ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ
ГЕОГРАФІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ГЕОДЕЗІЇ ЗЕМЛЕВПОРЯДКУВАННЯ ТА КАДАСТРУ

ВОЛОДИМИР ВОЛОШИН

ВРІВНОВАЖЕННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖ КОРЕЛАТНИМ МЕТОДОМ

методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт

Луцьк – 2022

УДК 528.02:371.214.114
В 69

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Волинського національного університету імені Лесі Українки (протокол № 10 від 26 червня 2022 р.)

Рецензенти:

СИНІЙ С.В. – *кандидат технічних наук, доцент кафедри будівництва та цивільної інженерії Луцького національного технічного університету*

ПОРУЧИНСЬКИЙ В.І. – *кандидат географічних наук, доцент кафедри економічної та соціальної географії, Волинського національного університету імені Лесі Українки*

Волошин В. У.
В 69 ***Врівноваження геодезичних мереж корелатним методом :*** Метод. вказівки . Луцьк, 2022. 82 с.

Методичні вказівки призначені для підготовки і виконання лабораторних занять, індивідуальної та самостійної та роботи з дисципліни “Математична обробка геодезичних вимірів”. Рекомендовані студентам 2 курсу першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій, освітньо-професійної програми «Геодезія та землеустрій».

У даній методичній розробці сформульовано суть задачі врівноваження декількох виміряних величин і подано основи корелатного методу, наведено оцінку точності результатів врівноваження корелатним методом, а також розглянуто типові задачі врівноваження геодезичних мереж корелатним методом.

УДК 528.02:371.214.114

Вступ

Виконання довільних геодезичних робіт безпосередньо пов'язано з вимірюваннями, що проводяться з певною точністю. Якщо вимірювання проводились з недостатньою точністю, то отримані у результаті цього значення виміряних величин завжди будуть містити похибки. Поява похибок у результатах вимірювань супроводжується різними чинниками: несприятливими зовнішніми умовами, недосконалістю приладів вимірювання, неточністю методів вимірювання, недостатньою кваліфікацією спостерігачів тощо. Для того, щоб у подальшому для практичних цілей використовувати результати вимірювань тих чи інших фізичних величин, необхідно усунути похибки. Зрозуміло, що цілком вивести ці похибки з результатів вимірювань неможливо, однак уникнути частково їх мінімального впливу на результати спостережень можна. Для цього проводять математичне опрацювання геодезичних вимірювань як однієї виміряної величини, так і деякої сукупності виміряних величин, у результаті чого отримують їх надійні значення та проводять оцінку їх точності.

Сучасні технології вимірювань дозволяють отримувати достатньо точні результати фізичних величин. Засоби вимірювань включають програмне забезпечення, що дозволяє в автоматизованому режимі проводити математичне опрацювання результатів вимірювань і отримувати їх надійні значення. Однак підготовка спеціалістів для сучасного геодезичного виробництва вимагає, щоб вони в достатній мірі володіли основами математичної обробки геодезичних вимірювань.

У даній методичній розробці сформульовано суть задачі врівноваження декількох виміряних величин і подано основи корелатного методу розв’язання даної задачі як у матричному вигляді, так і в розгорнутому, наведено оцінку точності результатів врівноваження корелатним методом, види геометричних умов, що виникають у геодезичних мережах, умовні рівняння поправок у геодезичних мережах при використанні корелатного методу, а також розглянуто типові задачі врівноваження геодезичних мереж корелатним методом.

Дані методичні рекомендації тісно пов'язані з робочою навчальною програмою дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів», зокрема, використовуються для закріплення теоретичних знань змістовного модуля 7 «Метод найменших квадратів: Корелатний метод врівноваження» та відповідають галузевому стандарту вищої освіти напряму підготовки 0709 "Геодезія, картографія та землевпорядкування".

Теоретичні основи корелатного методу врівноваження

1.1. Суть задачі врівноваження декількох виміряних величин

У теорії похибок вимірювань подано методику опрацювання вимірювань однієї величини. Але в реальних геодезичних задачах завжди вимірюється не одна, а кілька величин, серед яких є необхідні та надлишкові. Наявність надлишкових вимірювань є обов'язковою, оскільки завдяки їм підвищується точність вимірюваних величин і у зв'язку з цим вони стають пов'язаними певними математичними співвідношеннями.

Наприклад, виміряно три кути плоского трикутника. Сума виміряних кутів повинна дорівнювати 180°. Достатньо виміряти два кути α та β трикутника, а третій кут γ знайти зі співвідношення $\gamma = 180° - \alpha - \beta$. Оскільки виміряно і третій кут γ, то повинна виконуватись умова, що сума кутів трикутника дорівнює 180°. У зв'язку з цим з’являються нев'язки (тобто, умова завжди виконуватись строго не буде), які дають змогу надійно контролювати вимірювання та виявляти грубі похибки. З іншого боку нев'язки потрібно усунути за рахунок внесення поправок до результатів вимірювань, отримавши нові (врівноважені) надійні значення виміряних величин.

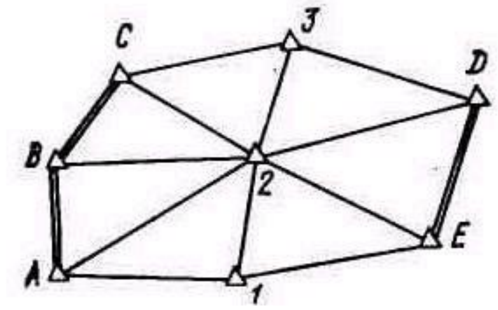
Знаходження надійних значень виміряних величин при сумісному опрацюванні вимірювань називається ***врівноваженням***.

У геодезичній практиці число виконаних вимірів n завжди більше числа тих вимірів k, що варто було б зробити, щоб одержати шукані величини (необхідні невідомі). Виміри, яких було б досить для визначення цих невідомих, назвемо необхідними. Різниця $r = n - k$ називається числом надлишкових вимірів.

Так, у полігонометричному ході виконано n_S вимірів довжин сторін і $n_\beta = n_S + 1$ вимірів кутів (всього $2n_S + 1$ вимірів), а число необхідних вимірів, мабуть, дорівнює подвоєному числу пунктів, координати яких необхідно визначити (для кожного пункту необхідно одержати дві координати x і y), тобто $2(n_S - 1)$, тому $r = 2n_S + 1 - 2(n_S - 1) = 3$.

Так, у мережі тріангуляції, зображеної на рис. 1.1, а, для визначення координат трьох пунктів 3, 2, 1 (пункти A, B, C, D, E прийняті вихідними, безпомилковими) виміряно всього 21 кут, тому число надлишкових вимірів $r = 21 - 6 = 16$.

Так, у нівелірній мережі (мал. 1.1, б) – $r = 5 - 2 = 3$.



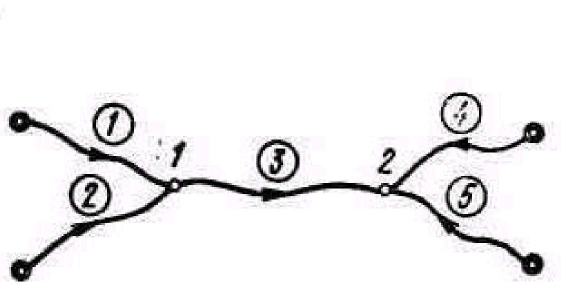


Рис. 1.1, а, б. Приклади геодезичних мереж.

Наявність надлишкових вимірів дозволяє підвищити точність шуканих величин, виконати оцінку точності самих вимірів і надійно їхній проконтролювати.

Сформулюємо задачу сумісного врівноваження багатьох виміряних величин.

Для цього розглянемо n виміряних величин x_i $(i = \overline{1..n})$ із вагами p_i $(i = \overline{1..n})$, істинні значення яких є X_i $(i = \overline{1..n})$. Зі змісту задачі відомо, що виміряні величини x_i $(i = \overline{1..n})$ пов'язані між собою співвідношеннями

$$\varphi_j(X_1, X_2, ..., X_n) = 0 \quad j = \overline{1..r} \tag{1.1}$$

Серед рівнянь (1.1), яким повинні задовільняти результати вимірювань, можуть бути як незалежні, так і залежні між собою рівності, які не будемо розглядати. Вважатимемо, що всі співвідношення (1.1) є незалежними. При появі в результатах вимірювань окремої надлишково виміряної величини зявляється і окрема незалежна умова, тому кількість рівнянь r системи (1.1) дорівнює кількості надлишкових виміряних величин. У цьому випадку завжди виконуватиметься нерівність $r < n$, оскільки надлишкові виміряні величини є підмножиною множини всіх виміряних величин. Таким чином, система рівнянь (1.1) є недовизначеною (кількість рівнянь є меншою за кількість невідомих), а отже, має нескінчену множину розв'язків. Рівняння системи (1.1) називаються ***умовними рівняннями***.

Оскільки результати вимірювань $x_i\ (i=\overline{1..n})$ отримано з деякими похибками, то в результаті підстановки їх у систему рівнянь (1.1), одержимо

$$\varphi_j(x_1, x_2, ..., x_n) = w_j \quad j=\overline{1..r} \tag{1.2}$$

де $w_j\ (j=\overline{1..r})$ – нев'язки, які не дорівнюють нулеві.

Тому задача врівноваження зводиться до усунення нев'язок $w_j\ (j=\overline{1..r})$ у системі рівнянь (1.2), для чого потрібно знайти поправки $v_i\ (i=\overline{1..n})$ до результатів вимірювань $x_i\ (i=\overline{1..n})$. Підставивши у систему рівнянь (5.2) замість $x_i\ (i=\overline{1..n})$ виправлені значення $x_i + v_i\ (i=\overline{1..n})$, або врівноважені значення виміряних величин, прийдемо до такої недовизначеної системи рівнянь:

$$\varphi_j(x_1+v_1, x_2+v_2, ..., x_n+v_n) = 0 \quad j=\overline{1..r} \tag{1.3}$$

Система рівнянь (1.3) має нескінчену множину розв'язків, тому серед них потрібно знайти найкращий розв'язок у тому сенсі, щоб введені поправки не тільки усунули нев'язки в системі умовних рівнянь, але й максимально наблизили поправки за абсолютною величиною до істиних похибок. Якщо поправки дорівнювали б істинним похибкам результатів вимірювань за абсолютною величиною та були б протилежними за знаком, то це був би ідеальний розв'язок системи рівнянь (1.3). Але на жаль, його практично отримати неможливо.

Єдиний розв'язок системи (1.3) можна знайти, довизначивши її якимось чином.

У більшості випадків і, зокрема, в геодезії систему рівнянь (1.3) розв'язують із використанням методу найменших квадратів, тобто розв'язок системи (1.3) має бути таким, щоб сума квадратів поправок для рівноточних вимірювань була мінімальною:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \left[v^2\right] \rightarrow \min , \qquad (1.4)$$

або, щоб сума добутків відповідної ваги на квадрат поправки для нерівно–точних вимірювань була мінімальною:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 = \left[pv^2\right] \rightarrow \min ,$$

Метод найменших квадратів дозволяє знайти єдиний розв'язок системи (1.3), причому він усуває появу великих поправок і для рівноточних вимірювань поправки рівномірно розподіляються між результатами вимірювань, а для нерівноточних вимірювань ваги p_i $(i = \overline{1..n})$ зменшують поправки v_i $(i = \overline{1..n})$ до точніших результатів вимірювань і збільшують їх до менш точних результатів.

До переваг методу найменших квадратів слід віднести його загальність та простоту обчислень на відміну від інших методів врівноваження.

Отже, сумісне врівноваження вимірюваних величин із використанням методу найменших квадратів є задачею на умовний екстремум, тобто потрібно знайти мінімум функції $F(v) = \left[pv^2\right]$, де змінні v_i $(i = \overline{1..n})$ пов'язані незалежними умовними рівняннями (1.3).

Наведену задачу розв'язують двома шляхами.

Перший полягає у знаходженні абсолютного екстремуму функції $F(v) = \left[pv^2\right]$, де всі виміряні величини подаються у вигляді функцій від деяких незалежних і невідомих величин (параметрів). Даний підхід називається параметричним методом.

Другий шлях полягає у заходженні умовного екстремуму функції

$F(v)=\left[pv^2\right]$ із використанням методу Лагранжа, де фігурують невизначені множники (у геодезії їх називають корелатами). Цей підхід називають корелатним методом.

Обидва методи є еквівалентними, тобто вони є тільки різними підходами розв'язування однієї і тієї ж задачі, вони приводять до однакових результатів, але часто мають різну трудомісткість при розв'язанні однієї і тієї ж задачі.

Так, наприклад, при врівноваженні полігонометричного ходу, що має 10 визначених пунктів, параметричним способом знадобиться спільно розв'язувати 20 рівнянь, а при корелатному способі – всього 3. Слід, однак, мати на увазі, що число спільно розв'язуваних рівнянь, якщо задача розв'язується на ЕОМ, не є визначальним критерієм вибору того чи іншого способу урівнювання. Потрібно враховувати також простоту складання вихідних рівнянь.

Крім зазначених двох способів врівноваження, існують і так звані комбіновані способи, що поєднують переваги одного й іншого.

Розглянемо основні положення корелатного способу врівноваження.

1.2. Основи корелатного методу врівноваження

Розглянемо результати вимірювань $x_i \; (i=\overline{1..n})$ певних величин із вагами $p_i \; (i=\overline{1..n})$ у геодезичній мережі, істинні значення яких дорівнюють $X_i \; (i=\overline{1..n})$. Серед n виміряних величин є k необхідних і $r=n-k$ – надлишкових. Наявність надлишкових виміряних величин приводить до появи r умов, яким повинні задовольняти виміряні значення $x_i \; (i=\overline{1..n})$. Ці умови запишемо у вигляді нелінійних рівнянь

$$\varphi_j(X_1, X_2, ..., X_n)=0 \quad j=\overline{1..r} \tag{1.5}$$

Якщо замість істинних значень $X_i \; (i=\overline{1..n})$ виміряних величин у рівняння (1.5) підставити їх результати вимірювань $x_i \; (i=\overline{1..n})$, то дані рівності строго виконуватись не будуть. У зв'язку з цим у правих частинах

(1.5) з'являться величини $w_j\ (j=\overline{1..r})$ замість нулів, які називаються ***нев'язками*** і виникають за рахунок наявності похибок у результатах спостережень $x_i\ (i=\overline{1..n})$, тобто

$$\varphi_j(x_1, x_2, ..., x_n) = w_j \quad j=\overline{1..r} \tag{1.6}$$

Даний вираз (1.6) служать для обчислення нев'язок.

Якщо у формулах (1.6) замість виміряних значень $x_i\ (i=\overline{1..n})$ розглянути врівноважені значення $x_i + v_i\ (i=\overline{1..n})$, то поправки $v_i\ (i=\overline{1..n})$ повинні усунути нев'язки $w_j\ (j=\overline{1..r})$ і тоді отримані вирази

$$\varphi_j(x_1+v_1, x_2+v_2, ..., x_n+v_n) = 0 \quad j=\overline{1..r} \tag{1.7}$$

називаються ***умовними рівняннями поправок у загальному вигляді***.

Наведені рівняння у загальному випадку є нелінійними, і процедура розв'язування їх за методом найменших квадратів є складною. Тому їх лінеаризуємо, для чого функції $\varphi_j\ (j=\overline{1..r})$ розкладемо в ряд Тейлора в околі точки $(x_1, x_2, ..., x_n)$ і, оскільки поправки $v_i\ (i=\overline{1..n})$ є малими, то обмежимось лінійними членами розкладу. У результаті отримаємо

$$\varphi_j(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right)v_i = 0,\ j=\overline{1..r} \tag{1.8}$$

Ввівши позначення

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} = a_i,\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} = b_i,\ ...\ ,\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} = g_i,\ (i=\overline{1..n})$$

та врахувавши (1.6), рівності (1.8) запишуться у вигляді:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i + \omega_1 = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} b_i v_i + \omega_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} g_i v_i + \omega_r = 0 \end{cases},\ \text{або} \begin{cases} [av] + \omega_1 = 0 \\ [bv] + \omega_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ [gv] + \omega_r = 0 \end{cases}. \tag{1.9}$$

Рівняння (1.9) називаються ***умовними рівняннями поправок у лінійному***

вигляді.

Умовні рівняння поправок можна подати у матричній формі:

$$AV + W = 0, \tag{1.10}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n \end{pmatrix}$$ – матриця коефіцієнтів умовних рівнянь поправок;

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$ – вектор поправок до результатів вимірювань;

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$ – вектор нев'язок, або вільних членів системи.

Розв'язок матричного рівняння (1.10) будемо шукати, використавши умову

$$V^T PV = [pv^2] = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 \to \min . \tag{1.11}$$

Отже, початкову задачу зведено до визначення екстремуму функції (1.11), для якої виконується умова (1.10). Наведену задачу на умовний екстремум функції можна розв'язати методом Лагранжа, тобто вона зводиться до задачі на абсолютний екстремум нової функції

$$\Phi = V^T PV - 2K^T (AV + W) \to \min \tag{1.12}$$

де

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix}$$ – вектор неозначених множників Лагранжа.

Необхідною умовою мінімуму функції від багатьох змінних є рівність нулеві її часткових похідних або рівність нулеві її повного диференціалу першого порядку, тобто $d\Phi = 0$.

Знайдемо повний диференціал функції Φ, поданої виразом (1.12)

$$d\Phi = V^T P dV - 2K^T AV = 0,$$

або, скоротивши на подвоєний диференціал вектора поправок $2dV$ прийдемо до рівності

$$V^T P = K^T A,$$

протранспонувавши яку, отримаємо

$$PV = A^T K,$$

звідки знайдемо вектор поправок

$$V = P^{-1} A^T K, \tag{1.13}$$

або в розгорнутому вигляді

$$v_i = \frac{1}{p_i}\left(a_i k_1 + b_i k_2 + \cdots + g_i k_r\right), i = \overline{1..n} \tag{1.14}$$

Тут k_j $(j = \overline{1..r})$ – неозначені множники Лагранжа, які в геодезії називають корелатами. Для їх визначення підставимо вектор поправок, що описується формулою (1.13), в умовне матричне лінійне рівняння (1.10). У результаті отримаємо

$$AP^{-1}A^T K + W = 0 \tag{1.15}$$

Рівняння (1.15) називається ***матричним нормальним рівнянням корелат***. Запишемо його в розгорнутому вигляді. Система нормальних рівнянь корелат запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \left[\frac{aa}{p}\right]k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]k_2 + \cdots \left[\frac{ag}{p}\right]k_r + w_1 = 0 \\ \left[\frac{ba}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]k_2 + \cdots \left[\frac{bg}{p}\right]k_r + w_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left[\frac{ga}{p}\right]k_1 + \left[\frac{gb}{p}\right]k_2 + \cdots \left[\frac{gg}{p}\right]k_r + w_r = 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

Розв'язавши систему нормальних рівнянь корелат (1.16) відносно k_j $(j=\overline{1..r})$ одним із відомих методів та підставивши одержані результати у рівності (1.14) відповідно, отримаємо надійні шукані поправки v_i до виміряних значень x_i $(i=\overline{1..n})$.

