}(5;3;1), \vec{d}(24;20;6)$ у деякому базисі. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

Розв'язання

Обчислюємо мішаний добуток векторів $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 3 + 120 - 15 - 36 - 4 = 74,$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = 74 \neq 0 \;\Rightarrow$ вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некомпланарні, отже, лінійно незалежні і утворюють базис.

Знаходимо координати вектора $\vec{d}$ в базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$\vec{d} = \alpha\cdot\vec{a} + \beta\cdot\vec{b} + \gamma\cdot\vec{c}$;

$(24;20;6) = \alpha(2;4;1) + \beta(1;3;6) + \gamma(5;3;1)$;

$(24;20;6) = (2\alpha + \beta + 5\gamma; 4\alpha + 3\beta + 3\gamma; \alpha + 6\beta + \gamma)$,

тоді

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + 5\gamma = 24 \\ 4\alpha + 3\beta + 3\gamma = 20 \\ \alpha + 6\beta + \gamma = 6 \end{cases}$$

Дану систему розв'язуємо методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 24 \\ 4 & 3 & 3 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & 3 & 12 \\ 0 & -21 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 74 & 296 \end{array}\right),$$

$$\begin{cases} \alpha + 6\beta + \gamma = 6 \\ \quad -11\beta + 3\gamma = 12 \\ \qquad\quad 74\gamma = 296 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = \dfrac{296}{74} = 4 \\ \beta = -\dfrac{1}{11}(12 - 3\gamma) = 0 \\ \alpha = 6 - 6\beta - \gamma = 2 \end{cases}$$

Отже, $\vec{d} = 2\vec{a} + 4\vec{c}$, $\vec{d}(2;0;4)$ — координати вектора $\vec{d}$ в базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Елементи аналітичної геометрії
Пряма на площині. Пряма і площина у просторі.

1. Побудувати чотирикутник, обмежений лініями $5x+y+5=0$, $2x+5y-10=0$, $x=10$ і $y=-5$. Для виконання побудов загальні рівняння прямих перетворити до вигляду рівняння прямої у відрізках на осях. Одержану фігуру заштрихувати.

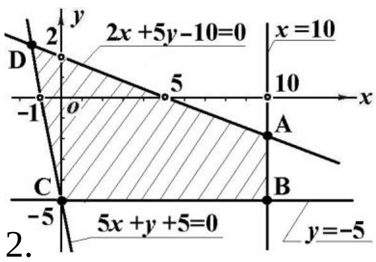
Розв'язання

Перетворюємо загальні рівняння прямих до вигляду рівняння прямої у відрізках на осях:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$5x+y+5=0$, $5x+y=-5$, $\frac{5x}{-5}+\frac{y}{-5}=\frac{-5}{-5}$, $\frac{x}{-1}+\frac{y}{-5}=1$ – пряма на осях Ox і Oy відтинає відрізки довжиною «–1» і «–5» відповідно. Через кінці відрізків проводимо пряму $5x+y+5=0$.

$2x+5y-10=0$, $2x+5y=10$, $\frac{2x}{10}+\frac{5y}{10}=\frac{10}{10}$, $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$ – пряма на осях Ox і Oy відтинає відрізки довжиною «5» і «2» відповідно. Через кінці відрізків проводимо пряму $2x+5y-10=0$.



2.

Чотири задані прямі лінії обмежують чотирикутник *ABCD*.

2. Задані вершини $A(-1;1), B(-5;4), C(2;3)$ трикутника. Знайти:

а) рівняння сторони BC;
б) рівняння висоти AH;
в) довжину висоти AH;
г) рівняння медіани CM.

Розв'язання

а) Для того, щоб скласти рівняння сторони *BC* використаємо рівняння прямої, яка проходить через дві точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_2}$$

$$BC:\frac{x+5}{2+5}=\frac{y-4}{3-4}\Rightarrow\frac{x+5}{7}=\frac{y-4}{-1}\Rightarrow -1(x+5)=7(y-4)\Rightarrow -x-5=7y-28$$

$$BC:-x-7y+23=0:-x+7y-23=0$$

б) Для того, щоб скласти рівняння висоти AH використаємо рівняння прямої, яка проходить через точку перпендикулярно до вектора

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

Рівняння прямої AH записуємо, як рівняння прямої, що проходить через точку $A(-1;1)$ перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{BC}(7;-1)$:

$AH: 7(x+1)-(y-1)=0$;

$7x-y+8=0$ – рівняння висоти AH.

в) Довжина висоти $AH-$ це відстань від точки $A(-1;1)$ до прямої BC. Рівняння прямої BC: $x+7y-23=0$.

Використаємо формулу відстані від точки до прямої : $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$|AH|=\frac{|1\cdot(-1)+7\cdot1-23|}{\sqrt{1^2+7^2}}=\frac{17}{\sqrt{50}}\approx2{,}4 \text{ (од. вим.).}$$

г) Для того, що скласти рівняння медіани CM, знаходимо координати точки M, як координати середини відрізка BA:

$$x_M=\frac{-5-1}{2}=-3;\quad y_M=\frac{1+4}{2}=2{,}5$$

Рівняння медіани CM записуємо, як рівняння прямої, що проходить через дві точки $C(2;3)$, $M(-3;2{,}5)$:

$$\frac{x-2}{-3-2}=\frac{y-3}{2{,}5-3};\quad \frac{x-2}{-5}=\frac{y-3}{-\frac{1}{2}};\quad \frac{1}{2}(x-2)=5(y-3);$$

$x-10y+28=0$ − рівняння медіани CM.

3. Показати розміщення площин у просторі, що задані рівняннями:
1) $5x+10y+4z-20=0$; 2) $3x-y+3z-9=0$; 3) $2x+3y-6=0$; 4) $x-3z+6=0$;
5) $z-3=0$; 6) $z=0$.

Розв'язання

Перетворюємо задані рівняння до виду рівнянь площини у відрізках на осях.

1) $5x+10y+4z=20$ ділимо на 20 і одержуємо $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{5}=1$. Площина відтинає на осях Ox, Oy і Oz відрізки довжиною 4, 2 і 5 відповідно (Рис.1).

2) $3x-y+3z=9$ ділимо на 9 і маємо $\frac{x}{-3}+\frac{y}{9}+\frac{z}{-3}=1$. Площина відтинає на осях Ox, Oy і Oz відрізки довжиною -3, 9 і -3 відповідно (Рис.2).

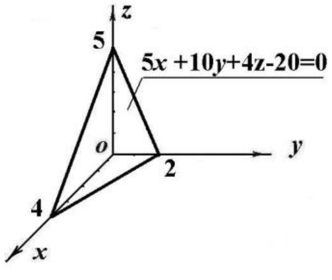


Рис. 1

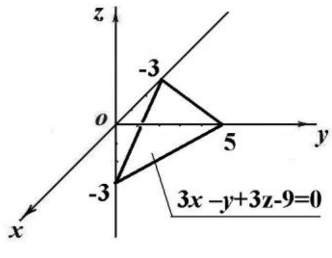
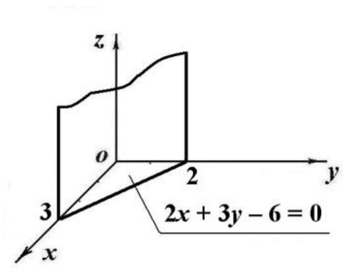


Рис. 2

3) $2x+3y=6$ ділимо на 6 і одержуємо $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$. Площина відтинає на осях Ox і Oy відрізки довжиною 3 і 2 відповідно. На осі Oz площина відрізок не відтинає, тобто вона паралельна осі Oz (Рис. 3).

4) $x-3z=-6$ ділимо на –6 і маємо $\frac{x}{-6}+\frac{z}{2}=1$. Площина відтинає на осях Ox і Oz відрізки, довжиною –6 і 2 відповідно та є паралельною до осі Oy (Рис.4).



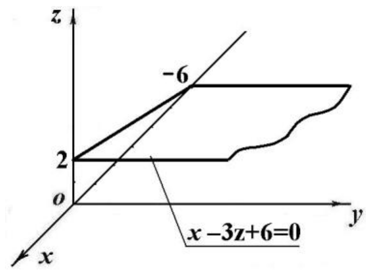
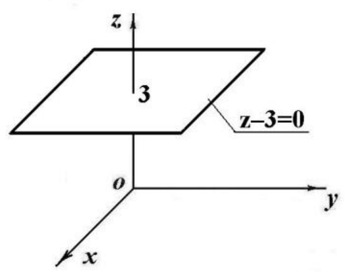


Рис. 3 Рис. 4

5) $z-3=0$, $z=3$ ділимо на 3: $\frac{z}{3}=1$ – площина відтинає на осі Oz відрізок довжиною 3 одиниці та не перетинає ні вісь Ox, ні вісь Oy, тобто є паралельною до площини xOy (Рис.5).

6) $z=0$. Аналогічно попередньому випадку площина перетинає вісь Oz в точці «0», але не паралельна, а співпадає з площиною xOy (Рис.6).



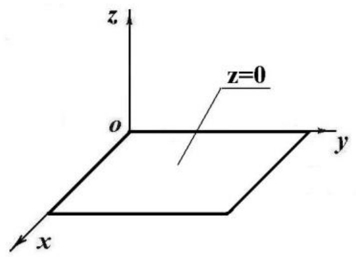


Рис.5 Рис.6

4. Знайти відстань точки *$M_0(4;3;0)$* до площини, яка проходить через точки *$M_1(1;3;0)$; $M_2(4;-1;2)$ і $M_3(3;0;1)$*.

Розв'язання

Знайдемо за формулою рівняння площини, яка проходить через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-0 \\ 4-1 & -1-3 & 2-0 \\ 3-1 & 0-3 & 1-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-4(x-1)-9z+4(y-3)+8z+6(x-1)-3(y-3)=0;$$

$$2(x-1)-z+(y-3)=0 \Rightarrow 2x+y-z-5=0$$

Отже, рівняння площини *$M_1M_2M_3$*: $2x+y-z-5=0$.

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

За формулою знайдемо відстань від точки *M_0* до площини

$$d=\frac{|2\cdot 4+1\cdot 3-1\cdot 0-5|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{8+3-5}{\sqrt{6}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}.$$

5. Задано координати трьох точок *$M_1(2;-1;3)$, $M_2(1;2;-1)$ і $M_3(-3;2;1)$*. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку *M_3* паралельно прямій *M_1M_2*, а також кут між прямими *M_1M_2 і M_1M_3*.

Розв'язання

Знайдемо рівняння прямих M_1M_2 і M_1M_3 як рівняння прямих, що проходять через дві точки:

$$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y+1}{2+1}=\frac{z-3}{-1-3}\Rightarrow\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-4}$$ – рівняння M_1M_2;

$$\frac{x-2}{-3-2}=\frac{y+1}{2+1}=\frac{z-3}{1-3}\Rightarrow\frac{x-2}{-5}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-2}$$ – рівняння M_1M_3.

Звідси $\vec{S}_1(-1;3;-4), \vec{S}_2(-5;3;-2)$ – напрямні вектори прямих M_1M_2 і M_1M_3. Тоді

$$\cos\varphi=\frac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{\left|\vec{S}_1\right|\cdot\left|\vec{S}_2\right|}=\frac{(-1)(-5)+3\cdot3+(-4)(-2)}{\sqrt{(-1)^2+3^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+3^2+(-2)^2}}=\frac{5+9+8}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{38}}=\frac{22}{2\sqrt{247}}=\frac{11}{\sqrt{247}},$$

$$\varphi=\arccos\frac{11}{\sqrt{247}}\approx\arccos 0{,}69991\approx45°30'.$$

Рівняння прямої, що проходить через точку M_3 паралельно прямій M_1M_2, буде пряма з напрямним вектором $\vec{S}_1$ прямої M_1M_2, тобто $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{-4}$.

6. Визначити взаємне положення двох прямих у просторі:

а) $\frac{x-4}{-1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{2}$ і $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-12}=\frac{z-1}{-6}$;

б) $\frac{x-4}{-2}=\frac{y+12}{3}=\frac{z+2}{-4}$ і $\frac{x+2}{5}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-5}{2}$;

в) $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{2}$ і $\frac{x+1}{12}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{4}$.