В матричному вигляді розв'язок матричного нормального рівняння корелат матиме вигляд:

$$K=-\left(AP^{-1}A^T\right)^{-1}W\,. \tag{1.17}$$

Якщо вимірювання є рівноточними, то матричне нормальне рівняння корелат, розв'язок матричного нормального рівняння корелат та вираз для вектора поправок відповідно будуть такими:

$$\begin{gathered}AA^TK+W=0\\ K=-\left(AA^T\right)^{-1}W\\ V=A^TK\end{gathered} \tag{1.18}$$

Таким чином, перша частина задачі врівноваження корелатним методом є розв'язаною, тобто знайдені надійні поправки до виміряних величин. Переходимо до другої частини задачі врівноваження – знаходження оцінки точності.

1.3. Оцінка точності результатів врівноваження корелатним методом

Друга частина задачі врівноваження корелатним методом – знаходження оцінки точності вимірювань та величин, що визначаються, принципово не відрізняється від оцінки точності, виконаної при параметричному методі врівноваження.

Щоб її отримати, потрібно:

- знайти середню квадратичну похибку одного рівноточного вимірювання або середню квадратичну похибку одиниці ваги нерівноточного вимірювання;

- оцінити точність вектора корелат;
- визначити вагу та середню квадратичну похибку функції врівноважених величин.

1. Середню квадратичну похибку одного рівноточного вимірювання m та середню квадратичну похибку одиниці ваги μ для нерівноточного вимірювання можна одержати за такими формулами:

$$m=\sqrt{\frac{[v^2]}{r}}, \qquad \mu=\sqrt{\frac{[pv^2]}{r}}, \tag{1.19}$$

або у матричній формі

$$m=\sqrt{\frac{V^T V}{r}}, \qquad \mu=\sqrt{\frac{V^T PV}{r}}, \tag{1.20}$$

де r - кількість умовних рівнянь.

2. Обчислення середніх квадратичних похибок елементів вектора K корелат здійснюється за такими формулами:

для рівноточних вимірювань

$$m_j=\pm m\sqrt{Q_{jj}}, \quad \left(j=\overline{1..r}\right) \tag{1.21}$$

де $Q_{jj}\ \left(j=\overline{1..r}\right)$ – вагові коефіцієнти корелат (їх обернені ваги), які знаходяться на головній діагоналі матриці $Q=\left(AA^T\right)^{-1}$;

для нерівноточних вимірювань

$$m_j=\pm \mu\sqrt{Q_{jj}}, \quad \left(j=\overline{1..r}\right) \tag{1.22}$$

де $Q_{jj}\ \left(j=\overline{1..r}\right)$ – елементи головної діагоналі матриці $Q=\left(AP^{-1}A^T\right)^{-1}$.

3. Визначення ваги та середньої квадратичної похибки функції врівноважених величин

Розглянемо у загальному випадку вагову функцію F, аргументами якої є врівноважені значення x_i+v_i виміряних величин $x_i\ (i=\overline{1..n})$.

$$F=F\left(x_1+v_1, x_2+v_2, \cdots, x_n+v_n\right) \tag{1.23}$$

Для простішого розв'язання задачі лінеаризуємо функцію F, подану виразом (1.23), а для цього розкладемо її в ряд Тейлора в околі точки $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, припустивши, що це можна зробити, та, обмежившись лінійними членами розкладу отримаємо

$$F = F(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \tag{1.24}$$

або в матричній формі

$$F = F_0 + \lambda^T V, \tag{1.25}$$

де $F_0 = F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, $\lambda_i = \dfrac{\partial F(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_i}$ $\quad (i = \overline{1..n})$.

Для функції (1.24) або (1.25) не можна використати формулу

$$\frac{1}{p_F} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_{x_1}} + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_{x_2}} + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_{x_n}} \tag{1.26}$$

щоб знайти її обернену вагу, оскільки поправки v_i $(i = \overline{1..n})$ є залежними. Тому проведемо деякі перетворення функції F. Для цього вектор поправок, поданий виразом $V = P^{-1} A^T K$, підставимо у співвідношення (1.25)

$$F = F_0 + \lambda^T P^{-1} A^T K$$

і до отриманого результату додамо вираз $\pi^T (NK + W)$. У результаті прийдемо до такого

$$F = F_0 + \lambda^T P^{-1} A^T K + \pi^T (NK + W), \tag{1.27}$$

де $\pi^T = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n)$ – вектор неоднозначних множників, $N = A^T P^{-1} A$ – матриця коефіцієнтів нормального рівняння корелат, K – вектор корелат, W – вектор нев'язок.

Формулу (1.27) перепишемо у наступному вигляді

$$F = F_0 + (\lambda^T P^{-1} A^T + \pi^T N) K + \pi^T W$$

і вектор π неоднозначних множників виберемо таким чином щоб вираз у круглих дужках дорівнював нулеві. Тобто для рівноточних і нерівноточних вимірювань матимемо:

$$\lambda^T P^{-1} A^T + \pi^T N = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^T A^T + \pi^T A A^T = 0 \tag{1.28}$$

Із врахуванням співвідношень (1.28), остаточно функцію F запишемо у вигляді

$$F = F_0 + \pi^T W \tag{1.29}$$

і, оскільки $w_j = \varphi_j(x_1, x_2, ..., x_n)$ $j = \overline{1..r}$, а вимірювання x_i $(i = \overline{1..n})$ спостерігачі стараються провести так, щоб вони були незалежними, то нами отримано таке зображення функції F , для якої вже можна застосувати формулу (1.27) обчислення її оберненої ваги.

Остаточно визначити обернену вагу функції F можна

$$\frac{1}{P_F} = [a\lambda]\pi_1 + [b\lambda]\pi_2 + [c\lambda]\pi_3 + \cdots + [g\lambda]\pi_r + [\lambda^2], \tag{1.30}$$

або в матричному вигляді

$$\frac{1}{P_F} = \lambda^T \lambda + \pi^T A\lambda \tag{1.31}$$

Обчислення середної квадратичної похибки функції F здійснюється за наступними формулами для рівноточних і нерівноточних вимірювань:

$$m_f = \pm \frac{m}{P_F} \text{ або } m_f = \pm \frac{\mu}{P_F} \tag{1.32}$$

Таким чином, нами отримано формули для знаходження оберненої ваги функції врівноважених величин, тобто друга частина задачі врівноваження корелатним методом - знаходження оцінки точності є розв'язаною.

1.5. Види геометричних умов, що виникають в геодезичних мережах

У геодезичних мережах виникає багато різноманітних умов. Тут ми розглянемо лише основні з них ***кутові*** та ***лінійно-кутові*** для плоских мереж.

Геодезичні мережі бувають ***вільними*** та ***невільними***, ***простими*** та ***складними***.

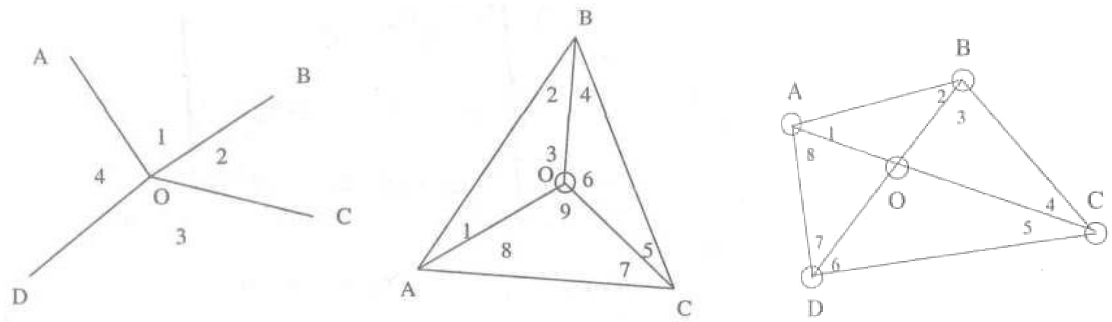
Вільні мережі містять тільки необхідні вихідні дані, яких достатньо для визначення координат пунктів чи інших геодезичних елементів. Якщо в мережі є надлишкові вихідні дані, то вона називається ***невільною***. Мережа називається ***простою***, якщо в ній геометричні фігури не перекриваються, інакше вона є ***складною***.

У вільних мережах виникають три види геометричних умов:

- умови фігури;
- умови горизонту;
- умови полюса.

Умови фігури з'являються тоді, коли в замкнутому багатокутнику є виміряними всі внутрішні кути. Тоді для n -кутника сума кутів повинна дорівнювати $180^\circ \cdot (n-2)$.

Якщо на деякому пункті є виміряні всі кути, що прилягають один до одного (див. рис. 1.2, а), то виникає ***умова горизонту***, тобто сума всіх виміряних кутів є рівною 360°. На рис. 1.2, б зображено центральну систему – замкнену низку трикутників навколо полюса (точки O).



а) б) в)

Рис. 1.2, а, б, в. Приклади вільних геодезичних мереж.

Умова полюса з'являється у фігурі, одна зі сторін якої може бути обчислена двічі. У центральній системі полюсом є точка O (див. Рис. 1.2, б), у геодезичному чотирикутнику полюсом може бути як точка перетину діагоналей O, так і кожна з вершин A, B, C, D (див. рис. 1.2, в).

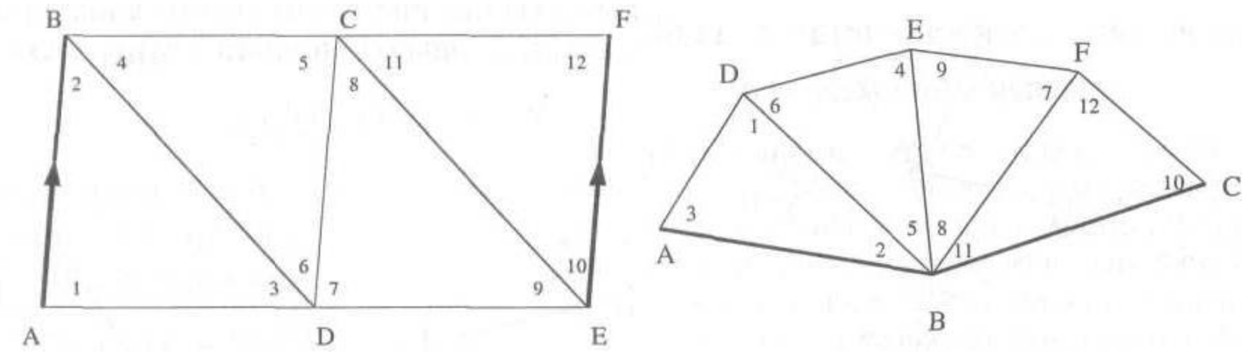
У невільних мережах крім розглянутих трьох видів геометричних умов виникають ще три:

- умова дирекційних кутів;
- умова базисів;

- умова координат.

Умова дирекційних кутів з'являється в мережі при наявності більше ніж однієї сторони з твердим дирекційним кутом. Наприклад, якщо в мережі (див. рис. 1.3,а) є заданими дирекційні кути сторін AB та EF , виміряні всі позначені кути, то для дирекційного кута α_{EF} сторони EF можна записати таку умову:

$$[\alpha_{EF}] = [\alpha_{AB}] - [2] + [6] - [8] + [10] \pm 4 \cdot 180°$$



а) б)

Рис. 1.3, а, б. Приклади невільних геодезичних мереж.

Окремим випадком умови дирекційних кутів є ***умова сум***, коли дві тверді сторони AB і BC утворюють твердий кут $\angle ABC$ (див. рис. 1.3,б). Для цього випадку отримаємо умову суми

$$[\angle ABC] = [2] + [5] + [8] + [11]$$

Для мережі, зображеної на рис. 1.3,б, якщо твердий кут $\angle ABC$ є невідомим, то умову дирекційних кутів можна записати так:

$$[\alpha_{BC}] = [\alpha_{AB}] + [2] + [5] + [8] + [11]$$

Умова базисів виникає у тих випадках, коли в мережі відомими є довжини більше ніж однієї твердої сторони. Розглянемо мережу, зображену на рис. 1.3,б і припустимо, що є відомими довжини l_{AB} та l_{BC} . У цьому випадку умова базисів полягатиме в тому, що довжина l_{BC} сторони BC дорівнюватиме значенню виразу, який містить довжину l_{AB} твердої сторони AB та значення виміряних кутів, тобто:

$$\frac{l_{BC}}{l_{AB}} = \frac{|BC|}{|BF|} \cdot \frac{|BF|}{|BE|} \cdot \frac{|BE|}{|BD|} \cdot \frac{|BD|}{|BA|} = \frac{\sin[3]\sin[6]\sin[9]\sin[12]}{\sin[2]\sin[5]\sin[8]\sin[11]},$$

$$\text{або } l_{BC} = l_{AB} \frac{\sin[3]\sin[6]\sin[9]\sin[12]}{\sin[2]\sin[5]\sin[8]\sin[11]}$$

Наведений вираз для довжини l_{BC} сторони BC отримано з використанням теореми синусів.

Умови координат містять умовні рівняння ординат і умовні рівняння абсцис та випливають із того, що сума приростів координат замкнутого багатокутника дорівнює нулеві.

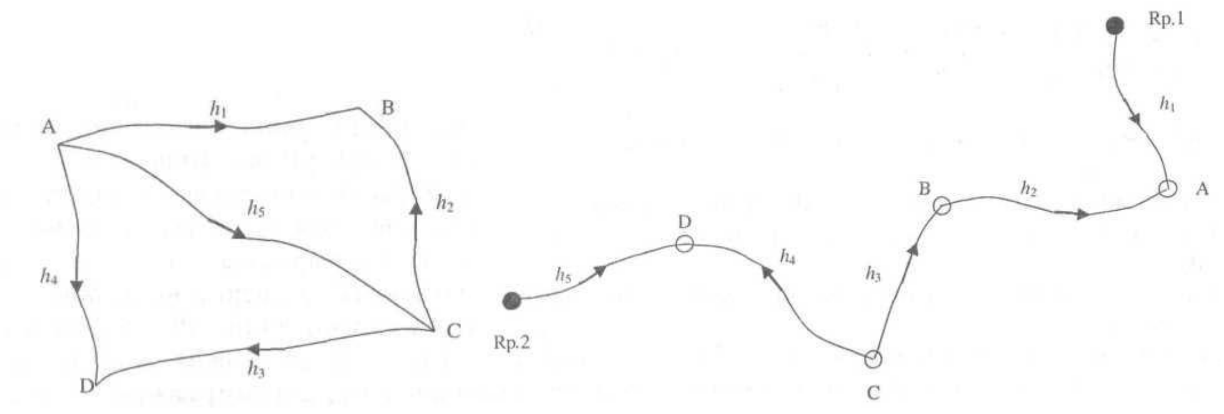
У мережах нівелювання виникають два типи умов: ***умови полігонів*** та ***умови твердих реперів***.

Умови полігонів з'являються у замкнених полігонах, утворених кількома ходами нівелювання, і полягають у тому, що сума перевищень, обчислена для довільного напрямку обходу дорівнює нулеві. Наприклад, у мережі, поданій на рис. 1.4,а дану умову можна записати так:

$$[h_1] - [h_2] + [h_3] - [h_4] = 0$$

$$[h_1] - [h_2] - [h_5] = 0$$

$$[h_5] + [h_3] - [h_4] = 0$$



а) б)

Рис. 1.4,а,б. Приклади нівелірних мереж.

Умови твердих реперів записуються для суми перевищень ходів, прокладених між двома реперами, висоти яких є відомими і полягають у тому, що сума перевищень таких ходів дорівнює різниці висот вихідних реперів, тобто для нівелірної мережі рис. 1.4,б матимемо

$$[h_1]-[h_2]-[h_3]+[h_4]-[h_5]=H_{Rp.2}-H_{Rp.1}$$

При написанні геометричних умов у геодезичних мережах важливим є правильно визначити незалежні умови. Якщо в процесі врівноваження не враховано якусь незалежну умову, то після врівноваження вона задовольнятись не буде і задача врівноваження у зв'язку з цим буде не в повній мірі розв'язаною.

Якщо в процесі врівноваження враховано якусь залежну геометричну умову, то це приводить до збільшення обсягу непотрібних обчислень.

Наведемо співвідношення, якими визначається кількість необхідних умов для врівноваження кутів в мережі (Табл.1.1).

Таблиця 1.1.

Визначення кількості необхідних умов у мережі

Види умов	Кількість умов
фігури	$l-p+1$
полюса	$L-2(p+q)+3$
горизонту	$o-f$
дирекційних кутів	$k-r+a+2f-1$
сторін	$k-r+s-f-1$

Тут l – кількість неперервних ліній; p – кількість всіх пунктів в мережі; L – кількість всіх ліній (неперервних та розривних); q – кількість пунктів, визначених прямими засічками; o – кількість пунктів, на яких до всіх кутів, розташованих навколо них, визначаються поправки (кількість центральних систем); f – кількість фігур, утворених твердими сторонами; k – кількість вихідних пунктів; r – кількість окремих груп вихідних пунктів (у групу входять всі вихідні пункти, що мають між собою твердий зв'язок); a –

кількість астрономічних азимутів, що вважаються твердими; s – кількість сторін, довжини яких є твердими.

У деяких нескладних мережах кількість незалежних умов можна визначити, користуючись такими положеннями:

- кількість умов фігури дорівнює кількості трикутників, що не перетинаються, плюс кількість геодезичних чотирикутників;
- кількість умов горизонту дорівнює кількості центральних систем;
- кількість умов полюса дорівнює кількості центральних систем плюс кількість геодезичних чотирикутників;
- кількість умов дирекційних кутів дорівнює кількості сторін, дирекційні кути яких є твердими, мінус одиниця;
- кількість умов сторін дорівнює кількості сторін, довжини яких є твердими, мінус одиниця.

Наведеними положеннями користуються у випадку, якщо в мережі є:

- тільки неперервні лінії;
- одна група вихідних пунктів;
- відсутні фігури, утворені твердими сторонами.

1.6. Умовні рівняння поправок у геодезичних мережах при використанні корелатного методу врівноваження

Розглянемо побудову умовних рівнянь поправок у геодезичних мережах для наведених геометричних умов при застосуванні корелатного методу врівноваження.

У випадку ***умови фігури*** для багатокутника із n внутрішніми кутами умовне рівняння в загальному вигляді буде таким:

$$\sum_{i=1}^{n}[\beta_i]-(n-2)\cdot 180^\circ=0, \qquad (1.33)$$

а відповідне умовне рівняння поправок запишеться у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i + w = 0, \qquad (1.34)$$

де $w = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i) - (n-2) \cdot 180°$, $[\ ], (\ )$ – врівноважені та виміряні величини.

Якщо розглядати ***умову горизонту,*** то умовне рівняння у загальному вигляді для n кутів, що входять у центральну систему, запишеться так:

$$\sum_{i=1}^{n} [\beta_i] - 360° = 0, \qquad (1.35)$$

а відповідне умовне рівняння поправок буде таке ж як (1.34).

$$\sum_{i=1}^{n} v_i + w = 0, \qquad (1.36)$$

де $w = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i) - 360°$.

Запишемо для ***умови полюсу*** у геодезичному чотирикутнику (див. Рис.1.2, в) умовне рівняння в загальному вигляді. В даній мережі полюсом може бути як точка перетину діагоналей (як правило її і приймають), так і довільна з вершин A, B, C, D. Припустимо, що точка A є полюсом. Тоді запишемо таке співвідношення:

$$\frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|AC|}{|AD|} \cdot \frac{|AD|}{|AB|} = 1,$$

або, використавши теорему синусів, отримаємо умовне полюсне рівняння в загальному вигляді

$$\frac{\sin[4] \cdot \sin([6]+[7]) \cdot \sin[2]}{\sin([2]+[3]) \cdot \sin[5] \cdot \sin[7]} = 1$$

Лінеаризувавши його згідно формули (1.8), прийдемо до лінійного рівняння поправок

$$v_4 ctg(4) + (v_6 + v_7) ctg((6)+(7)) + v_2 ctg(2) -$$
$$- (v_2 + v_3) ctg((2)+(3)) - v_5 ctg(5) - v_7 ctg(7) + w = 0 \qquad (1.37)$$

де $w=\frac{\sin(4)\cdot\sin((6)+(7))\cdot\sin(2)}{\sin((2)+(3))\cdot\sin(5)\cdot\sin(7)}-1$.

Для центральної системи (див. Рис.1.2, в) запишемо співвідношення між сторонами

$$\frac{|AO|}{|BO|}\cdot\frac{|BO|}{|CO|}\cdot\frac{|CO|}{|AO|}=1$$

або між синусами протилежних кутів відповідних кутів

$$\frac{\sin[1]\sin[4]\sin[7]}{\sin[2]\sin[5]\sin[8]}=1$$

Це рівняння є умовним полюсним рівнянням у загальному вигляді для центральної системи, зображеної рис. 1.2,б. Лінеаризувавши його, отримаємо умовне лінійне рівняння поправок

$$v_1 ctg(1)+v_2 ctg(4)+v_7 ctg(7)-v_2 ctg(2)-v_5 ctg(5)-v_8 ctg(8)+w=0, \quad (1.38)$$

де $w=\frac{\sin(1)\cdot\sin(4)\cdot\sin(7)}{\sin(2)\cdot\sin(5)\cdot\sin(8)}-1$.

Слід відзначити, що умовні полюсні рівняння не містять кутів, що є виміряними при полюсі. Тому за полюс можна приймати формальні точки перетину довільних напрямків. Цей факт, зокрема, використовується при врівноваженні геодезичного чотирикутника, коли при складанні умовного полюсного рівняння за полюс приймається точка перетину діагоналей.

Розглянемо мережу (див. рис.1.3,б), коли виникають умови дирекційних кутів. Як уже було сказано, наявність додаткової сторони з дирекційним кутом приводить до появи ***умови дирекційного кута***.

Умовне рівняння дирекційних кутів у загальному вигляді запишеться так:

$$[\alpha_{BA}]+[2]+[5]+[8]+[11]=[\alpha_{BC}],$$

звідки отримується умовне рівняння поправок

$$v_{\alpha_{BA}}-v_{\alpha_{BC}}+v_2+v_5+v_8+v_{11}+w=0, \quad (1.39)$$

де $w=(\alpha_{BA})-(\alpha_{BC})+(2)+(5)+(8)+(11)$.

В мережі на рис.1.3.б припустимо, що сторони *AB* та *BC* є твердими. Тоді ***умовне рівняння базисів*** або ***вихідних сторін*** можна записати у загальному вигляді так:

$$\frac{l_{AB}}{l_{BC}} \cdot \frac{\sin[3]\sin[6]\sin[9]\sin[12]}{\sin[2]\sin[5]\sin[8]\sin[11]} = 1$$

Лінеаризувавши його згідно формули (1.8), отримаємо умовне лінійне рівняння поправок, у якому відсутні поправки до сторін *AB* та *BC*

$$\begin{gathered} v_3 ctg[3] + v_6 ctg[6] + v_9 ctg[9] + v_{12} ctg[12] - v_2 ctg[2] - \\ - v_5 ctg[5] - v_8 ctg[8] - v_{11} ctg[11] + w = 0, \end{gathered} \tag{1.40}$$

де $w = \frac{[l_{AB}]}{[l_{BC}]} \cdot \frac{\sin(3)\sin(6)\sin(9)\sin(12)}{\sin(2)\sin(5)\sin(8)\sin(11)} - 1$.

Перейдемо до розгляду умовних рівнянь у мережах нівелювання.

Відзначимо, що в цих мережах як для ***умов полігонів*** так і для ***умов твердих реперів*** умовні рівняння в загальному вигляді є лінійними. Тому немає потреби їх лінеаризувати.

Для мережі нівелювання, зображеній на рисунку 1.4,а, незалежні ***умовні рівняння полігонів*** у загальному вигляді запишуться так:

$$[h_1] - [h_2] + [h_3] - [h_4] = 0,$$

$$[h_1] - [h_2] - [h_5] = 0,$$

$$[h_5] + [h_3] - [h_4] = 0,$$

а умовні рівняння поправок матимуть вигляд

$$\begin{aligned} &v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + w_1 = 0 \\ &v_1 - v_2 - v_5 + w_2 = 0 \\ &v_5 + v_3 - v_4 + w_3 = 0 \end{aligned} \tag{1.41}$$

де $w_1 = (h_1) - (h_2) + (h_3) - (h_4)$, $w_2 = (h_1) - (h_2) - (h_5)$, $w_3 = (h_5) + (h_3) - (h_4)$.

Якщо розглянути мережу нівелювання, зображену рисунком 1.4,б то ***умовне рівняння твердих реперів*** у загальному вигляді буде таким:

$$[h_1] - [h_2] - [h_3] + [h_4] - [h_5] = H_{Rp.2} - H_{Rp.1},$$

а умовне рівняння поправок запишеться у вигляді

$$v_1 - v_2 - v_3 + v_4 - v_5 + w = 0, \qquad (1.42)$$

де $w = H_{Rp.1} + (h_1) - (h_2) - (h_3) + (h_4) - (h_5) - H_{Rp.2}$.

1.7. Метод Попова

У випадку якщо умовні рівняння мають коефіцієнти ±1 чи 0, то нормальні рівняння можна одержати, не складаючи умовних рівнянь. При цьому схему мережі необхідно попередньо підготувати, пронумерувавши на ній усі ходи від 1 до l і полігони від 1 до $r = l - m$, де m – число вузлових точок. Варто вибрати також напрямки ходів і полігонів, по яких будуть сумуватися перевищення, і виписати вимірявані величини (суму перевищень) і зворотні ваги ходів (наприклад, довжини ходів). Зробивши це, нормальні рівняння складають по простих і зручних правилах, запропонованих проф. В. В. Попов:

- квадратичні коефіцієнти нормальних рівнянь у рядку j рівні сумі зворотних ваг ходів, що належать j-тому полігону;
- неквадратичні коефіцієнти, розташовані в рядку h і стовпці j, дорівнюють зворотній вазі ходу, що належить полігонам h і j, причому узятому зі знаком «+», якщо напрямки цих полігонів збігаються, і «–» у противному випадку;
- вільний член j-го нормального рівняння дорівнює нев'язці j-го полігона.

Відповідно, кожному j-му полігону (умовному рівнянню) відповідає j-та корелата.

Вирішивши нормальні рівняння, одержують усі корелати і потім поправки в виміряні в кожному ході величини (перевищеня) за правилом: поправка v_i дорівнює сумі корелат тих полігонів, яким належить i-ий хід, причому якщо напрямок ходу і полігона не збігаються, то корелата береться зі зворотним знаком.

Лабораторна робота № 1

Врівноваження мережі нівелювання при рівноточних вимірюваннях

Завдання. Розв'язати задачу врівноваження мережі нівелювання при рівноточних вимірюваннях корелатним методом, представлену на рис.2.1. Вихідні дані наведені в таблиці 2.1. Систему нормальних рівнянь отримати матричним способом та за допомогою способу проф. В.В.Попова. Висоти реперів A, B, C наступні $H_A = 183,506$; $H_B = 192,353$; $H_C = 191,880$.

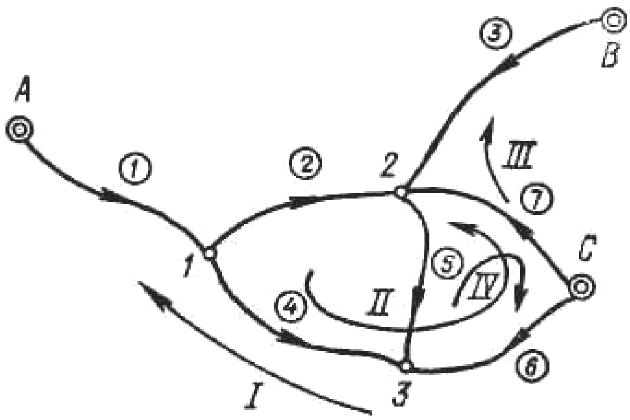


Рис. 2.1. Мережа нівелювання.

Таблиця 2.1

Вихідні дані

№ ходів	Перевищення h_i, м
1	6,135
2	8,343
3	5,614
4	1,394
5	-6,969
6	-0,930
7	6,078

Розв'язання.

Нівелірна мережа містить 7 виміряних перевищень $h_i \ (i = \overline{1..7})$, істинні значення яких є невідомими. Зі змісту задачі відомо, що перевищення між точками мережі та реперами пов'язані між собою умовами полігонів та умовами твердих реперів.

Оскільки результати вимірювань $h_i \ (i = \overline{1..7})$ отримано з деякими похибками, то в умовах полігонів та умовах твердих реперів будуть присутні нев'язки, які не дорівнюють нулеві.

Тому задача врівноваження зводиться до усунення нев'язок системі рівнянь (1.2), для чого потрібно знайти поправки $v_i \ (i = \overline{1..7})$ до результатів вимірювань $h_i \ (i = \overline{1..7})$. Розв'язання даної задачі розглянемо за допомогою корелатного методу врівноваження. Нля цього виконаємо напступні кроки.

1. Визначення кількості умовних рівнянь.

У випадку нівелірної мережі , що зображена на рис. 2.1, число умовних рівнянь збігається з числом надлишкових вимірів і дорівнює $r = l - k$, де l – число ходів, k – число вузлових точок. В нашому випадку $l = 7$, а $k = 3$, отже, $r = 4$. Вибір полігонів проведемо згідно рисунку 2.1 та встановимо їх відповідний напрямок.

2. Визначення умовних рівнянь

При врівноваженні даної нівелірної мережі корелатним методом присутні і умови полігонів так і умови твердих реперів.

В нашому випадку маємо два розімкнених ходи (I, III) і два замкнених (II, IV).

Отже,

для ходу I маємо умову реперів : $-v_1 - v_4 + v_6 + w_1 = 0$,

для ходу II маємо умову полігонів: $-v_2 + v_4 - v_6 + v_7 + w_2 = 0$,

для ходу III маємо умову реперів: $-v_3 + v_7 + w_3 = 0$,

для ходу IV маємо умову полігонів: $-v_5 + v_6 - v_7 + w_4 = 0$.

Матриця умовних рівнянь матиме вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Обчислення вільних членів умовних рівнянь

Для ходу I : $w_1 = [H_C] + (h_6) - (h_4) - (h_1) - [H_A].$

$$w_1 = \text{-}0{,}085 \text{ м.}$$

Для ходу II : $w_2 = (h_4) - (h_6) + (h_7) - (h_2).$

$$w_2 = +0{,}059 \text{ м.}$$

Для ходу III : $w_3 = [H_C] + (h_7) - (h_3) - [H_B].$

$$w_3 = \text{-}0{,}009 \text{ м.}$$

Для ходу IV : $w_4 = (h_6) - (h_5) - (h_7).$

$$w_4 = \text{-}0{,}039 \text{ м.}$$

Вектор W матиме вигляд (представлений у сантиметрах):

$$W = \begin{pmatrix} -8.5 \\ 5.9 \\ -0.9 \\ -3.9 \end{pmatrix},$$

а вектор невідомих поправок до результатів вимірювань буде наступним:

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_7 \end{pmatrix}.$$

4. Матричний розв'язок задачі врівноваження

Умовні рівняння поправок можна подати у матричній формі:

$$AV + W = 0$$

Розв'язок даного матричного рівняння будемо шукати, використавши умову

$$V^T V = [v^2] = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \rightarrow \min$$

Початкову задачу врівноваження зведено до визначення екстремуму функції. Наведену задачу на умовний екстремум функції можна розв'язати методом Лагранжа, тобто вона зводиться до задачі на абсолютний екстремум нової функції

$$\Phi = V^T V - 2K^T (AV + W) \rightarrow \min$$

де

$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}$ – вектор корелат.

Необхідною умовою мінімуму функції від багатьох змінних є рівність нулеві її часткових похідних або рівність нулеві її повного диференціалу першого порядку, тобто $d\Phi = 0$.

Провівши нескладні математичні викладки отримаємо вектор поправок

$$V = A^T K .$$

Невідомий вектор корелат можна знайти розв'язавши наступне матричне нормальне рівняння корелат

$$AA^T K + W = 0 .$$

Ввівши позначення $N = AA^T$ для матці нормальних рівнянь отримаємо наступне рівняння корелат

$$NK + W = 0 .$$

Звідки вектор корелат отримується наступним чином:

$$K = -N^{-1} W .$$

5. Визначення матриці нормальних рівнянь

Матриця нормальних рівнянь матиме вигляд:

$$N = AA^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Визначення матриці нормальних рівнянь методом В.В. Попова

Нормальні рівняння складемо по простих і зручних правилах, запропонованих проф. В. В. Поповим. Матимемо:

$$3k_1 - 2k_2 + k_4 + w_1 = 0$$

$$-2k_1 + 4k_2 + k_3 - 2k_4 + w_2 = 0$$

$$k_2 + 2k_3 - k_4 + w_3 = 0$$

$$k_1 - 2k_2 - k_3 + 3k_4 + w_4 = 0$$

Вільний член кожного нормального рівняння дорівнює нев'язці відповідного полігона. Провівши відповідні обчислення матимемо:

$$\begin{cases} 3k_1 - 2k_2 + k_4 - 8.5 = 0 \\ -2k_1 + 4k_2 + 1k_3 - 2k_4 + 5.9 = 0 \\ k_2 + 2k_3 - 1k_4 - 0.9 = 0 \\ k_1 - 2k_2 - k_3 + 3k_4 - 3.9 = 0 \end{cases}$$

Як бачимо, коефіцієнти нормальних рівнянь є ідентичними. Тому переходимо до обчислення корелат.

7. Обчислення корелат.

Обчислення корелат проведемо за наступними формулами. Матимемо:

$$NK + W = 0,$$
$$N^{-1}NK + N^{-1}W = 0,$$
$$K + N^{-1}W = 0,$$
$$K = -N^{-1}W.$$

В нашому випадку

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0.542 & 0.292 & -0.167 & -0.042 \\ 0.292 & 0.542 & -0.167 & 0.208 \\ -0.167 & -0.167 & 0.667 & 0.167 \\ -0.042 & 0.208 & 0.167 & 0.542 \end{pmatrix},$$

а вектор корелат матиме вигляд:

$$K = \begin{pmatrix} 2.57 \\ -0.05 \\ 0.82 \\ 0.68 \end{pmatrix}$$

8. Обчислення поправок

Обчислення поправок проведемо із рівняння $V = A^T K$. Матимемо:

$$V = \begin{pmatrix} -2.57 \\ 0.05 \\ -0.82 \\ -2.63 \\ -0.68 \\ 3.30 \\ 0.08 \end{pmatrix}$$

9. Обчислення урівняних значень перевищень

Урівняні значення перевищень $[h_i]$ отримують з виміряних значень перевищень (h_i) шляхом додавання до них значень поправок v_i.

Таблиця 2.2.

№ ходів	Перевищення h_i, м	Поправки v_i, см	Виправлені перевищення, h_i,м
1	6,135	-2,57	6,1093
2	8,343	0,05	8,3435
3	5,614	-0,82	5,6058
4	1,394	-2,63	1,3677
5	-6,969	-0,68	-6,9758
6	-0,930	3,30	-0,8970
7	6,078	0,08	6,0788

10. Обчислення висот вузлових точок

Таблиця 2.3.

№ вузлової точки	Формула	Висота
1	$H_A + h_1$	189,615
3	$H_C + h_6$	190,982
2	$H_B + h_3$	197,959

11. Обчислення середньоквадратичної похибки одиниці ваги.

$$\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{n-k}} = 4.2$$

Відповідь: $H_1 = 189{,}615$, $H_2 = 190{,}982$, $H_3 = 197{,}959$.

Варіанти індивідуального завдання

для лабораторної роботи № 1

Розв’язати задачу врівноваження мережі нівелювання при рівноточних вимірюваннях корелатним методом, представлену на рис.2.2. Вихідні дані кожного варіанту наведені в таблиці 2.4. Систему нормальних рівнянь отримати матричним способом та за допомогою способу проф. В.В.Попова. Визначити середньо-квадратичну похибку одиниці ваги.