Розв'язання

а) Напрямні вектори $\bar{s}_1(m_1,n_1,p_1)$ і $\bar{s}_2(m_2,n_2,p_2)$ заданих прямих мають координати $\bar{s}_1(-1,4,2)$, $\bar{s}_2(3,-12,-6)$. Ці прямі паралельні, так як для них виконується умова паралельності:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2};\qquad \frac{-1}{3}=\frac{4}{-12}=\frac{2}{-6};\qquad -\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}.$$

б) Напрямні вектори $\bar{s}_1(m_1,n_1,p_1)$ і $\bar{s}_2(m_2,n_2,p_2)$ заданих прямих мають координати $\bar{s}_1(-2,3,-4)$, $\bar{s}_2(5,6,2)$. Ці прямі перпендикулярні, так як для них виконується умова перпендикулярності:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0;\quad -2\cdot5+3\cdot6+(-4)\cdot2=0;\quad -10+18-8=0;\quad 0=0.$$

в) Напрямні вектори $\bar{s}_1(m_1,n_1,p_1)$ і $\bar{s}_2(m_2,n_2,p_2)$ заданих прямих мають координати $\bar{s}_1(2,1,2)$, $\bar{s}_2(12,3,4)$. Визначаємо кут φ між прямими за формулою

$$\cos\varphi=\pm\frac{2\cdot12+1\cdot3+2\cdot4}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{144+9+16}}=\frac{35}{39}=0{,}897;\quad \varphi=\arccos0{,}897=26{,}2^\circ$$

Відповідь: кут між прямими у просторі $26{,}2^\circ$.

7. Знайти точку перетину площини $3x-5y+6z+8=0$ з прямою, що проходить через точки $M_1(3;-1;2)$ і $M_2(-2;3;5)$.

Розв'язання

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2 (за формулою прямої, що проходить через дві точки і запишемо його в параметричній формі):

$$\frac{x-3}{-2-3}=\frac{y+1}{3+1}=\frac{z-2}{5-2}\Rightarrow\frac{x-3}{-5}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{3}=t.$$

Звідси $\frac{x-3}{-5}=t;\ \frac{y+1}{4}=t;\ \frac{z-2}{3}=t$, або $x=-5t+3;\ y=4t-1;\ z=3t+2$

$\begin{cases} x=-5t+3 \\ y=4t-1 \\ z=3t+2 \end{cases}$ – параметричне рівняння M_1M_2. Підставимо ці значення x,y,z в рівняння площини і розв'яжемо його відносно параметра t.

$3(-5t+3)-5(4t-1)+6(3t+2)+8=0$;

$-15t+9-20t+5+18t+12+8=0 \Rightarrow -17t+34=0 \Rightarrow t=2$.

Підставимо t=2 у параметричні рівняння M_1M_2.

$x=-5\cdot 2+3=-7;\ \ y=4\cdot 2-1=7;\ \ z=3\cdot 2+2=8.$

Отже, пряма M_1M_2 перетинає площину у точці $M_0(-7;7;8)$.

Відповідь: $(-7;7;8)$.

8. Знайти проекцію точки $M(2;-1;3)$ на площину $x+3y-4z-13=0$.

Розв'язання

Складено рівняння прямої, що проходить через точку $M(2;-1;3)$ перпендикулярно до площини $x+3y-4z-13=0$. Спочатку напишемо рівняння прямої, що проходить через точку $M(2;-1;3)$:

$$\frac{x-2}{l}=\frac{y+1}{m}=\frac{z-3}{n}.$$

На основі умови перпендикулярності прямої і площини $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$ числа l,m,n пропорційні числам A,B,C із рівняння площини. Через це, замінивши в останньому рівнянні l,m,n числами $1,3,-4$, одержуємо рівняння прямої в вигляді:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-4}.$$

Щоб знайти проекцію точки на площину, необхідно знайти координати основи перпендикуляра, проведеного із точки M на площину, тобто точку перетину прямої з площиною.

$$\begin{cases} \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{x-3}{-4}, \\ x+3y-4z-13=0. \end{cases}$$

Рівняння прямої $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-4}$. представляємо в параметричній формі. Одержимо: $x=t+2, y=3t-1, z=-4t+3$. Одержані значення x,y,z підставляємо в рівняння площини:

$$t+2+3(3t-1)-4(-4t+3)-13=0,$$
$$t+2+9t-3+16t-12-13=0,$$
$$26t-26=0, t=1.$$

Значення параметра $t=1$ підставимо в рівняння

$x=t+2, y=3t-1, z=-4t+3.$

Маємо:

$x=1+2=3,\quad y=3\cdot 1-1=2,\quad z=-4\cdot 1+3=-1.$

Отже, проекцією точки $M(2;-1;3)$ на площину $x+3y-4z-13=0$ є точка $M_1(3;2;-1)$.

9. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(1;1;-2)$ і пряму $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{5}$.

Розв'язання

У шуканій площині повинні знаходиться точка $M_1(1;1;-2)$ та пряма $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{5}$. Виберемо у цій площині точку $M(x;y;z)$. Якщо пряма $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{5}$ лежить у шуканій площині, то точка $P(1;3;0)$ заданої прямої знаходиться в площині, а напрямний вектор $\bar{S}=(2;-1;5)$паралельний шуканій площині. Розглянемо вектори $\overline{M_1M}=(x-1;y-1;z+2)$, $\overline{M_1P}=(1-1;3-1;0+2)=(0;2;2)$ та $\bar{S}=(2;-1;5)$. Ці вектори компланарні, а це означає, що їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1P}\cdot\bar{S}=0,$$

або

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=0.$$

Розкриваємо визначник:

$$10(x-1)+0(x=2)+4(y-1)-4(z+2)-2(x-1)-0(y-1)=0;$$
$$8(x-1)+4(y-1)-4(z+2)=0;$$
$$2(x-1)+(y-1)-(z+2)=0;$$
$$2x+y-z-5=0.$$

Ми отримали рівняння шуканої площини.

Криві другого порядку. Їх канонічні рівняння
Коло

1. Складіть рівняння кола з центром у точці *M(2;-3)* і з радіусом, що дорівнює *2*. Побудуйте це коло.

Розв'язання

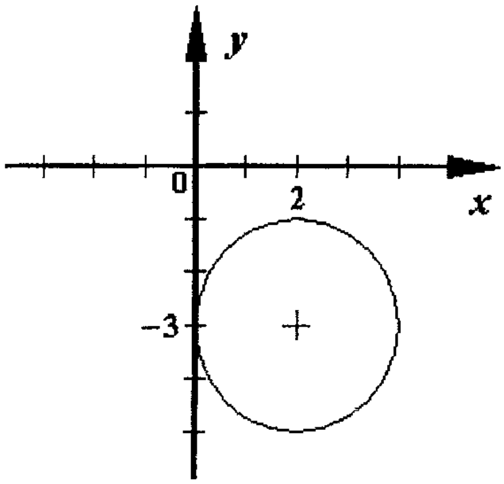
За умовою задачі маємо*: a=2, b=–3, R=2*. Підставивши ці значення в рівняння кола, дістанемо:

$$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-(-3))^2=4}$$

або

$$(x-2)^2+(y+3)^2=4.$$

Будуємо центр кола, тобто точку *M(2,-3)*. З центра *M* радіусом, який дорівнює *2*, опишемо коло



2. Складіть рівняння кола, яке має центр в точці *(5;-7)* і проходить через точку *(2;-3)*.

Розв'язання

Знайдемо радіус кола як відстань від центра до його точки:

$$R = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-(-7))^2} = 5.$$

У рівняння кола підставимо координати центра і знайдену величину радіуса:

$$(x-5)^2 + (y+7)^2 = 25.$$

3. Знайдіть координати центра і радіус кола $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 8 = 0$.

Розв'язання

Перепишемо це рівняння у канонічному вигляді:

$$x^2 - 8x + y^2 - 10y = 8.$$

Доповнивши двочлени $x^2 - 8x$ і $y^2 - 10y$ до повних квадратів, дістанемо:

$$(x^2 - 2\cdot 4x + 4^2) - 4^2 + (y^2 - 2\cdot 5y + 5^2) - 5^2 = 8$$

або $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 49.$

Звідки $a = 4$, $b = 5$, $R = 7$, тобто центр кола – точка *(4;5)*, а радіус дорівнює *7*.

Еліпс

1. Дано рівняння еліпса $9x^2 + 25y^2 = 225$. Знайти ексцентриситет, рівняння директрис.

Розв'язання

Зведемо рівняння до канонічного вигляду:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

Тоді

$$a^2=25; \qquad a=5;$$

$$b^2=9; \qquad b=3;$$

$$c^2=a^2-b^2=16; \qquad c=4.$$

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}.$$

Рівняння директрис: $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$.

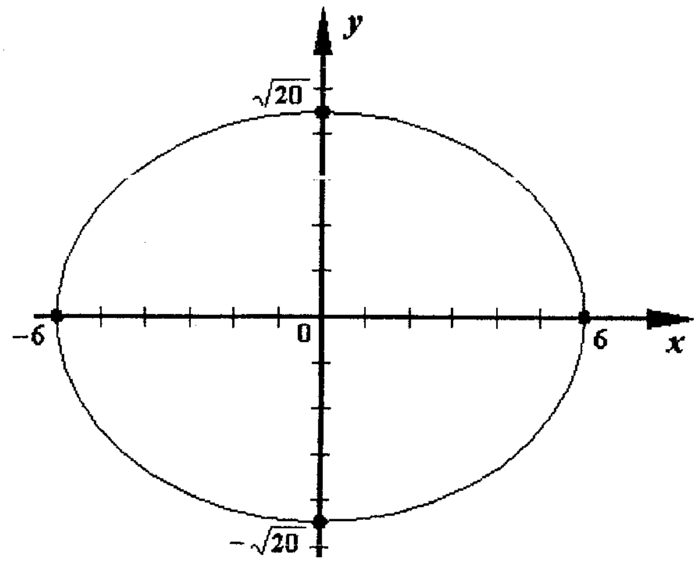
Звідси $x_1=\frac{25}{4}$ та $x_2=-\frac{25}{4}$.

2. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі *Ox*, якщо велика вісь дорівнює *12*, а відстань між фокусами дорівнює *8*.

Розв'язання

З умови впливає, що $2a=12 \Rightarrow a=6$ і $2c=8 \Rightarrow c=4$.

Знаходимо $b^2=a^2-c^2 \;\Rightarrow\; b^2=6^2-4^2=20$



Підставивши значення a і b в рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

дістанемо $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$.

3. Дано еліпс $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. Знайти координати фокусів еліпса і відстань між ними.

Розв'язання

З рівняння еліпса маємо $\boldsymbol{a^2 = 100}$ і $b^2 = 36$.

Тоді $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$. Отже, координати фокусів $F_1\ (-8; 0)$ і $F_2\ (8; 0)$, а відстань між ними $2c = 2 \cdot 8 = 16$.

4. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі *Ox*, якщо його велика вісь дорівнює *14*, а ексцентриситет $\frac{2}{3}$.

Розв'язання

З умови маємо: $a = 7$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$. Підставивши у це співвідношення значення *a*, дістанемо $c = \frac{14}{3}$.

Далі знаходимо $b^2 = 7^2 - \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{245}{9}$. Отже, шукане рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{245/9} = 1 \text{ або } \frac{x^2}{49} + \frac{9y^2}{245} = 1.$$

5. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі *Ox*, якщо він проходить через точки $A(\sqrt{3}\,; \sqrt{6})$ і $B(3;\ \sqrt{2})$.

Розв'язання

Щоб скласти рівняння еліпса, треба знайти параметри *a* і *b*. Підставивши в рівняння еліпса координати даних точок, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{3}{a^2} + \frac{6}{b^2} = 1, \\ \frac{9}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{3}{a^2} + \frac{6}{b^2} = 1, \\ \frac{3}{a^2} + \frac{2}{3b^2} = \frac{1}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{a^2} = -\frac{6}{b^2} + 1, \\ \frac{3}{a^2} = -\frac{2}{3b^2} + \frac{1}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{a^2} = -\frac{6}{b^2} + 1, \\ -\frac{6}{b^2} + 1 = -\frac{2}{3b^2} + \frac{1}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{a^2} = -\frac{6}{b^2} + 1, \\ -\frac{6}{b^2} + \frac{2}{3b^2} = -1 + \frac{1}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{a^2} = -\frac{6}{b^2} + 1, \\ \frac{-18+2}{3b^2} = -\frac{2}{3}; \end{cases}$$

$$\frac{16}{b^2} = 2; \quad b^2 = 8;$$

$$\frac{3}{a^2} = -\frac{3}{4} + 1; \quad a^2 = 12.$$

Отже, шукане рівняння має вигляд: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$.

Гіпербола

1. Побудувати гіперболу $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$. Знайти фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот та директрис.

Розв'язання

Перетворимо рівняння гіперболи до виду:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$9x^2 - 16y^2 = 144{:}\,\mathit{144}$$

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Таким чином

$$a^2 = 16, b^2 = 9 \Rightarrow a = 4, b = 3 \text{ – півосі гіперболи.}$$

Знайдемо відстань фокусів від центра симетрії:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

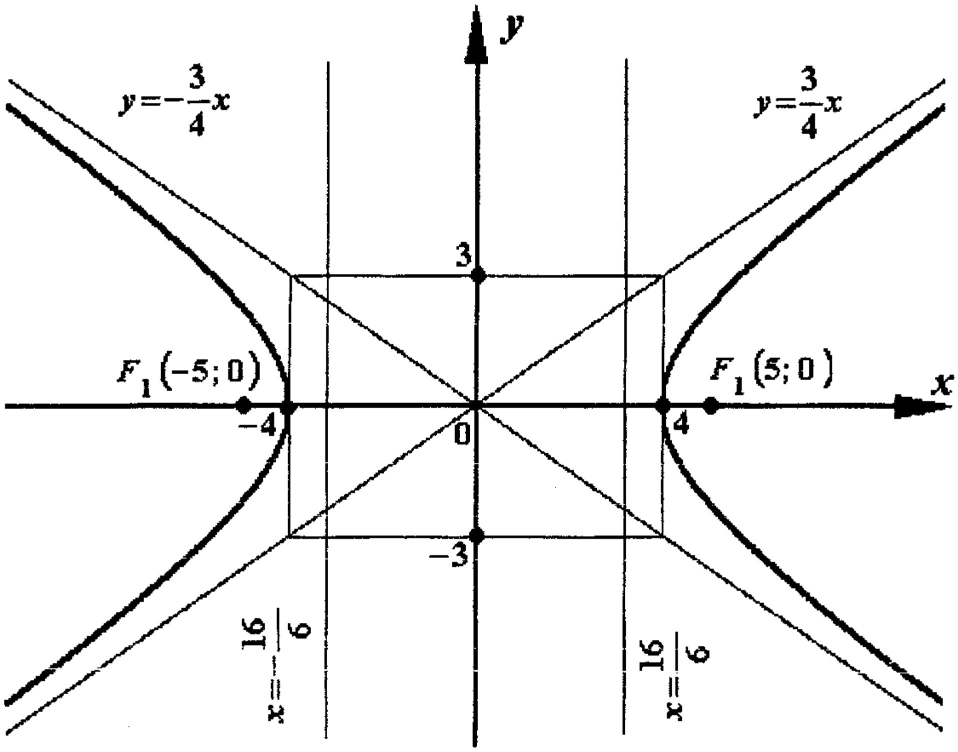
Фокуси гіперболи $F_1\ (-5;0)$, $F_2\ (5;0)$.

Ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} > 1$.

Рівняння асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$.

Рівняння директрис $x = \pm\frac{4}{\left(\frac{5}{4}\right)}$; $x = \pm\frac{16}{5}$.

Побудуємо гіперболу.



2. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі *Ox*, якщо її дійсна вісь дорівнює *24*, а відстань між фокусами дорівнює $8\sqrt{34}$.

Розв'язання

Для складання рівняння гіперболи треба знайти параметри *a* і *b*. З умови маємо:

$$2a = 24, \quad 2c = 8\sqrt{34}.$$

Знайдемо *a* ,*c* і *b*:

$$\boldsymbol{a = 12,\ c = 4\sqrt{34},}\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{544 - 144} = 20.$$

Підставивши a^2 і b^2 в рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, дістанемо $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{400} = 1$.

3. Скласти рівняння гіперболи за координатами її фокусів $(-20;0)$, $(20;0)$ і ексцентриситетом $\varepsilon = \frac{4}{3}$.

Розв'язання

З умови маємо: ***c=20***, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{3}$. Підставивши у цю рівність ***c*** , дістанемо: $\frac{20}{a}=\frac{3}{4}$, тобто $a=\frac{20\cdot 3}{4}=15$. Далі знайдемо $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{400-225}=\sqrt{175}=5\sqrt{7}$. Підставивши a^2 і b^2 в рівняння гіперболи дістанемо $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{175}=1$.

4. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі ***Ox***, якщо довжина її дійсної осі дорівнює ***16***, і гіпербола проходить через точку ***(-10;-3).***

Розв'язання

За умовою ***2a=16***, тобто ***a=8***. Підставивши в рівняння значення **a=8** і координати даної точки, дістанемо:

$$\frac{(-10)^2}{8^2}-\frac{(-3)^2}{b^2}=1;$$

$$\frac{100}{64}-\frac{9}{b^2}=1; \quad \frac{9}{b^2}=\frac{25}{16}-1=\frac{9}{16}; \qquad b^2=16.$$

Підставивши a^2 і b^2 в рівняння, отримаємо $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1$.

5. Скласти рівняння гіперболи за рівнянням її асимптот $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$ і координатами точки, через яку вона проходить $\left(4\sqrt{3};3\sqrt{3}\right)$.

Розв'язання

Рівняння асимптот гіперболи $y=\pm\frac{b}{a}x$. За умовою $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Підставимо в рівняння координати точки і розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{(4\sqrt{3})^2}{a^2}-\frac{(3\sqrt{3})^2}{b^2}=1,\\ \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2};\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{48}{a^2}-\frac{27}{b^2}=1,\\ 2b=\sqrt{3}a;\end{cases}$$

$$\frac{48}{a^2}-\frac{27}{\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2}=1; \qquad \frac{48}{a^2}-\frac{36}{a^2}=1; \quad a^2=12; \quad a=\sqrt{12}; \quad b=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}}{2}=3.$$

Рівняння гіперболи $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{9}=1$.

6. Записати рівняння гіперболи, яка проходить через точку $A\,(6; 9)$, якщо:

1) відстань між фокусами дорівнює 8, а відстань між директрисами — 6;

2) директриси задано рівняннями $x=-3\sqrt{2}, x=3\sqrt{2}$, а кут між асимптотами — прямий;

3) ексцентриситет дорівнює $\varepsilon = 2$, а уявна піввісь $b = 3$;

4) асимптоти задано рівнянням $y=\pm\frac{5}{3}x$.

Розв'язання

1) Координати фокусів F_1 $(-\ c;\ 0)$; F_2 $(c;\ 0)$, тому з умови $2c = 8$; $c = 4$, відстань між директрисами $6=\frac{2a}{\varepsilon}$. Звідки, враховуючи, що $\varepsilon=\frac{c}{a}$ маємо: $a = 12$, $b = c - a = 4$. Остаточно $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$.

2) З рівнянь директрис маємо: $\frac{a}{\varepsilon}=3\sqrt{2}$, якщо кут між асимптотами прямий, то $a = b$. Отже, з урахуванням формули $\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$ маємо $\varepsilon=\sqrt{2}$ і $a = 6$; $b = 6$. Остаточно записуємо рівняння шуканої гіперболи: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{36}=1$.

3) З формули, застосованої вище, дістаємо $\frac{3}{a}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3},$ звідки $a=\sqrt{3}$. Отже, $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$.

4) Точка A належить гіперболі, тому маємо: $\frac{36}{a^2}-\frac{81}{b^2}=1$. З рівняння асимптот гіперболи випливає співвідношення $\frac{b}{a}=\frac{5}{3}$, або $b=\frac{5}{3}a$. Підставивши b в останнє співвідношення, дістанемо рівняння для знаходження a^2:

$$\frac{36}{a^2}-\frac{81\cdot 9}{25a^2}=1;\ \ a^2=\frac{171}{25},\ \ b^2=19.$$

Отже, $\frac{25x^2}{171}-\frac{y^2}{19}=1.$

Відповідь: $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$, $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{36}=1$, $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$, $\frac{25x^2}{171}-\frac{y^2}{19}=1.$

7. Написати канонічне рівняння гіперболи, у якої $\varepsilon=\frac{3}{2}$, відстань між директрисами $\frac{8}{3}$.

Розв'язання

Канонічне рівняння гіперболи

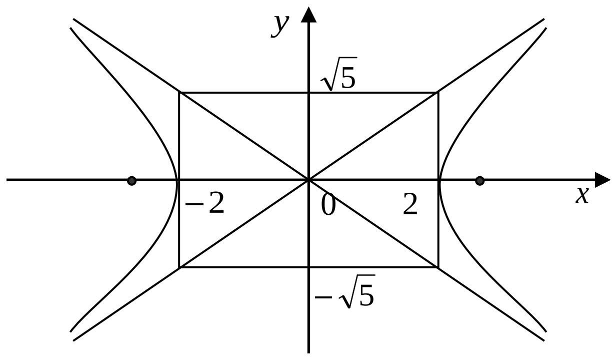
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

де $c^2=a^2+b^2$.

За умовою $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$, звідси $c = \frac{3}{2}a$.

Рівняння директрис $x = \frac{a}{\varepsilon}$ та $x = -\frac{a}{\varepsilon}$. Отже, відстань між ними $d = \frac{2a}{\varepsilon} = \frac{8}{3}$; $\varepsilon = \frac{3}{2}$; $\frac{2a \cdot 2}{3} = \frac{8}{3}$; $a = 2$; $c = \frac{3}{2}a = 3$; $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$; $b = \sqrt{5}$.

Канонічне рівняння гіперболи $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.



Щоб побудувати гіперболу, відкладемо відрізки $2a = 4$; $2b = 2\sqrt{5}$ і проведемо діагоналі отриманого прямокутника.

Парабола

1. Написати рівняння параболи, що проходить через точку $M(4,-8)$ симетрично осі Ox, з вершиною в початку координат.

Розв'язання

Канонічне рівняння параболи $y^2 = 2px$. Парабола за умовою задачі проходить через точку $M(4,-8)$, тому

$$64 = 2p \cdot 4; \; p = 8.$$

Отже, $y^2 = 16x$.

2. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, якщо її фокус лежить у точці F (1;0).

Розв'язання

Фокус лежить на осі ***Ox,*** тобто рівняння параболи має вигляд $y^2 = 2px$. Оскільки координати фокуса $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, то $\frac{p}{2} = 1,\ p = 2$. Підставивши значення ***p***, дістанемо рівняння $y^2 = 4x$.

3. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, яка симетрична відносно осі ***Oy*** і проходить через точку ***A (-2;-4).***

Розв'язання

Шукана парабола симетрична відносно осі ***Oy***, отже її рівняння має вигляд $x^2 = 2py$. Підставивши в це рівняння координати точки ***A***, знайдемо ***p***:

$$(-2)^2 = 2p \cdot (-4);$$

$$4 = -8p;$$

$$p = -\frac{1}{2}.$$

Після підстановки значення ***p*** в рівняння параболи дістанемо $x^2 = -y$.

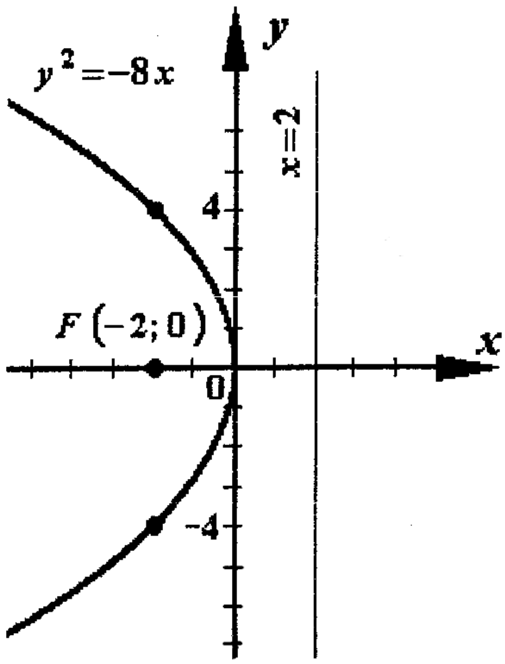
4. За даним рівнянням параболи $y^2 = -8x$ обчислити координати її фокуса, одержати рівняння директриси. Побудувати.

Розв'язання

З рівняння параболи $y^2 = -8x$ маємо $2p = -8$, $\frac{p}{2} = -2$.

Парабола симетрична відносно осі ***Ox,*** її фокус лежить на осі симетрії і має координати $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, тобто $F(-2;0)$. Рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$, тобто ***x=2.***

Шукана парабола симетрична відносно осі Ox, її вітки напрямлені вліво. Знайдемо точку, що лежить на параболі. Нехай $x=2$, $y^2=-8\cdot(-2)=16$, $y=\pm 4$.