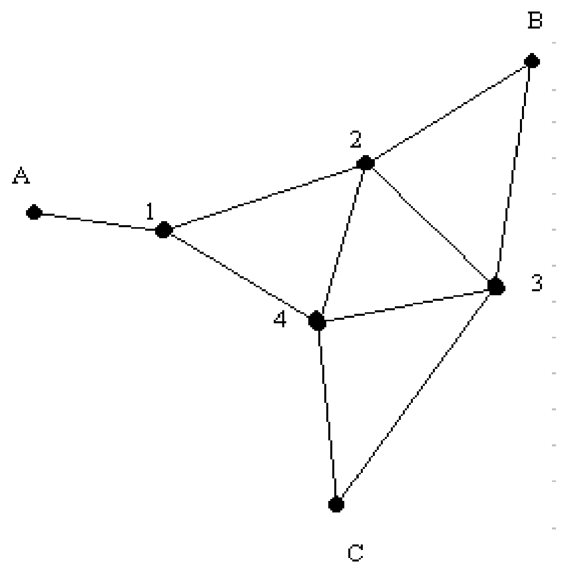


Рис. 2.2. Вигляд нівелірної мережі

Варіант №	1	Варіант №	2	Варіант №	3	Варіант №	4	Варіант №	5
h_{A1}=	0,654	h_{A1}=	-3,958	h_{A1}=	-4,313	h_{A1}=	0,163	h_{A1}=	-1,064
h_{12}=	0,176	h_{12}=	2,322	h_{12}=	2,627	h_{12}=	5,217	h_{12}=	-1,316
h_{14}=	0,492	h_{14}=	-0,736	h_{14}=	-1,649	h_{14}=	2,474	h_{14}=	1,208
h_{2B}=	0,757	h_{2B}=	-0,465	h_{2B}=	-3,383	h_{2B}=	-2,627	h_{2B}=	-0,469
h_{23}=	-6,265	h_{23}=	-5,557	h_{23}=	1,970	h_{23}=	-2,910	h_{23}=	1,459
h_{24}=	0,317	h_{24}=	-3,057	h_{24}=	-4,271	h_{24}=	-2,735	h_{24}=	2,523
h_{B3}=	-7,023	h_{B3}=	-5,095	h_{B3}=	5,358	h_{B3}=	-0,272	h_{B3}=	1,936
h_{34}=	6,589	h_{34}=	2,511	h_{34}=	-6,240	h_{34}=	0,182	h_{34}=	1,069
h_{3C}=	2,431	h_{3C}=	6,106	h_{3C}=	0,649	h_{3C}=	0,639	h_{3C}=	2,067
h_{C4}=	4,163	h_{C4}=	-3,596	h_{C4}=	-6,880	h_{C4}=	-0,447	h_{C4}=	-0,996
H_A=	106,756	H_A=	108,686	H_A=	107,053	H_A=	100,911	H_A=	108,260
H_B=	108,333	H_B=	106,575	H_B=	101,968	H_B=	103,646	H_B=	105,390
H_C=	103,732	H_C=	107,578	H_C=	107,973	H_C=	103,994	H_C=	109,383

Варіант №	6	Варіант №	7	Варіант №	8	Варіант №	9	Варіант №	10
h_{A1}=	1,724	h_{A1}=	-2,086	h_{A1}=	6,193	h_{A1}=	3,248	h_{A1}=	0,388
h_{12}=	-1,964	h_{12}=	-0,109	h_{12}=	-6,877	h_{12}=	-3,635	h_{12}=	4,847
h_{14}=	3,644	h_{14}=	-0,744	h_{14}=	0,772	h_{14}=	-1,861	h_{14}=	2,249
h_{2B}=	2,025	h_{2B}=	1,246	h_{2B}=	-2,215	h_{2B}=	5,334	h_{2B}=	1,350
h_{23}=	0,971	h_{23}=	0,227	h_{23}=	5,556	h_{23}=	-4,141	h_{23}=	-1,730
h_{24}=	5,612	h_{24}=	-0,621	h_{24}=	7,646	h_{24}=	1,774	h_{24}=	-2,596
h_{B3}=	-1,046	h_{B3}=	-1,015	h_{B3}=	7,780	h_{B3}=	-9,476	h_{B3}=	-3,071
h_{34}=	4,641	h_{34}=	-0,845	h_{34}=	2,093	h_{34}=	5,923	h_{34}=	-0,867
h_{3C}=	0,715	h_{3C}=	-3,095	h_{3C}=	-4,563	h_{3C}=	1,116	h_{3C}=	-2,244
h_{C4}=	3,928	h_{C4}=	2,245	h_{C4}=	6,657	h_{C4}=	4,811	h_{C4}=	1,384
H_A=	102,478	H_A=	107,689	H_A=	102,963	H_A=	104,868	H_A=	100,092
H_B=	104,245	H_B=	106,729	H_B=	100,057	H_B=	109,803	H_B=	106,668
H_C=	103,910	H_C=	102,610	H_C=	103,263	H_C=	101,439	H_C=	101,342

Варіант №	11	Варіант №	12	Варіант №	13	Варіант №	14	Варіант №	15
h_{A1}=	-0,519	h_{A1}=	1,931	h_{A1}=	-2,519	h_{A1}=	7,133	h_{A1}=	-7,768
h_{12}=	-0,970	h_{12}=	-2,303	h_{12}=	-3,002	h_{12}=	-6,789	h_{12}=	8,296
h_{14}=	-5,436	h_{14}=	-1,758	h_{14}=	3,275	h_{14}=	-3,456	h_{14}=	1,456
h_{2B}=	-4,936	h_{2B}=	7,466	h_{2B}=	-0,699	h_{2B}=	-0,505	h_{2B}=	-5,748
h_{23}=	-1,306	h_{23}=	4,177	h_{23}=	6,028	h_{23}=	7,987	h_{23}=	-7,472
h_{24}=	-4,459	h_{24}=	0,550	h_{24}=	6,280	h_{24}=	3,336	h_{24}=	-6,832
h_{B3}=	3,631	h_{B3}=	-3,289	h_{B3}=	6,732	h_{B3}=	8,501	h_{B3}=	-1,720
h_{34}=	-3,154	h_{34}=	-3,617	h_{34}=	0,264	h_{34}=	-4,640	h_{34}=	0,644
h_{3C}=	-2,735	h_{3C}=	2,082	h_{3C}=	-5,863	h_{3C}=	-1,061	h_{3C}=	3,842
h_{C4}=	-0,409	h_{C4}=	-5,688	h_{C4}=	6,137	h_{C4}=	-3,573	h_{C4}=	-3,197
H_A=	107,007	H_A=	102,687	H_A=	108,537	H_A=	100,247	H_A=	107,896
H_B=	100,567	H_B=	109,768	H_B=	102,296	H_B=	100,069	H_B=	102,663
H_C=	101,454	H_C=	108,545	H_C=	103,150	H_C=	107,490	H_C=	104,777

Варіант №	16	Варіант №	17	Варіант №	18	Варіант №	19	Варіант №	20
h_{A1}=	-2,614	h_{A1}=	2,782	h_{A1}=	7,049	h_{A1}=	4,974	h_{A1}=	-0,352
h_{12}=	1,980	h_{12}=	-3,022	h_{12}=	-1,861	h_{12}=	-1,154	h_{12}=	-6,881
h_{14}=	4,383	h_{14}=	0,425	h_{14}=	-6,119	h_{14}=	-6,732	h_{14}=	-2,856
h_{2B}=	5,612	h_{2B}=	1,577	h_{2B}=	-2,253	h_{2B}=	-2,171	h_{2B}=	1,673
h_{23}=	4,717	h_{23}=	3,858	h_{23}=	0,218	h_{23}=	2,059	h_{23}=	0,747
h_{24}=	2,418	h_{24}=	3,447	h_{24}=	-4,252	h_{24}=	-5,572	h_{24}=	4,025
h_{B3}=	-0,896	h_{B3}=	2,287	h_{B3}=	2,477	h_{B3}=	4,226	h_{B3}=	-0,915
h_{34}=	-2,302	h_{34}=	-0,402	h_{34}=	-4,462	h_{34}=	-7,623	h_{34}=	3,280
h_{3C}=	-1,523	h_{3C}=	-2,088	h_{3C}=	-5,282	h_{3C}=	-6,207	h_{3C}=	1,547
h_{C4}=	-0,774	h_{C4}=	1,690	h_{C4}=	0,818	h_{C4}=	-1,406	h_{C4}=	1,734
H_A=	104,333	H_A=	100,996	H_A=	100,663	H_A=	102,195	H_A=	108,334
H_B=	109,293	H_B=	102,323	H_B=	103,579	H_B=	103,827	H_B=	102,756
H_C=	106,872	H_C=	102,509	H_C=	100,768	H_C=	101,839	H_C=	103,378

Лабораторна робота № 2

Врівноваження мережі нівелювання при нерівноточних вимірюваннях

Завдання. Розв'язати задачу врівноваження мережі нівелювання при нерівноточних вимірюваннях корелатним методом, представлену на рис.3.1. Вихідні дані наведені в таблиці 3.1. Систему нормальних рівнянь отримати матричним способом. Висоти реперів A, B, C наступні $H_A =$ 183,506; $H_B = 192{,}353$; $H_C = 191{,}880$.

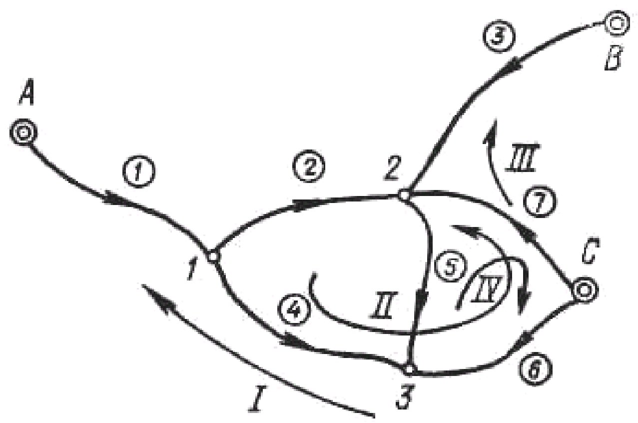


Рис. 3.1. Мережа нівелювання.

Таблиця 3.1.

Вихідні дані

№ ходів	Перевищення h_i, м	Довжина ходу L_i, км
1	6,135	33,0
2	8,343	33,9
3	5,614	30,4
4	1,394	32,7
5	-6,969	31,8
6	-0,930	29,9
7	6,078	34,5

Розв’язання

Нівелірна мережа містить 7 виміряних перевищень $h_i\ (i=\overline{1..7})$, істинні значення яких є невідомими. Зі змісту задачі відомо, що перевищення між точками мережі та реперами пов’язані між собою умовами полігонів та умовами твердих реперів.

Оскільки результати вимірювань $h_i\ (i=\overline{1..7})$ отримано з деякими похибками, то в умовах полігонів та умовах твердих реперів будуть присутні нев'язки, які не дорівнюють нулеві.

Тому задача врівноваження зводиться до усунення нев'язок системі рівнянь (1.2), для чого потрібно знайти поправки $v_i\ (i=\overline{1..7})$ до результатів вимірювань $h_i\ (i=\overline{1..7})$. Розв’язання даної задачі розглянемо за допомогою корелатного методу врівноваження. Нля цього виконаємо напступні кроки.

1. Визначення кількості умовних рівнянь.

У випадку нівелірної мережі , що зображена на рис. 2.1, число умовних рівнянь збігається з числом надлишкових вимірів і дорівнює $r=l-k$, де l – число ходів, k – число вузлових точок. В нашому випадку $l=7$, а $k=3$, отже, $r=4$. Вибір полігонів проведемо згідно рисунку 2.1 та встановимо їх відповідний напрямок.

2. Визначення умовних рівнянь

При врівноваженні даної нівелірної мережі корелатним методом присутні і умови полігонів так і умови твердих реперів.

В нашому випадку маємо два розімкнених ходи (I, III) і два замкнених (II, IV).

Отже,

для ходу I маємо умову реперів : $-v_1-v_4+v_6+w_1=0$,

для ходу II маємо умову полігонів: $-v_2+v_4-v_6+v_7+w_2=0$,

для ходу III маємо умову реперів: $-v_3+v_7+w_3=0$,

для ходу IV маємо умову полігонів: $-v_5+v_6-v_7+w_4=0$.

Матриця умовних рівнянь матиме вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Обчислення вільних членів умовних рівнянь

Для ходу I : $w_1 = [H_C] + (h_6) - (h_4) - (h_1) - [H_A]$.

$$w_1 = \text{-0,085 м.}$$

Для ходу II : $w_2 = (h_4) - (h_6) + (h_7) - (h_2)$.

$$w_2 = \text{+0,059 м.}$$

Для ходу III : $w_3 = [H_C] + (h_7) - (h_3) - [H_B]$.

$$w_3 = \text{-0,009 м.}$$

Для ходу IV : $w_4 = (h_6) - (h_5) - (h_7)$.

$$w_4 = \text{-0,039 м.}$$

Вектор W матиме вигляд (представлений у сантиметрах):

$$W = \begin{pmatrix} -8.5 \\ 5.9 \\ -0.9 \\ -3.9 \end{pmatrix},$$

а вектор невідомих поправок до результатів вимірювань буде наступним:

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_7 \end{pmatrix}.$$

4. Обчислення ваг вимірів

Ваги вимірів обчислимо за наступною формулою

$$p_i = c / L_i ,$$

де L_i - довжина ходу. В якості константи c виберемо довжину 40 км.

Таблиця 3.2.

Визначення ваги вимірів

№ ходів	Довжина ходу L_i, км	Ваги, $p_i = c/L_i$	Обернені ваги $\pi_i = 1/p_i$
1	33,0	1,21	0,83
2	33,9	1,18	0,85
3	30,4	1,32	0,76
4	32,7	1,22	0,82
5	31,8	1,26	0,80
6	29,9	1,34	0,75
7	34,5	1,16	0,86

На основі таблиці 3.2. отримаємо матрицю ваг вимірів P:

$$P = \begin{pmatrix} 1.21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.26 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.34 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.16 \end{pmatrix},$$

а матриця P^{-1} матиме вигляд:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0.83 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.76 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.82 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.79 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0/75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0/86 \end{pmatrix}.$$

5. Матричний розв’язок задачі врівноваження

Умовні рівняння поправок можна подати у матричній формі:

$$AV + W = 0$$

Розв'язок даного матричного рівняння будемо шукати, використавши умову

$$V^T PV = \left[pv^2\right] = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 \to \min$$

Початкову задачу врівноваження зведено до визначення екстремуму функції. Наведену задачу на умовний екстремум функції можна розв'язати методом Лагранжа, тобто вона зводиться до задачі на абсолютний екстремум нової функції

$$\Phi = V^T PV - 2K^T (AV + W) \to \min$$

де

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}$$ – вектор корелат.

Необхідною умовою мінімуму функції від багатьох змінних є рівність нулеві її часткових похідних або рівність нулеві її повного диференціалу першого порядку, тобто $d\Phi = 0$.

Провівши нескладні математичні викладки отримаємо вектор поправок

$$V = P^{-1} A^T K .$$

Невідомий вектор корелат можна знайти розв’язавши наступне матричне нормальне рівняння корелат

$$AP^{-1} A^T K + W = 0 .$$

Ввівши позначення $N = AP^{-1} A^T$ для матці нормальних рівнянь отримаємо наступне рівняння корелат

$$NK + W = 0 .$$

Звідки вектор корелат отримується наступним чином:

$$K = -N^{-1}W\,.$$

6. Визначення матриці нормальних рівнянь

Матриця нормальних рівнянь матиме вигляд:

$$N = AP^{-1}A^{T} = \begin{pmatrix} 2.39 & -1.37 & 0.00 & 0.75 \\ -1.57 & 3.28 & 0.86 & -1.61 \\ 0.00 & 0.86 & 1.62 & -0.86 \\ 0.75 & -1.61 & -0.86 & 2.40 \end{pmatrix}$$

7. Обчислення корелат.

Обчислення корелат проведемо за наступними формулами. Матимемо:

$$NK + W = 0,$$
$$N^{-1}NK + N^{-1}W = 0\,,$$
$$K + N^{-1}W = 0\,,$$
$$K = -N^{-1}W\,.$$

В нашому випадку

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0.661 & 0.348 & -0.211 & -0.048 \\ 0.348 & 0.651 & -0.213 & 0.252 \\ -0.211 & -0.213 & 0.852 & 0.229 \\ -0.048 & 0.252 & 0.229 & 0.682 \end{pmatrix},$$

а вектор корелат матиме вигляд:

$$K = \begin{pmatrix} 3.19 \\ -0.10 \\ 1.12 \\ 0.97 \end{pmatrix}$$

8. Обчислення поправок

Обчислення поправок проведемо із рівняння $V = P^{-1}A^{T}K$. Матимемо:

$$V = \begin{pmatrix} -2.63 \\ 0.08 \\ -0.85 \\ -2.69 \\ -0.77 \\ 3.18 \\ 0.05 \end{pmatrix}$$

9. Обчислення урівняних значень перевищень

Урівняні значення перевищень $[h_i]$ отримують з виміряних значень перевищень (h_i) шляхом додавання до них значень поправок v_i.

Таблиця 3.3.

№ ходів	Перевищення h_i, м	Поправи v_i, см	Виправлені перевищення, h_i,м
1	6,135	-2,63	6,1087
2	8,343	0,08	8,3438
3	5,614	-0,85	5,6055
4	1,394	-2,69	1,3671
5	-6,969	-0,77	-6,9767
6	-0,930	3,18	-0,8982
7	6,078	0,05	6,0785

10. Обчислення висот вузлових точок

Таблиця 3.4.