5. Побудувати параболу $x^2-6x+2y+7=0$. Знайти координати фокуса та рівняння директриси.

Розв'язання

Знайдемо вершину параболи, перетворивши рівняння $x^2-6x+2y+7=0$ до вигляду $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$.

$$x^2-6x=-2y-7;\quad (x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2)-3^2=-2y-7;$$

$$(x-3)^2=-2y-7+9;\quad (x-3)^2=-2(y-1).$$

З цього рівняння $x_0=3$, $y_0=1$, $C\ (3;1)$ – вершина параболи.

Знайдемо точки перетину параболи з осями Ox і Oy:

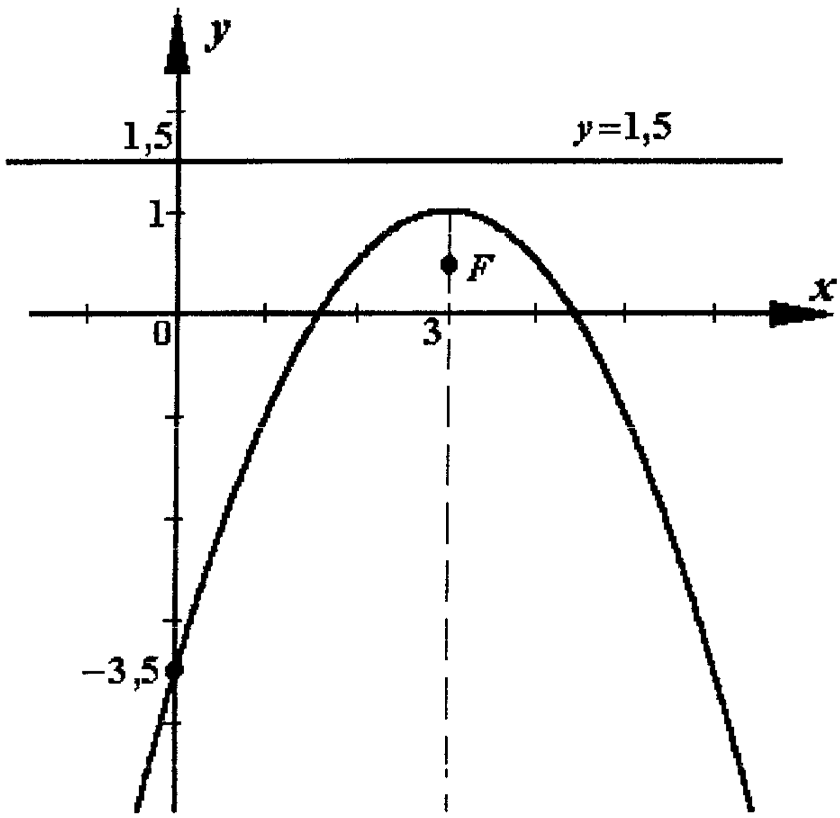
$$y=0;\quad x^2-6x+7=0;\quad x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-28}}{2}=\frac{6\pm 2\sqrt{2}}{2}=3\pm\sqrt{2};$$

$$x=0;\quad 2y+7=0;\quad y=-3{,}5.$$

Знайдемо координати фокуса. З рівняння $(x-3)^2=-2(y-1)$ маємо: $2p=-2$, $\frac{p}{2}=-\frac{1}{2}=-0{,}5$.

Координати фокуса $F\left(x_0;y_0+\frac{p}{2}\right)$, тобто $F(3;1-0{,}5)$, $F(3;\ 0{,}5)$.

Рівняння директриси: $y = y_0 - \frac{p}{2}$, тобто $y = 1 + 0,5$; $y = 1,5$.



6. Побудувати параболу $y^2 + 4y - 3x + 4 = 0$. Знайти координати фокуса та рівняння директриси.

Розв'язання

Знайдемо координати вершини:

$$y^2 + 4y + 4 = 3x;$$

$$(y+2)^2 = 3(x-0).$$

Вершина параболи лежить у точці ***C (0;-2)***. Вітки параболи напрямлені вправо $(2p = 3,\ p = 1,5 > 0)$.

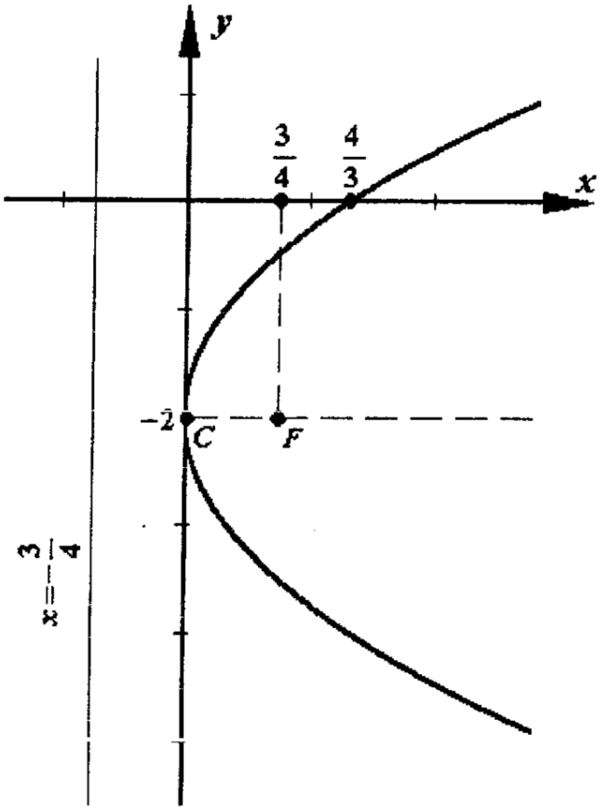
Знайдемо точку перетину параболи з віссю ***Ox***:

$$y = 0, \qquad -3x + 4 = 0, \qquad x = \frac{4}{3}.$$

Координати фокуса $F\left(x_0 + \frac{p}{2};\ y_0\right)$, тобто $F\left(0 + \frac{3}{4}; -2\right)$, $F\left(\frac{3}{4}; -2\right)$.

Рівняння директриси: $x = x_0 - \frac{p}{2}$, тобто $x = -\frac{3}{4}$.

Побудуємо параболу.



МОДУЛЬНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА №2

Вступ до математичного аналізу. Границя числової послідовності. Границя функції

1. Довести, що границею послідовності $x_n = \frac{2n+3}{n+5}$ є число $a = 2$.

Задамо число $\varepsilon > 0,$ тоді

Розв'язання

$$|x_n - a| = \left|\frac{2n+3}{n+5} - 2\right| = \left|\frac{2n+3-2n-10}{n+5}\right| = \left|\frac{-7}{n+5}\right| = \frac{7}{n+5}.$$

З нерівності $|x_n - a| < \varepsilon$ маємо $\frac{7}{n+5} < \varepsilon$ або $n > \frac{7}{\varepsilon} - 5.$ Звідки $N = \left[\frac{7}{\varepsilon} - 5\right].$

2. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2-5n+6}{6-2n+7n^2}.$

Розв'язання

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2-5n+6}{6-2n+7n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^3}\right)}{n^2\left(\frac{6}{n^2}-\frac{2}{n}+7\right)} = \infty.$$

3. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right).$

Розв'язання

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1-0 = 1.$$

4. **Приклад**. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}.$

Розв'язання

Чисельник та знаменник дробу прямують до нуля при $x \to 3$ (невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$). Оскільки $\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \ = \frac{x+3}{x}$ при $x \neq 3,$ то $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x} = 2.$ Звідси $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x} = 2.$

5. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1} = \left[\frac{0}{0}\right].$

Розв'язання

Розкладемо на множники чисельник та знаменник дробу:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

6. Знайти

$$\lim_{x\to 10}\frac{x^3-100}{x^3-20x^2+100x} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Розв'язання

Маємо: $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}=\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x(x-10)^2}=\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^2+10x+100}{x(x-10)}$.

Чисельник дробу прямує до 300, а знаменник — до нуля, тобто є н.м.в. Таким чином, заданий дріб – н.в.в. (нескінченно велика величина):

$$\lim_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}=\infty.$$

7. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Розв'язання

Домножимо чисельник та знаменник дробу на суму $\sqrt{x+4}+2$,

Тобто на вираз спряжений до чисельника:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

8. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Розв'язання

Введемо заміну $1+x=y^5$, тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^5-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y^4+y^3+y^2+y+1}=\frac{3}{5}.$$

10. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Розв'язання

Поділимо чисельник та знаменник на старший степінь x, тобто на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{4}.$$

11. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Розв'язання

Поділимо чисельник та знаменник на x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}}}=\frac{3}{1}=3.$$

12. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=[\infty-\infty]$.

Розв'язання

Помножимо та поділимо заданий вираз на $\sqrt{x^2+8x+3}\ +\sqrt{x^2+4x+3}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}\right)}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8x+3-x^2-4x-3}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{4}{2}=2.$$

12.Знайти $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right].$

Розв'язання

Маємо: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{x}\right)^2=2\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}.$

13. Знайти $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=\left[1^\infty\right].$

Розв'язання

Діленням чисельника дробу на знаменник виділяємо цілу частину $\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}=1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}.$

Таким чином,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right)^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right)^{\frac{8-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}};$$

оскільки $\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\to 0$ при $x\to\infty,$ то $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}=e.$

Зауважимо, що $\lim_{x\to\infty}\frac{8-3/x}{1-3/x+7/x^2}=8.$ Дістанемо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=e^8.$$

14. Знайти границі функції:

а) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+4x^2+5}{2-2x^3+7x};$ б) $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x^2-3x+2};$

в) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\cos 4x-1};$ г) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-4}\right)^{x+5}.$

Розв'язання

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x^2+5}{2-2x^3+7x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{\dfrac{2}{x^3}-2+\dfrac{7}{x^2}}=\left|\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0\right|=-\dfrac{1}{2}$.

б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-8}{x^2-3x+2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}x^2-3x+2=0\\ D=1\\ x_1=2,\ x_2=1\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=2\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2}{x-1}=2\cdot\dfrac{4}{1}=8$

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos3x}{\cos4x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos3x}{1-\cos4x}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{3x}{2}}{2\sin^2 2x}=$

$=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin^2\dfrac{3x}{2}}{x^2}\cdot x^2}{\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}\cdot x^2}=\left|\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin kx}{x}=k\right|=-\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}{2^2}=-\dfrac{9}{16}$.

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-4}\right)^{x+5}=\left(1^\infty\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\left(\dfrac{2x+3}{2x-4}-1\right)\right)^{x+5}=e^{7\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+5}{2x-4}}=e^{7\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{5}{x}}{2-\frac{4}{x}}}=e^{7\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{e^7}$.

Елементи диференціального числення

1. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^2+2xy^2+3y^4=6$ у точці M_0 (1, – 1).

Розв'язання

З рівняння кривої знайдемо похідну:

$$2x+2y^2+4xyy'+12y^3y'=0\text{, тобто } y'=-\frac{x^2+y^2}{2xy+6y^3}.$$

Таким чином, $y'(1)=f'(1)=-\frac{1+(-1)^2}{2\cdot1\cdot(-1)+6(-1)^3}=\frac{1}{4}$.

Рівняння дотичної матиме вигляд:

$$y+1=\frac{1}{4}(x-1)\text{, або } x-4y-5=0.$$

Рівняння нормалі:

$$y+1=-4(x-1)\text{, або } 4x+y-3=0.$$

2. Який кут утворює з віссю Ox дотична до кривої $y=\frac{2}{3}x^5-\frac{1}{9}x^3$, проведена в точці з абсцисою x = 1?

Розв'язання

Знаходимо похідну $y'=\frac{10}{3}x^4-\frac{1}{3}x^2$; при x = 1, $y'=3$, таким чином $\mathrm{tg}\alpha=3$, звідки $\alpha=\mathrm{arctg}3\approx71^\circ34'$.

3. Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні функцій:

а) $y=\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt[3]{2x+5}}}$;　　　б) $y=xarctg^3 5x+\ln tgx$;

в) $y^2=x\sin y$;　　　г) $y=(tgx)^{\cos 3x}$.

Розв'язання

а) Перепишемо дану функцію у вигляді: $y=\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt[3]{2x+5}}}=\left(x+(2x+5)^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

$$y'=-\frac{1}{2}\left(x+(2x+5)^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{3}(2x+5)^{-\frac{2}{3}}\cdot2\right)=-\frac{1}{2\sqrt{\left(x+\sqrt[3]{2x+5}\right)^3}}\left(1+\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+5)^2}}\right).$$

б) $y'=\left(x\cdot arctg^3 5x+\ln tgx\right)'=1\cdot arctg^3 5x+x\cdot3arctg^2 5x\cdot\frac{5}{1+25x^2}+\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=$

$$= arctg^3 5x + 15 \cdot \frac{x arctg^2 5x}{1+25x^2} + \frac{2}{\sin 2x}.$$

в) Знаходимо похідну неявно заданої функції:

$$2y \cdot y' = \sin y + x \cdot \cos y \cdot y';$$

$$y'(2y - x \cdot \cos y) = \sin y;$$

$$y' = \frac{\sin y}{2y - x \cdot \cos y}.$$

г) Похідну степенево-показникової функції обчислюємо, використовуючи логарифмічне диференціювання:

$$\ln y = \cos 3x \cdot \ln(tgx);$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -3\sin 3x \cdot \ln(tgx) + \cos 3x \cdot \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$y' = \left(-3\sin 3x \cdot \ln(tgx) + \frac{2\cos 3x}{\sin 2x}\right) \cdot (tgx)^{\cos 3x}.$$

4. Знайти y'_x від функції, що задана параметрично:

$$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1. \end{cases}$$

Розв'язання

Функція задана параметрично. Похідну шукаємо за формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

Знайдемо $x'_t = 3t^2 + 3 = 3(t^2+1)$, $y'_t = 15t^2(t^2+1) \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = = \frac{15t^2(t^2+1)}{3(t^2+1)} = 5t^2$.

5. Знайти інтервали монотонності функції $y = x(1+\sqrt{x})$.

Розв'язання

Область визначення функції $[0, +\infty)$. Знайдемо похідну $y' = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Похідна додатна на проміжку $[0, +\infty)$. Таким чином, функція зростає на всій області визначення.

6. Знайти точки екстремуму функції $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

Розв'язання

1. Знаходимо першу похідну $y' = x^2 - 4x + 3$.

2. Знаходимо дійсні корені рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$ ($f'(x) = 0$). Звідки $x_1 = 1,\ x_2 = 3$.

3. Досліджуємо критичні значення. Для цього область визначення функції $(-\infty, +\infty)$ здобутими критичними точками розбиваємо на три інтервали $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$, $(3, +\infty)$.

Виберемо у кожному інтервалі по одній точці і обчислимо значення похідної в цих точках:

$$x = 0 \in (-\infty, 1),\ y'(0) = 3 > 0\,;$$

$$x = 2 \in (1, 3),\ y'(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 < 0\,;$$

$$x = 4 \in (3, +\infty),\ y'(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 11 > 0\,.$$

Знак похідної на кожному з трьох інтервалів збігається зі знаком похідної в обраній точці відповідного інтервалу (табл.).

З таблиці видно: при переході (зліва направо) через значення x = 1 похідна змінює знак з «+» на «–». Звідси, при x = 1 функція має максимум:

$$y_{\max}(1) = \frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = \frac{7}{3}\,.$$

x	$(-\infty,\ 1)$	1	$(1,\ 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y $\nearrow$		$y_{\max}(1) = \frac{7}{3}$ $\searrow$		$y_{\min}(3) = 1$ $\nearrow$	

При переході через значення x = 3 похідна змінює знак з «–» на «+». Звідси, при x = 3 функція має мінімум:

$$Y_{\min}(3) = \frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 = 1.$$

7. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \dfrac{x + 3}{x^2 + 7}$ на відрізку $[-3; 7]$.

Розв'язання

Знаходимо критичні значення функції, що належать даному відрізку:

$$y' = \left(\frac{x + 3}{x^2 + 7}\right)' = \frac{x^2 + 7 - 2x(x + 3)}{(x^2 + 7)^2} = \frac{-x^2 - 6 + 7}{(x^2 + 7)^2}\,;$$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + 6x - 7 = 0 \\ x^2 + 7 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = 1 \in [-3; 7],\ x_2 = -7 \notin [-3; 7].$$

Обчислюємо значення функції:

$$y(-3) = \frac{-3 + 3}{9 + 7} = 0;$$

$$y(1) = \frac{1 + 3}{1 + 7} = \frac{1}{2}; \qquad y(7) = \frac{7 + 3}{49 + 7} = \frac{10}{56}.$$

Отже, $\min\limits_{x\in[-3;7]} y(x)=y(-3)=0;\quad \max\limits_{x\in[-3;7]} y(x)=y(1)=\dfrac{1}{2}.$

8. Знайти асимптоти кривої $y=\sqrt{x^3/(x-2)}$.

Розв'язання

Функція визначена на інтервалах $(-\infty,0)$ та $(2,+\infty)$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 2+0}\sqrt{x^3/(x-2)}=+\infty$, пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою кривої.

Визначимо тепер існування похилих асимптот:

1) $k_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3/(x-2)}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x/(x-2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1/\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=1$,

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-x+2)}{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}\right)}=1;$$

2) $k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{(-x)^3}{2-x}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}}{x}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{x}}}=-1$,

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{-x}+x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x(-x-2+x)}{\sqrt{2-x}\left(\sqrt{-x}+\sqrt{2-x}\right)}=-1.$$

Таким чином, існують права $y = x + 1$ та ліва $y = -x - 1$ похилі асимптоти кривої.

9. Дослідити методами диференціального числення функцію $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ та побудувати її графік.

Розв'язання

Для побудови графіка функції проводимо повне дослідження функції:

1) Область визначення:

$D(y): x-1\neq 0 \Rightarrow x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty).$

2) Парність, непарність функції:

$y(-x)=\dfrac{(-x)^2}{-x-1}=-\dfrac{x^2}{x+1}$ – функція ні парна, ні непарна.

3) Неперервність функції, характер точок розриву:

$x=1$ – точка розриву.

$$\lim_{x\to 1-}\frac{x^2}{x-1}=\left|\begin{matrix}x=1-\alpha\\ \alpha>0\\ \alpha\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\alpha)^2}{-\alpha}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{x^2}{x-1}=\left|\begin{matrix}x=1+\alpha\\ \alpha>0\\ \alpha\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha)^2}{1+\alpha-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha}=+\infty$$

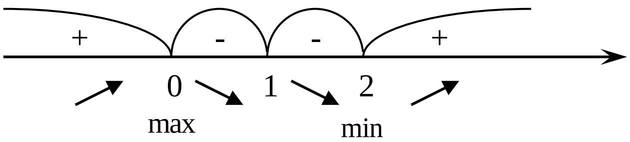
$x=1$ – точка розриву II виду.

4) Точки перетину графіка функції з координата осями: графік проходить через початок координат.

5) Монотонність функції, точки екстремуму:

$$y'=\left(\frac{x^2}{x-1}\right)'=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$y'=0\Rightarrow\begin{cases}x(x-2)=0\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{matrix}x=0\\ x=2\end{matrix}\right.$$



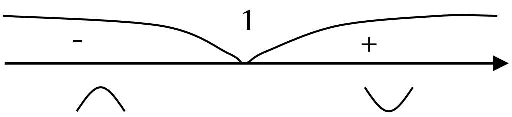
Функція зростає: $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. Функція спадає: $(0;1)\cup(1;2)$.

Точка $(0;0)$ – точка максимуму. Точка $(2;4)$ – точка мінімуму.

6) Опуклість, випуклість функції, точка перегину графіка функції:

$$y''=\left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4}=$$
$$=\frac{(x-1)(2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

$$y''=0\Rightarrow\frac{2}{(x-1)^3}=0\Rightarrow x\in\{\ \varnothing$$



Функція опукла: $(-\infty;1)$. Функція вгнута: $(1;+\infty)$.

Точок перегину графіка функції немає.

7) Асимптоти графіка функції:

а) вертикальні асимптоти: $x = a$, так як $\lim\limits_{x \to 1\pm} \dfrac{x^2}{x-1} = \pm\infty$, то $x = 1 -$ вертикальна асимптота.

б) горизонтальні асимптоти: $y = c$, $c = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = \pm\infty \Rightarrow$ горизонтальних асимптот немає.

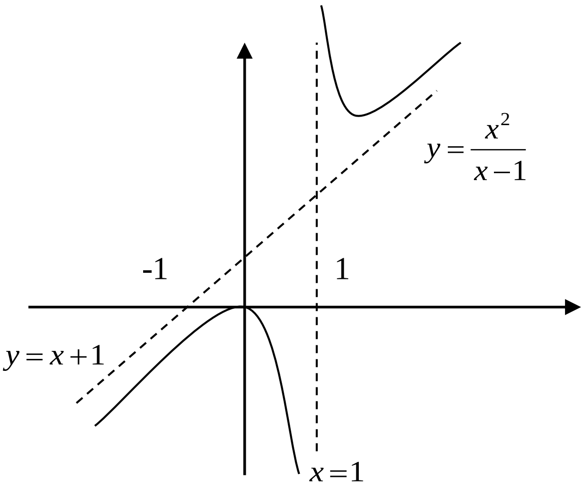
в) похилі асимптоти: $y = kx + b$,

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

Отже, $y = x + 1$ – похила асимптота.

За результатами досліджень будуємо графік функції.



10. *Знайти* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *і* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ *для функції* $z = x^3 y + \sin\left(x^2 + \sqrt{y}\right) + \operatorname{tg} x + \ln y$.

Розв'язання

Знайдемо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Вважаючи, що $y = \text{const}$, дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right) \cdot 2x + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

При знаходженні $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що $x = \text{const}$. Дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right) \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y}.$$

11. Знайти z'_x і z'_y для функції $z = x^2 y + xy^2$.

Розв'язання

Знайдемо z'_x, вважаючи $y = \text{const}$:

$$z'_x = 2xy + y^2.$$

Знайдемо z'_y, вважаючи $x = \text{const}$:

$$z'_y = x^2 + 2xy .$$

12.Знайти похідну $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функції $z = \ln tg\left(x^2 + y\right)$.

Розв'язання

Знаходимо частинну похідну першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln tg\left(x^2 + y\right)\right) = \frac{1}{tg\left(x^2 + y\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(x^2 + y\right)} \cdot 2x = \frac{2x}{\sin\left(x^2 + y\right)\cos\left(x^2 + y\right)} = \frac{4x}{\sin\left(2x^2 + 2y\right)},$$

тоді

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4x}{\sin\left(2x^2 + 2y\right)}\right) = 4x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2\left(2x^2 + 2y\right)}\right) \cdot 2 = -\frac{8x}{\sin^2\left(2x^2 + 2y\right)}.$$

13. Знайти екстремум функції $z = \dfrac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4}\right)$.

Розв'язання

1) Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4}.$$

2) Прирівнюємо до нуля частинні похідні першого порядку, розв'язуємо систему і знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{12}y - \dfrac{2}{3}x + \dfrac{47}{3} = 0 \\ -\dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{12}x + \dfrac{47}{4} = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 8x + y = 188 \\ x + 6y = 141 \end{cases}.$$

Звідси $x = 21$, $y = 20$.

Стаціонарна точка $M(21, 20)$.

3) Знайдемо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{12}.$$

$$\Delta = AC - B^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{144} > 0.$$

Оскільки $A < 0$, то в точці M функція має максимум:

$$z_{\max} = \frac{21}{2} \cdot 20 + (47 - 21 - 20)\left(\frac{21}{3} + \frac{20}{4}\right) = 282.$$

14. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = -2x^2 + xy - \frac{y^2}{2} + 7x - y + 3.$$

Розв'язання

Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -4x + y + 7,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - y - 1.$$

Використовуючи необхідну умову екстремуму, знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} -4x + y + 7 = 0, \\ x - y - 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases} \Rightarrow M_0(2;1).$$

Обчислюємо значення частинних похідних другого порядку в точці $M_0(2;1)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -1;$$

Складаємо дискримінант: $\Delta = AC - B^2$.