№ вузлової точки	Формула	Висота
1	$H_A + h_1$	189,615
3	$H_C + h_6$	190,982
2	$H_B + h_3$	197,959

Відповідь: $H_1 = 189{,}615,\ H_2 = 190{,}982,\ H_3 = 197{,}959.$

Варіанти індивідуального завдання
для лабораторної роботи № 2

Розв’язати задачу врівноваження мережі нівелювання при нерівноточних вимірюваннях корелатним методом, представлену на рис.3.2. Вихідні дані кожного варіанту наведені в таблиці 3.5. Висоти реперів *I, II, III* наступні $H_I = 188{,}452,\ H_{II} = 188{,}838,\ H_{III} = 186{,}298.$

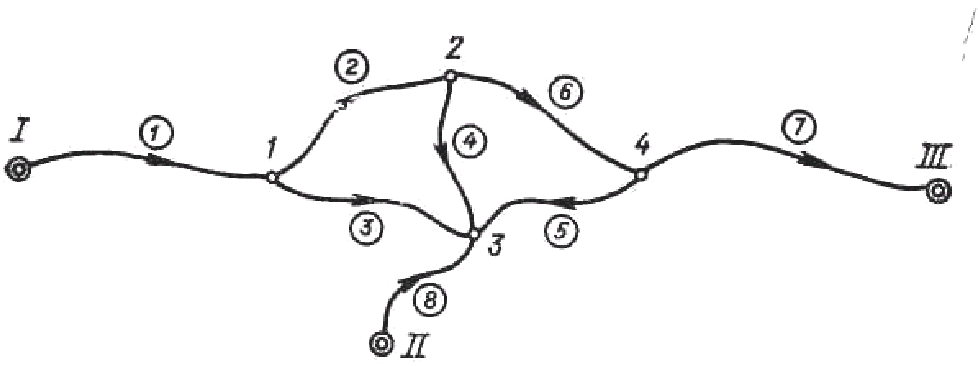


Рис. 3.2. Вигляд нівелірної мережі

№№	Перевищення, м	Довжина ходу, км									
		Варіанти									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2,214+0,001*i*	12,8	13,4	14,0	8,0	11,1	11,8	13,2	15,1	16,6	17,5
2	1,566	14,2	14,8	15,5	8,9	12,3	13,1	14,6	16,7	18,3	19,4
3	-0,302	8,7	9,1	9,5	5,4	7,6	8,0	8,9	10,2	11,2	11,8
4	-1,881	12,4	13,0	13,6	7,7	10,7	10,4	12,8	14,6	16,0	16,9
5	0,915	5,8	6,1	6,4	3,6	5,1	5,4	6,0	6,9	7,5	7,9
6	-2,814	5,1	5,3	5,6	3,2	4,4	4,8	5,2	6,0	6,5	6,9
7	-3,137	7,8	8,3	8,6	4,9	6,8	7,2	8,1	9,2	10,1	10,6
8	1,517+0,001*i*	10,1	10,7	11,1	6,3	8,8	9,4	10,4	12,0	13,1	13,8

№№	Перевищення, м	Довжина ходу, км									
		Варіанти									
		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2,214+0,001*i*	12,9	15,0	16,2	8,2	11,3	12,1	13,4	15,4	16,7	17,7
2	1,566	14,8	14,2	15,3	8,7	12,0	13,5	14,1	16,9	18,3	20,1
3	-0,302	8,6	9,1	9,7	5,7	7,1	8,6	8,8	10,0	11,6	12,1
4	-1,881	12,7	13,2	13,7	8,2	10,9	10,4	12,8	14,6	16,6	16,9
5	0,915	5,2	6,7	6,4	3,8	5,3	5,7	6,2	6,8	7,4	8,2
6	-2,814	5,1	5,3	5,6	3,2	4,4	4,8	5,2	6,0	6,5	6,9
7	-3,137	7,9	8,3	8,5	4,9	6,8	7,6	8,1	9,2	10,6	10,6
8	1,517+0,001*i*	10,4	10,9	11,3	6,5	8,9	9,5	10,5	12,5	14,0	15,0

Примітка:** тут ***i – номер варіанту.

Лабораторна робота № 3

Врівноваження мережі тріангуляціїї у вигляді центральної системи

Завдання. Розв’язати задачу врівноваження мережі тріангуляції у вигляді центральної системи корелатним методом, представлену на рис.4.1. Вихідні дані наведені в таблиці 4.1. Систему нормальних рівнянь отримати матричним способом. Оцінити точність результатів вимірів та провести обчислення координат всіх точок мережі тріангуляції.

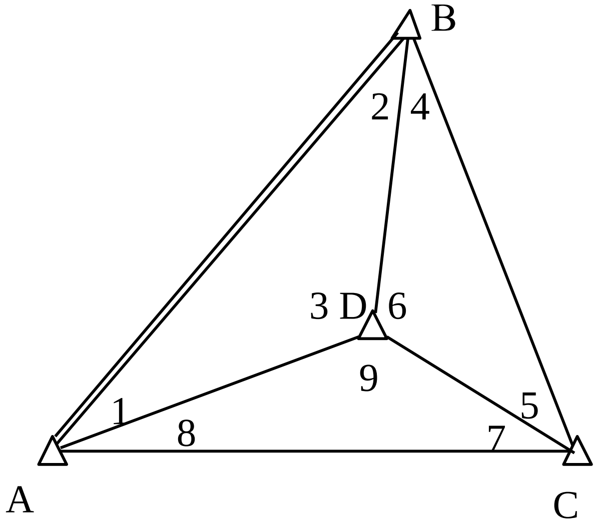


Рис. 4.1. Схема тріангуляційної мережі.

Таблиця 4.1.

Вихідні дані

№ кута	Виміряне значення кута	Пункти	Координати	
1	28° 23’ 49.5”		X	Y
2	33° 06’ 30.7”	*A*	5112319.121	5326448.905
3	118° 29’ 33.2”	*B*	5113764.593	5329067.037
4	27° 09’ 42.1”			
5	19° 07’ 08.1”			
6	133° 43’ 16.8”			
7	32° 04’ 59.7”			
8	40° 08’ 04.3”			
9	107° 47’ 03.4”			

Розв'язання

Мережа тріангуляції містить 9 виміряних кутів $\beta_i \; (i=\overline{1..9})$, істинні значення яких є невідомими. Зі змісту задачі відомо, що виміряні кути пов'язані між собою умовами фігур, горизонту та полюсу. Оскільки результати вимірювань $\beta_i \; (i=\overline{1..9})$ отримано з деякими похибками, то в умовах фігур, горизонту та полюсу будуть присутні нев'язки, які не дорівнюють нулеві.

Тому задача врівноваження зводиться до усунення нев'язок системі рівнянь (1.2), для чого потрібно знайти поправки $v_i \; (i=\overline{1..9})$ до результатів вимірювань $\beta_i \; (i=\overline{1..9})$. Розв'язання даної задачі розглянемо за допомогою кореатного методу врівноваження. Для цього виконаємо наступні кроки.

1. Визначення кількості умовних рівнянь.

Спочатку визначають кількість незалежних умовних рівнянь поправок r. Зробити це можна безпоседнім підрахунком надлишку виміряних величин, які створюють геометричні умови (умови фігур), що й визначають шукану кількість рівнянь. Інший спосіб визначення r – за формулою, яка для незалежних мереж (таких, що мають лише необхідну кількість вихідних даних) набуде вигляду:

$$r = N - 2t$$

де N – кількість виміряних пунктів, а t – кількість пунктів, координати яких визначають.

Отже, $r = 9 - 4 = 5$, або три кути в одному надлишково виміряному трикутнику і ще по одному куті в двох інших трикутниках.

Спричиненіі надлишковими вимірами геометричні умови: суми кутів плоского трикутника (умов фігур – 3), умови суми кутів навколо полюса (умова горизонту – 1), умова замкненого ряду трикутників, що починаються та закінчуються однією і тією ж стороною (умова полюсу – 1).

2. Складання умовних рівняння фігур.

Обчислюємо вільні члени та складаємо умовні рівняння фігур (табл. 4.2).

Таблиця 4.2.

Визначення умовних рівнянь фігур

№ трикутника	№ кута	Значення виміряного кута °	'	"	Складене рівняння	Квадрат нев'язки трикутника
I	1	28	23	49,5	$v_1 + v_2 + v_3 - 6.6 = 0$	43,56
	2	33	06	30,7		
	3	118	29	33,2		
	Σ	**179**	**59**	**53,4**		
	w			**-6,6**		
II	4	27	09	42,1	$v_4 + v_5 + v_6 + 7.0 = 0$	49,00
	5	19	07	08,1		
	6	133	43	16,8		
	Σ	**180**	**00**	**07,0**		
	w			**07,0**		
III	7	32	04	59,7	$v_7 + v_8 + v_9 + 7.4 = 0$	54,76
	8	40	08	04,3		
	9	107	47	03,4		
	Σ	**180**	**00**	**07,4**		
	w			**07,4**		

3. Оцінка точності вимірювань

Обчислюємо оцінку точності вимірювань за нев'язками в трикутниках:

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[w^2]}{3k}} = \sqrt{\frac{43.56 + 49.00 + 54.76}{3 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{147.32}{9}} = 4.046'',$$

де k - кількість трикутників в мережі.

Визначаємо допустиму нев'язку в кожному з трикутників мережі:

$$w_{\text{доп}} = 2.5 m_\beta \sqrt{3} = 17.526''$$

4. Складання рівняння горизонту

Обчислюємо вільний член (нев'язку) та складаємо рівняння горизонту (табл. 4.3).

Таблиця 4.3.

Визначення умовного рівняння горизонту

№ кута	Значення виміряного кута		
	°	'	"
3	118	29	33,2
6	133	43	16,8
9	107	47	3,4
Σ	**359**	**59**	**53,4**
w			**-6,6**

$$v_3 + v_6 + v_9 - 6.6 = 0$$

5. Складання рівняння полюсу

Для визначення довжин сторін трикутників необхідні синуси кутів трикутника, оскільки можна скористатись теоремою синусів.

Оскільки сторона AD, як приклад, є початковою і кінцевою стороною в центральній системі, умова полюсу може бути записана у вигляді:

$$AD = b_3 = b_1 = b_1 \frac{\sin\angle 1 \sin\angle 4 \sin\angle 7}{\sin\angle 2 \sin\angle 5 \sin\angle 8}.$$

Поділивши обидві частини на b_1 і перенісши дріб в ліву частину та домноживши кожен член рівняння на -1 отримаємо:

$$\frac{\sin\angle 1 \sin\angle 4 \sin\angle 7}{\sin\angle 2 \sin\angle 5 \sin\angle 8} - 1 = 0.$$

Однак, внаслідок похибок при вимірюванні кутів , у правій частині цього виразу буде не нуль.

Тому умову полюсного рівняння лінеаризуємо і перепишемо у вигляді:

$$v_1 \cdot \mathrm{ctg}\angle 1 + v_4 \cdot \mathrm{ctg}\angle 4 + v_7 \cdot \mathrm{ctg}\angle 7 - v_2 \cdot \mathrm{ctg}\angle 2 - v_5 \cdot \mathrm{ctg}\angle 5 - v_8 \cdot \mathrm{ctg}\angle 8 - \omega_5 = 0$$

$$\omega_5 = \rho'' \frac{\sin\angle 1 \sin\angle 4 \sin\angle 7 - \sin\angle 2 \sin\angle 5 \sin\angle 8}{\sin\angle 2 \sin\angle 5 \sin\angle 8},$$

$$\omega_{\text{полюсдоп}} = 2.5 m_\beta \sqrt{[ctg^2]}.$$

Визначаємо вільний член та складаємо полюсне рівняння (табл. 4.4).

Таблиця 4.4.

Визначення умовного полюсного рівняння

Номер кута	Величина кута			Sin	Ctg	Ctg²
	°	'	"			
1	28	23	49,5	0,47557943	1,850	3,4225
4	27	09	42,1	0,45650320	1,949	3,7986
7	32	04	59,7	0,53115091	1,595	2,5440
Добуток Пч				0,11531474	Сума	9,7651
2	33	06	30,7	0,54622664	1,533	2,3501
5	19	07	08,1	0,32752986	2,885	8,3232
8	40	08	04,3	0,64458447	1,186	1,4066
Добуток Пз				0,11531973	Сума	12,0799
(Пч-Пз)/Пч				-0,00004327	Сума	21,8450
ρ''	206265		w	-8,926	$w_{доп}$	47,276

$$1.850v_1 - 1.533v_2 + 1.949v_4 - 2.885v_5 + 1.595v_7 - 1.186v_8 - 8.926 = 0$$

6. Складаємо систему умовних рівнянь

Складаємо систему умовних рівнянь даної центральної системи. З таблиці 4.2 отримаємо три умовні рівняння, а ще два з таблиці 4.3. та 4.4.:

$$v_1 + v_2 + v_3 - 6.6 = 0,$$

$$v_4 + v_5 + v_6 + 7.0 = 0,$$

$$v_7 + v_8 + v_9 + 7.4 = 0,$$

$$v_3 + v_6 + v_9 - 6.6 = 0,$$

$$1.850v_1 - 1.533v_2 + 1.949v_4 - 2.885v_5 + 1.595v_7 - 1.186v_8 - 8.926 = 0,$$

Матриця умовних рівнянь A матиме вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1.850 & -1.533 & 0 & 1.949 & -2.885 & 0 & 1.595 & -1.186 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор W матиме вигляд (у секундах):

$$W = \begin{pmatrix} -6.6 \\ 7.0 \\ 7.4 \\ -6.6 \\ -8.926 \end{pmatrix},$$

а вектор невідомих поправок до результатів вимірювань буде наступним:

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{pmatrix}.$$

7. Матричний розв’язок задачі врівноваження

Умовні рівняння поправок можна подати у матричній формі:

$$AV + W = 0$$

Розв'язок даного матричного рівняння будемо шукати, використавши умову

$$V^T V = \left[v^2\right] = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \to \min$$

Початкову задачу врівноваження зведено до визначення екстремуму функції. Наведену задачу на умовний екстремум функції можна розв'язати методом Лагранжа, тобто вона зводиться до задачі на абсолютний екстремум нової функції

$$\Phi = V^T V - 2K^T (AV + W) \to \min$$

де

$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_5 \end{pmatrix}$ – вектор корелат.

Необхідною умовою мінімуму функції від багатьох змінних є рівність нулеві її часткових похідних або рівність нулеві її повного диференціалу першого порядку, тобто $d\Phi = 0$.

Провівши нескладні математичні викладки отримаємо вектор поправок

$$V = A^T K.$$

Невідомий вектор корелат можна знайти розв'язавши наступне матричне нормальне рівняння корелат

$$AA^T K + W = 0.$$

Ввівши позначення $N = AA^T$ для матці нормальних рівнянь отримаємо наступне рівняння корелат

$$NK + W = 0.$$

Звідки вектор корелат отримується наступним чином:

$$K = -N^{-1}W.$$

8. Визначення матриці нормальних рівнянь

Матриця нормальних рівнянь матиме вигляд:

$$N = AA^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 0.317 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -0.936 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0.409 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0.317 & -0.936 & 0.409 & 0 & 21.845 \end{pmatrix}$$

9. Обчислення корелат.

Обчислення корелат проведемо за наступними формулами. Матимемо:

$$NK + W = 0,$$
$$N^{-1}NK + N^{-1}W = 0,$$
$$K + N^{-1}W = 0,$$
$$K = -N^{-1}W\ .$$

В нашому випадку

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0.389 & 0.054 & 0.056 & -0.167 & -0.004 \\ 0.054 & 0.394 & 0.054 & -0.167 & 0.015 \\ 0.056 & 0.054 & 0.390 & -0.166 & -0.006 \\ -0.167 & -0.167 & -0.166 & 0.500 & -0.002 \\ -0.004 & 0.015 & -0.006 & -0.002 & 0.047 \end{pmatrix},$$

а вектор корелат матиме вигляд:

$$k = \begin{pmatrix} 0.389 & 0.054 & 0.056 & -0.167 & -0.004 \\ 0.054 & 0.394 & 0.054 & -0.167 & 0.015 \\ 0.056 & 0.054 & 0.390 & -0.166 & -0.006 \\ -0.167 & -0.167 & -0.166 & 0.500 & -0.002 \\ -0.004 & 0.015 & -0.006 & -0.002 & 0.047 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6.6 \\ 7.0 \\ 7.4 \\ -6.6 \\ -6.926 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.637 \\ -3.765 \\ -4.039 \\ 4.589 \\ 0.314 \end{pmatrix}$$

10. Обчислення поправок

Обчислення поправок проведемо із рівняння $V = A^T K$. Матимемо:

$$V = \begin{pmatrix} 1.217 \\ 0.156 \\ 5.226 \\ -3.154 \\ -4.670 \\ 0.824 \\ -539 \\ -4.411 \\ 0.550 \end{pmatrix}$$

11. Обчислення вихідного дирекційного кута

Для обчислення вихідного дирекційного кута вихідної довжини лінії між точками A та B розв'яжемо обернену геодезичну задачу. Використовуючи наступні формули заповнимо таблицю 4.5.

$$\mathrm{tg}\alpha_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x};\ \mathrm{tg}(\alpha_{AB} + 45°) = \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta x - \Delta y}.$$

$$d'_{AB} = \frac{\Delta y}{\sin\alpha_{AB}};\ d''_{AB} = \frac{\Delta x}{\cos\alpha_{AB}};\ d'''_{AB} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Таблиця 4.5.

Обчислення при оберненій геодезичній задачі

Формули	Величини	Формули	Величини
x_A	5113764,593	y_A	5329067,037
x_B	5112319,121	y_B	5326448,905
Δx_{AB}	+1445,472	Δy_{AB}	+2618,132
$\mathrm{tg}\alpha_{AB}$	+1,81126442	$\Delta x_{AB} + \Delta y_{AB}$	+4063,604
α_{AB}	61° 05’ 48.8”	$\Delta x_{AB} - \Delta y_{AB}$	-1172,660
$\mathrm{tg}(\alpha_{AB} + 45°)$	-3.46528747	$\sin\alpha_{AB}$	0.87543828
$(\alpha_{AB} + 45°)$	106° 05’ 48.8”	$\cos\alpha_{AB}$	0.48332992
d'_{AB}	2990.653	d'''_{AB}	2990.653
d''_{AB}	2990.653	d_{AB}	2990.653

Повне значення дирекційного кута отримують з урахуванням чверті, в якій розташований гострий кут α_{AB} (табл. 4.6.)

Таблиця 4.6.

Визначення дирекціційного кута

Чверть	I	II	III	IV
Δx_{AB}	+	–	–	+
Δy_{AB}	+	+	–	–
α_{AB}	$\alpha_{AB} = \alpha_{AB}$	$\alpha_{AB} = 180° - \alpha_{AB}$	$\alpha_{AB} = 180° + \alpha_{AB}$	$\alpha_{AB} = 360° - \alpha_{AB}$

12. Обчислення довжин сторін

Обчислюємо довжини сторін трикутників мережі тріангуляції за теоремою синусів (табл. 4.7.).

Таблиця 4.7.

Обчислення довжин сторін мережі тріангуляції

№ кута	Значення виміряного кута			Поправка, v_i	Значення вирівняного кута			Sin	d_i
	°	'	"		°	'	"		
3	118	29	33,2	5,2	118	29	38,4	0,87886708	2990,653
2	33	06	30,7	0,2	33	06	30,9	0,54622745	1858,730
1	28	23	49,5	1,2	28	23	50,7	0,47558455	1618,343
Σ	**179**	**59**	**53,4**		**180**	**00**	**00,0**		
ω			**-6,6**	6,6					
5	19	07	8,1	-4,7	19	07	3,4	0,32750833	1618,343
6	133	43	16,8	0,8	133	43	17,6	0,72270717	3571,170
4	27	09	42,1	-3,1	27	09	39,0	0,45648983	2255,690
Σ	**180**	**00**	**07,0**		**180**	**00**	**00,0**		
ω			**07,0**	-7,0					
8	40	08	04,3	-4,4	40	07	59,9	0,64456816	2255,690
9	107	47	03,4	0,5	107	47	03,9	0,95221250	3332,302
7	32	04	59,7	-3,5	32	04	56,2	0,53113653	1858,731
Σ	**180**	**00**	**07,4**		**180**	**00**	**00,0**		
ω			**7,4**	-7,4					

13. Обчислення координат

Складаємо відомість обчислення координат пунктів тріангуляції (табл. 4.8), користуючись формулами:

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + 180° - \beta_{\text{праві}} \qquad \Delta x_i = d_i \cos\alpha_i \qquad x_i = x_{i-1} + \Delta x_i$$

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - \beta_{\text{ліві}} + 180° \qquad \Delta y_i = d_i \sin\alpha_i \qquad y_i = y_{i-1} + \Delta y_i$$

Отримаємо наступну відомість обчислення координат (див табл. 4.8)

Таблиця 4.8.

Обчислення координат точок мережі тріангуляції

№ пункта	№ кутів (праві)	Значення кута			Дирекційний кут			Довжина	Прирости		Координати	
		°	'	"	°	'	"		Δx	Δy	x	y
A												
					61	05	48,8					
B	**2**	33	06	30,9							5113764,593	5329067,037
					207	59	17,9	1618,343	-1429,067	-759,474		
D	**3+9**	226	16	42,3							5112335,526	5328307,563
					161	42	35,6	2255,690	-2141,732	707,9		
C	**7**	32	04	56,2							5110193,794	5329015,463
					309	37	39,4	3332,302	2125,326	-2566,56		
A	**1+8**	68	31	50,6							5112319,120	5326448,904
					61	05	48,8					
B												

14. Оцінка точності

Оцінюють точність результатів вирівнювань за середньою квадратичною похибкою значення виміряного кута

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{N-1}} = \pm 3.417''$$

Відповідь:

пункт	координати	
	x	y
B	5113764,593	5329067,037
D	5112335,526	5328307,563
C	5110193,794	5329015,463
A	5112319,120	5326448,904

Варіанти індивідуального завдання
для лабораторної роботи № 3

Розв'язати задачу врівноваження мережі тріангуляції у вигляді центральної системи корелатним методом, представлену на рис.4.2. Вихідні дані наведені в таблиці 4.9. Систему нормальних рівнянь отримати матричним способом. Оцінити точність результатів вимірів та провести обчислення координат всіх точок мережі тріангуляції. Координати початкових пунктів:

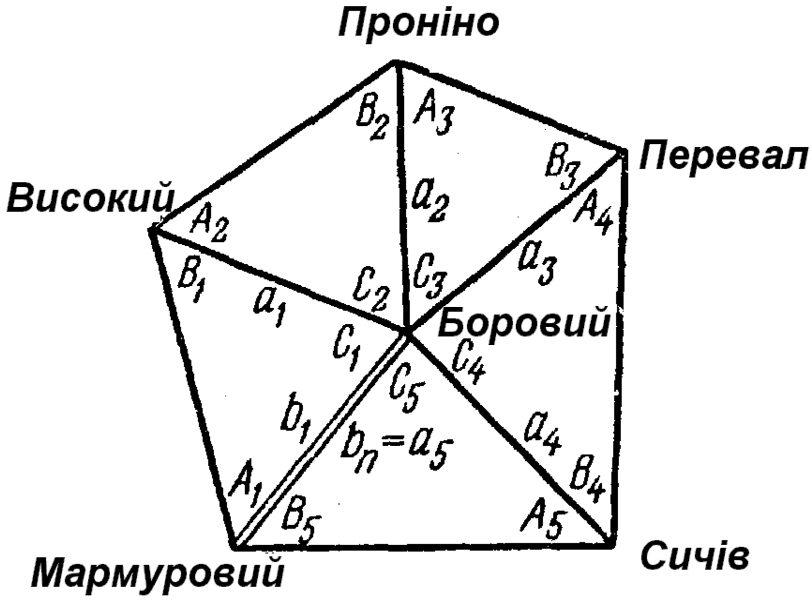


Рис. 4.2. Приклад мережі тріангуляції

Таблиця 4.9.

Вихідні дані для варіантів

пункт	координати	
	x	*y*
Боровий	51 316,57	15 643,26
Мармуровий	49 717,51	14 880,36

Пункти	Варіант1			Варіант2			Варіант3			Варіант4			Варіант5		
	°	“	'	°	“	'	°	“	'	°	“	'	°	“	'
Високий	58	56	21	58	56	17	58	56	18	58	56	18	58	56	18
Боровий	67	45	55	67	45	20	67	45	5	67	45	35	67	45	56
Мармуровий	53	18	0	53	18	40	53	18	21	53	18	18	53	18	1
Проніно	45	43	22	45	43	0	45	43	0	45	43	0	45	43	1
Боровий	68	18	42	68	18	45	68	19	4	68	18	38	68	18	42
Високий	65	58	14	65	58	6	65	58	6	65	58	5	65	58	6
Перевал	55	4	10	55	4	15	55	4	24	55	4	4	55	4	5
Боровий	62	52	53	62	52	43	62	52	5	62	52	55	62	52	40
Проніно	62	3	11	62	3	17	62	3	27	62	3	8	62	3	8
Сичів	64	50	26	64	50	0	64	48	20	64	50	34	64	50	54
Боровий	72	8	0	72	8	47	72	9	15	72	8	42	72	8	12
Перевал	43	1	10	43	1	7	43	2	35	43	1	11	43	1	10
Мармуровий	44	38	50	44	38	56	44	39	10	44	38	52	44	38	54
Боровий	88	54	40	88	54	40	88	54	51	88	54	35	88	54	45
Сичів	46	26	10	46	26	29	46	26	5	46	26	20	46	26	18

Пункти	Варіант6			Варіант7			Варіант8			Варіант9			Варіант10		
	°	“	'	°	“	'	°	“	'	°	“	'	°	“	'
Високий	58	56	18	58	56	18	58	56	17	58	56	17	58	56	18
Боровий	67	45	55	67	45	51	67	45	55	67	45	45	67	45	37
Мармуровий	53	18	1	53	18	1	53	18	10	53	18	0	53	18	0
Проніно	45	43	0	45	43	7	45	43	0	45	43	0	45	43	10
Боровий	68	18	49	68	18	33	68	18	34	68	18	47	68	18	26
Високий	65	58	7	65	58	6	65	58	6	65	58	5	65	58	7
Перевал	55	4	4	55	4	4	55	4	4	55	4	4	55	4	4
Боровий	62	52	45	62	52	39	62	52	41	62	52	13	62	52	45
Проніно	62	3	7	62	3	7	62	3	7	62	3	19	62	3	8
Сичів	64	50	54	64	50	55	64	50	7	64	50	50	64	50	54
Боровий	72	8	15	72	8	47	72	8	37	72	8	14	72	8	49
Перевал	43	1	9	43	1	10	43	1	10	43	1	14	43	1	10
Мармуровий	44	38	50	44	38	52	44	38	51	44	38	52	44	38	52
Боровий	88	54	46	88	54	30	88	54	43	88	54	21	88	54	28
Сичів	46	26	22	46	26	20	46	26	20	46	26	21	46	26	27

Пункти	Варіант11			Варіант12			Варіант13			Варіант14			Варіант15		
	о	“	'	о	“	'	о	“	'	о	“	'	о	“	'
Високий	58	56	9	58	56	26	58	56	18	58	56	18	58	56	18
Боровий	67	45	55	67	45	47	67	45	45	67	45	45	67	45	39
Мармуровий	53	18	6	53	18	17	53	18	1	53	18	0	53	18	12
Проніно	45	43	1	45	43	0	45	43	0	45	43	0	45	43	0
Боровий	68	18	59	68	18	36	68	18	37	68	18	45	68	18	51
Високий	65	58	6	65	58	6	65	58	7	65	58	6	65	58	6
Перевал	55	4	14	55	4	10	55	4	4	55	4	4	55	4	4
Боровий	62	52	47	62	52	58	62	52	24	62	52	45	62	52	47
Проніно	62	3	19	62	3	12	62	3	8	62	3	8	62	3	18
Сичів	64	50	36	64	50	47	64	50	23	64	50	54	64	50	41
Боровий	72	8	31	72	8	32	72	8	41	72	8	30	72	8	34
Перевал	43	1	9	43	1	11	43	1	10	43	1	11	43	1	10
Мармуровий	44	38	52	44	38	51	44	38	51	44	38	52	44	38	49
Боровий	88	54	18	88	54	27	88	54	23	88	54	40	88	54	24
Сичів	46	26	20	46	26	20	46	26	20	46	26	21	46	26	18
Пункти	Варіант16			Варіант17			Варіант18			Варіант19			Варіант20		
	о	“	'	о	“	'	о	“	'	о	“	'	о	“	'
Високий	58	56	18	58	56	18	58	56	17	58	56	16	58	56	14
Боровий	67	45	50	67	45	51	67	45	55	67	45	45	67	45	35
Мармуровий	53	18	1	53	18	12	53	18	11	53	18	1	53	18	01
Проніно	45	43	02	45	43	7	45	43	10	45	43	2	45	43	11
Боровий	68	18	49	68	18	33	68	18	34	68	18	47	68	18	26
Високий	65	58	7	65	58	6	65	58	16	65	58	5	65	58	8
Перевал	55	4	4	55	4	4	55	4	4	55	4	5	55	4	4
Боровий	62	52	46	62	52	29	62	52	41	62	52	13	62	52	42
Проніно	62	3	6	62	3	17	62	3	7	62	3	19	62	3	8
Сичів	64	50	54	64	50	55	64	50	7	64	50	51	64	50	55
Боровий	72	8	4	72	8	47	72	8	37	72	8	14	72	8	49
Перевал	43	1	10	43	1	11	43	1	10	43	1	14	43	1	10
Мармуровий	44	38	50	44	38	50	44	38	51	44	38	52	44	38	51
Боровий	88	54	46	88	54	31	88	54	43	88	54	22	88	54	28
Сичів	46	26	23	46	26	21	46	26	20	46	26	21	46	26	27

Лабораторна робота № 4

Врівноваження мережі трикутників з твердим кутом

Завдання. Розв'язати задачу врівноваження мережі тріангуляції з твердим кутом корелатним методом, представлену на рис.5.1. Вихідні дані наведені в таблиці 5.1. Систему нормальних рівнянь отримати матричним способом. Оцінити точність результатів вимірів та провести обчислення координат всіх точок мережі тріангуляції.

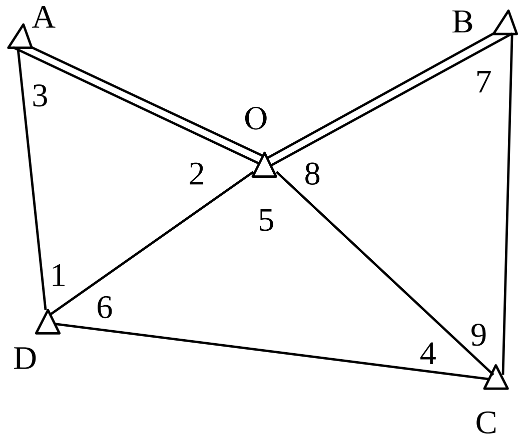


Рис. 5.1. Схема мережі тріангуляції.

Таблиця 5.1.

Вихідні дані

№ кута	Виміряне значення кута	№ кута	Виміряне значення кута
1	64° 36' 00.9"	6	69° 27' 52.6"
2	65° 53' 45.2"	7	33° 44' 19.4"
3	49° 30' 19.3"	8	103° 13' 43.4"
4	55° 19' 45.2"	9	43° 02' 01.4"
5	55° 12' 15.1"		
α_{OB}	50° 21' 10.5"	α_{OA}	274° 19' 40.5"
$x_O =$ 500,000	$y_O =$ 500,000	$OB =$ 1813,119	$OA =$ 2135,504

Розв'язання

Мережа тріангуляції містить 9 виміряних кутів $\beta_i \ (i=\overline{1..9})$, істинні значення яких є невідомими. Тому задача врівноваження зводиться до усунення нев'язок системі рівнянь (1.2), для чого потрібно знайти поправки $v_i \ (i=\overline{1..9})$ до результатів вимірювань $\beta_i \ (i=\overline{1..9})$. Розв'язання даної задачі розглянемо за допомогою кореатного методу врівноваження. Для цього виконаємо наступні кроки.

1. Визначення кількості умовних рівнянь.

Спочатку визначають кількість незалежних умовних рівнянь поправок r. Зробити це можна безпоседнім підрахунком надлишку виміряних величин, які створюють геометричні умови (умови фігур), що й визначають шукану кількість рівнянь. В нашому випадку маємо спричиненії надлишковими вимірами геометричні умови: суми кутів плоского трикутника (умов фігур – 3), умови суми кутів твердого кута (умова дирекційних кутів – 1), умова замкненого ряду трикутників, що починаються та закінчуються однією і тією ж стороною (умова полюсу – 1).

2. Складання умовних рівняння фігур.

Обчислюємо вільні члени і складаємо умовні рівняння фігур (табл. 5.2).

Таблиця 5.2.

Складання умовних рівнянь фігур

№ трикутника	№ кута	Значення виміряного кута °	'	"	Складене рівняння	Квадрат нев'язки трикутника
I	1	64	36	00,9	$v_1 + v_2 + v_3 + 5.4 = 0$	29,16
	2	65	53	45,2		
	3	49	30	19,3		
	Σ	**180**	**00**	**05,4**		
	w			**+5,4**		
II	4	55	19	45,2	$v_4 + v_5 + v_6 - 7.1 = 0$	50,41
	5	55	12	15,1		
	6	69	27	52,6		
	Σ	**179**	**59**	**52,9**		
	w			**-7,1**		
III	7	33	44	19,4	$v_7 + v_8 + v_9 + 4.5 = 0$	20,25
	8	103	13	43,4		
	9	43	02	01,7		
	Σ	**180**	**00**	**4,5**		
	w			**+4,5**		

3. Оцінка точності вимірювань

Обчислюємо оцінку точності вимірювань за нев'язками в трикутниках:

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[w^2]}{3k}} = \sqrt{\frac{29.16 + 50.41 + 20.25}{3 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{99.82}{9}} = 3.330'',$$

де k - кількість трикутників в мережі.

Визначаємо допустиму нев'язку в кожному з трикутників мережі:

$$w_{доп} = 2.5\sqrt{3} \cdot m_\beta = 14.421''$$

4. Складання умовного рівняння твердого кута

Обчислюємо твердий кут $\angle BOA$, як різницю дирекційних кутів α_{OA} α_{OB}: $\angle BOA = \alpha_{OA} - \alpha_{OB} = 274°19'40.5''–50°21'10.5'' = 224°19'40.5''$

Обчислюємо вільний член (нев'язку) та складаємо рівняння суми твердого кута (табл. 4.3).

Таблиця 5.3.

Складання умовного рівняння твердого кута

№ кута	Значення виміряного кута		
	°	'	"
2	65	53	45,2
5	55	12	15,1
8	103	13	43,4
Σ	**224**	**19**	**43,7**
ω			**-3,2**

$$v_2 + v_5 + v_8 - 3.2 = 0.$$

5. Складання умовного рівняння полюсу

Визначаємо вільний член та складаємо рівняння сторін (табл. 5.4).

Для визначення довжин сторін трикутників необхідні синуси кутів трикутника, оскільки можна скористатись теоремою синусів.

Оскільки сторона AO, як приклад, є початковою, а кінцевою стороною в даному прикладі є BO, умова полюсу може бути записана через наступні сторони трикутників:

$$\frac{AO}{\sin\angle 1}=\frac{DO}{\sin\angle 3}\Rightarrow AO=DO\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 3},\quad \frac{DO}{\sin\angle 4}=\frac{CO}{\sin\angle 6}\Rightarrow DO=CO\frac{\sin\angle 4}{\sin\angle 6}.$$

$$\frac{CO}{\sin\angle 7}=\frac{BO}{\sin\angle 9}\Rightarrow CO=BO\frac{\sin\angle 7}{\sin\angle 9}.$$

Тобто: $AO=BO\dfrac{\sin\angle 1\sin\angle 4\sin\angle 7}{\sin\angle 3\sin\angle 6\sin\angle 9}$, або $\dfrac{\sin\angle 1\sin\angle 4\sin\angle 7BO}{\sin\angle 3\sin\angle 6\sin\angle 9AO}=1$.

Дане рівняння необхідно привести до лінійного вигляду за допомогою логарифмування і наступного розкладу його в ряд Тейлора. В кінцевому випадку ми отримаємо:

$$\Delta_1 v_1+\Delta_4 v_4+\Delta_7 v_7-\Delta_3 v_3-\Delta_6 v_6-\Delta_9 v_9+\omega_5=0,$$

де Δ_i – зміна логарифма синуса i -того кута при його зміні на 1” (одну секунду), а $w_5=\dfrac{\sin\angle 1\sin\angle 4\sin\angle 7BO}{\sin\angle 3\sin\angle 6\sin\angle 9AO}$.

Розрахунок вільного члена (9.9) та коефіцієнтів умовного рівняння сторін подано в табл. 5.4.

Таблиця 5.4.