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) = -4; \; B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) = 1; \; C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) = -1;$$
$$\Delta = -4 \cdot (-1) - 1 = 3 \rangle\, 0, \quad A = -4 \langle\, 0$$

Отже, в точці $M_0(2;1)$ задана функція має максимум:

$$z_{\max} = z(2;1) = 9{,}5.$$

Елементи інтегрального числення

1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int x^2\sqrt{x^3+5}dx$; в); в) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

Розв'язання

а) Для обчислення даного інтегралу потрібно відповідну функцію внести під знак диференціалу: $d(f(x))=f'(x)dx$.

$$\int x^2\sqrt{x^3+5}dx=\left|d\left(x^3+5\right)=3x^2dx\right|=\frac{1}{3}\int\left(x^3+5\right)^{\frac{1}{2}}d\left(x^3+5\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(x^3+5\right)^{\frac{3}{2}}+C.$$

г) Використаємо універсальну тригонометричну підстановку $tg\,\frac{x}{2}=t$.

$$\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\left|\begin{array}{l} tg\,\frac{x}{2}=t,\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=$$

$$=2\cdot\int\frac{dt}{1+t^2+2t+1-t^2}=\int\frac{dt}{t+1}=\ln|t+1|+C=\ln\left|tg\,\frac{x}{2}+1\right|+C.$$

1. $\int\frac{1\cdot dx}{x^2\left(1+x^2\right)}=\int\frac{1+x^2-x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{1}{x}-\mathrm{arctg}x+C.$

2. Використовуючи формулу інтегрування частинами, знайти невизначені інтеграли:

а) $\int\left(x^2-1\right)e^{-x}dx$; б) $\int x\,\mathrm{arctg}x dx$

Розв'язання

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du.$$

а) $\int\left(x^2-1\right)e^{-x}dx=\left|\begin{array}{l} u=x^2-1 \\ dv=e^{-x}dx \\ du=2xdx \\ v=-e^{-x}\end{array}\right|=-\left(x^2-1\right)e^{-x}+2\int xe^{-x}dx=$

$$=\left|\begin{array}{l} u=x \\ dv=e^{-x}dx \\ du=dx \\ v=-e^{-x}\end{array}\right|=-\left(x^2-1\right)e^{-x}+2\cdot\left(-xe^{-x}+\int e^{-x}dx\right)=-\left(x^2-1\right)e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C.$$

б) $\int x\,\mathrm{arctg}\,xdx=\left|\begin{array}{l} u=\mathrm{arctg}\,x,\ \ du=\frac{dx}{x^2+1}; \\ dv=xdx\Rightarrow v=\int xdx=\frac{x^2}{2}\end{array}\right|=$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}(x-\operatorname{arctg}x)+C.$$

3. $$\int\left(1+x^2\right)^{10}xdx=\left|\begin{array}{l}1+x^2=t\\ dt=2xdx\\ xdx=\dfrac{dt}{2}\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int t^{10}dt=\frac{t^{11}}{22}+C=\frac{\left(1+x^2\right)^{11}}{22}+C.$$

4. $$\int\frac{\sin 3x}{(1-2\cos 3x)^2}dx=\frac{1}{3}\int\frac{\sin 3xd(3x)}{(1-2\cos 3x)^2}=\frac{1}{2\cdot 3}\int\frac{2d(-\cos 3x)}{(1-2\cos 3x)^2}=$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{d(-2\cos 3x)}{(1-2\cos 3x)^2}=\frac{1}{6}\int\frac{d(1-2\cos 3x)}{(1-2\cos 3x)^2}=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-2\cos 3x}+C.$$

5. $$\int\frac{5x-3}{x^2-8x+17}dx=\int\frac{(5x-3)dx}{x^2-2\cdot x\cdot 4+16-16+17}=\int\frac{(5x-3)dx}{(x-4)^2+1}=\left|\begin{array}{l}x-4=t\\ x=t+4\\ dx=dt\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{5t+20-3}{t^2+1}dt=5\int\frac{tdt}{t^2+1}+17\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{5}{2}\ln\left(t^2+1\right)+17\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=\frac{5}{2}\ln\left(x^2-8x+17\right)+17\operatorname{arctg}(x-4)+C.$$

5. Знайти інтеграли від дробово-раціональних функцій:

а) $\int\frac{2x^3+4}{x^2+2x-8}dx$; б) $\int\frac{x+2}{x^3-2x^2}dx$

Розв'язання

а) $\int\frac{2x^3+4}{x^2+2x-8}dx.$

Підінтегральний дріб є неправильним дробом, тому потрібно виділити цілу частину:

$$\int\frac{2x^2+4}{x^2 2x-8}dx=\int\left(2x-4+\frac{24x-28}{x^2+2x-8}\right)dx=x^2-4x+4\int\frac{6x-7}{x^2+2x-8}dx\overset{*}{=}$$

Правильний підінтегральний дріб представляємо у вигляді суми простих дробів:

$$\frac{6x-7}{x^2+2x-8}=\frac{6x-7}{(x+4)(x-2)}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x+4)}{(x+4)(x-2)};$$

$x^1:\quad A+B=6,\quad A=\frac{31}{6}$

$x^0:\quad -2A+4B=-7,\quad B=\frac{5}{6},$

Звідси:

$$\overset{*}{=}x^2-4x+4\cdot\left(\frac{31}{6}\int\frac{dx}{x+4}+\frac{5}{6}\int\frac{dx}{x-2}\right)=x^2-4x+\frac{62}{3}\ln|x+4|+\frac{10}{3}\ln|x-2|+C.$$

б) $\int\frac{x+2}{x^3-2x^2}dx$

Дріб правильний, тому представимо його у вигляді суми простих дробів:

$$\left|\frac{x+2}{x^3-2x^2}=\frac{x+2}{x^2(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}=\frac{Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2}{x^2(x-2)}\right.$$

$$x+2=x^2(A+C)+x(B-2A)-2B;$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0=A+C \\ x^1 & 1=B-2A \\ x^0 & 2=-2B \end{array}\Bigg\}\Leftrightarrow\begin{cases} B=-1 \\ A=-1 \\ C=1 \end{cases}\qquad \left.\frac{x+2}{x^3-2x^2}=\frac{-1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-2}\right|=$$

$$=\int\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-2}\right)dx=-\ln|x|+\frac{1}{x}+\ln|x-2|+C.$$

7. $$\int\frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}=\left|\begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\quad x=2\operatorname{arctg}t, \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2};\quad \sin x=\frac{2t}{t^2+1}; \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{4t}{1+t^2}+3\right)}=2\int\frac{dt}{2t^2+4t+4}=\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2+1}=$$

$$=\operatorname{arctg}(t+1)+C=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)+C.$$

8. $$\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\left|\begin{array}{l} \operatorname{tg}x=t,\quad dt=\frac{dx}{\cos^2 x}; \\ \frac{1}{(\cos^2 x)}=(1+\operatorname{tg}^2 x)=(1+t^2) \end{array}\right|=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=$$

$$=\int(1+t^2)dt=t+\frac{t^3}{3}+C=\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C.$$

9. $$\int\cos^4 x dx=\int(\cos^2 x)^2 dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(3+4\cos 2x+\cos 4x)dx=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

1. $$\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}=\left|\begin{array}{ll} 1+\sqrt{2x+1}=t,\quad dx=(t-1)dt; & \\ x=\frac{(t-1)^2}{2}, & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline t & 2 & 4 \end{array} \end{array}\right|=$$

$$=\int_2^4\frac{t-1}{t}dt=\int_2^4\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=(t-\ln|t|)\Big|_2^4=4-\ln 4-(2-\ln 2)=2-\ln 2.$$

2. $$\int_1^e x\ln x dx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln x, & du=\frac{dx}{x}; \\ dv=xdx, & v=\frac{x^2}{2} \end{array}\right|=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e\frac{x^2\cdot dx}{x}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}\left(\ln e-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\ln 1-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2+1}{4}.$$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x = y^2 + 2y + 6 (l_1), \quad x - 3y = 26 (l_2)$.

Розв'язання

Побудуємо фігуру, обмежену параболою $x = y^2 + 2y + 6$ та прямою $x - 3y = 26$, на координатній площині; при цьому обов'язково треба знайти точки перетину заданих ліній між собою та з осями координат (рис. 7.20)

$$l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 + 2y + 6 \\ x - 3y = 26 \end{cases} \begin{cases} x = 3y + 26 \\ y^2 - y - 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y + 26 \\ \left[\begin{array}{l} y = -4 \\ y = 5 \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 14 \\ y = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 41 \\ y = 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(14;\ -4) \\ M_2(41;\ 5). \end{array}\right.$$

$$l_1 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 + 2y + 6 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M_3(6;\ 0).$$

$$l_1 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = y^2 + 2y + 6 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + 2y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

$$l_1 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 26 \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{26}{3} \end{cases} \Leftrightarrow M_4\left(0;\ -\frac{26}{3}\right).$$

$$l_2 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 26 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 26 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M_5(26;\ 0).$$

$x = y^2 + 2y + 6 \Leftrightarrow (x-5) = (y+1)^2 \Rightarrow M_6(5;\ -1)$ — вершина параболи.

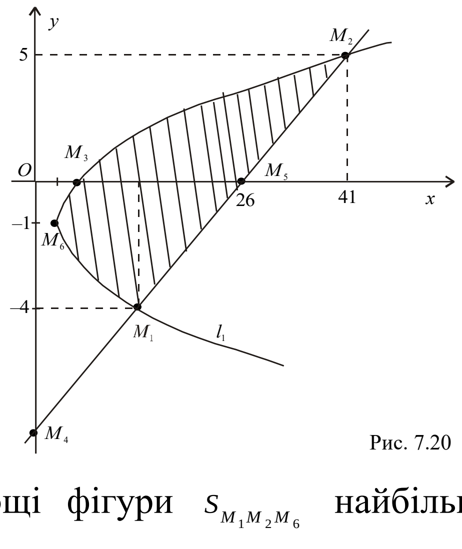


Рис. 7.20

Для обчислення площі фігури $S_{M_1 M_2 M_6}$ найбільш зручно скористатись формулою $S = \int\limits_c^d (\varphi_1(y) - \varphi_2(y))dy$.

Отже, за цією формулою дістанемо:

$$S_{M_1 M_2 M_6} = \int\limits_{-4}^{5} \left(3y + 26 - \left(y^2 + 2y + 6\right)\right)dy = \int\limits_{-4}^{5} \left(-y^2 + y + 20\right)dy =$$

$$= \left(-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 20y\right)\Bigg|_{-4}^{5} = -\frac{125}{3} + \frac{25}{2} + 100 - \left(\frac{64}{3} + \frac{16}{2} - 80\right) = 121{,}5.$$

2. Обчислити означений інтеграл: $\int_1^e x\ln^2 x dx$.

Розв'язування:

Означені інтеграли обчислюються за формулою Ньютона-Лейбніца: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, де $F(x)$— первісна підінтегральної функції. Формула інтегрування по частинах має такий вигляд: $\int_a^b udv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

$$\int_1^e x\ln^2 xdx = \begin{vmatrix} u = \ln^2 x, & du = 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx, \\ dv = xdx, & v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x\Big|_1^e -$$

$$-\int_1^e x\ln xdx == \begin{vmatrix} u = \ln x, & du = \frac{dx}{x}, \\ dv = dx, & v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}e^2\ln^2 e - \left(\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{4}x^2\ \Big|_1^e = \frac{1}{4}\left(e^2 - 1\right).$$

Зауваження: виконуючи заміну змінних в означеному інтегралі, потрібно змінити межі інтегрування.

3. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність: $\int_0^{+\infty}\frac{arctgx}{1+x^2}dx$.

Розв'язання

$$\int_0^{+\infty}\frac{arctgx}{1+x^2}dx = \lim_{a\to+\infty}\left(\int_0^a\frac{arctgx}{1+x^2}dx\right) = \left|d(arctgx) = \frac{dx}{1+x^2}\right| =$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\left(\int_0^a arctgx\cdot d(arctgx)\right) = \lim_{a\to+\infty}\left(\frac{arctg^2 x}{2}\Bigg|_0^a\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}\left(arctg^2 a - arctg^2 0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4},$$

даний невласний інтеграл збігається.

4. За допомогою означеного інтегралу обчислити площу фігури, яка обмежена лініями: $y = -x^2 + 2, \quad y = x + 2.$

Розв'язання

Площу плоскої фігури можна обчислити за формулою:_$S = \int_a^b y(x)dx$.

Знаходимо точки перетину кривих:

$-x^2 + 2 = x + 2, \quad x + x^2 = 0, \quad x(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0.$

Отже, площа фігури буде:

$$S=\int_{-1}^{0}\left(y_1(x)-y_2(x)\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(-x^2+2-x-2\right)dx=-\int_{-1}^{0}\left(x^2+x\right)dx=$$

$$=-\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=-\left(0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6},$$

отже, $S=\frac{1}{6}$ кв. од.

5. Знайти похідну $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ функції $z=\ln tg\left(x^2+y\right)$.

Розв'язування:

Знаходимо частинну похідну першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln tg\left(x^2+y\right)\right)=\frac{1}{tg\left(x^2+y\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(x^2+y\right)}\cdot 2x=$$

$$=\frac{2x}{\sin\left(x^2+y\right)\cos\left(x^2+y\right)}=\frac{4x}{\sin\left(2x^2+2y\right)},$$

тоді

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4x}{\sin\left(2x^2+2y\right)}\right)=4x\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2\left(2x^2+2y\right)}\right)\cdot 2=$$

$$=-\frac{8x}{\sin^2\left(2x^2+2y\right)}.$$

6. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z=-2x^2+xy-\frac{y^2}{2}+7x-y+3\,.$$

Розв'язання

Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-4x+y+7,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x-y-1.$$

Використовуючи необхідну умову екстремуму, знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases}-4x+y+7=0,\\ x-y-1=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2,\\ y=1,\end{cases}\Rightarrow M_0(2;1).$$

Обчислюємо значення частинних похідних другого порядку в точці $M_0(2;1)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-4;\quad\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1;\quad\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-1;$$

Складаємо дискримінант: $\Delta=AC-B^2$.

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0)=-4;\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(M_0)=1;\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0)=-1;$$

$$\Delta=-4\cdot(-1)-1=3\rangle\,0,\quad A=-4\,\langle\,0$$

Отже, в точці $M_0(2;1)$ задана функція має максимум:

$$z_{\max}=z(2;1)=9{,}5.$$

7. Обчислити криволінійний інтеграл по лінії AB:
$\int\limits_{AB}\left(x^2-y^2\right)dx+xydy$, де AB — відрізок, що з'єднує точки $A(1;1)$, $B(3;4)$.

Розв'язання

Складаємо рівняння прямої, що проходить через дві точки

$A(1;1)$, $B(3;4)$: $\dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y-1}{4-1}$, $\Rightarrow 3x-2y-1=0.$

Звідси $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$, $dy=\dfrac{3}{2}dx$, $1\le x\le 3.$

Отже,

$$\int\limits_{AB}\left(x^2-y^2\right)dx+xydy=\int\limits_1^3\left(x^2-\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)^2+x\cdot\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}\right)dx=$$

$$=\int\limits_1^3\left(x^2-\frac{9}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{4}{4}x^2-\frac{3}{4}x\right)dx=\int\limits_1^3\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}x\right)\Bigg|_1^3=9+\frac{27}{4}-\frac{3}{4}-\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{85}{6}.$$

8. Обчислити подвійний інтеграл:
$\iint\limits_D\left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dxdy$, D: $x=1$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=-x^2$.

Розв'язання

$$D:\begin{cases}-x^2\le y\le\sqrt[3]{x},\\ 0\le x\le 1.\end{cases}$$

$$\iint\limits_D\left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dxdy=\int\limits_0^1dx\int\limits_{-x^2}^{\sqrt[3]{x}}\left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\left(6x^2y^3+8x^3y^4\right)\Bigg|_{-x^2}^{\sqrt[3]{x}}\right)dx=\int\limits_0^1\left(6x^3+8x^{\frac{13}{3}}+6x^8-8x^{11}\right)dx=$$

$$=\left(6\cdot\frac{x^4}{4}-8\cdot\frac{3}{16}x^{\frac{16}{3}}+6\cdot\frac{x^9}{9}-8\cdot\frac{x^{12}}{12}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=3.$$

9. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
а) $e^y\left(1+x^2\right)dy-2x\left(1+e^y\right)dx=0$, б) $y'-3y=e^{-2x}$.

Розв'язання

а) $e^y\left(1+x^2\right)dy-2x\left(1+e^y\right)dx=0$

Дане рівняння є рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними.

$e^y(1+x^2)dy = 2x(1+e^y)dx;$

$\int \frac{e^y}{1+e^y}dy = \int \frac{2x}{1+x^2}dx;$

$\int \frac{d(1+e^y)}{1+e^y} = \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2};$

$\ln(1+e^y) = \ln(1+x^2) + \ln C;$

$1+e^y = C(1+x^2).$

$C = \frac{1+e^y}{1+x^2}$ — загальний розв'язок рівняння.

б) $y' - 3y = e^{-2x}.$

Дане рівняння є лінійним диференційним рівнянням першого порядку.

Зробимо заміну: $y = u \cdot v,\ u = u(x), v = v(x), \quad y' = u'v + uv'.$

$u'v + uv' - 3uv = e^{-2x};$

$u'v + u\cdot(v' - 3v) = e^{-2x}.$

Нехай $v' - 3v = 0, \quad \frac{dv}{dx} = 3v, \quad \int \frac{dv}{v} = 3\cdot\int dx, \quad \ln v = 3x,$ тоді

$v = e^{3x}.$

Знайдемо функцію $u = u(x).$

$u' \cdot e^{3x} = e^{-2x};$

$\int du = \int e^{-5x}dx;$

$u = -\frac{1}{5}e^{-5x} + C.$

Отже, $y = e^{3x}\left(-\frac{1}{5}e^{-5x} + C\right) = C\cdot e^{3x} - \frac{1}{5}e^{-2x}$ — загальний розв'язок рівняння.

Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики

1. Інвестиційна кампанія має 12 пакетів акцій, серед яких 7 пакетів кондитерських фабрик. Визначити ймовірність, що серед навмання вибраних 5 пакетів акцій є рівно 3 пакети кондитерських фабрик.

Розв'язання

Подія A – серед навмання вибраних 5 пакетів акцій є 3 пакети цукрових заводів.

Використовуємо класичне означення ймовірності:

$p(A)=\frac{m}{n}$, де $n=C_{12}^5=\frac{12!}{5!\cdot 7!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=792$,

$m=C_7^3\cdot C_5^2=\frac{7!}{3!\cdot 4!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}=350$, (12-7=5 – пакети не кондитерських фабрик.

Отже, $p(A)=\frac{350}{792}\approx 0{,}44.$

2. Удвох партіях відповідно 82% і 45% якісних виробів. Навмання вибирають по одному виробу із кожної партії. Яка ймовірність виявити серед них: а) хоча б один бракований виріб; б) два бракованих вироби; в) один бракований та один якісний вироби?

Розв'язання

$p_1=0{,}82$ – ймовірність того, що виріб якісний, якщо він з першої партії;

$p_2=0{,}45$ – ймовірність того, що виріб якісний, якщо він з другої партії.

Ймовірності того, що вироби браковані, відповідно дорівнюють: $q_1=1-0{,}82=0{,}18;\quad q_2=1-0{,}45=0{,}55$.

а) подія A – серед двох виробів хоча б один бракований;

протилежна подія $\overline{A}$ – обидва вироби якісні, тоді

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-p_1\cdot p_2=1-0{,}82\cdot 0{,}45=0{,}631$.

б) подія B – обидва вироби браковані:

$P(B)=q_1\cdot q_2=0{,}18\cdot 0{,}55=0{,}099$.

в) подія C – один виріб бракований і один якісний:

$P(C)=p_1\cdot q_2+q_1\cdot p_2=0{,}82\cdot 0{,}55+0{,}18\cdot 0{,}45=0{,}532$.

3. У магазин надходять однотипні вироби з трьох заводів: 30% – з першого заводу, 60% – з другого, 10% – з третього. Серед виробів першого заводу 70% виробів першого сорту, серед виробів другого і третього заводів відповідно 90% і 80% виробів першого сорту. Куплено один виріб. Він виявився виробом першого сорту. Знайти ймовірність того, що куплений виріб виготовлений на другому заводі.

Розв'язання

Для знаходження відповідної ймовірності потрібно використати формулу Байєса.

Описуємо гіпотези: $H_i, i=1,2,3.$

H_i – виріб, виготовлений на i-ому заводі.

Ймовірності гіпотез відповідно дорівнюють:

$P(H_1)=\frac{30}{100}=0{,}3;\quad P(H_2)=\frac{60}{100}=0{,}6;\quad P(H_3)=\frac{10}{100}=0{,}1.$

Подія A– куплений виріб є виробом першого сорту. Обчислюємо умовні ймовірності:

$$P(A/H_1)=\frac{70}{100}=0{,}7,\ P(A/H_2)=\frac{90}{100}=0{,}9,\ P(A/H_3)=\frac{80}{100}=0{,}8$$

Згідно з умовою задачі, потрібно знайти $P(H_2/A)$– ймовірність того, що куплений виріб першого сорту виготовлений на другому заводі. За формулою Байєса:

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A/H_i)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}9}{0{,}3\cdot 0{,}7+0{,}6\cdot 0{,}9+0{,}1\cdot 0{,}8}=$$

$$=\frac{0{,}54}{0{,}83}\approx 0{,}65.$$

4. Внаслідок маркетингових досліджень встановлено, що ймовірність реалізації одиниці продукції становить 0,6. Знайти ймовірність, що з 200 вироблених одиниць продукції буде реалізовано: а) рівно 130; б) не більше 70% з 200 одиниць; в) від 120 до 150 одиниць; г) обчислити найімовірніше число реалізованих одиниць.

Розв'язання

Для знаходження відповідних ймовірностей використовуємо локальну та інтегральну теореми Лапласа (їх значення шукають за відповідними таблицями):

а) за умовою задачі $n=200,\ k=130,\ p=0{,}6,\ q=0{,}4$

$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, де $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$. **Функція** $\varphi(x)$ **– парна:** $\varphi(-x)=\varphi(x)$

Обчислюємо значення x:

$$x=\frac{130-200\cdot 0{,}6}{\sqrt{200\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}}=\frac{10}{\sqrt{48}}\approx 1{,}44.$$

Використовуючи таблицю значень функції $\varphi(x)$, знаходимо $\varphi(1{,}44)=0{,}1415$, тоді

$$P_{200}(130)=\frac{1}{\sqrt{200\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}}\varphi(1{,}44)=0{,}14\cdot 0{,}1415\approx 0{,}02.$$

б) Подія A– буде реалізовано не більше 70% продукції (140 одиниць становить 70%),

$P(A)=P_{200}(0;140).$

Згідно з інтегральною теоремою Лапласа:

$P_n(k_1,k_2)=\Phi(x'')-\Phi(x')$, де $x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}},\ x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$,

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ (функція протабульована).

Інтегральна функція Лапласа непарна: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$**, для значень** $x > 5$ **приймають** $\Phi(x) = \mathbf{0{,}5}$**.**

У даному випадку $k_1 = 0, k_2 = 140, n = 200.$

Обчислюємо значення $x', \quad x''$:

$$x' = \frac{0 - 200 \cdot 0{,}6}{\sqrt{200 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = -\frac{120}{6{,}93} = -17{,}32;$$

$$x'' = \frac{140 - 200 \cdot 0{,}6}{\sqrt{200 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = \frac{20}{6{,}93} = 2{,}89,$$

тоді: $P_{200}(0;140) = \Phi(2{,}89) - \Phi(-17{,}32) = 0{,}498 + 0{,}5 = 0{,}998$.

в) За допомогою інтегральної теореми Лапласа знаходимо

$$P_{200}(120;150): \quad x' = \frac{120 - 200 \cdot 0{,}6}{\sqrt{200 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = 0, \quad x'' = \frac{150 - 200 \cdot 0{,}6}{\sqrt{200 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} \approx 4{,}33,$$

тоді:

$$P_{200}(120;150) = \Phi(4{,}33) - \Phi(0) = 0{,}4999 - 0 \approx 0{,}5.$$

г) Найімовірніше число реалізованих одиниць продукції k_0 знаходимо з нерівності:

$$np - q \le k_0 \le np + p,$$

$$200 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \le k_0 \le 200 \cdot 0{,}6 + 0{,}6,$$

$$119{,}6 \le k_0 \le 120{,}6,$$

отже, $k_0 = 120.$

Зауваження: Якщо $n < 10$ потрібно використовувати формулу Бернуллі: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

5. Ймовірність виконання договору для кожного з трьох ($n = 3$) підприємств дорівнює 0,9. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа підприємств, які виконають договір.

Розв'язання

Закон розподілу випадкової величини X записуємо у вигляді таблиці, ймовірності p_i обчислюємо за формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad (p = 0{,}9;\, q = 1 - p = 0{,}1), \quad C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

x_i	0	1	2	3
p_i	0,001	0,027	0,243	0,729

$$P(X = 0) = P_3(0) = C_3^0 \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}001,$$

$$P(X = 1) = P_3(1) = C_3^1 \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}027,$$

$$P(X = 2) = P_3(2) = C_3^2 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^1 = 0{,}243,$$

$$P(X = 3) = P_3(3) = C_3^3 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^0 = 0{,}729.$$

Контроль: $\sum p_i = 1$.