	виміряні кути			SIN	Lg	кут > 1"			SIN	Lg	Δ_i*10^6
7	33	44	19,4	0,555406560	-0,25538899	33	44	20,4	0,555410592	-0,25538584	3,15
4	55	19	45,2	0,822434280	-0,08489880	55	19	46,2	0,822437038	-0,08489734	1,46
1	64	36	00,9	0,903337164	-0,04415012	64	36	01,9	0,903339244	-0,04414912	1,00
OB	2135,504				3,32950039						
Сума1					2,94506248						
9	43	2	01,7	0,682429753	-0,16594205	43	2	02,7	0,682433297	-0,16593979	2,26
6	69	27	52,6	0,936455704	-0,02851276	69	27	53,6	0,936457405	-0,02851197	0,79
3	49	30	19,3	0,760466731	-0,11891978	49	30	20,3	0,760469879	-0,11891798	1,80
OA	1813,119				3,25842631						
Сума2					2,94505172						
Сума1-Сума2					0,00001076						10,76

$$1.00v_1-1.80v_3+1.46v_4-0.79v_6+3.15v_7-2.26v_9+10.76=0$$

6. Складаємо систему умовних рівнянь

Складаємо систему умовних рівнянь та нормальних рівнянь даної центральної системи. З таблиці 5.2 отримаємо три умовні рівняння фігур, та ще два з таблиць 5.3 і таблиці 5.4:

$$v_1 + v_2 + v_3 + 5.4 = 0$$

$$v_4 + v_5 + v_6 - 7.1 = 0$$

$$v_7 + v_8 + v_9 + 4.5 = 0$$

$$v_{23} + v_5 + v_8 - 3.2 = 0$$

$$1.00v_1 - 1.80v_3 + 1.46v_4 - 0.79v_6 + 3.15v_7 - 2.26v_9 + 10.76 = 0$$

Матриця умовних рівнянь A матиме вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1.00 & 0 & -1.80 & 1.46 & 0 & -0.79 & 3.15 & 0 & -2.26 \end{pmatrix}.$$

Вектор W матиме вигляд (у секундах):

$$W = \begin{pmatrix} 5.4 \\ -7.1 \\ 4.5 \\ -3.2 \\ 10.76 \end{pmatrix},$$

а вектор невідомих поправок до результатів вимірювань буде наступним:

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{pmatrix}.$$

7. Матричний розв’язок задачі врівноваження

Умовні рівняння поправок можна подати у матричній формі:

$$AV + W = 0$$

Розв'язок даного матричного рівняння будемо шукати, використавши умову

$$V^T V = \left[v^2\right] = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \to \min$$

Початкову задачу врівноваження зведено до визначення екстремуму функції. Наведену задачу на умовний екстремум функції можна розв'язати методом Лагранжа, тобто вона зводиться до задачі на абсолютний екстремум нової функції

$$\Phi = V^T V - 2K^T (AV + W) \to \min$$

де

$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_5 \end{pmatrix}$ – вектор корелат.

Необхідною умовою мінімуму функції від багатьох змінних є рівність нулеві її часткових похідних або рівність нулеві її повного диференціалу першого порядку, тобто $d\Phi = 0$.

Провівши нескладні математичні викладки отримаємо вектор поправок

$$V = A^T K.$$

Невідомий вектор корелат можна знайти розв'язавши наступне матричне нормальне рівняння корелат

$$AA^T K + W = 0.$$

Ввівши позначення $N = AA^T$ для матці нормальних рівнянь отримаємо наступне рівняння корелат

$$NK + W = 0.$$

Звідки вектор корелат отримується наступним чином:

$$K = -N^{-1} W.$$

8. Визначення матриці нормальних рівнянь

Матриця нормальних рівнянь матиме вигляд:

$$N = AA^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & -0.80 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0.67 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0.89 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ -0.80 & 0.67 & 0.89 & 0 & 22.026 \end{pmatrix}$$

9. Обчислення корелат.

Обчислення корелат проведемо за наступними формулами. Матимемо:

$$NK + W = 0,$$
$$N^{-1}NK + N^{-1}W = 0,$$
$$K + N^{-1}W = 0,$$
$$K = -N^{-1}W.$$

В нашому випадку

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0.391 & 0.053 & 0.052 & -0.165 & 0.011 \\ 0.053 & 0.392 & 0.060 & -0.168 & -0.012 \\ 0.052 & 0.060 & 0.394 & -0.169 & -0.016 \\ -0.165 & -0.168 & -0.169 & 0.501 & 0.006 \\ 0.011 & -0.012 & -0.016 & 0.006 & 0.047 \end{pmatrix},$$

а вектор корелат матиме вигляд:

$$K = -N^{-1}W =$$

$$= -\begin{pmatrix} 0.391 & 0.053 & 0.052 & -0.165 & 0.011 \\ 0.053 & 0.392 & 0.060 & -0.168 & -0.012 \\ 0.052 & 0.060 & 0.394 & -0.169 & -0.016 \\ -0.165 & -0.168 & -0.169 & 0.501 & 0.006 \\ 0.011 & -0.012 & -0.016 & 0.006 & 0.047 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5.4 \\ -7.1 \\ 4.5 \\ -3.2 \\ 10.76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.614 \\ 1.826 \\ -2.000 \\ 1.996 \\ -0.558 \end{pmatrix}$$

10. Обчислення поправок

Обчислення поправок проведемо із рівняння $V = A^T K$. Матимемо:

$$V = A^T K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1.00 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1.80 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.46 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.79 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3.15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2.26 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2.614 \\ 1.826 \\ -2.000 \\ 1.996 \\ -0.558 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.172 \\ -0.618 \\ -1.609 \\ 1.011 \\ 3.822 \\ 2.267 \\ -3.758 \\ -0.004 \\ -0.738 \end{pmatrix}$$

11. Обчислюємо довжини сторін трикутників

Таблиця 5.5.

Обчислення довжин сторін мережі тріангуляції

№ кута	Значення виміряного кута			Поправка, v_i	Значення вирівняного кута			Sin	d_i
	°	'	"		°	'	"		
1	64	36	00,9	-3,2	64	35	57,7	0,903330510	1813,119
2	65	53	45,2	-0,6	65	53	44,6	0,912803688	1832,133
3	49	30	19,3	-1,6	49	30	17,7	0,760461693	1526,360
Σ	**180**	**00**	**05,4**		**180**	**00**	**00,0**		
w			**+5,4**	**-5,4**					
4	55	19	45,2	1,0	55	19	46,2	0,822437038	1526,360
5	55	12	15,1	3,8	55	12	18,9	0,821201500	1524,067
6	69	27	52,6	2,3	69	27	54,9	0,936459616	1737,974
Σ	**179**	**59**	**52,9**		**179**	**59**	**00,0**		
w			**-7,1**	**7,1**					
7	33	44	19,4	-3,8	33	44	15,6	0,555391240	1737,974
8	103	13	43,4	0,0	103	13	43,4	0,973464309	3046,241
9	43	02	01,7	-0,7	43	02	01,0	0,682427273	2135,505
Σ	**180**	**00**	**4,5**		**180**	**00**	**00,0**		
w			**+4,5**	**-4,5**					

12. Складаємо відомість обчислення координат

Складаємо відомість обчислення координат пунктів мережі трикутників (табл. 4.6), користуючись формулами прямої геодезичної задачі:

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + 180° - \beta_{\text{праві}} \qquad \Delta x_i = d_i \cos\alpha_i \qquad x_i = x_{i-1} + \Delta x_i$$

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - \beta_{\text{ліві}} + 180° \qquad \Delta y_i = d_i \sin\alpha_i \qquad y_i = y_{i-1} + \Delta y_i$$

Отримаємо наступну відомість обчислення координат (див табл. 5.6)

Таблиця 5.6.

Обчислення координат точок мережі тріангуляції

кут	дирекційний			Виміряний			Довжина	Прирости		Координати		
	°	'	"	°	'	"		Δx	Δy	x	y	
OB	50	21	10,5				2135,504	1362,573	1644,315	1862,573	2144,315	B
				103	13	43,4						
OC	153	34	53,9				1737,974	-1556,48	773,2632	-1056,48	1273,263	C
				55	12	18,9						
OD	208	47	12,8				1526,360	-1337,73	-735,023	-837,728	-235,023	D
				65	53	44,6						
OA	274	40	57,4				1813,119	148,0158	-1807,07	648,0158	-1307,07	A

12. Оцінка точності

Оцінюють точність результатів вирівнювань за середньою квадратичною похибкою значення виміряного кута

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{r}} = \sqrt{\frac{48.5}{5}} = \sqrt{9.694} = \pm 3.113''.$$

Відповідь:

пункт	координати	
	x	y
B	1862,573	2144,315
D	-1056,48	1273,263
C	-837,728	-235,023
A	648,0158	-1307,07

Варіанти індивідуального завдання для лабораторної роботи № 4

Розв'язати задачу врівноваження мережі тріангуляції з твердим кутом корелатним методом, представлену на рис.5.2. Вихідні дані наведені в таблиці 5.7. Систему нормальних рівнянь отримати матричним способом. Оцінити точність результатів вимірів та провести обчислення координат всіх точок мережі тріангуляції. Дирекційні кути базових сторін дорівнюють

$$\alpha_{AB} = 270°00'00'' \quad \alpha_{AE} = 102°56'57.5''$$

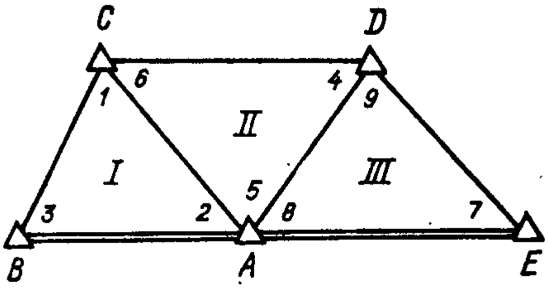


Рис. 5.2. Приклад мережі тріангуляції

Таблиця 5.7.

Вихідні дані для варіантів

№ трикутника	№ кута	Виміряне значення кута без секунд	№ трикутника	№ кута	Виміряне значення кута без секунд	№ трикутника	№ кута	Виміряне значення кута без секунд
I	1	69° 33'	II	4	66° 47'	III	7	46° 25'
	2	60° 35'		5	59° 10'		8	73° 11'
	3	49° 51'		6	54° 02'		9	60° 22'

Кути	Варианты											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	Секунди виміряних кутів											
1	31,5	30,2	28,5	32,0	29,4	27,3	32,1	25,6	26,7	30,2	28,1	31,2
2	12,6	10,5	9,3	10,1	8,5	10,2	12,2	15,3	17,8	18,4	16,4	19,3
3	20,1	18,3	17,1	22,4	17,4	16,5	22,4	15,3	18,8	19,3	18,6	18,2
4	36,5	38,2	34,9	33,2	35,2	34,3	30,1	32,8	34,3	31,2	30,1	28,6
5	19,8	18,6	20,1	17,5	18,9	19,5	17,8	16,5	19,2	17,5	15,2	16,5
6	7,9	9,3	8,2	5,5	10,3	11,8	9,0	14,3	15,1	8,1	7,3	6,2
7	53,8	52,5	51,7	50,9	42,5	45,2	47,3	46,2	46,8	43,4	45,6	44,8
8	22,5	24,1	23,0	24,1	26,6	21,4	21,3	20,5	25,3	29,2	22,3	24,5
9	41,3	40,3	42,2	38,5	43,2	42,6	44,2	45,1	43,2	42,3	44,9	46,1
X_A	15,875	343,684	179,292	231,956	628,754	625,605	933,784	642,642	734,552	117,478	867,153	572,445
Y_A	631,315	296,378	757,513	644,404	94,053	437,548	360,862	884,205	960,711	823,386	716,884	458,258
AB	611,683	359,448	802,818	212,655	694,185	186,693	399,350	1120,756	167,150	940,495	985,272	465,086
AE	527,258	309,837	692,012	183,304	598,373	160,925	344,231	966,068	144,080	810,687	849,284	400,894

Кути	Варианты											
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	Секунди виміряних кутів											
1	27,4	29,4	26,0	36,0	30,7	30,0	32,3	21,2	30,1	26,8	31,5	34,5
2	13,7	8,6	11,7	14,5	11,0	11,0	14,5	14,9	16,2	21,0	11,9	14,7
3	16,0	22,2	20,3	22,7	16,1	19,6	23,3	18,5	20,4	19,0	18,6	16,0
4	37,0	40,0	39,6	35,7	31,4	34,9	34,6	30,1	39,0	33,8	29,8	26,4
5	15,1	13,9	19,6	19,0	20,4	15,9	14,0	13,9	16,5	13,3	12,5	20,5
6	11,7	11,6	12,3	1,1	14,9	10,5	9,3	18,8	17,0	7,3	3,4	2,2
7	54,9	55,3	50,7	55,4	45,2	43,1	46,9	49,9	48,9	45,5	45,3	44,6
8	18,3	22,7	23,6	27,7	31,6	16,9	26,1	22,2	26,6	27,8	18,6	22,8
9	44,0	35,8	38,3	34,3	47,6	39,4	47,7	40,7	45,2	39,0	43,9	48,1
X_A	841,727	598,810	406,176	707,113	196,721	134,870	818,798	818,855	228,423	720,053	966,052	137,386
Y_A	144,973	54,885	134,089	754,978	642,746	854,622	123,454	747,602	173,281	293,482	396,684	570,533
AB	1141,602	470,398	1066,567	523,368	1123,168	464,581	1099,671	107,671	1152,482	752,075	817,413	32,705
AE	984,037	405,473	919,358	451,132	968,147	400,459	947,893	92,810	993,415	648,273	704,593	28,191

Лабораторна робота № 5

Врівноваження геодезичного чотирикутника

<u>Завдання.</u> Розв’язати задачу врівноваження геодезичного чотирикутника корелатним методом, представлену на рис.6.1. Вихідні дані наведені в таблиці 6.1. Систему нормальних рівнянь отримати матричним способом. Оцінити точність результатів вимірів та провести обчислення координат всіх точок мережі.

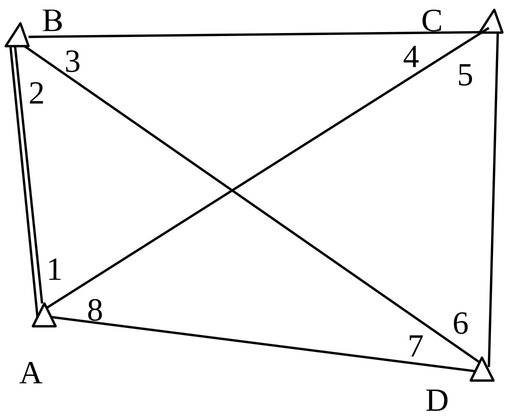


Рис. 6.1. Схема вимірів геодезичного чоирикутника.

Таблиця 6.1.

Вихідні дані

№ кута	Виміряне значення кута	№ кута	Виміряне значення кута
1	21° 05’ 24.3”	5	43° 38’ 47,8”
2	75° 52’ 18,4”	6	53° 18’ 57,2”
3	55° 50’ 55,4”	7	54° 49’ 25,8”
4	27° 11’ 20,3”	8	28° 12’ 51,4”
α_{AB}	45° 00’ 00,0”		
$x_A =$ 500,000	$y_A =$ 500,000		$AB =$ 1000.000

Розв’язання

Мережа тріангуляції містить 8 виміряних кутів $\beta_i \ (i = \overline{1..8})$, істинні значення яких є невідомими. Тому задача врівноваження зводиться до усунення нев'язок системі рівнянь (1.2), для чого потрібно знайти поправки $v_i \ (i = \overline{1..8})$ до результатів вимірювань $\beta_i \ (i = \overline{1..8})$. Розв’язання даної задачі розглянемо за допомогою кореатного методу врівноваження. Для цього виконаємо наступні кроки.

1. Визначення кількості умовних рівнянь.

Спочатку визначають кількість незалежних умовних рівнянь поправок r. Зробити це можна безпоседнім підрахунком надлишку виміряних величин, які створюють геометричні умови (умови фігур), що й визначають шукану кількість рівнянь. В нашому випадку маємо спричиненіі надлишковими вимірами геометричні умови: суми кутів плоского трикутника (умов фігур – 3), та умову замкненого ряду трикутників, що починаються та закінчуються однією і тією ж стороною (умова полюсу – 1).

2. Складання умовних рівняння фігур.

Обчислюємо вільні члени і складаємо умовні рівняння фігур (табл. 6.2).

Таблиця 6.2.

Складання умовних рівнянь фігур

№ трикутника	№ кута	Значення виміряного кута			Складене рівняння	Квадрат нев'язки трикутника
		°	'	"		
I	1	21	5	24,3	$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - 1.6 = 0$	
	2	75	52	18,4		
	3	55	50	55,4		
	4	27	11	20,3		
	Σ	**179**	**59**	**58,4**		
	w			**-1.6**		2,56
II	8	28	12	51,4	$v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + 2.2 = 0$	
	5	43	38	47,8		
	6	53	18	57,2		
	7	54	49	25,8		
	Σ	**180**	**0**	**2,2**		
	w			**2.2**		4,84
III	1	21	5	24,3	$v_1 + v_2 + v_7 + v_8 - 0.1 = 0$	
	8	28	12	51,4		
	2	75	52	18,4		
	7	54	49	25,8		
	Σ	**179**	**59**	**59,9**		
	w			**-0.1**		0,01

3. Оцінка точності вимірювань

Обчислюємо оцінку точності вимірювань за нев'язками в трикутниках:

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[\omega^2]}{3k}} = \sqrt{\frac{2.56 + 4.84 + 0.01}{3 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{7.41}{9}} = 0.907'',$$

де k - кількість трикутників в мережі.

Визначаємо допустиму нев'язку в кожному з трикутників мережі:

$$w_{\text{доп}} = 2.5\sqrt{3} \cdot m_\beta = 3.929''$$

4. Складання умовного рівняння полюсу

Визначаємо вільний член та складаємо полюсне рівняння (табл. 6.3). Для визначення довжин сторін трикутників необхідні синуси кутів трикутника, оскільки можна скористатись теоремою синусів.