6. Задана функція розподілу ймовірностей прибутку підприємця:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x \le 2,\\ \dfrac{(x-2)^3}{64}, \text{ якщо } 2 < x \le 6,\\ 1, \text{ якщо } x > 6.\end{cases}$$

Потрібно знайти: а) математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення прибутку підприємця; б) ймовірність, що прибуток підприємця прийме значення з інтервалу (3;4).

Розв'язання

Знаходимо густину розподілу ймовірностей $f(x)$:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x \le 2,\\ \dfrac{3}{64}(x-2)^2, \text{ якщо } 2 < x \le 6,\\ 0, \text{ якщо } x > 6.\end{cases}$$

а) Математичне сподівання обчислюємо за формулою: $M(x)=\int_a^b x\cdot f(x)dx$.

$$M(x)=\int_2^6 \frac{3}{64}(x-2)^2 xdx=\frac{3}{64}\int_2^6 \left(x^3-4x^2+4x\right)dx=\frac{3}{64}\left(\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Bigg|_2^6=$$

$$=\frac{3}{64}\left(324-288+72-4+\frac{32}{3}-8\right)=4{,}5.$$

Обчислюємо дисперсію $D(x)=\int_a^b x^2 f(x)dx-M^2(x)$

$$D(x)=\frac{3}{64}\int_2^6 x^2(x-2)^2dx-(4{,}5)^2=\frac{3}{64}\int_2^6\left(x^4-4x^3+4x^2\right)dx-20{,}25=$$

$$=\frac{3}{64}\left(\frac{x^5}{5}-x^4+4\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^6-20{,}25=25{,}9-20{,}25.$$

Середнє квадратичне відхилення прибутку підприємця $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$, отже, $\sigma(x)=\sqrt{5{,}65}\approx 2{,}38$.

б) Ймовірність того, що прибуток підприємця набуде значення із заданого інтервалу, обчислюємо за формулою:

$$P(\alpha<x<\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

В даному випадку:

$$P(3<x<4)=\int_3^4\frac{3}{64}(x-2)^2dx=\frac{3}{64}\cdot\frac{(x-2)^3}{3}\Bigg|_3^4=\frac{1}{64}(8-1)\approx 0{,}11.$$

7. Задана генеральна сукупність. Знайти вибірку з 20 елементів підряд, починаючи з першого, та виконати такі вправи:

1) побудувати статистичний розподіл вибірки та його емпіричну функцію розподілу;
2) обчислити числові характеристики вибірки;
3) побудувати полігон частот та гістограму, розбивши інтервал на 5 рівних підінтервалів;
4) знайти моду, медіану, розмах та коефіцієнт варіації.

16, 12, 9, 11, 8, 16, 18, 12, 8, 18, 14, 16, 11, 15, 21, 19, 11, 14, 16, 18, 15, 9, 14, 16, 12, 13, 17, 19, 13. 17. 14. 11. 12, 13, 8, 10, 9, 11, 10, 17, 13, 18, 16, 21, 9, 14, 15.

Розв'язання

Утворюємо вибірку, що складається з 20 елементів генеральної сукупності

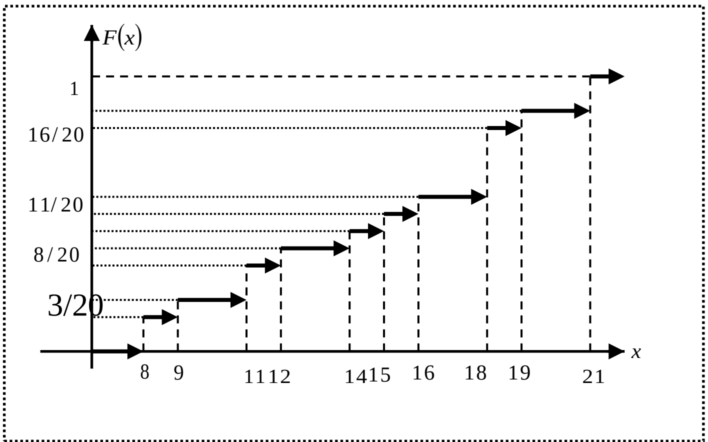
16, 12, 9, 11, 8, 16, 18, 12, 8, 18, 14, 16, 11, 15, 21, 19, 11, 15, 21, 19 і за нею будуємо статистичний розподіл:

X_i	8	9	11	12	14	15	16	18	19	21
N_i	2	1	3	2	1	2	3	2	2	2

з якого і будуємо емпіричну функцію розподілу, яка визначається за формулою $F(x) = \frac{n_x}{n}$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 8 \\ \frac{2}{20}, \text{ якщо } 8 < x \le 9 \\ \frac{3}{20}, \text{ якщо } 9 < x \le 11 \\ \frac{6}{20}, \text{ якщо } 11 < x \le 12 \\ \frac{8}{20}, \text{ якщо } 12 < x \le 14 \\ \frac{9}{20}, \text{ якщо } 14 < x \le 15 \\ \frac{11}{20}, \text{ якщо } 15 < x \le 16 \\ \frac{14}{20}, \text{ якщо } 16 < x \le 18 \\ \frac{16}{20}, \text{ якщо } 18 < x \le 19 \\ \frac{18}{20}, \text{ якщо } 19 < x \le 21 \\ 1, \text{ якщо } x > 21 \end{cases}$$

Побудуємо графік функції $F(x)$



2) Обчислюємо числові характеристики за формулами:

$$\overline{X}_в = \sum \frac{x_i \cdot n_i}{n}, \quad D_в = \overline{X}_в^2 - (\overline{X}_в)^2, \quad \sigma_в = \sqrt{D_в}$$

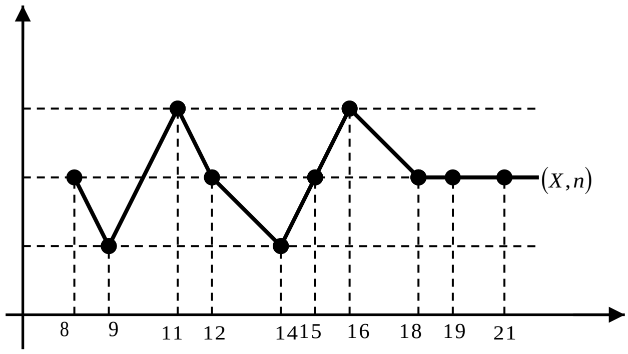
$$\overline{X}_в = \frac{8\cdot 2+9\cdot 1+11\cdot 3+12\cdot 2+14\cdot 1+15\cdot 2+16\cdot 3+18\cdot 2+19\cdot 2+2\cdot 2}{20} = 14{,}5$$

$$\overline{X}_в^2 = \frac{64\cdot 2+81\cdot 1+121\cdot 3+144\cdot 2+196\cdot 1+225\cdot 2+256\cdot 3+324\cdot 2+361\cdot 2+441\cdot 2}{20} =$$

$= 226{,}3$

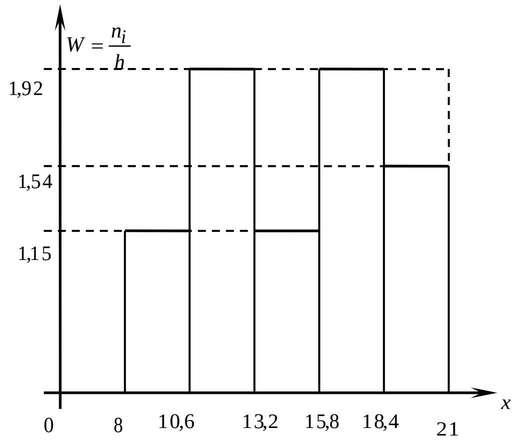
$D_в = 226{,}3 - (14{,}5)^2 = 16{,}05; \quad \sigma_в = \sqrt{16{,}05} = 4{,}01.$

3) Будуємо полігон частот:



Гістограму будуємо з кроком $h = \frac{21-8}{5} 2{,}6$. Для цього спочатку запишемо інтервальний ряд

X	$8 \div 10{,}6$	$10{,}6 \div 13{,}2$	$13{,}2 \div 15{,}8$	$15{,}8 \div 18{,}4$	$18{,}4 \div 21$
n	3	5	3	5	4
$\frac{n_i}{h}$	$\frac{3}{2{,}6} = 1{,}15$	$\frac{5}{2{,}6} = 1{,}92$	$\frac{3}{2{,}6} = 1{,}15$	$\frac{5}{2{,}6} = 1{,}92$	$\frac{4}{2{,}6} = 1{,}54$



4) Мода (варіанта, яка має найбільшу частоту): $M'_o = 11, M'_o = 16$.

Медіана (варіанта, яка ділить варіаційний ряд навпіл): $M_D = 14{,}5$.

Розмах варіації: $R = 21 - 8 = 13$.

Коефіцієнт варіації: $V = \frac{\sigma_в}{X_в} \cdot 100\% = 27{,}66\%$.

8. Зв'язок ознак X та Y подається кореляційною таблицею:

X Y	30	35	40	**45**	50	55	n_y
18	4	6	-	-	-	-	10
28	-	8	10	-	-	-	18
38	-	-	4	**35**	5	-	44
48	-	-	4	12	6	-	22
58	-	-	-	1	3	2	6
N_x	4	14	18	48	14	2	100

Записати рівняння прямої регресії.

Розв'язання

$$y_x - \bar{y} = r_в \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

Для того, щоб записати рівняння прямої регресії нам необхідно знайти: $\bar{y}, \bar{x}, r_в, \sigma_x, \sigma_y$.

Для спрощення підрахунків переходимо до умовних варіант $u_i = \frac{x_i - 45}{5}, v_j = \frac{y_j - 38}{10}$, тобто *C*$_1$*=45, C*$_2$*=38, h*$_1$*=5, h*$_2$*=10* (*C*$_1$, *C*$_2$ – варіанти, що мають найбільшу частоту 35).

U V	-3	-2	-1	0	1	2	n_v
-2	4	6	-	-	-	-	10
-1	-	8	10	-	-	-	18
0	-	-	4	35	5	-	44
1	-	-	4	12	6	-	22
2	-	-	-	1	3	2	6
N_u	4	14	18	48	14	2	100

Послідовно знаходимо: $\bar{x} = h_1\bar{u} + C_1$

$\bar{u} = \frac{1}{100}(4(-3) + 14(-2) + 18(-1) + 48 \cdot 0 + 14 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = -0{,}4;$

Тоді підставляємо у формулу: $\bar{x} = h_1\bar{u} + C_1$;

$\bar{x} = 5(-0{,}4) + 45 = 43$;

Далі шукаємо $\bar{y} = h_2\bar{v} + C_2$

$\bar{v} = \frac{1}{100}(10(-2) + 18(-1) + 44 \cdot 0 + 22 \cdot 1 + 6 \cdot 1) = 0{,}04$;

Підставляємо у формулу $\bar{y} = h_2\bar{v} + C_2$;

$\bar{y} = 10(-0{,}04) + 38 = 37{,}6$

Далі знаходимо σ_x, σ_y: $\sigma_x = h_1\sigma_u$; $\sigma_y = h_2\sigma_v$

А для цього спочатку обчислюємо величини:

$$\overline{u^2} = \frac{1}{100}\left(4(-3)^2 + 14(-2)^2 + 18(-1)^2 + 48\cdot 0^2 + 14\cdot 12^2 + 2\cdot 2^2\right) = 1{,}32;$$

$$\overline{u^2} = 1{,}32; \sigma_u = \sqrt{1{,}32 - (-0{,}4)^2} = 1{,}077,$$

$$\sigma_x = 5\cdot 1{,}077 = 5{,}385$$

$$\overline{v^2} = 1{,}04; \sigma_v = \sqrt{1{,}04 - (0{,}04)^2} = 1{,}019$$

$$\sigma_y = 10\cdot 1{,}019 = 10{,}19$$

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{5} n_{ij}u_i v_j = 4(-2)(-3) + 6(-2)(-2) + 8(-1)(-2) + 10(-1)(-1) + 4(-4)\cdot 0 + 35\cdot 0\cdot 0 +$$

$$+ 5\cdot 1\cdot 0 + 4(-1)\cdot 1 + 12\cdot 1\cdot 0 + 6\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 0 + 3\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 2 = 90;$$

$$\bar{r}_в = \frac{90 - 100(-0{,}4)(-0{,}04)}{100\cdot 1{,}077\cdot 1{,}019} = 0{,}806;$$

Рівняння прямої регресії Y та X має вигляд:

$$y_x - 37{,}6 = 0{,}806\,\frac{10{,}19}{5{,}385}(x - 43) \quad \text{або} \quad y_x = 1{,}525x - 27{,}975.$$