Оскільки сторона AB, є відомою, то полюсну умову сторін візьмемо в точці B. Умова полюсу може бути записана через наступні сторони трикутників:

$$\frac{AB}{\sin\angle 7} = \frac{BD}{\sin(\angle 1 + \angle 8)} \Rightarrow AB = BD\frac{\sin\angle 7}{\sin(\angle 1 + \angle 8)}.$$

$$\frac{BD}{\sin(\angle 4 + \angle 5)} = \frac{BC}{\sin\angle 6} \Rightarrow BD = BC\frac{\sin(\angle 4 + \angle 5)}{\sin\angle 6}.$$

$$\frac{BC}{\sin\angle 1} = \frac{AB}{\sin\angle 4} \Rightarrow BC = AB\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 4}.$$

Тобто:

$$AB = AB\frac{\sin\angle 7\sin(\angle 4 + \angle 5)\sin\angle 1}{\sin(\angle 1 + \angle 8)\sin\angle 6\sin\angle 4}, \text{ або } \frac{\sin\angle 7\sin(\angle 4 + \angle 5)\sin\angle 1}{\sin(\angle 1 + \angle 8)\sin\angle 6\sin\angle 4} = 1$$

Дане рівняння необхідно привести до лінійного вигляду за допомогою логарифмування і наступного розкладу його в ряд Тейлора. В кінцевому випадку ми отримаємо:

$$\Delta_7 v_7 + \Delta_{4+5}(v_4 + v_5) + \Delta_1 v_1 - \Delta_{1+8}(v_1 + v_8) - \Delta_6 v_6 - \Delta_4 v_4 + w_4 = 0,$$

або

$$v_1(\Delta_1 - \Delta_{1+8}) + v_4(\Delta_{4+5} - \Delta_4) + v_5\Delta_{4+5} - v_6\Delta_6 + v_7\Delta_7 - v_8\Delta_{1+8} + w_4 = 0$$

де Δ_i – зміна логарифма синуса i -того кута при його зміні на 1” (одну секунду), а

$$\begin{aligned} w_4 &= \mathrm{Lg}(\sin\angle 7) + \mathrm{Lg}(\sin(\angle 4 + \angle 5)) + \mathrm{Lg}(\sin\angle 1) - \\ &- \mathrm{Lg}(\sin(\angle 1 + \angle 8)) - \mathrm{Lg}(\sin\angle 6) - \mathrm{Lg}(\sin\angle 4) \end{aligned}$$

Розрахунок вільного члена та коефіцієнтів умовного рівняння полюсу подано в табл. 6.3.

Таблиця 6.3.

Розрахункова таблиця для умовного рівняння полюсу

№ кута	кут			sin	Lg	кут+1"			sin1	Lg1	Lg1-Lg
7	54	49	25.8	0.81738461	-0.08757355	54	49	26.8	0.81738740	-0.08757206	14.84
4+5	70	49	68.1	0.94458043	-0.02476106	70	49	69.1	0.94458202	-0.02476032	7.32
1	21	5	24.3	0.35983533	-0.44389620	21	5	25.3	0.35983985	-0.44389074	54.59
Сума1					-0.55623080						
1+8	49	17	75.7	0.75818397	-0.12022540	49	17	76.7	0.75818713	-0.12022359	18.11
6	53	18	57.2	0.80194134	-0.09585740	53	18	58.2	0.80194424	-0.09585583	15.68
4	27	11	20.3	0.45692673	-0.34015343	27	11	21.3	0.45693104	-0.34014933	40.99
Сума2					-0.55623623						
Сума1-Сума2					0.00000543						
					54.30						

Коефіцієнти умовного рівняння полюсу обчислюємо за допомогою останнього стовпця таблиці 6.3. Матимемо

$$36.48v_1 - 33.67v_4 + 7.32v_5 - 15.68v_6 + 14.84v_7 - 18.11v_8 + 54.30 = 0$$

5. Складаємо систему умовних рівнянь

Складаємо систему умовних рівнянь даної центральної системи. З таблиці 6.2 отримаємо три умовні рівняння фігур, та ще одне з таблиці 6.3:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - 1.6 = 0$$

$$v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + 2.2 = 0$$

$$v_1 + v_2 + v_7 + v_8 - 0.1 = 0$$

$$36.48v_1 - 33.67v_4 + 7.32v_5 - 15.68v_6 + 14.84v_7 - 18.11v_8 + 54.30 = 0$$

Матриця умовних рівнянь A матиме вигляд:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 36.49 & 0 & 0 & -33.67 & 7.32 & -15.68 & 14.84 & -18.11 \end{pmatrix}$$

Вектор W матиме вигляд (у секундах):

$$W=\begin{pmatrix} -1.6 \\ 2.2 \\ -0.1 \\ 54.3 \end{pmatrix},$$

а вектор невідомих поправок до результатів вимірювань буде наступним:

$$V=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{pmatrix}.$$

6. Матричний розв'язок задачі врівноваження

Умовні рівняння поправок можна подати у матричній формі:

$$AV+W=0$$

Розв'язок даного матричного рівняння будемо шукати, використавши умову

$$V^TV=\left[v^2\right]=\sum_{i=1}^{n}v_i^2\rightarrow\min$$

Початкову задачу врівноваження зведено до визначення екстремуму функції. Наведену задачу на умовний екстремум функції можна розв'язати методом Лагранжа, тобто вона зводиться до задачі на абсолютний екстремум нової функції

$$\Phi=V^TV-2K^T(AV+W)\rightarrow\min$$

де

$$K=\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_5 \end{pmatrix}$$ – вектор корелат.

Необхідною умовою мінімуму функції від багатьох змінних є рівність нулеві її часткових похідних або рівність нулеві її повного диференціалу першого порядку, тобто $d\Phi = 0$.

Провівши нескладні математичні викладки отримаємо вектор поправок

$$V = A^T K .$$

Невідомий вектор корелат можна знайти розв'язавши наступне матричне нормальне рівняння корелат

$$AA^T K + W = 0 .$$

Ввівши позначення $N = AA^T$ для матці нормальних рівнянь отримаємо наступне рівняння корелат

$$NK + W = 0 .$$

Звідки вектор корелат отримується наступним чином:

$$K = -N^{-1}W .$$

78. Визначення матриці нормальних рівнянь

Матриця нормальних рівнянь матиме вигляд:

$$N = AA^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 2.82 \\ 0 & 4 & 2 & -11.63 \\ 2 & 2 & 4 & 33.22 \\ 2.82 & -11.63 & 33.22 & 3312.83 \end{pmatrix}$$

8. Обчислення корелат.

Обчислення корелат проведемо за наступними формулами. Матимемо:

$$NK + W = 0,$$
$$N^{-1}NK + N^{-1}W = 0,$$
$$K + N^{-1}W = 0,$$
$$K = -N^{-1}W .$$

В нашому випадку

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0.404 & 0.167 & -0,314 & 0.003 \\ 0.167 & 0.434 & -0.340 & 0.005 \\ -0.314 & -0.340 & 0.638 & -0.007 \\ 0.003 & 0.005 & -0.007 & 0 \end{pmatrix}$$

а вектор корелат матиме вигляд: $K = -N^{-1}W = \begin{pmatrix} 0.065 \\ -0.985 \\ 0.708 \\ -0.027 \end{pmatrix}$

9. Обчислення поправок

Обчислення поправок проведемо із рівняння $V = A^T K$. Матимемо:

$$V = \begin{pmatrix} -0.21 \\ 0.77 \\ 0.07 \\ 0.97 \\ -1.18 \\ -0.56 \\ -0.68 \\ 0.21 \end{pmatrix}$$

10. Обчислюємо довжини сторін трикутників

Таблиця 6.4.

Обчислення довжин сторін

№ трикутника	№ кута	Виміряна величина			Поправ-ка, v_i	Виправлений кут			SIN	Довжина
		°	‘	“		°	‘	“		
I	1	21	5	24.3	-0.21	21	5	24.09	0.35983438	787.50
	2	75	52	18.4	0.77	75	52	19.17	0.74639741	1633.50
	3	55	50	55.4	0.07	55	50	55.47		
	4	27	11	20.3	0.97	27	11	21.27	0.45693091	1000.00
		178	118	118.4		178	118	120.00		
II	8	28	12	51.4	0.21	28	12	51.61	0.47277126	812.66
	5	43	38	47.8	-1.18	43	38	46.62	0.69020430	1186.41
	6	53	18	57.2	-0.56	53	18	56.64	0.95030199	1633.50
	7	54	49	25.8	-0.68	54	49	25.12		
		178	117	182.2		178	117	179.99		
III	1	21	5	24.3	-0.21	21	5	24.09	0.75818397	927.58
	8	28	12	51.4	0.21	28	12	51.61		
	2	75	52	18.4	0.77	75	52	19.17	0.96975281	1186.41
	7	54	49	25.8	-0.68	54	49	25.12	0.81738271	1000.00
		178	118	119.9		178	118	119.99		

11. Складаємо відомість обчислення дирекційних кутів

Складаємо відомість обчислення дирекційних кутів, користуючись формулами: $\alpha_{i+1} = \alpha_i + 180° - \beta_{\text{праві}}$ $\alpha_{i+1} = \alpha_i - \beta_{\text{ліві}} + 180°$

Отримаємо наступну відомість обчислення дирекцій них кутів (див табл. 6.5)

Таблиця 6.5.

Обчислення дирекцій них кутів мережі

Кут	Дирекційний			Виміряний		
	°	‘	“	°	‘	“
AB	45	0	0.00			
2+3				130	102	74.64
BC	93	16	45.36			
4+5				70	49	67.89
CD	202	26	37.47			
6+7				107	67	81.8
DA	274	18	15.71			
8+1				49	17	75.7
AB	44	60	0.01			

12. Складаємо відомість обчислення координат

Таблиця 6.6.

Обчислення координат пунктів мережі

Кут, α	дирекційний			Довжина	Прирости		Координати		Верши-на
	°	'	"		Δx	Δy	x	y	
AB	45	0	0	1000.00	707.11	707.11	1207.11	1207.11	B
BC	93	16	45.36	787.50	-45.05	786.21	1162.06	1993.32	C
AD	94	18	15.71	1186.41	-89.05	1183.1	410.95	1683.07	D

13. Оцінка точності

Оцінюють точність результатів вирівнювань за середньою квадратичною похибкою значення виміряного кута

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{r}} = \sqrt{\frac{3.802}{4}} = \sqrt{0.950} = \pm 0.975''.$$

Відповідь:

пункт	координати	
	x	y
B	1207.11	1207.11
D	1162.06	1993.32
C	410.95	1683.07

Варіанти індивідуального завдання
для лабораторної роботи № 5

Розв'язати задачу врівноваження геодезичного чотирикутника корелатним методом, представлену на рис.6.1. Вихідні дані наведені в таблиці 6.7. Систему нормальних рівнянь отримати матричним способом. Оцінити точність результатів вимірів та провести обчислення координат всіх точок мережі.

Таблиця 6.7.

Вихідні дані для варіантів

Варіант №			1
Кути	°	'	"
1	50	55	37
2	78	1	2.4
3	21	16	5.1
4	29	47	5.3
5	54	9	56
6	74	46	39
7	34	53	4.7
8	16	10	17
AB	9	43	25
Xa	2858.28		
Ya	110.84		
Dab	4702.20		

Варіант №			2
Кути	°	'	"
1	30	15	49.3
2	64	19	55.7
3	53	5	45.8
4	32	18	30.9
5	28	25	48.8
6	66	9	58.1
7	62	39	18.6
8	22	45	0.0
AB	33	59	4.6
Xa	2876.25		
Ya	1586.77		
Dab	5424.81		

Варіант №			3
Кути	°	'	"
1	44	4	19.7
2	31	19	35.3
3	41	2	15.0
4	63	33	55.0
5	9	0	8.4
6	66	23	35.0
7	94	59	42.6
8	9	36	21.3
AB	5	38	48.5
Xa	977.33		
Ya	2271.85		
Dab	8281.97		

Варіант №			4
Кути	°	'	"
1	28	11	57.1
2	40	13	60.0
3	51	52	24.4
4	59	41	37.0
5	46	49	33.5
6	21	36	13.2
7	44	18	27.7
8	67	15	41.3
AB	19	29	36.3
Xa	3552.37		
Ya	1744.35		
Dab	6632.84		

Варіант №			5
Кути	°	'	"
1	31	35	20.3
2	27	32	6.3
3	63	49	24.4
4	57	3	17.0
5	32	19	46.3
6	26	47	29.0
7	42	52	25.1
8	78	0	16.0
AB	5	32	30.0
Xa	3485.21		
Ya	2206.16		
Dab	5903.05		

Варіант №			6
Кути	°	'	"
1	43	33	17.8
2	28	44	57.0
3	64	54	33.3
4	42	47	11.0
5	20	3	59.2
6	52	14	23.5
7	61	8	39.9
8	46	33	6.8
AB	11	19	9.2
Xa	4919.47		
Ya	3085.97		
Dab	3936.77		

Варіант №			7
Кути	°	'	"
1	29	31	7.3
2	20	54	24.6
3	68	12	5.8
4	61	22	26.3
5	10	6	51.5
6	40	18	38.2
7	107	19	53.4
8	22	14	35.4
AB	18	10	11.5
Xa	1710.97		
Ya	2405.78		
Dab	7545.66		

Варіант №			8
Кути	°	'	"
1	37	34	36.8
2	42	58	41.4
3	47	1	11.8
4	52	25	20.4
5	41	26	48.7
6	39	6	36.4
7	54	32	48.6
8	44	53	38.3
AB	15	30	23.0
Xa	948.79		
Ya	2033.69		
Dab	7501.10		

Варіант №			9
Кути	°	'	"
1	58	59	5.9
2	64	50	7.2
3	51	25	37.4
4	4	45	11.7
5	62	30	14.2
6	61	19	2.3
7	4	57	4.9
8	51	13	41.0
AB	10	1	20.2
Xa	4657.63		
Ya	1549.30		
Dab	773.40		

Варіант №			10
Кути	°	'	"
1	47	21	39.7
2	31	3	41.7
3	64	43	57.7
4	36	50	34.4
5	9	28	40.8
6	68	56	42.5
7	79	39	24.0
8	21	55	1.9
AB	5	37	37.5
Xa	1446.29		
Ya	2918.70		
Dab	5249.15		

Варіант №			11
Кути	°	'	"
1	32	2	35.5
2	52	18	13.7
3	48	1	10.4
4	47	38	2.1
5	46	15	29.3
6	38	5	20.4
7	55	12	12.3
8	40	27	5.3
AB	7	20	4.6
Xa	1841.30		
Ya	2336.12		
Dab	5244.90		

Варіант №			12
Кути	°	'	"
1	13	41	35.2
2	44	21	50.5
3	67	57	25.2
4	53	59	9.1
5	45	1	12.9
6	13	2	11.3
7	50	58	54.6
8	70	57	36.0
AB	5	14	20.5
Xa	208.70		
Ya	3558.59		
Dab	5838.88		

Варіант №			13
Кути	°	'	"
1	32	50	41.0
2	9	44	44.8
3	13	46	58.2
4	123	37	41.0
5	27	21	14.8
6	15	14	6.9
7	37	59	39.0
8	99	24	61.1
AB	0	39	39.7
Xa	3200.89		
Ya	4895.47		
Dab	6687.62		

Варіант №			14
Кути	°	'	"
1	21	21	20.1
2	76	49	18.3
3	64	22	54.3
4	17	26	36.8
5	55	23	1.0
6	42	47	29.7
7	33	19	55.0
8	48	29	34.5
AB	56	16	11.4
Xa	4477.32		
Ya	662.15		
Dab	4057.59		

Варіант №			15
Кути	°	'	"
1	25	12	16.5
2	72	7	3.9
3	60	18	41.2
4	22	21	47.3
5	16	40	38.3
6	80	38	38.6
7	66	49	18.8
8	15	51	17.9
AB	13	26	38.6
Xa	1364.81		
Ya	2763.76		
Dab	4923.51		

Варіант №			16
Кути	°	'	"
1	26	44	61.0
2	74	22	57.3
3	54	42	48.1
4	24	9	15.4
5	50	36	60.8
6	50	30	53.9
7	41	3	-3.6
8	37	49	0.8
AB	26	14	35.9
Xa	1652.75		
Ya	566.10		
Dab	5975.42		

Варіант №			17
Кути	°	'	"
1	29	43	56.3
2	59	50	37.6
3	77	56	59.9
4	12	28	26.6
5	47	24	32.2
6	42	9	63.7
7	19	23	43.4
8	71	1	46.1
AB	5	10	15.2
Xa	3011.73		
Ya	2143.99		
Dab	2721.87		

Варіант №			18
Кути	°	'	"
1	59	55	23.3
2	17	29	40.7
3	50	23	6.9
4	52	11	37.2
5	20	24	15.8
6	57	0	60.2
7	45	48	45.6
8	56	46	9.7
AB	8	15	29.9
Xa	4245.93		
Ya	3235.15		
Dab	5209.85		

Варіант №			19
Кути	°	'	"
1	28	55	39.1
2	41	14	-0.9
3	12	13	10.3
4	97	37	4.7
5	56	29	56.7
6	13	39	45.0
7	77	11	16.1
8	32	39	1.3
AB	21	21	25.7
Xa	1109.48		
Ya	149.26		
Dab	8590.82		

Варіант №			20
Кути	°	'	"
1	21	27	1.2
2	73	51	43.0
3	70	37	36.5
4	14	3	48.3
5	50	36	24.3
6	44	42	22.8
7	30	7	11.8
8	54	34	6.7
AB	30	51	57.7
Xa	3473.54		
Ya	2607.00		
Dab	3525.11		

Література

1. Барковський В. В. Барковська О. К., Лопатін Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. К. : ЦУЛ, 2002. 448 с.
2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей и математическая статистика М. : Высш. шк., 1999. – 576 с.
3. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів: Навчальний посібник. К.: КНУБА, 2005. 236 с.
4. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів: Навчальний посібник. К.: КНУБА, 2003. 216 с.
5. Волошин В.У. Вирівнювання геодезичних мереж параметричним методом : Методичні матеріали. Луцьк: РВВ "Вежа" Волин. нац. ун-ту. ім. Лесі Українки, 2008. 32 с.
6. Волошин В.У. Врівноваження геодезичних мереж корелатним методом: Метод. вказівки. Луцьк. 2022. – 80 с.
7. Евсеева Е.М. Текст лекцій з теорії помилок вимірів. –Львів. –1996. –124 с.
8. Зазуляк П.М., Гавриш В.І., Євсєєва Е.М., Йосипчук М.Д. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань: Навчальний посібник. Львів: Видавництво „Растр-7", 2007. 408 с.
9. Рябчій В.А, Рябчій В.В. Застосування теорії корелатного способу до вирівнювання геодезичних мереж : Навч. посібник. Д. : Національний гірничий університет, 2009. – 218 с.
10. Рябчій В.А., Рябчій В.В. Теорія похибок вимірювань : Навч. посібник Д. : Національний гірничий університет, 2006. – 166 с.

Зміст

Навчально-методичне видання

Волошин Володимир Ульянович

Врівноваження геодезичних мереж корелатним методом

методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт

Видання друкується в авторській редакції
Верстка В. У. Волошина

Підписано до друку _______. Формат 60x84/16.
Папір офс. Гарн. Times. Друк цифровий.
Обсяг 1,86 ум. друк. арк., 0,60 обл.-вид. арк. Зам. ____. Тираж __.